

Probabilità

Ω e' l'universo, insieme di tutti gli eventi.

$A \subseteq \Omega$ e' un insieme di eventi. Se $A \neq \emptyset$, diremo che A e' possibile.

Abbiamo un evento $x \in \Omega$ e ci chiediamo dove sta. Se $x \in A$, allora diremo che A e' vera.

Se $A \subseteq \Omega$ $|A| = \begin{cases} 1 & A \text{ vera} \\ 0 & A \text{ falsa} \end{cases}$

Prop

- $||A^c|| = 1 - ||A||$
- $A \subseteq B \Rightarrow ||A|| \leq ||B||$
- $||A \cup B|| = ||A|| + ||B|| - ||A \cap B||$
- $||A \cap B|| = ||A|| ||B||$

Prop

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

Def Consideriamo $A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$, l'insieme

$$\mathcal{C} = \{C \mid C = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n, E_i \subseteq A_i \vee E_i = A_i^c, C \neq \emptyset\}$$

costituenti di $A_1, \dots, A_n$.

Prop

$$|\mathcal{C}| \leq 2^n, \quad \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = \Omega$$

Def

Tutti i possibili $E_1 \cap \dots \cap E_n$ sono tanto quanto tutti i possibili numeri binari con n cifre, cioè 2^n .
Poichè però da $\mathcal{C}$ escludiamo i casi nulli, possiamo solo dire che $|\mathcal{C}| \leq 2^n$.

$$(A_1 \cup A_1^c) \cap (A_2 \cup A_2^c) \cap \dots \cap (A_n \cup A_n^c) = \Omega \cap \Omega \cap \dots \cap \Omega = \Omega$$

(1)

$$\text{Esponendo il I° membro si ha: } (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \cup \dots = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$$

Notazione $A \cap B \equiv AB$

Def $A_1, \dots, A_n$ sono logicamente indipendenti $\Leftrightarrow |C| = n$

Def Una probabilità P è una funzione $P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ tale che
 $\uparrow$
insieme delle parti.

Supponiamo per il momento che $|\Omega| \in \mathbb{N}$

Ax1. $P(\Omega) = 1$

Ax2. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Ax2.1 $\{A_i\}_{i \in I}, I \subseteq \mathbb{N}, A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j \Rightarrow P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$ [nel caso di famiglie numerabili]

Prop 1 1. $P(A^c) = 1 - P(A)$ [6. $P(\{a\}) = \frac{1}{|\Omega|}$ 7. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ $\Leftrightarrow P(\{a\}) = P(\{b\}) \forall a, b \in \Omega$
eventi equiprobabili.]

2. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

3. $P(\emptyset) = 0$

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

Pr

• $P(A^c) + P(A) = P(A^c \cup A) = P(\Omega) = 1$
 $\uparrow$
Ax2

$\Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$

• $P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

• $P(\Omega) = P(\bigcup_{a \in \Omega} \{a\}) \stackrel{Ax2.1}{=} \sum_{a \in \Omega} P(\{a\})$

$P(\{a\}) = \frac{1}{|\Omega|}$

$P(a) = P(b) \forall a, b \in \Omega$

$\sum_{b \in \Omega} P(a) = |\Omega| P(a)$

• $P(A) = P(\bigcup_{a \in A} \{a\}) \stackrel{(1)}{=} \sum_{a \in A} \frac{1}{|\Omega|} = |A| \cdot \frac{1}{|\Omega|}$

$\rightarrow P(B) \geq P(A)$

• $A \subseteq B \Rightarrow C = B \setminus A, A \cup C = B \Rightarrow P(B) = P(A \cup C) = P(A) + P(C) \Rightarrow P(C) = P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

Def $P(A|B) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, con $P(B) > 0$

Probabilità condizionata

$\frac{1 \text{ ANB}}{1 \text{ B}} = \frac{1 \text{ ANB}}{1 \text{ B}}$, in pratica stiamo restringendo su A B

~~La probabilità di A, espressa quando~~

"dipende, si che dipende, la la la ... si che dipende"

Prop 1 Regola di Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}, \text{ con } P(A), P(B) > 0$$

Prop 1.1 $P(A \cap B) \stackrel{\text{def}}{=} P(A|B)P(B)$

$\parallel \leftarrow P(A|B) \quad (1)$

Def Dalla (1), sostituendo nella def. di $P(A \cap B)$, si ha la formula:

~~$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$~~ $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$

$P(B|A)P(A)$

Prop 2 La funzione $P(\cdot|B)$ è una probabilità: $P(\cdot|B): \mathcal{P}(B) \rightarrow [0, 1]$

Def

1. $C \subseteq B \quad P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{P(C)}{P(B)} \leq 1$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $C \subseteq B \quad (C \subseteq B \Rightarrow P(C) \leq P(B))$

2. $P(B|B) = 1$

3. $P(A \cup C|B) = \frac{P((A \cup C) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A|B) + P(C|B)}{P(B)}$
 $A \cap C = \emptyset$
 $A, C \subseteq B$

Prop $P(A_1 \cap \dots \cap A_m) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_m|A_1 \cap \dots \cap A_{m-1})$

Def

$P(A_1 \cap \dots \cap A_m) \stackrel{\text{prop 1.1}}{=} P(A_1|A_2 \cap \dots \cap A_m)P(A_2 \cap \dots \cap A_m) \stackrel{\text{indip.}}{=} \dots$

"dipende da cosa leggi, o da cosa o similia"

Def 1 Total probability. Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una partizione di Ω
 ~~$P(B) =$~~

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B|A_i) P(A_i)$$

pf

$$P(B) = P(B \cap \Omega) = P\left(B \cap \bigcup_{i \in I} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)\right) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i \cap B) = \sum_{i \in I} P(A_i) P(B|A_i)$$

Thm di Bayes

$\{A_i\}_{i \in I}$ partizione di Ω

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) P(A_i)}{\sum_{i \in I} P(B|A_i) P(A_i)}$$

pf Basta sostituire $P(B)$ nella [1, pg. 43] con il secondo membro di [2, pg. 43]

Def/Prop A, B sono indipendenti $\Leftrightarrow$

$$P(A \cap B) = P(A) P(B) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$$

pf

$$P(A|B) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) P(B)}{P(B)} = P(A)$$

(vedi anche Chap pg. 22)

Prop 2 A, B indipendenti $\Rightarrow (A, B^c), (A^c, B), (A^c, B^c)$ sono indipendenti

pf

$$P(A \cap B^c) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap (A \cup B)^c) = P(A \cap B^c)$$

Quindi A, B^c indep.

② A, B ind $\Leftrightarrow B, A^c$ ind $\Rightarrow B, A^c$ indep. ; $P(A^c \cap B^c) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = 1 - (P(A) + P(B)) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = P(A^c \cap B^c)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow &= P(A_1) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_i \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_i})}_{\parallel} - \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_j \leq n} P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_j})}_{\parallel} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_i \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_i}) \\ &\quad \text{nota: per } i=1 \text{ l'insieme } \{1 \leq i_1 < \dots < i_i \leq n\} \\ &\quad \text{coincide con } \{1 \leq i_1 \leq n\} \end{aligned}$$

$\mathbb{Z} = 1$
 nota: possiamo estendere la
 omomorfia ad $\mathbb{Z} = n$
 per ogni i l'insieme $\{2 \leq i, \dots, i \leq n\}$
 è vuoto per $n=2$

Prop. 2

Distributions

Sia $\{i \in I\}$ una ~~sequenza~~ in $\mathcal{D}$ con $\mathcal{D} = \{w_i\}_{i \in I}$ con $|I| \leq |M|$, allora

(1)
$$\left. \begin{aligned} p_i &\geq 0 \quad \forall i \\ \sum_{i \in I} p_i &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$P(\omega_i) = p_i \quad \forall i \in I$$

è una probabilità!

$\sum_{i \in I} p_i = 1$

In particolare, abbiamo una biettione tra le sequenze di tipo (1) e le probabilità:

Tali sequenze si chiamano distribuzioni.

Prop 2

Indipendenza di $A_1, A_2, \dots, A_n \Rightarrow$ Indipendenza $A_i, A_j \quad \forall i, j$
 in ogni coppia $n=2$ $\nRightarrow$

Lead [pg 20 Chap]

Prop³ $A_1, A_2, \dots$ indep $\Rightarrow A_1^{i_1}, A_2^{i_2}, \dots, A_n^{i_n}$ indep $\forall (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \{0, 1\}^n$
 does not work for intersections A_1, A_2 intersections A_1^c

Reg. Principio di inclusione/esclusione

$$P(\bigcup_{i=1}^m A_i) = P(\{A_i\}_{i=1}^m) = \sum_{r=1}^m (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r})$$

~~ANALISI~~

alternativa

Proof Per indur su m ,
con $I = \{i_1, \dots, i_m\}$

$m=1$ OK;

Importazione frequentista

$$P(E) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{r_E}{N}$$

< Algebra

che $E \subseteq \mathcal{P}(E)$ o' una algebra del $\emptyset$

Ques

$$\cdot \Omega \in \mathcal{E} \quad (A \cup A^c \in \mathcal{E})$$

$$\cdot A \cap B \in \mathcal{E}$$

Def Sia $\mathcal{E}$ una (σ) -algebra,

$$P: \mathcal{E} \rightarrow [0,1]$$

è una probabilità $\Leftrightarrow P$ soddisfa $A_{x1}, A_{x2}, \dots, A_{x,1}$ di $\mathcal{P} \mathcal{P} 2$.

$$(-1)^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) = \sum_{r=1}^m (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r})$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) &= P(A_1) + P(A_2 \cup \dots \cup A_m) - P(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup \dots \cup (A_1 \cap A_m) \\ &= \sum_{r=1}^m (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) + \sum_{r=2}^m (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) = \end{aligned}$$

Ha indubbi applicato alla regola

DE numero di successi su N casi

Limit fault: si richiede che ogni esperimento abbia la stessa prob. (definita)
non pratica: N deve essere molto grande
non ben definito: il limite potrebbe non esistere

- 1.) $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{E}$
- 2.) $A \in \mathcal{E} \Rightarrow A^c \in \mathcal{E}$

$$\text{oppure 1.1) } \{A_i\}_{i \in I} \quad \emptyset \subseteq \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{E}$$

]

Nel caso $|I| < \infty$ si parla di algebra e si usa la 1.1)

alternativi: " di σ -algebra e si usa la 1.1)

Combinazioni = $\frac{n!}{k!}$
 disj = $\frac{n!}{k!}$

• $D_{m,2}$ = disj con ripetizioni = n^2

• $D_{m,2}$ = disj semp = $\binom{n}{2} 2! = n(n-1) \dots (n-2+1)$

Combinazioni con ripetizioni

• $C_{m,2} = \binom{n+2-1}{2}$

$$|P(S)| = \sum_{z=0}^{151} |P_2(S)| = \sum_{z=0}^{151} \binom{n}{2} = (1+1)^n$$

Poline colore: coeff multinomiali

• a_i = numero di palline di colore i

n = # palline
 z = # colori

• Combinazioni = $\binom{n}{m_1, \dots, m_z} = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_z!}$

$\equiv \binom{n}{m_1} \binom{n-m_1}{m_2} \dots \binom{n-m_1-\dots-m_{z-1}}{m_z}$

che ogni volta che un colore in meno da scegliere

• $(a_1 + \dots + a_m)^n = \sum_{m_1+m_2+\dots+m_m=n} \binom{n}{m_1, m_2, \dots, m_m} a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_m^{m_m}$

• $\binom{n}{z} = \binom{n}{n-z}$; $\binom{n-1}{z} + \binom{n-1}{z-1} = \binom{n}{z}$ (basta esprimere)

$P(A_1) + \sum_{z=2}^{n-1} (-1)^{z+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_z \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_z}) + \sum_{z=n}^n (-1)^{z+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$

$\Rightarrow = P(A_1) + \sum_{z=2}^{n-1} (-1)^{z+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_z \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_z}) + \sum_{z=n}^n (-1)^{z+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$

Paradosso di De Mere

A = "in 4 lanci di un dado, la faccia 6 esce almeno una volta"

B = "in 24 lanci di ^{due} dadi, (6,6) esce almeno una volta"

$$P(A) = P(\text{esce una volta}) + P(\text{esce due volte}) + \dots + P(\text{esce 4 volte}) =$$

A_i = "in 4 lanci al 6 esce i volte"

$$A_1 \cap A_5 = \emptyset$$

$$\Omega = 6 \times 6 \times 6 \times 6$$

$$|\Omega| = 6^4$$

$$A = \bigcup_{i=1}^4 A_i \quad P(A) = \sum_{i=1}^4 P(A_i) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \binom{4}{i} 5^{4-i} \cdot 1 = \boxed{7}$$

$$P(A_1) = \frac{4 \cdot 5^3}{6^4} \quad P(A_2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot 5^2}{6^4} \quad P(A_i) = \frac{\binom{4}{i} 5^{4-i}}{6^4}$$

$(6, *, *, *)$
 $(*, 6, *, *)$

con $*$ $\neq 6$ perché $\text{dovremmo uscire 1 solo 6}$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

$$|\Omega| = \frac{1}{6^4} \left(\sum_{i=0}^4 \binom{4}{i} 5^{4-i} - \binom{4}{0} 5^4 \right) =$$

$$= \frac{1}{6^4} (5^4 - 5^4) = \frac{6^4 - 5^4}{6^4} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$= 1 - P(A^c)$$

o meglio procedere direttamente così

$$|\Omega| = 36^{24}$$

$$(d_1, d_2) \times (d_1, d_2) \times \dots \times (d_1, d_2)$$

24

$$P(B_2) = \frac{\binom{24}{2} 35^{24-2}}{36^{24}} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

Come prima

Probabilità soggettiva

$$G(E) = \frac{1}{2}(\|E\| - P_E) \quad \text{qualunque } P_E = P(E) \text{ probabilità}$$

Prop

$$\forall E \in \mathcal{E} \quad \min_{v \in \{0,1\}} G_{S,v}(E) \leq 0 \leq \max_{v \in \{0,1\}} G_{S,v}(E)$$

Proof $P(E) \in [0,1] \forall E$

$$S_{\alpha} \quad g_1 = G_{S,0}(E) = -S \cdot P_E \quad g_2 = G_{S,1}(E) = S(1 - P_E)$$

$$S > 0 \Rightarrow g_1 < g_2$$

$$S < 0 \Rightarrow g_2 < g_1$$

$$S = 0 \Rightarrow g_1 = g_2$$

In ogni caso, uno dei due è il min, l'altro il max, quindi.

$$\min_v G_{S,v}(E) \cdot \max_v G_{S,v}(E) = -P_E \cdot S^2(1 - P_E) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq P_E \leq 1$$

$\Rightarrow S=0$

$$P(\Omega) = 1$$

$$\text{Per la (1), } g_1 = g_2 = S(1 - P_E) \Rightarrow \min \cdot \max \leq 0 \Leftrightarrow S^2(1 - P_E)^2 \leq 0 \Leftrightarrow P_E \geq 1$$

$$P_E \geq 1 \Leftrightarrow P_E = 1$$

$$P(A \cap B = \emptyset) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Attenzione Vedi [prop 1 pg 8 G.]

$$G_{S,0}(E) = S \cdot (v - P_E) \quad v \in \{0,1\} \quad \forall E \neq \emptyset \quad (\text{Nota 1})$$

$$G_{S,v}(E) = G_{S,0} \quad \forall v \in \{0,1\}$$

condition di coerenza

$$\forall E \in \mathcal{E} \quad P(E) = P_E \text{ è una probabilità su } \mathcal{E}$$

Nota: $G_{S,v}(E)$ serve per calcolare tutti i possibili guadagni, ovvero $G(E)$ al variare del tuo indicatore

IF>

Siano dati $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathbb{R}^n$

e siano assegnati a ciascuna $p_i = P(A_i)$

(dove p_i è ripete le condizioni precedenti $\forall i$ e la condizione di coerenza)

Sia $G_{\vec{s}, \vec{v}}(A) = \sum_{i=1}^m G_{\vec{s}, \vec{v}}(A_i)$

con $\vec{A} = (A_1, \dots, A_m)$

or $\vec{A} = m, \vec{s} \in \mathbb{R}^m, \vec{v} \in \{0,1\}^m$

$G_P(\vec{A}) = \left\{ \begin{matrix} G_{\vec{s}, \vec{v}}(A) \\ G_{\vec{s}, \vec{v}}(A_i) \end{matrix} \right\}$

$\forall \vec{s} \in \mathbb{R}^m, \vec{v} \in \{0,1\}^m$

$\vec{v}_i = 0$
 $\vec{v}_i = 1$

$G_P(\vec{A}) = \left\{ G_{\vec{s}, \vec{v}}(A) \mid \vec{v} \in \{0,1\}^m, \forall i \neq j, \vec{v}_i \wedge \vec{v}_j \neq \emptyset \right\}$

e l'insieme di tutti i guadagni possibili. Nota: $\{ \vec{v}_i \neq \emptyset \mid \vec{v} \in \{0,1\}^m \}$ e l'insieme dei costituenti di $A_1, \dots, A_m(\vec{x})$

Estendiamo la condizione di coerenza richiedendo che

$\min G_P(\vec{A}) \cdot \max G_P(\vec{A}) \leq 0 \quad \forall \vec{s} \in \mathbb{R}^{2m}(\vec{A})$

Lemma 1

Def La somma

Si ha

$\sum_{i=1}^m a_i m_i = s$ e una combinazione lineare connessa $\Leftrightarrow a_i \geq 0 \quad \forall i, \sum_{i=1}^m a_i = 1, m_i \in \mathbb{R}$

$m = \min \{ m_i \} \leq s \leq \max \{ m_i \} = M$

Pr

Sia $s: m = m_s \Rightarrow m_s \leq m_i \quad \forall i$ (1)

CASO: $m = 0 \Rightarrow m_i \geq 0 \quad \forall i \Rightarrow a_i m_i \geq 0 \quad \forall i \Rightarrow s \geq 0 = m$

CASO: $m \neq 0$

$m \leq \sum_{i=1}^m a_i m_i \Leftrightarrow 1 \leq s \leq \sum_{i=1}^m a_i m_i$ (2)

$(1) \Rightarrow \frac{m_i}{m_s} \geq 1 \Rightarrow a_i \frac{m_i}{m_s} \geq a_i \Rightarrow \sum_{i=1}^m a_i \frac{m_i}{m_s} \geq \sum_{i=1}^m a_i = 1$

Quindi la (2) è vera

Thm di De Finetti

Dati gli insiemi $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots$ e

$\exists p, p'' : \forall p_{n+1} \in [p, p''] \{p_1, \dots, p_n\}$ e $\{p_1, \dots, p_n\}$ ~~probabilità~~ probabilità coerente per $\{A_1, \dots, A_n\}$ e' una probabilità coerente per $\{A_1, \dots, A_{n+1}\}$

=

Exp Distribuzione binomiale

$$\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$$

$$P_K = P(X) = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K} \quad \forall K \in \Omega$$

probabilità di ottenere K teste in

n lanci

$p =$ probabilità di ottenere Testa
 $1-p =$ " " " " Croce

$$0 \leq p \leq 1$$

Proof

$\{P_K\}$ e' una distribuzione: $\sum P_K = (p + 1-p)^n = 1$ / $P_K \geq 0$

$A_i =$ "testa all' i -esimo lancio" P_i

P_{B_S}

$B_S = A_{S_1} \cap A_{S_2} \cap \dots \cap A_{S_n} \cap$ con $0 \leq S_1 < S_2 < \dots < S_n \leq n$, quindi

$$A_{S_{n+1}} \cap A_{S_{n+2}} \cap \dots \cap A_{S_n}$$

$$P_{B_S} = P\left(\bigcup_{\{S_1, \dots, S_n\} \in \mathcal{B}_K(x)} B_S\right) =$$

$$= P\left(\bigcup_{\{S_1, \dots, S_n\} \in \mathcal{B}_K(x)} B_S\right)$$

$$= \sum_{\{S_1, \dots, S_n\}} P(B_S)$$

$$= \sum_{\{S_1, \dots, S_n\}} P^2 (1-p)^{n-2}$$

$$= \binom{n}{2} p^2 (1-p)^2$$

□

$$P(B_S) = \prod_{i=1}^n P(A_{S_i}) = 2 \prod_{i=1}^2 p \prod_{i=2+1}^n (1-p) = p^2 (1-p)^{n-2}$$

sono indipendenti

Exp Distribuzione di Poisson

$$P_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \lambda > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} np = \lambda \Rightarrow \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

$$p = \frac{\lambda}{n}$$

Q

$$\lim_n \frac{n!}{n^k (n-k)!} = \lim_n \left[\frac{1 \cdot (n-1)}{n} \cdot \dots \cdot \left(\frac{n-k+1}{n} \right) \right] = \lim_n \left[\frac{1 \cdot (1-\frac{1}{n}) \cdot \dots \cdot (1-\frac{k-1}{n}) \right] = 1$$

[vedi Chap pg 23], [Bisio pg 38]

Exp Distribuzione geometrica

$P_{n+1} = p(1-p)^n$ $n \in \mathbb{N}$ p prob. di avere testa $0 < p < 1$

prob. di avere una testa esattamente dopo n lanci

Proof

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

serie geometrica

Sia $A_i =$ "ottergo una testa all' i -esimo lancio e in tutti gli altri $m-1$ lanci ottergo croce"

Se la Binomiale $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np(1-p)^{n-1}$

$\sum_{i=1}^n p(A_i) = \sum_{i=1}^n p(A_i) = np(A_i)$ $\uparrow$ indipendenti

$P_n = p(A_i) = p(1-p)^{n-1}$

① Proprietà di assenza di memoria (vedi anche Bisio pg 38, libro pg 178)

Hydrogen

$$\frac{\binom{m_1}{k} \binom{m_2}{m-k}}{\binom{m_1+m_2}{n}}$$

$$K \in \mathcal{D}_c = \left[\max(0, n - n_2), \min(n, n_1) \right] \cap \mathbb{N}$$

Procediamo che ~~definiamo~~ ~~no~~ ~~polare~~ ~~che~~
sotto $S \in \mathcal{P}_m(S, \cup S_2)$

$$S_1 \vee S_2 \quad \text{con} \quad |S_1| = m_1, \quad |S_2| = m_2, \quad S_1 \vee S_2 = \emptyset, \quad m \leq m_1 + m_2$$

x_i abbia $|S \cap S_i| = k$

[Biology pg 23-24]

7/10

• P_i = i -esima pallina estratta e bianca $\} = \frac{m_i}{m_1 + m_2}$ $\forall i$, considerando il problema come un espt. senza rinvio e m_1 palline bianche, m_2 nere (vedi Biotto p.23)

$$|P_m(S_1 \cup S_2)| = \binom{|S_1 \cup S_2|}{m} = \binom{m_1 + m_2}{m}$$
 sono tutte le possibili selezioni di S (2) Sia $\overline{S} = S_1 \cup S_2$

$$P_m(S_1, S_2) = \binom{m_1 + m_2}{n} \binom{S_1 + S_2}{n}$$

tra tutte le possibili scelte di S_1 , Sia $\bar{S} = S_1 \cup S_2$

Definieren wir $|S \cap S_1| = k$. $|P_k(S_1)| = \binom{m_1}{k}$, $|P_{m-k}(S_2)| = \binom{m_2}{m-k}$ (1)

giardini $S = A \cup B$, con $A \in \mathcal{P}_K(S)$
 $A \cap B = \emptyset$ $R \subseteq D$ (s)

$$B \in \mathcal{P}_{m-k}(S_2)$$

$$= \left| \left\{ S \in \mathcal{P}_m(\bar{S}) \mid S \cap S_1 \in \mathcal{P}_k(S_1), S \cap S_2 \in \mathcal{P}_{m-k}(S_2) \right\} \right| =$$

¶ quindi dalla (2) si ha la Ter.

Nota le condizioni su K ($\max, \min$) nascono dalla seguente:

- $$2w + w_1 \leq w_2 \leq y \leq 0 \leq F.$$

$$k = |S_0 \cap S_1| \leq |S_1| = n_1$$

$$3. \quad n-k = |S \cap S_2| \leq |S_2| = m_2 \quad (\Leftrightarrow) \quad k \geq n - m_2$$

$$\Rightarrow k > n - n_2$$

$$\text{Define, } \sum_{B \in S_2} P_n = 1 \quad \text{property} \quad |P_n(S, U S_2)| = |\{A \cup B \mid A \in S, |A| + |B| = |A \cup B| = n\}| = \left| \bigcup_{k=\max(0, n-n_2)}^{\min(n, n_1)} \{A \cup B \mid A \in D_k(S), B \in D_{n-k}(S_2)\} \right| = -\Delta$$

$$\Rightarrow \left| \bigcup_{k=\max(\dots)}^{\min(\dots)} p_k(s) \times p_{n-k}(s_2) \right| = \sum_{k=\max(\dots)}^{\min(\dots)} \binom{m_1}{k} \binom{m_2}{n-k} \quad (3); \text{ Quindi } \sum_{k \in \Omega} p_k = \sum_{k \in \Omega} \frac{\binom{m_1}{k} \binom{m_2}{n-k}}{|p_n(s \cup s_2)|} = \frac{1}{|p_n(s \cup s_2)|} \sum_{k \in \Omega} \binom{m_1}{k} \binom{m_2}{n-k} = 1 \quad (3)$$

Varieabili random

$$X: \Omega \rightarrow S$$

$$\{X \in T\} \stackrel{\text{def}}{=} X^{-1}(T)$$

$$\{X = s\} \stackrel{\text{def}}{=} X^{-1}(s)$$

Prop 1 Sea Fixato $p_s = P(X = x_s)$, $\{p_s\}_{s \in S}$ e una distribuzione, chiamata distribuzione di X
con $X(\Omega) = \{x_s\}_{s \in S}$ $\Rightarrow$

Def

Basta osservare che $\{X^{-1}(x_s)\}_{s \in S}$ e una partizione di Ω e quindi $\sum_{s \in S} P(X^{-1}(x_s)) = P(\Omega) = 1$

Def

X e binomiale $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} X \sim \text{Bin}(n, p)$ $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ la distribuzione di X e binomiale $\Leftrightarrow P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
analogamente per gli altri casi. (vedi Chap pg 26)

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Def

Prop

$$I_{A^c} = 1 - I_A$$

$$I_{A \cap B} = I_A I_B$$

$$I_{A_1 \cap \dots \cap A_n} = \prod_{i=1}^n I_{A_i}$$

$$I_{A \cup \dots \cup A_n} = 1 - (1 - I_A)(1 - I_B) \dots$$

$$= \sum_{i=1}^n I_{A_i} - \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_2 \leq n} I_{A_{i_1}} \dots I_{A_{i_2}} + \dots$$

Def 1 Sia X una variabile random reale non negativa, cioè $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$,

$$EX \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$$

expectation / prevision / aspettazione

Nota: EX è una media pesata di $\{X(\omega)\}_{\omega \in \Omega}$. Se $P(\omega) = c \forall \omega \in \Omega$ otteniamo la media aritmetica.

Prop 1

$$EX = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x)$$

Proof

$$\{X_i = x\}_{x \in X(\Omega)} \text{ è una partizione di } \Omega \Rightarrow EX = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in \{X=x\}} X(\omega) P(\omega) =$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in \{X=x\}} x P(\omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(\{X=x\})$$

Prop

$$X \sim \text{Bin}(n, p) \Rightarrow EX = np$$

$$X \sim \text{Pois}(\lambda) \Rightarrow EX = \lambda$$

$$X \sim \text{Geom}(p) \Rightarrow EX = \frac{1}{p}, \text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$$

Pr

$$\text{Vedi [Chap pg 28], [Bivariate pg 34]}$$

Prop

$$X \sim \text{Hypergeom}(n_1, n_2, K) \Rightarrow EX = n \frac{m_1}{n_1 + n_2}$$

Pr

$$\text{Vedi [Bivariate, pg 24]}$$

$$\text{Var } X = n p (1-p) \left(\frac{N-n}{N-1} \right) \text{ con } p = \frac{m_1}{n_1 + m_2}$$

$$N = m_1 + m_2 \quad q = 1 - p$$

Prop

Def 2

Sia X random reale, $X_+ = \max(0, X)$ la parte positiva, $X_- = -\min(X, 0)$ la parte negativa, $\{EX_+, EX_-\} \neq \{\pm\infty\}$

$$\text{poniamo} \quad EX \stackrel{\text{def}}{=} EX_+ - EX_-$$

Prop

$$EX \text{ ben definita} \Rightarrow EX = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$$

Nota: dalla successione prop si conclude che questa def. nasce solo

per garantire che EX sia ben definita anche per somme ∞ . In seguito supponiamo sempre che $\{EX_+, EX_-\} \neq \{\pm\infty\}$.

Prop $X: \Omega \rightarrow \mathcal{S}$, $g: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$, si ha

$$1. \mathbb{P}(gX=y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} \mathbb{P}(X=x) = \sum_{x \in g^{-1}(y) \cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)$$

$$2. \mathbb{E}(gX) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) \mathbb{P}(X=x)$$

Pf 1.

$$(gX)^{-1}(y) = X \overset{\text{injection}}{=} g^{-1}(y) \cap X(\Omega), \quad w \in X \overset{\text{injection}}{=} g^{-1}(y) \Rightarrow X(w) = x \in g^{-1}(y) \Rightarrow w \in X^{-1}(x)$$

$$w \in X^{-1}(x) \Rightarrow x \in g^{-1}(y) \Rightarrow g(x)=y, X(w)=x \Rightarrow g(X(w))=y \Rightarrow w \in (gX)^{-1}(y)$$

$$\mathbb{P}(gX=y) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in g^{-1}(y)} X^{-1}(x)\right) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} \mathbb{P}(X=x) + \underbrace{\sum_{x \in g^{-1}(y) \setminus X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)}_{=0}$$

$$\sum_{x \in g^{-1}(y) \cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x) = 0$$

Pf 2.

$$\mathbb{E} gX = \sum_{y \in g(X(\Omega))} y \mathbb{P}(gX=y) \stackrel{1.}{=} \sum_{y \in g(X(\Omega))} y \left(\sum_{x \in g^{-1}(y) \cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x) \right) \stackrel{\text{positive}}{=} \sum_{x \in g^{-1}(y) \cap X(\Omega)} y \mathbb{P}(X=x) = \sum_{x \in g^{-1}(y) \cap X(\Omega)} g(x) \mathbb{P}(X=x) \stackrel{c.}{=} \sum_{x \in g^{-1}(y) \cap X(\Omega)} g(x) \mathbb{P}(X=x) \text{ t.c. } y \in gX$$

$$\{x \in g^{-1}(y) \cap X(\Omega) \mid y \in gX(\Omega)\} = g^{-1}(X(\Omega)) \cap X(\Omega) = X(\Omega) \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow \mathbb{E} gX = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) \mathbb{P}(X=x)$$

Prop 1

$$A \subseteq \Omega \Rightarrow \mathbb{E} I_A = P(A) \quad , \quad \text{con } I_A: \Omega \rightarrow \{0,1\}$$

osservare di

$$\mathbb{E} I_A = \sum_{\omega \in \Omega} I_A(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = P(A)$$

Def

$$Var(X) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$$

asimmetria

Prop 2

1. $Var(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$
2. $Var(cX) = c^2 Var(X)$
3. $Var(X+c) = Var(X)$
4. $Var(X) > 0$; $\wedge Var(X) = 0 \Leftrightarrow \exists c: P(X=c) = 1$
5. $\mathbb{E}(X-c)^2 \geq Var(X) \quad \forall c \in \mathbb{R}$, l'uguaglianza si ha per $c = \mathbb{E}X$

di

$$1. \mathbb{E}(\mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}X\mathbb{E}X - 2X\mathbb{E}X) = \mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}X\mathbb{E}X - 2\mathbb{E}X\mathbb{E}X$$

4. Per la 1.1 pg 15, si ha

$$\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2 - 2X\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2) = \mathbb{E}X^2 - 2\mathbb{E}X\mathbb{E}X + \mathbb{E}(\mathbb{E}X)^2 \Rightarrow \mathbb{E}X^2 - 2\mathbb{E}X\mathbb{E}X + \mathbb{E}X^2 = 2\mathbb{E}X^2 - 2\mathbb{E}X\mathbb{E}X$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = 0 \Leftrightarrow P((X - \mathbb{E}X)^2 = 0) = 1 \Leftrightarrow P(X = \mathbb{E}X) = 1; \text{ fissando}$$

$$(X - \mathbb{E}X)^2 \geq 0$$

Variance?

5. Vedi [pg 30 Chap]

Ex

$$X \sim \text{Bin}(n, p) \Rightarrow EX = np, \quad \text{Var}(X) = np(1-p)$$

$$X \sim \text{Pois}(\lambda) \Rightarrow EX = \lambda, \quad \text{Var}(X) = \lambda$$

Pf

[Pg 28, 31, Chap]

Prop 1

$$(E(XY))^2 \leq (EX)^2 (EY)^2$$

$$(E(XY))^2 \leq EX^2 EY^2, \quad \text{Inégalité de Cauchy-Schwarz}$$

Pf [Pg 32 Chap]

Def

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)]$$

Prop 2

$$1. \text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$$

$$2. \text{Cov}(X, Y) = EXY - EXEY$$

$$3. \text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$$

$$4. \text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

$$5. \text{Cov}(X, c) = 0, \quad \text{Cov}(X+c, Y) = \text{Cov}(X, Y); \quad \text{Cov}(cX, Y) = c\text{Cov}(X, Y)$$

$$6. \text{Cov}(X+Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$$

$$7. \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i, \sum_{j=1}^m d_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_i d_j \text{Cov}(X_i, Y_j)$$

$$8. \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^n c_i c_j \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Nota: Cov é uma ~~matriz~~ forma bilinear, Var é la sua forma quadrática

[Pg 33, Chap]

(18)

Def

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}}$$

base ridimensionata dove richiediamo $\text{Var}(X), \text{Var}(Y) > 0$

Prop Per la diseg. di Schwartz:

$$-1 \leq \text{Corr}(X, Y) \leq 1$$

Nota: Corr sarebbe il cos tra X e Y .

Prop 1

$$|\text{Corr}(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow X = aY + b \text{ per qualche } a, b \in \mathbb{R} ; \text{ in particolare } X = aY + b \Rightarrow |\text{Corr}(X, Y)| = \text{sgn}(a)$$

Def

Dalla diseg. di Schwartz si deduce

$$X - \mathbb{E}X = a(Y - \mathbb{E}Y) \Rightarrow X = aY + b$$

Def

$$\text{Cov}(X, aY) = a \text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(aY + b) = a^2 \text{Var}(Y)$$

$\Rightarrow \square$

Prop 2

$$\text{Cov}(aX + b, cY + d) = \begin{cases} \text{Cov}(X, Y) & ac > 0 \\ -\text{Cov}(X, Y) & ac < 0 \end{cases}$$

Indipendenza

Def $X_1, \dots, X_n$ sono indipendenti $\Leftrightarrow$

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \mathbb{P}(X_2 = x_2)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n X_i = x_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) \quad \forall x_i \in X_i(\Omega) \quad i=1, \dots, n$$

Prop 3 $\{X_i\}_{i=1}^n$ indipendenti $\Leftrightarrow$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n X_i \in S_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in S_i) \quad \forall S_i \in \mathcal{P}(X_i(\Omega)) \quad i=1, \dots, n$$

(18)

pg [pg 35 Chap]

Nota: in realtà la prop vale anche se si non è tutto contenuto in $X_i(\Omega)$, infatti, $\mathbb{P}$ fa rimanere solo $S_i \cap X_i(\Omega)$, perché $\mathbb{P}(X_i \in S_i \cap X_i(\Omega)) = \mathbb{P}(X_i \in S_i)$

Prop

$A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$ sono eventi indipendenti $\Leftrightarrow I_{A_1}, \dots, I_{A_n}$ sono indipendenti.

Q

$$\begin{cases} I_{A_i} = x_i \end{cases} = \begin{cases} A_i & \text{se } x_i = 1 \\ A_i^c & \text{se } x_i = 0 \end{cases}$$

cioè $\{I_{A_i} = x_i\} = A_i^{x_i}$

, quindi

$$P\left(\bigcap I_{A_i} = x_i\right) = P\left(\bigcap A_i^{x_i}\right) = \prod P(A_i^{x_i}) = \prod P(I_{A_i} = x_i)$$

$\{A_i\}$ indipendenti $\Leftrightarrow \{A_i^{x_i}\}$ indipendenti

prop 3 pg 41

Def

Siano $x_1, \dots, x_n$ arbitrari

Siano $1 \leq i_1 < \dots < i_2$, dobbiamo mostrare che $P\left(\bigcap_{s=1}^2 A_{i_s}^{x_{i_s}}\right) = \prod_{s=1}^2 P(A_{i_s}^{x_{i_s}})$ (1)

Gli $\{A_{i_s}^{x_{i_s}}\}$ saranno del tipo:

$$\{A_{i_s}^{x_{i_s}}\}_s = \{A_{i_1}^c, A_{i_2}^c, \dots, A_{i_{i_1}}^c, A_{i_{i_1+1}}^c, \dots, A_{i_{i_2}}^c\} \text{ per qualche}$$

ed mostriamo la (1) per indus. su s

Caso: $s=1$

$$P\left(\underbrace{A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap \dots \cap A_{i_n}^c}_A\right) = P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) \stackrel{(2)}{=} P(A) - P(A)P(B)$$

per indus. su s

$$A \cap B^c = A \cap (A \cap B)^c$$

$$P(A)(1 - P(B))$$

$$A \cap B = A_{i_1}^c \cap \dots \cap A_{i_n}^c \Rightarrow P(A \cap B)$$

$A_{i_1}, A_{i_2}, \dots$ indipendenti

$$\prod_{s=1}^2 P(A_{i_s}^{x_{i_s}}) = P(A) \cdot \prod_{s=2}^2 P(A_{i_s}^{x_{i_s}}) = P(B)P(A) \quad (2)$$

$\downarrow \leftarrow A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$
sono indep. per H₀

(CASO: $s \Rightarrow s+1$)

$$\text{Proviamo } B^c = A_{i_2}^c, \quad A = A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap \dots \cap A_{i_n}^c. \text{ Per H}_0 \text{ indus. } P(A) = \prod_{s=3}^2 P(A_{i_s}^{x_{i_s}}) \cdot P(A_{i_2}^c) \quad (3)$$

$$P(B^c \cap A) = P(A) - P(A \cap B) \stackrel{\text{H}_0 \text{ indus. su } A \cap B}{=} P(A) - \prod_{s=3}^2 P(A_{i_s}^{x_{i_s}}) \cdot \underbrace{P(A_{i_2}^c \cap A_{i_1}^c)}_{P(A)P(B)} = P(A) - P(A)P(B)$$

L

Prop 1 $X_1, \dots, X_n$ indep $\Rightarrow X_i, X_j$ indep $\forall i \neq j$

Proof

$\Rightarrow$ Usiamo la prop 3 pg 19: siano $S_i \subseteq X_i(\Omega)$, $S_j \subseteq X_j(\Omega)$ e poniamo $S_h = X_h(\Omega) \forall h \neq i, j$
 $P(X_i \in S_i \cap X_j \in S_j) = P(X_i \in S_i \cap X_j \in S_j \cap \bigcap_{h \neq i, j} X_h \in S_h) = \prod_{k=1}^n P(X_k \in S_k) =$
 $\uparrow$ prop 3 pg 19

¶ Vedi Def [pg 35, Chap 3]

Prop 2

$g_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $X_1, \dots, X_n$ indipendenti $\Rightarrow g_1 X_1, \dots, g_n X_n$ indipendenti.

$\{g_i X_i = y_i\} = \{X_i \in g_i^{-1}(y_i)\}$. A questo punto si usa la prop 3 pg 19 con $S_i = g_i^{-1}(y_i)$ (1)

$$P(\bigcap_{i=1}^n g_i X_i = y_i) = P(\bigcap_{i=1}^n X_i \in g_i^{-1}(y_i)) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in g_i^{-1}(y_i)) = \prod_{i=1}^n P(g_i X_i = y_i)$$

Prop 3

$X_1, \dots, X_n$ indipendenti $\Rightarrow E(\prod_{i=1}^n X_i) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$

¶

[pg 36, Chap 3]

Prop 4

X, Y indep $\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$

¶ $X - EX$ e $Y - EY$ indep per la prop 2. $\text{Cov}(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)] \stackrel{\text{prop 3}}{=} (E(X - EX))(E(Y - EY)) = 0$

Prop 1 $X_1, \dots, X_n$ independ. $\Leftrightarrow \text{Var}(\sum X_i) = \sum \text{Var}(X_i)$

Modif Pr Bas $X_1, \dots, X_n$ indep $\Rightarrow X_i, X_j$ indep $\forall i \neq j$. Allora basta usare la [prop 2.8 pg 18] e la [prop 1 pg 21]

Prop 2 $X_1, \dots, X_n$ independ $\Rightarrow P(X_1=x_1, \dots, X_{n-1}=x_{n-1} | X_n=x_n) = P(X_1=x_1, \dots, X_{n-1}=x_{n-1})$

Pr

$$P\left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} X_i = x_i \mid X_n = x_n\right) = \frac{P\left(\bigwedge_{i=1}^n X_i = x_i\right)}{P(X_n = x_n)} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} P(X_i = x_i)}{P(X_n = x_n)} = \prod_{i=1}^{n-1} P(X_i = x_i) = P(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})$$

independent

Lemma 1
Sia $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ allora $\min\{x_i\}_{i=1}^n \leq EX \leq \max\{x_i\}_{i=1}^n$

Proof

$$EX = \sum_i x_i P(X=x_i) \stackrel{\text{Prop 1 pg 14}}{\leq} P(X=x_1) \sum_i P(X=x_i) = P(X \in X(\Omega)) = 1$$

$\Rightarrow \square$
combinat.
lineare convessa
con $m_i = x_i, a_i = P(X=x_i)$
[pg 9 Lem 1]

Prop 3 Disuguaglianza di Markov

$$X \geq 0 \Rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{EX}{a} \quad \forall a \in \mathbb{R}_{>0}, \text{ dove } X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$$

Pr Se $a \leq EX$ allora la tesi è ovvia perché $P(X \geq a) \leq 1$. Supponiamo $a > EX$.

Supponiamo $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.

$a > EX \geq x_1$.

Se $a \geq x_n$ allora $P(X \geq a) = 0 = EX/a$.

Supponiamo $a > EX$.

Supp. che $a \leq x_{k-1}$

Quindi $x_k \leq a \leq x_n$ (1) $\xrightarrow{\text{Lemma 1}}$ $EX = \sum_{i=1}^n x_i P(X=x_i) \geq \sum_{i=k}^n x_i P(X=x_i) \geq \sum_{i=k}^n a P(X=x_i) = a \sum_{i=k}^n P(X=x_i) = a(1 - P(X \leq x_{k-1}))$ (2)

Vedi Chap pg 85 per una dim più gen e generale.

Prop Disuguaglianza di Chebyshev

Dato $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ con X variabile random qualsiasi, si ha

$$P(|X - EX| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad \forall k \geq 1, \text{ dove } \sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Q

Se $k=1$ la tesi è vera. $\star$ Supp $k > 1$.

$$\mathbb{E}_1 \quad |X - EX| \geq k\sigma \Leftrightarrow (X - EX)^2 \geq k^2 \sigma^2$$

$$E(X - EX)^2 = \text{Var}(X) = \sigma^2 \leq k^2 \sigma^2 \leq (X - EX)^2$$

$$P((X - EX)^2 \geq k^2 \sigma^2) \leq \frac{E(X - EX)^2}{k^2 \sigma^2} = \frac{\sigma^2}{k^2 \sigma^2} = \frac{1}{k^2}$$

$\uparrow$ Markov, pg. 23
 $(X - EX)^2 \geq 0$

□

Prop Dis. Chebyshev II

$$P(|X| \geq c) \leq \frac{EX^2}{c^2}$$

Q

$(|X| \geq c) = (X^2 \geq c^2)$, applica Markov

Distribuzioni condizionali

$X_1, \dots, X_n$ variabili random

Definizione 1 • Distribuzione unificata (joint)

$P(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n)$ con $(x_1, \dots, x_n) \in \text{supporto } X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ e una distribuzione su $X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$

Def

$\{X_1=x_1, \dots, X_n=x_n\}_{x_1, \dots, x_n}$ e' una partizione di Ω (1)

$= \{X_1(x_1) \cap \dots \cap X_n(x_n)\}_{x_1, \dots, x_n}$; Quindi $\sum_{x_1, \dots, x_n} P(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n) = P(\bigcup_{x_1, \dots, x_n} X_1(x_1) \cap \dots \cap X_n(x_n)) = P(\Omega) = 1$

Definizione 2 •

$P(X_i=x_i) = \sum_{\substack{x_1, \dots, x_n \\ x_j \in X_j(\Omega), x_j \neq x_i}} P(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n)$, distribuzione marginale $\leftarrow$ servono solo quelli che non sono x_i

Def

$P(X_i=x_i) = P(X_i=x_i \cap \Omega) \stackrel{(1)}{=} P(X_i=x_i \cap \bigcup_{x_1, \dots, x_n} (X_1=x_1, \dots, X_n=x_n)) = P(\bigcup_{x_1, \dots, x_n} X_i=x_i, \dots, X_n=x_n)$

Definizione 3

• $P(X_i=x_i, X_j=x_j) = \sum_{\substack{x_1 \in X_1(\Omega), x_1 \neq x_i \\ x_2 \in X_2(\Omega), x_2 \neq x_j}} P(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n)$; etc, si può estendere a $P(X_i=x_i, X_j=x_j, \dots)$ e' la distribuzione condizionale a $Y=y$

Def

Sappiamo già che $P(\cdot | Y=y)$ e' una distribuzione (vedi prop 2 pag 3) (2)

$\sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x | Y=y) \stackrel{(1)}{=} P(\bigcup_{x \in X(\Omega)} X=x | Y=y) = P(\Omega | Y=y) \stackrel{(2)}{=} 1$

Prop 2

$P(X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X=x, Y=y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X=x | Y=y) P(Y=y)$ (in caso particolare della 2)

Prop 1 (conclusion)

$$X, Y \text{ independent} \Rightarrow P(X+Y=z) = \sum_{y \in \mathcal{Y}(z)} P(X=z-y) P(Y=y) = \sum_{x \in \mathcal{X}(z)} P(X=x) P(Y=z-x)$$

pf

$$P(X+Y=z) \stackrel{\text{prop 1.1}}{=} \sum_{y \in \mathcal{Y}(z)} P(X+Y=z, Y=y) \stackrel{\text{prop 1.2}}{=} \sum_{y \in \mathcal{Y}(z)} P(X=z-y) P(Y=y) \quad (1)$$

$$\{ \omega \mid X(\omega)+Y(\omega)=z, Y(\omega)=y \} = X^{-1}(z-y) \cap Y^{-1}(y) = \{ X=z-y, Y=y \} \quad (1)$$

$$X, Y \text{ independent} \Rightarrow P(X=z-y, Y=y) = P(X=z-y) P(Y=y) \quad (2)$$

$$P(X=z-y, Y=y) \stackrel{(1)}{=} P(X=z-y) P(Y=y) \stackrel{(2)}{=} P(X=z-y) P(Y=y) \quad (3)$$

~~Def~~

Def / Prop 2

$$E(X|Y=y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \in \mathcal{X}(y)} x P(X=x|Y=y) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ Y(\omega)=y}} X(\omega) \frac{P(\omega)}{P(Y=y)}$$

Proposizione condizionale

pf

$$P(X=x|Y=y) = \sum_{\omega: X(\omega)=x} P(\{\omega\}|Y=y) \quad (1) \quad ; \quad P(\{\omega\}, Y=y) = \begin{cases} P(\{\omega\}) & Y(\omega)=y \\ 0 & Y(\omega) \neq y \end{cases} \quad (2)$$

$$\sum_{x \in \mathcal{X}(y)} x P(X=x|Y=y) \stackrel{(1)}{=} \sum_{x \in \mathcal{X}(y)} x \sum_{\omega: X(\omega)=x} P(\omega|Y=y) = \sum_{\omega: X(\omega)=y} X(\omega) \frac{P(\omega)}{P(Y=y)} \stackrel{(2)}{=} \sum_{\omega: Y(\omega)=y} X(\omega) \frac{P(\omega)}{P(Y=y)}$$

$$\{ \omega \mid X(\omega)=x, Y(\omega)=y \} = \Omega$$

Def $E(X|Y)$ e la seguente funzione: $E(X|Y): \mathcal{Y}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$
 $y \mapsto E(X|Y=y)$

(25)

Prop 2) $E(c|Y) = cE(X|Y)$, $E(c|Y) = c$

2) $E(\sum_i X_i | Y) = \sum_i E(X_i | Y)$

3) $E(E(X|Y)) = E(X)$

4) X, Y independent $\Rightarrow E(X|Y) = E(X)$

5) Y, Z independent $\Rightarrow E(E(X|Y) | Z) = E(X)$

6) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow E(h(Y)X|Y) = h(Y)E(X|Y)$

7) $E(X|Y)$ è quella funzione $h(Y)$ che minimizza $E(X - g(Y))^2$, cioè $E(X - h(Y))^2 \leq E(X - g(Y))^2 \quad \forall g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Def. 1. Cond.

Def. 2. Dalla prop 2 pg 25

Def. 3.

$$E(E(X|Y)) = \sum_{Y \in \mathcal{Y}(\Omega)} \underbrace{\left(\sum_{X \in \mathcal{X}(\Omega)} X \cdot P(X=X|Y=Y) \right)}_{E(X|Y=Y)} P(Y=Y) = \sum_Y \left(\sum_X X \cdot \underbrace{P(X=X|Y=Y)P(Y=Y)}_{P(X=X, Y=Y)} \right)$$

stand outside $E(X|Y)$ come una cosa random

$$= \sum_Y \sum_X X \cdot P(X=X, Y=Y) = \sum_X X \sum_Y P(X=X, Y=Y) = \sum_X X \cdot P(X=X) = E(X)$$

Def 4. X, Y indep $\Rightarrow P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y) \Rightarrow P(X=x|Y=y) = P(X=x)$ (ed anche usando la prop 2 pg 22)

$$E(X|Y) \stackrel{\forall}{=} E(X)$$

Def 5.

Y, Z indep $\Rightarrow E(X|Y), Z$ indep $\Rightarrow E(E(X|Y) | Z) = E(X|Y)$ ~~$E(X|Y)$~~ $E(E(X|Y)) = E(X)$

Def 6. Usala prop 2 pg 25

Def 7. [Chap pg 45]

Distrib. Binom.

$X = \#$ di lanci necessari a ottenere k teste, $P_p(X=n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$ $0 \leq p \leq 1$
 $E(X) = \frac{k}{p}$, $Var(X) = k \frac{1-p}{p^2}$ k probabilità di una testa
 $p_m = P(X=m)$ proba di avere k teste dopo m lanci

⌋ [Bissegno pg 37]

Distrib. Poisson

$X \sim \text{Pois}(\lambda_1)$, $Y \sim \text{Pois}(\lambda_2)$ X, Y indipendenti $\Rightarrow X+Y \sim \text{Pois}(\lambda_1+\lambda_2)$

⌋ [Chap pg 43, 44], [Bissegno pg 39, 40]

Distrib. Esponenziale

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ per $x \geq 0$, $f(x) = 0$ per $x < 0$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $EX = \frac{1}{\lambda}$, $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

$P(X > x_0 + x | X > x_0) = P(X > x)$ (proprietà di memorialessa)

⌋ [Bissegno 40, 44] ⌋ [Chap 58]

Prop. Assenza di memoria continua

$P(X > x_0 + x | X > x_0) = P(X > x) \Leftrightarrow X \sim \text{Exp}(\lambda)$

⌋ [Bissegno pg 41]

Prop. $X \sim \text{Exp}(\lambda_1)$, $Y \sim \text{Exp}(\lambda_2)$, X, Y indipendenti $\Rightarrow$ $\begin{cases} Z_1 = \min(X, Y) \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2) \\ Z_2 = \max(X, Y) \Rightarrow P(Z_2 \leq z) = P(X \leq z)P(Y \leq z) \end{cases}$

⌋ [Bissegno pg 42]

Distribuzione multinomiale

Da $\{E_1^{(1)}, \dots, E_m^{(1)}\}$ partizione di Ω $V_i = 1, \dots, m$

$E_1^{(1)}, E_k^{(1)}$ indep $V_i^{(1)}$ $E_k^1, E_k^2, \dots, E_k^n$ $V_k = 1, \dots, m$

$X_k = \sum_{i=1}^n I_{E_k^i}$ $I_{E_k^i}$ indicazione di E_k^i

$V_k = 1, \dots, m$ $V_k = 1, \dots, m$ $V_k = 1, \dots, m$

$$P(X_1=x_1, \dots, X_m=x_m) = \binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_m} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_m^{x_m}$$

con $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$

con $p_k = P(E_k^i) \cdot V_i$

$P(X=x) \sim \text{Binom}(n, p_i)$, $P(X=x) = \binom{n}{x_1} p_1^{x_1} (1-p_1)^{n-x_1}$

Questo distributo si può così interpretare:

Es. $E_1^1 =$ "all' primo lancio di un dado esce la faccia 1"

facciamo n esperimenti, ad ogni prova si associa una sola E_k^i per qualche k .

Gli esiti di due prove distinte sono tra loro indipendenti.

Gli esiti $E_k^1, E_k^2, \dots, E_k^n$ si possono considerare "dello stesso tipo" in quanto $P(E_k^1) = P(E_k^2) = \dots = P(E_k^n)$

$P(X_1=x_1, \dots, X_m=x_m)$ è la probabilità di ottenere x_k esiti E_k^i di tipo E_k in n prove.

$$P(X_1=x_1, \dots, X_m=x_m) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_m!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_m^{x_m}$$

$$P(E_k^1) = P(E_k^2) = \dots = P(E_k^n) = p_k \dots p_{k_m} = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_m^{x_m}$$

Supponiamo che $(k_1, \dots, k_m) = (1, 1, \dots, 1, 2, 2, \dots, 2, \dots, m, m, \dots, m)$

x_1 volte x_2 volte x_m volte

All'osservazione di $x_1, x_2, \dots, x_m$ abbiamo tutte le possibili uscite.

Es. sono in numero $\binom{n}{x_1, \dots, x_m}$

Infine, $P(X_1=x_1) = \dots = \sum_{x_2+\dots+x_m=n} P(X_1=x_1, \dots, X_m=x_m) = \sum_{x_2+\dots+x_m=n} \binom{n}{x_1, \dots, x_m} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_m^{x_m}$

$\binom{n}{x_1, \dots, x_m} = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_m!}$

$\sum_{x_2+\dots+x_m=n} \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_m!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_m^{x_m} = \frac{n!}{x_1!} p_1^{x_1} (p_2 + \dots + p_m)^{n-x_1} = \frac{n!}{x_1!} p_1^{x_1} (1-p_1)^{n-x_1}$

$\{E_k^i\}$ è una partizione di $\Omega \Rightarrow \sum p_i = 1$

Variazioni random continue

$$F(x) = P(X \leq x)$$

1. $F(x)$ è non decrescente

2. $P(X > x) = 1 - F(x)$

3. $a < b \Rightarrow P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

4. $\lim_{y \rightarrow x^+} F(y) = F(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Prop 2

1. $P(X=x) = 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow x^-} F(y) = F(x) \Leftrightarrow F(x)$ continua prop 1.4

2. $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}_+$; $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$; $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

[Chap pg 53-54] Def $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

Prop

1. $x \geq 0 \Rightarrow EX = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx$

Df ~~2. $x \geq 0 \Rightarrow EX = \int_0^{\infty} x f(x) dx$~~

[Chap pg 53]

Prop

~~$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$~~ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, crescente o decrescente, g continua, g' derivabile

Df

[Chap pg 53], g derivabile

1. $P(X \in C) = \int_C f(x) dx$, $f(x) = F'(x)$

2. ~~Derivazione~~

Def X è (assolutamente) continua $\Leftrightarrow$

1) $P(X=x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$

2) $F'(x) = f(x)$

3. $1 - F(x) = P(X > x) = \int_x^{\infty} f(x) dx$

$\Rightarrow g(x)$ è una var random ass: continua e la sua funzione di densità è

$f(g^{-1}(x)) | D[g^{-1}(x)]$

g' funz. di dens. di X

Distrib normale

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

$$F(x) = \Phi_{m,\sigma}(x), \quad I_{0,1}(x) =: \Phi(x)$$

Chap pg 60, 62
Biotto pg 34

1. $EX = m, \text{Var} X = \sigma^2, \Phi(x) = 1 - \Phi(-x), 2\Phi(x) - 1 = \Phi(x) - \Phi(-x), \Phi(0) = \frac{1}{2}$
2. $X \sim \text{Norm}(m, \sigma) \Rightarrow \frac{X - EX}{\sqrt{\text{Var} X}} \sim \text{Norm}(0, 1) \Rightarrow EY = 0, \text{Var} Y = 1; Y = aX + b \Rightarrow Y \sim \text{Norm}(am + b, |a|\sigma)$

$\frac{X - EX}{\sqrt{\text{Var} X}} \sim \text{Norm}(0, 1)$
Y e' la variabile X normalizzata

B2.

$$P\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq x\right) = P(X \leq x\sigma + m) = \Phi_{m,\sigma}(x\sigma + m) = \int_{-\infty}^{x\sigma + m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x\sigma + m) - m}{\sigma}\right)^2} dx = \Phi(x)$$

$m = EX, \sigma = \sqrt{\text{Var} X}$

Def

Mediana

La mediana e' quel punto m f.c. $P(X \leq m) = \int_{-\infty}^m f(x) dx = \int_m^{\infty} f(x) dx = P(X \geq x) = \frac{1}{2}$

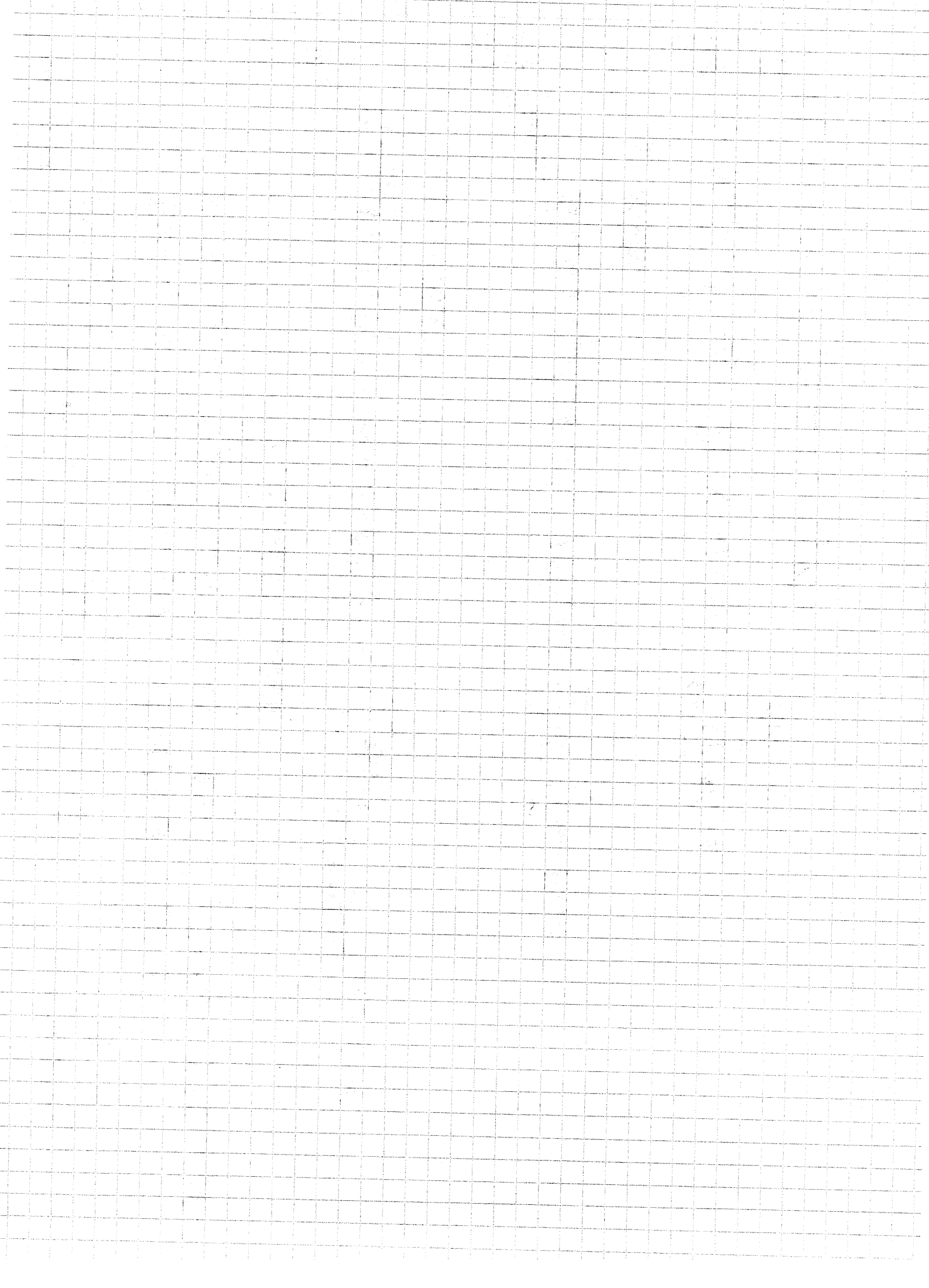
q. ~~XXXXXX~~

Prop $X \sim \text{Norm}(m, \sigma) \Rightarrow P(|X - m| \leq k\sigma) = 2\Phi(k) - 1$

B

$$P(|X - m| \leq k\sigma) = P\left(\frac{|X - m|}{\sigma} \leq k\right) = 2\Phi(k) - 1$$

$$P(|X_{0,1}| \leq k)$$



3. Bayes
5. Inclusion, exclusion
6. color combinations
8. Prob. suggested De Finetti
10. Distribution binomiale
11. δ Binom
12. Geometria
Hypergeometria
13. Variabili random, EX 14. IEX per Binomiale, Geometria, Hypergeom
17. Var X, Cov X, Y
18. Schwartz
19. Variabili Independenti
22. Disug. Markov
23. Disug. Cauchy
24. Distribut. condizionali
25. Probazione condizionale $E(X|Y)$
Conclusioni
27. Distrib. Poiss., Poisson $X \sim Y$ Poiss($\lambda_1 + \lambda_2$), Esponenziale
29. Var Random Continue
30. Distrib. Normale



Binomiale

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k=0,1,\dots,n \quad EX = np, \text{Var} X = npq$$

k teste in n lanci $X = \# \text{ teste}$

Uniforme

$$U[a,b] \Rightarrow EX = \frac{a+b}{2} \quad \text{Var} X = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Poisson

$$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \lambda > 0 \quad EX = \lambda, \text{Var} X = \lambda$$

k teste in $n \rightarrow \infty$ lanci $X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1+\lambda_2); P(X=x|X+Y=n) \sim \text{Binom}(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$
 X, Y indep.

Geometrica

$$p_n = p(1-p)^{n-1} \quad EX = \frac{1}{p} \quad \text{Var} = \frac{1-p}{p^2}; X = \# \text{ lanci}; P(X=n) = q^{n-1}$$

teste dopo n lanci; assenza memoria $P(X > x_0 + x | X > x_0) = P(X > x_0)$

Hypergeometric

$$p_k = \frac{\binom{m_1}{k} \binom{m_2}{n-k}}{\binom{m_1+m_2}{n}}$$

$$EX = n p, \text{on } p = \frac{m_1}{m_1+m_2} = P(E_1)$$

$$\text{Var} X = np(1-p) \frac{N-n}{N-1} / \text{con } N = m_1+m_2$$

$$N = m_1+m_2$$

Pascal

$$P(X=n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \quad EX = \frac{k}{p} \quad \text{Var} X = \frac{kq}{p^2}$$

k teste dopo n lanci

$X_i = \# \text{ lanci per ottenere l'i-esimo teste}; X = \sum_{i=1}^k X_i$

serie geometriche

$$X = E_1 + \dots + E_k; E_i \text{ sono scambiabili}$$

Multinomiale

$$\{E_1^{(1)}, \dots, E_m^{(1)}\} \quad P(X_1=x_1, \dots, X_m=x_m) = \frac{n!}{x_1! \dots x_m!} p_1^{x_1} \dots p_m^{x_m}$$

$x_1 + \dots + x_m = n$

$$P(X_i=x_i) = \binom{n}{x_i} p_i^{x_i} (1-p_i)^{n-x_i}$$

$$X_k = \sum_{i=1}^m E_k^{(i)}$$

Esponenziale

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0, \lambda > 0 \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad EX = \frac{1}{\lambda}, \text{Var} = \frac{1}{\lambda^2}; \text{proprietà di memoria}$$

$$EX^2 = \frac{2}{\lambda^2}$$

proprietà di memoria

$$\min(X, Y) \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2) \quad [X, Y \text{ indep}]$$

$$Z = \max(X, Y) \Rightarrow P(Z \leq z) = P(X \leq z) P(Y \leq z)$$

Normale

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$EX = \mu \quad \text{Var} X = \sigma^2$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x) \quad \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

$$\Phi(k) - \Phi(-k) = 2\Phi(k) - 1$$

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}$$

$$Y = aX + b \sim \text{Norm}(a\mu + b, |a|\sigma)$$

$$P(|X - \mu| \leq k\sigma) = 2\Phi(k) - 1$$

Markov

$$X \geq 0 \Rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$$

Chebyshev

$$P(|X - EX| > K\sigma) \leq \frac{1}{K^2} \quad K \geq 1; \quad P(|X| > c) \leq \frac{EX^2}{c^2} \quad c > 0$$

$$P(X=y) = \sum_{y \in Y(x)} P(X=x|Y=y) P(Y=y)$$

$$P(X+Y=z) = \sum_{y \in Y(z)} P(X=z-y) P(Y=y) \quad \text{conclusionne}$$

$$P(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-y) f_Y(y) dy$$

Fonction Répartition

$$X \geq 0 \quad h(x) = \frac{f(x)}{S(x)}$$

$$S(x) = \int_0^x h(t) dt$$

h croissante $\Rightarrow$ immédiatement

$$P(X \leq x + \Delta x | X > x) \approx \Delta x h(x)$$

$\int_0^{\infty} h(x) dx = 1$

Bayes

$P(E|H_i)$ accision.

$$\frac{P(H_2|E)}{P(H_1|E)} = \max_i \frac{P(H_i|E)}{P(H_i)} \quad \text{la s'la plus accision.}$$

$$P(H_1|E) = \max_i P(H_i|E) \quad \text{H}_1 \text{ che diventa più probabile}$$

$$\sum_{i=1}^n x^{i-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$