Fondamenti della Matematica

Per chi ha paura dell'infinito

AlpT (@freaknet.org)

http://freaknet.org/alpt

November 22, 2011

Abstract

Questo testo e' una rielaborazione personale degli appunti presi durante il corso di Fondamenti della Matematica, tenuto dal Prof. Micale Biagio presso il dipartimento di Matematica, Catania, A.A. 2008/2009.
Saro' ben lieto di correggere ogni eventuale errore che mi comunicherai.

Buon lettura.

^_^

Copyright ©2012 Andrea Lo Pumo aka AlpT <alpt@freaknet.org>. All rights reserved.

This document is free; you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or (at your option) any later version.

This document is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for more details.

You should have received a copy of the GNU General Public License along with this document; if not, write to the Free Software Foundation, Inc., 675 Mass Ave, Cambridge, MA 02139, USA.

Contents

1 Introduzione **1**

2 Insiemi **1**

3 POSET ben ordinati **1**

4 Numeri ordinali **17**
4.1 Ordinali limite 26
4.2 Ordinali e Insiemi Ben Ordinati 27
4.3 Cardinali 31

5 Appendice A **38**

6 * **79**

1 Introduzione

Questi appunti digitali fanno riferimento a i relativi appunti cartacei che sono stati acquisiti e inclusi nell'appendice.
Notazione: [QUA,OssX.Y.Z,pg.123] e' un riferimento alla proposizione OssX.Y.Z che trovate nell'appendice A, a pagina 123.

2 Insiemi

Definition 2.1. Sia $M \neq \emptyset$ un insieme.

φ e' una funzione di scelta $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\varphi \in M^{\mathcal{P}(M)^*} \Leftrightarrow$ φ e' del tipo $\varphi : \mathcal{P}(M)^* \longrightarrow M$ e inoltre $\varphi(A) \in A$

dove $\mathcal{P}(M)^* = \mathcal{P}(M) \setminus \{0\}$.

3 POSET ben ordinati

Definition 3.1. Sia $M \neq \emptyset$. Diremo che $(M, <)$ e' un insieme ben ordinato $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$B1.\ \forall a, b \in M\ \ \neg(a < b \wedge b < a)$$
$$B2.\ \forall \emptyset \neq A \subseteq M\ \ \exists a \in A \text{ tale che } (x \in A \setminus \{a\} \Rightarrow a < x)$$

L'elemento a e' unico e lo indichiamo con $\min_< A$.

Diremo che $(M, \leq)$ e' un POSET ben ordinato $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ M e' un POSET e inoltre

$$\forall \emptyset \neq A \subseteq M\ \ \exists \min_{\leq} A \text{ dove } \min_{\leq} A = a \text{ tale che } a \in A,\ a \leq x\ \ \forall x \in A$$

Proposition 3.2. *Il minimo e' unico.*

Proof: Supponiamo per assurdo che a, b siano due minimi di A, allora per definizione si deve avere:

$$a \neq b,\ a, b \in A,\ a \text{ minimo } \Rightarrow a < b$$
$$a \neq b,\ a, b \in A,\ b \text{ minimo } \Rightarrow b < a$$

assurdo contro la $B1$. □

Proposition 3.3. *Sia $(M, <)$ un insieme ben ordinato, allora*

0. $a < b \Rightarrow a \neq b$
1. $\neg(a < a)\ \ \forall a \in M$
2. $a, b, c \in M,\ (a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c)$
3. $a, b \in M,\ \ (a \neq b \Rightarrow a < b \vee b < a)$

Proof:
$\langle 1 \rangle$ Dim. 0., 1.
Segue direttamente dalla $B1$.
$\langle 2 \rangle$ Dim. 2.

Se per assurdo $a = c$, allora

$$a < b \wedge b < c \underbrace{\Leftrightarrow}_{a=c} a < b,\ b < a$$

assurdo contro $B1$. Quindi,

$$a \neq c,\ a < b,\ b < c \Rightarrow a, b, c \text{ distinti}$$
$$\{a, b, c\} \subseteq M \underbrace{\Rightarrow}_{B2} \exists \min_{<} \{a, b, c\}$$
$$a < b, b < c \Rightarrow \min_{<} \{a, b, c\} \neq b, c \Rightarrow \min_{<} = a \Rightarrow a < c$$

$\langle 3 \rangle$ Dim. 3.

$$a \neq b,\ \min_{<} \{a, b\} \text{ unico } \Rightarrow\ \Rightarrow \min_{<} \{a, b\} = a \vee \min_{<} \{a, b\} = b \Rightarrow a < b \vee b < a$$

□

Proposition 3.4. *Dato un insieme ben ordinato $(M, <)$, la relazione*

$$a \leq b \overset{def}{\Leftrightarrow} (a < b \vee a = b)$$

rende $(M, \leq)$ un POSET ben ordinato.
Viceversa, dato il POSET $(M, \leq)$ ben ordinato, la relazione

$$a < b \overset{def}{\Leftrightarrow} (a \leq b \wedge a \neq b)$$

rende $(M, <)$ un insieme ben ordinato.

Per questo motivo possiamo ritenere equivalenti le due definizioni di buon ordinamento e da ora in poi non faremo piu' distinzione tra le due.

Proof:
$\langle 1 \rangle$ $\Rightarrow$

1. Riflessiva $a \leq a$:
$$a = a \Rightarrow a \leq a$$
2. Antisimmetrica:
$$a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$$
$$b \leq a \Leftrightarrow b < a \vee a = b$$
Se per assurdo $a \neq b \Rightarrow a < b,\ b < a$ assurdo contro $B1$
quindi, $a = b$
3. Transitiva:
$$a \leq b \leq c \Leftrightarrow (a < b \vee a = b),\ (b < c \vee b = c)$$
Se $a = b \vee b = c$ e' chiaro che $a \leq c$, altrimenti:
$$a < b,\ b < c \underbrace{\Rightarrow}_{[3.3,\text{pg.}1]} a < c$$
4. $(M, \leq)$ e' ben ordinato: sia $\emptyset \neq A \subseteq M$, allora
$$\emptyset \neq A \subseteq M \underbrace{\Rightarrow}_{B2} \exists a = \min_{<} A \Rightarrow a < x\ \ \forall x \in A \setminus \{a\}\ \Rightarrow a \leq x\ \ \forall x \in A \Rightarrow a = \min A$$

$\langle 2 \rangle$ $\Leftarrow$

1. $B1$: se per assurdo $a < b \wedge b < a$, si ha
$$a < b \Leftrightarrow (a \leq b \wedge a \neq b)$$
$$b < a \Leftrightarrow (b \leq a \wedge a \neq b)$$
$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{antisimmetrica}} a = b \text{ assurdo contro } a \neq b$$

2. $B2$: sia $\emptyset \neq A \subseteq M$
$(M, \leq)$ POSET ben ordinato $\Rightarrow \exists a = \min_{\leq} A \Rightarrow a \leq x \ \ \forall x \in A \Rightarrow (a \leq x \wedge a \neq x) \ \ \forall x \in A \setminus \{a\} \Leftrightarrow a = \min_{<} A$

□

Definition 3.5. Siano $(M, <)$, $(M', <')$ due insiemi con due relazioni binarie $<, <'$. Una funzione $f : M \longrightarrow M'$ si dira' omomorfismo $\Leftrightarrow$

$$\forall a, b \in M \ \ (a < b \Rightarrow f(a) \ <' \ f(b))$$

f si dira' immersione se iniettiva, e isomorfismo se biettiva.
Se $\exists f : M \longrightarrow M'$ isomorfismo, scriveremo $M \simeq M'$

Proposition 3.6. *Siano $(M, <)$, $(M', <)$ due insiemi ben ordinati*[1]*, allora*

$$f : M \longrightarrow M' \ \textit{omomorfismo} \ \Rightarrow f \ \textit{immersione}$$

inoltre

$$f^{-1} : f(M) \longrightarrow M \ \textit{e' un isomorfismo}$$

Proof: f e' iniettiva:

$$a \neq b \underbrace{\Rightarrow}_{[3.3,\text{pg.}1]} a < b \vee b < a \Rightarrow f(a) < f(b) \vee f(b) < f(a) \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

Si ha:
f iniettiva $\Rightarrow f : M \longrightarrow f(M)$ biettiva $\Rightarrow \exists f^{-1} : f(M) \longrightarrow M$
$f(a) < f(b) \Rightarrow f^{-1}f(a) < f^{-1}f(b) \Leftrightarrow a < b$, infatti, se per assurdo $\neg(a < b)$ si ha :

$$\neg(a < b) \underbrace{\Leftrightarrow}_{[3.3,\text{pg.}1]} a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b \Rightarrow f(a) > f(b) \vee f(a) = f(b) \text{ assurdo contro } f(a) < f(b)$$

□

Definition 3.7. Sia $(A, <)$ ben ordinato e $\emptyset \neq B \subseteq A$, allora

B e' un segmento di $A \ \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \ \{a \in A \mid \exists b \in B : \ a < b\} \subseteq B \Leftrightarrow ((a < b \Rightarrow a \in B) \ \ \forall b \in B \ \ \forall a \in A)$

Nota: $\emptyset, A$ sono segmenti di A.
Sia $a \in A$, definiamo il seguente insieme:

$$A_a \ \overset{\text{def}}{=} \ \{x \in A \mid x < a\}$$

Proposition 3.8.

$$B \subset A \ \textit{segmento} \ \Rightarrow A \setminus B \subseteq \{ \ \textit{maggioranti di } B\}$$

Proof:

$$B \subset A \Rightarrow A \setminus B \neq \emptyset \underbrace{\Rightarrow}_{A \text{ ben ordinato}} \exists m = \min A \setminus B$$

Sia $a \in A \setminus B$. Se per assurdo $\exists b \in B : \ b > a$, allora
$a < b \in B$, B segmento $\Rightarrow a \in B$ assurdo contro $a \in A \setminus B$
Quindi ogni elemento di $A \setminus B$ e' un maggiorante per B. □

[1] M, M' hanno due relazioni d'ordinamento non necessariamente uguali. Ma d'ora in avanti utilizzeremo lo stesso simbolo $<$ per entrambe

Proposition 3.9.

1. *A_a e' un segmento di A*
2. *$B \subset A$ e' un segmento $\Rightarrow B = A_a$, con $a = \min A \backslash B$*

Proof:
$\langle 1 \rangle$ 1.
Sia $b \in A_a$ e $x \in A : \ x < b$. Dimostriamo che $x \in A_a$

$$b \in A_a \Leftrightarrow b \in A, \ b < a$$
$$x < b < a \Rightarrow x < a \underbrace{\Rightarrow}_{x \in A} x \in A_a$$

$\langle 2 \rangle$ 2.

$$B \subset A \Rightarrow A \backslash B \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in A \backslash B \underbrace{\Rightarrow}_{[3.8,\text{pg.}3]} a \text{ e' un maggiorante di } B \Leftrightarrow a \geq b \ \ \forall b \in B \ \ (0)$$

$\langle 2.1 \rangle$ Dim. $B \subseteq A_a$
Sia $x \in B$

$$(0) \Rightarrow x \leq a \underbrace{\Rightarrow}_{a \in A \backslash B, \ x \in B} x < a \underbrace{\Rightarrow}_{x \in B \subseteq A, \text{ def } A_a} x \in A_a$$

$\langle 2.2 \rangle$ Dim. $B \supseteq A_a$
Nella (0), come a possiamo scegliere $a = \min A \backslash B$, infatti:

$$A \backslash B \neq \emptyset \underbrace{\Rightarrow}_{A \text{ b.o.}} \exists a = \min A \backslash B$$

Quindi

$$x \in A_a \Rightarrow x \in A, \ x < a = \min A \backslash B \Rightarrow x \in A \backslash (A \backslash B) = B$$

□

Proposition 3.10.

$$S, T \text{ segmenti di } A \ \Rightarrow S \subseteq T \vee T \subseteq S$$

Proof: Se $S = A \vee T = A$ la tesi e' vera. Supponiamo che non sia cosi'.

$$S \subset A \text{ segmento} \underbrace{\Rightarrow}_{[3.9,\text{pg.}4]} S = A_a$$
$$T \subset A \text{ segmento} \underbrace{\Rightarrow}_{[3.9,\text{pg.}4]} T = A_b$$
$$(A, <) \text{ ben ordinato} \underbrace{\Rightarrow}_{[3.3,\text{pg.}1]} a = b \vee a < b \vee b < a \Rightarrow A_a = A_b \vee A_a \subseteq A_b \vee A_b \subseteq A_a$$

□

Proposition 3.11.

$$S_i \subseteq A \text{ segmento } \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} S_i, \ \bigcap_{i \in I} S_i \text{ segmenti di } A$$

Proof: Sia $x \in \bigcap_{i\in I} S_i$ e sia $a \in A:\ a < x$,

$$x \in \bigcap_{i\in I} S_i \Rightarrow x \in S_i \ \ \forall i \in I$$

S_i segmento

$$a \in A,\ a < x$$

$$\Rightarrow a \in S_i \ \ \forall i \in I \Rightarrow a \in \bigcap_{i\in I} S_i$$

Sia $x \in \bigcup_{i\in I} S_i$ e sia $a \in A:\ a < x$,

$$x \in \bigcup_{i\in I} S_i \Rightarrow \exists i \in I:\ x \in S_i,\ S_i \text{ segmento}$$

$$a \in A,\ a < x$$

$$\Rightarrow a \in S_i \Rightarrow a \in \bigcup_{i\in I} S_i$$

quindi la definizione [3.7,pg.3] e' soddisfatta. □

Proposition 3.12. *Siano* $(A, <),\ (A', <)$ *ben ordinati,*

$$\begin{cases} S, T \subseteq A \text{ segmenti} \\ f : S \longrightarrow A',\ g : T \longrightarrow A', \quad \text{omomorfismi} \\ f(S),\ g(T) \subseteq A' \text{ segmenti} \end{cases} \Rightarrow f_{|S\cap T} = g_{|S\cap T}$$

Proof:

$$S, T \text{ segmenti} \underbrace{\Rightarrow}_{[3.10,\text{pg.}4]} S \subseteq T \vee S \supseteq T$$

Supponiamo $S \subseteq T \Leftrightarrow S \cap T = S$ (0)

Supponiamo per assurdo che $f_{|S\cap T} \neq g_{|S\cap T}$

$$f_{|S\cap T} \neq g_{|S\cap T} \Leftrightarrow M = \{x \in S \cap T \mid f(x) \neq g(x)\} \neq \emptyset$$

$$M \underbrace{=}_{(0)} \{x \in S \mid f(x) \neq g(x)\} \quad (1)$$

$$\emptyset \neq M \subseteq A \underbrace{\Rightarrow}_{A \text{ b.o.}} \exists m = \min M \in M \subseteq S \quad (2)$$

$$m \in M \Rightarrow f(m) \neq g(m) \underbrace{\Leftrightarrow}_{[3.3,\text{pg.}1]} f(m) < g(m) \vee g(m) < f(m)$$

Dimostriamo che in entrambi i casi troviamo un assurdo

CASE: $f(m) < g(m)$

$$\begin{cases} f(m) < g(m) \in g(T) \\ g(T) \text{ segmento} \end{cases} \Rightarrow f(m) \in g(T) \Rightarrow \exists t \in T:\ \ g(t) = f(m) \quad (3)$$

$$g(t) = f(m) < g(m) \Rightarrow g(t) < g(m) \underbrace{\Rightarrow}_{g \text{ omomorfismo},[3.6,\text{pg.}3]} t < m \in S,\ S \text{ segmento} \Rightarrow t \in S \quad (4)$$

$$t \in S,\ t < m = \min M \subseteq S \Rightarrow t \in S \backslash M \Rightarrow f(t) = g(t) \underbrace{=}_{(3)} f(m) \Rightarrow f(t) = f(m) \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{g \text{ omomorfismo},[3.6,\text{pg.}3]} \quad t = m \text{ assurdo contro } t < m$$

CASE: $g(m) < f(m)$

E' analogo al caso precedente, con qualche lieve differenza:

$$\begin{cases} g(m) < f(m) \in f(S) \\ f(S) \text{ segmento} \end{cases} \Rightarrow g(m) \in f(S) \Rightarrow \exists s \in S : \quad f(s) = g(m) \quad (3)'$$

$f(s) = g(m) < f(m) \Rightarrow f(s) < f(m) \underbrace{\Rightarrow}_{f \text{ omomorfismo,[3.6,pg.3]}} s < m = \min M \subseteq S \Rightarrow s \in S \backslash M \Leftrightarrow g(s) = f(s) =$

$\underbrace{=}_{(3)'} g(m) \Rightarrow s = m$ assurdo contro $s < m$

□

Proposition 3.13. *Sia $(A, <)$ ben ordinato,*

$$\begin{cases} f : A \longrightarrow A \text{ omomorfismo} \\ f(A) \subseteq A \text{ segmento} \end{cases} \Rightarrow f = \mathrm{id}_A$$

Ovvero, l'unico omomorfismo da A in A, che porta A in un segmento di A, e' l'identita'.

Proof: Basta applicare la [3.12,pg.5] utilizzando

$$S = T = A, \ g = \mathrm{id}_A, \ A' = A$$

□

Proposition 3.14.

$$S \subseteq A \text{ segmento }, \ S \simeq A \Rightarrow S = A$$

Proof:

$S \simeq A \Rightarrow \exists f : S \longrightarrow A$ isomorfismo $\underbrace{\Rightarrow}_{[3.6,\text{pg.3}]} f^{-1} : A \longrightarrow S$ isomorfismo

$$\begin{cases} f^{-1}(A) = S \subseteq A \text{ segmento} \\ f^{-1} : A \longrightarrow S \subseteq A \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{[3.13,\text{pg.6}]} f^{-1} = \mathrm{id}_A \Rightarrow A = \mathrm{id}_A(A) = f^{-1}(A) = S \Rightarrow S = A$$

□

Proposition 3.15. *Siano $(A, <)$, $(A', <)$ insiemi ben ordinati, $S_i \subseteq A$, $S_i' \subseteq A'$ segmenti $\forall i \in I$ e siano $f_i : S_i \longrightarrow S_i'$ isomorfismi fra essi, allora*

$$f = \bigcup_{i \in I} f_i$$

e' un omomorfismo.
Nota: la funzione f si puo' cosi' definire:

$$f : \bigcup S_i \longrightarrow \bigcup S_i'$$
$$x \in S_i \mapsto f_i(x)$$

od anche:

$$f_{|S_i} = f_i$$

Proof: Sia $S = \bigcup S_i$, $S' = \bigcup S_i'$. S, S' sono ancora segmenti per la [3.11,pg.4]
$\langle 1 \rangle$ f e' una funzione

Dobbiamo dimostrare che f e' ben posta, ovvero che $x \in S_i \cap S_j \Rightarrow f_i(x) = f_j(x)$.

$$\begin{array}{l} S_i, S_j \text{ segmenti} \\ f_i \text{ isomorfismo } \Rightarrow f_i(S_i) = S_i' \subseteq A' \text{ segmento} \\ f_j \text{ isomorfismo } \Rightarrow f_j(S_j) = S_j' \subseteq A' \text{ segmento} \end{array}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{[3.12,\text{pg.}5]} (f_i)_{|S_i \cap S_j} = (f_j)_{|S_i \cap S_j} \underbrace{\Rightarrow}_{x \in S_i \cap S_j} f_i(x) = f_j(x)$$

$\langle 2 \rangle$ f e' un isomorfismo

Siano $x, y \in S$

$x, y \in S \Rightarrow x \in S_i,\ y \in S_j$

S_i, S_j segmenti $\underbrace{\Rightarrow}_{[3.10,\text{pg.}4]}$ $S_i \subseteq S_j \vee S_j \subseteq S_i \Rightarrow x, y \in S_i \cup S_j$. Supponiamo ad esempio, $S_j \subseteq S_i$

$$\Rightarrow f(x) = f_{|S_i}(x) \underbrace{=}_{\text{passo 1}} f_i(x) \quad (1)$$

$$\Rightarrow f(y) = f_{|S_i}(y) \underbrace{=}_{\text{passo 1}} f_i(y) \quad (2)$$

f_i isomorfismo , $x < y,\ x, y \in S_i \Rightarrow f_i(x) < f_i(y) \underbrace{\Leftrightarrow}_{(1),(2)} f(x) < f(y)$

Per la [3.6,pg.3], basta provare che f e' surriettiva:

$$f(S) = f\left(\bigcup_{i \in I} S_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(S_i) = \bigcup_{i \in I} f_{|S_i}(S_i) = \bigcup_{i \in I} f_i(S_i) \underbrace{=}_{f_i \text{ isomorfismo}} \bigcup_{i \in I} S_i' = S'$$

□

Definition 3.16. Siano $(A, <),\ (A', <)$ ben ordinati,

$$A \hookrightarrow A' \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists S' \subseteq A' \text{ segmento: } A \simeq S'$$

Lemma 3.17.

$$S \subset A \textit{ segmento, } a = \min A \backslash S \Rightarrow S \cup \{a\} \subseteq A \textit{ segmento}$$

Proof: Sia $x \in A$,

$$x < s \in S \underbrace{\Rightarrow}_{S \text{ segm.}} s \in S \subseteq S \cup \{a\}$$

$$x < a = \min A \backslash S \Rightarrow x \in A \backslash (A \backslash S) = S \subseteq S \cup \{a\}$$

□

Theorem 3.18.

$$(A, <),\ (A', <) \textit{ ben ordinati } \Rightarrow A \hookrightarrow A' \vee A' \hookrightarrow A$$

Proof: Sia

$$\Phi = \{\phi : s \longrightarrow s' \mid s \subseteq A \text{ segmento, } s' \subseteq A' \text{ segmento , } f \text{ isomorfismo } \}$$

Per la [3.15,pg.6], la funzione:

$$f = \bigcup_{\phi \in \Phi} \phi \quad (0)$$

$$f : S \longrightarrow S'$$

e' un isomorfismo. Inoltre,

$f = \max \Phi$, secondo la relazione $(\phi \leq \phi' \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \phi \subseteq \phi' \Leftrightarrow \operatorname{dom}\phi \subseteq \operatorname{dom}\phi',\ \operatorname{cod}\phi \subseteq \operatorname{cod}\phi',\ \phi'_{|\operatorname{dom}\phi} = \phi)$ (1)

$\langle 1 \rangle$ $\Phi \neq \emptyset$

Infatti, un elemento di Φ e'

$$\phi : \{\min A\} \longrightarrow \{\min A'\}$$

Nota: il singoletto $\{\min A\}$ e' un segmento di A.

$\langle 2 \rangle$ $A \simeq S' \vee A' \simeq S$

Per la (0), basta dimostrare che

$\langle 2.1 \rangle$ $A = S \vee A' = S'$

Procediamo per assurdo:

$\neg(A = S \vee A' = S'),\ S \subseteq A,\ S' \subseteq A' \Leftrightarrow S \subset A \wedge S' \subset A' \underbrace{\Rightarrow}_{A, A' \text{ b. o.}} \exists \overline{a} = \min A \backslash S,\ \overline{a}' = \min A \backslash S'$ (3)

S segmento di A, (3) $\underbrace{\Rightarrow}_{[3.17,\text{pg.}7]}$ $S \cup \{\overline{a}\}$ e' un segmento di A (3.1)

Analogamente $S' \cup \{\overline{a}'\}$ e' un segmento di A' (3.2)

Sia

$$\overline{f} : S \cup \{\overline{a}\} \longrightarrow S' \cup \{\overline{a}'\}$$

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in S \\ \overline{a}' & x = \overline{a} \end{cases}$$

e' immediato verificare che $\overline{f}$ e' un isomorfismo,

$$\overline{f} \text{ isomorfismo, } (3.1), (3.2) \Rightarrow \overline{f} \in \Phi$$

e questo e' assurdo contro la (1).

□

Definition 3.19. Sia $(M, \leq)$ POSET,

Vale la *c.c.d.f* (condizione catene discendenti finite) $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\nexists \emptyset \neq A = \{a_i\}_{i \subseteq I \subseteq \mathbb{N}} \subseteq M :\ a_0 > a_1 > a_2 > \dots$

Vale la c.m (condizione di minimo) $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall \emptyset \neq A \subseteq M\ \exists$ un elemento minimale di A

Proposition 3.20.

$$c.m \Leftrightarrow c.d.d.f$$

Proof:

$\langle 1 \rangle$ Dim. $\Rightarrow$

Per assurdo esiste una catena discendente infinita:

$$a_0 > a_1 > \dots$$

Per Hp

$$\exists i :\ a_i \text{ minimale } \Rightarrow \text{ assurdo contro } a_{i+1} < a_i$$

$\langle 2 \rangle$ Dim. $\Leftarrow$

Per assurdo non esiste un minimale di A $(*)$

$A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in A \underbrace{\Rightarrow}_{(*)} \exists a_1 \in A \backslash \{a\} :\ a_1 < a \underbrace{\Rightarrow}_{(*)} \exists a_2 \in A \backslash \{a_1\} :\ a_2 < a_1 \underbrace{\Rightarrow}_{(*)} \dots$

Nota: in questa dimostrazione abbiamo fatto uso dell'assioma della scelta.

□

Definition 3.21. Sia $M \neq \emptyset$. E sia $\emptyset \neq A \subseteq M$.
A e' φ-differenziato $\Leftrightarrow$

$$D1.\ \exists \leq:\ (A, \leq) \text{ e' ben ordinato}$$
$$D2.\ \exists \varphi \text{ funzione di scelta su } M$$
$$D3.\ \forall a \in A\ \ a = \varphi(M \backslash A_a)$$

Sostanzialmente, se A e' φ-diff, possiamo estrarre da ogni A_a l'elemento a, usando una funzione di scelta φ

Proposition 3.22.

$$A, B\ \varphi\text{-}diff\ \Rightarrow \begin{cases} A \subseteq B\ segmento \\ \leq = \leq'_{|A} \end{cases} \quad oppure \quad \begin{cases} B \subseteq A\ segmento \\ \leq_{|B} = \leq' \end{cases}$$

dove $\leq$ e' la relazione d'ordinamento associata ad A e $\leq'$ e' quella associata a B. Con $\leq_{|B}$ intendiamo la restrizione di $\leq$ su B, e quindi con $\leq_{|B} = \leq'_{|B}$ intendiamo: $\forall x, y \in B\ (x \leq y \Leftrightarrow x \leq' y)$. (Nota [2])

Proof:

$A, B\ \varphi$-diff $\Rightarrow (A, \leq)$, $(B, \leq')$ sono ben ordinati $\Rightarrow \exists a = \min\limits_{\leq} A$, $\exists b = \min\limits_{\leq'} B$ (1)

$A, B\ \varphi$-diff $\Rightarrow a = \varphi(M \backslash A_a)$, $b = \varphi(M \backslash B_b)$ (2)

$\langle 1 \rangle$ Dim. $a = b$

$$a = \min_{\leq} A \Rightarrow A_a = \emptyset$$
$$b = \min_{\leq'} B \Rightarrow B_b = \emptyset$$
$$a \underbrace{=}_{(2)} \varphi(M \backslash A_a) = \varphi(M) = \varphi(M \backslash B_b) \underbrace{=}_{(2)} b$$

Consideriamo l'insieme S cosi' definito:
$S = \left\{ s \subseteq A \cap B \mid s \text{ segmento di } (A, \leq), s \text{ segmento di } (B, \leq'),\ \leq_{|s} = \leq'_{|s} \right\}$ (3)

dove con $\leq_{|s}$ intendiamo la restrizione di $\leq$ su s, e quindi con $\leq_{|s} = \leq'_{|s}$ intendiamo: $\forall x, y \in s\ (x \leq y \Leftrightarrow x \leq' y)$
Si ha:

$\langle 2 \rangle$ $T = \bigcup S\ \ \in S$

[2] $\leq = \leq'_{|A}$ equivale a dire che $\leq \subseteq \leq'$

$\min\limits_{\leq} A = a = b = \min\limits_{\leq'} B \Rightarrow \{a\} \in S \Rightarrow S \neq \emptyset$ (4)

Per la [3.11,pg.4] $T = \bigcup\limits_{s \in S} s$ e' un segmento di A e segmento di B (4.1)

$\leq_{|T} = \leq'_{|T}$, infatti, (4.2)

$x, y \in T \Rightarrow x \in r,\ y \in s,$ con $r, s \in S$

Supponiamo $x \leq y$ e dimostriamo $x \leq' y$:

$$\begin{cases} x \leq y \in s \\ s \text{ segmento di } A \\ x \in r \subseteq A \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{def. di segmento}} x \in s$$

$$x, y \in s,\ x \leq y \underbrace{\Rightarrow}_{s \in S,\ \leq_{|s} = \leq_{|s'}} x \leq' y$$

Analogamente si vede che $(x \leq' y \Rightarrow x \leq y)$

(4), (4.1), (4.2) $\Rightarrow T \in S$ (5)

⟨3⟩ $T = A \vee T = B$

Se per assurdo $T \subset A,\ T \subset B$, allora

$$T \subset A,\ T \subset B \Rightarrow \exists a' = \min_{\leq} A \backslash T,\ \exists b' = \min_{\leq'} B \backslash T$$

⟨3.1⟩ $a' = b'$

$$T \subset A \text{ segmento (per la (5))} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[3.9,pg.4]}} T = A_{a'}$$

Analogamente $T = B_{b'}$

$a' = \varphi(M \backslash A_{a'}) = \varphi(M \backslash T) = \varphi(M \backslash B_{b'}) = b'$

T segmento di $A, B,\ \min\limits_{\leq} A \backslash T = a' = b' = \min\limits_{\leq'} A \backslash T \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[3.17,pg.7]}} T \cup \{a'\}$ segmento di A, B (6.0)

$$\begin{cases} T \subseteq A \text{ segmento} \\ a' \in (A \backslash T, \leq),\ (A \backslash T, \leq') \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[3.8,pg.3]}} a' \geq t,\ a' \geq' t\ \ \forall t \in T \quad (6.1)$$

$$\begin{cases} T \in S \Rightarrow\ \leq_{|T} = \leq'_{|T} \\ (6.1) \end{cases} \Rightarrow\ \leq_{|T \cup \{a'\}} = \leq'_{|T \cup \{a'\}} \quad (6.2)$$

(6.0), (6.2) $\Rightarrow T \cup \{a'\} \in S$ (6)

$T = \bigcup S \underbrace{\Rightarrow}_{(6)} T \cup \{a'\} \subseteq T \Rightarrow a' \in T$ assurdo contro $a' = \min\limits_{\leq} A \backslash T \notin T$

⟨4⟩ Q.E.D.

Per il precedente passo

$$T = A \vee T = B \underbrace{\Rightarrow}_{(5)} A \in S \vee B \in S \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ segmento di B} \\ \leq_{|A} = \leq'_{|A} \end{cases} \vee \begin{cases} B \text{ segmento di A} \\ \leq_{|B} = \leq'_{|B} \end{cases}$$

e poiche' $\leq_{|A} = \leq,\ \leq'_{|B} = \leq'$, si ha la tesi.

□

Theorem 3.23. *di Zermelo.*

Sia $M \neq \emptyset$

$$\textit{Assioma della scelta} \Leftrightarrow \exists \leq: \ \ (M, \leq) \textit{ e' ben ordinato}$$

Proof:
$\langle 1 \rangle$ Dim. $\Leftarrow$
Come funzione di scelta φ prendiamo

$$\varphi(A) = \min A$$

E' valida perche' $(M, \leq)$ e' ben ordinato, e quindi il min esiste sempre.
$\langle 2 \rangle$ Dim. $\Rightarrow$
Per l'assioma della scelta, $\exists \varphi$ funzione di scelta su M.
Il singoletto

$$A = \{\varphi(M)\}$$

e' un insieme φ-diff, infatti,

Sia $a = \varphi(M)$

$A_a = \{x \in A = \{a\} \mid x < a\} = \emptyset \Rightarrow \varphi(M \backslash A_a) = a = \varphi(M)$

quindi, il seguente insieme non e' vuoto:

$$L = \bigcup \{\emptyset \neq A \subseteq M \mid A \ \varphi\text{-diff}\}$$

Per comodita' indiciziamo gli insiemi φ-diff:

$\{\emptyset \neq A \subseteq M \mid A \ \varphi\text{-diff}\} = \{A_i \mid i \in I\}$

chiamiamo $\leq_i$ la relazione che rende A_i φ-diff, ovvero $(A_i, \leq_i)$ e' ben ordinato (1)

$L = \bigcup_{i \in I} A_i$ (2)

$\langle 2.1 \rangle$ L e' φ-diff

$\langle 2.1.1 \rangle$ $\exists \leq: \ \ (L, \leq)$ e' ben ordinato

$a, b \in L \Rightarrow \exists i, j: \ a \in A_i, \ b \in A_j$

A_i, A_j φ-diff $\underbrace{\Rightarrow}_{[3.22,\text{pg.}9]}$ $A_i \subseteq A_j \vee A_j \subseteq A_i \Rightarrow a, b \in A_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \max\{A_i, A_j\}$ $(2')$

$\underbrace{\Rightarrow}_{(1)} a \lessgtr_{ij} b$, dove con $a \lessgtr b$ indichiamo $(a \leq b \vee a \geq b)$ (3)

Come relazione $\leq$ su L scegliamo: $a \leq b \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \leq_{ij} b$

$\langle 2.1.1.1 \rangle$ Tale relazione e' ben posta , ovvero

$$a \in A_i', \ b \in A_j', \ A_i' \supseteq A_j' \Rightarrow (a \leq_i b \Leftrightarrow a \leq_i' b)$$

infatti,

Supponiamo $\max\{A_i, A_j\} = A_i$,

$A_{ij} = \max\{A_i, A_j\} = A_i \Rightarrow \ \leq_{ij} = \leq_i$

$$A_i, A_i' \ \varphi\text{-diff} \underbrace{\Rightarrow}_{[3.22,\text{pg.}9]} \begin{cases} A_i \subseteq A_i' \text{ segmento} \\ \leq_i = (\leq_i')_{|A_i} \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} A_i' \subseteq A_i \text{ segmento} \\ (\leq_i)_{|A_i'} = \leq_i' \end{cases} \quad (*)$$

in ogni caso, poiche' $a, b \in A_i' \cap A_i$ si ha $a \leq_i b \Leftrightarrow a \leq_i' b$

$\langle 2.1.1.2 \rangle$ $(L, \leq)$ e' ben ordinato

$\langle 2.1.1.2.1 \rangle$ $(L, \leq)$ e' un TOTET

Siano $a, b, c \in L$, allora

$a, b, c \in L \Rightarrow a, b, c \in A_{ijk} = \max\{A_i, A_j, A_k\}$ (3)

A_h φ-diff $\forall h \Rightarrow (A_h, \leq_h)$ ben ordinato $\forall h \Rightarrow (A_h, \leq_h)$ TOTET $\forall h \Rightarrow (A_{ijk}, \leq_{ijk})$ TOTET (4)

Per definizione di $(L, \leq)$, la relazione usata per confrontare a, b, c e' $\leq_{ijk}$. (5)

(4), (5) $\Rightarrow$ a,b,c soddisfano le proprieta' di un TOTET

Quindi, per l'arbitrarieta' di $a, b, c \in L$, segue che $(L, \leq)$ e' un TOTET.

$\langle 2.1.1.2.2 \rangle$ Vale la c.c.d.f per $(L, \leq)$

Supponiamo per assurdo che esista

$$a_0 > a_1 > \cdots > a_n > \ldots$$

allora

$(2') \Rightarrow a_0 \in A_i,\ a_n \in A_j,\ \ A_i \subseteq A_j$ segm. $\vee$ $A_j \subseteq A_i$ segm. (6)

$a_n \in A_i$, altrimenti: (7)

$$a_n \notin A_i \underbrace{\Rightarrow}_{(6)} A_i \subseteq A_j$$

$$\begin{cases} A_i \subseteq A_j \text{ segmento} \\ a_n < a_0 \in A_i \end{cases} \Rightarrow a_n \in A_i \text{ assurdo contro l'ipotesi } a_n \notin A_i$$

$$(7) \Rightarrow \{a_0, a_1, \ldots,\} \subseteq A_i \underbrace{\Rightarrow}_{(A_i, \leq_i) \text{ ben ordinato}} \exists \min\{a_0, a_1, \ldots,\}$$

assurdo.

$\langle 2.1.1.2.3 \rangle$ QED

Sia $\emptyset \neq A \subseteq L$, dimostriamo che $\exists \min A$.

passo 2.1.1.2.2 $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[3.20,pg.8]}}$ vale la condizione di minimo $\Rightarrow \exists a \in A$ minimale $\underbrace{\Rightarrow}_{(L, \leq) \text{ e' un TOTET}}$ $a = \min A$

$\langle 2.1.1.3 \rangle$ L e' φ-diff

Dobbiamo dimostrare che

$$a = \varphi(M \setminus L_a) \ \ \forall a \in L$$

Si ha

$$a \in L \underbrace{\Rightarrow}_{(2')} a \in A_i \subseteq L$$

Sia $A = A_i$

$\langle 2.1.1.3.1 \rangle$ $L_a = A_a$

$\langle 2.1.1.3.1.1 \rangle$ $\supseteq$

$$L_a = \{x \in L \mid x < a\} \underbrace{\supseteq}_{A = A_i \subseteq L} \{x \in A \mid x < a\} = A_a$$

$\langle 2.1.1.3.1.2 \rangle$ $\subseteq$

Sia $x \in L_a$

$$x \in L_a \Rightarrow x < a,\ x \in L$$

Se per assurdo $x \notin A$, allora

$(2') \Rightarrow x \in A_j,\ A_j \subseteq A_i = A$ segmento $\vee\ A \subseteq A_j$ segmento $\underbrace{\Rightarrow}_{x \notin A} A \subset A_j$ segmento $\quad (**)$

$x < a \underbrace{\Rightarrow}_{\text{def. di } (L,\leq),\ A \subseteq A_j} x <_j a \underbrace{\Leftrightarrow}_{x,a \in A}$

$\begin{cases} x <_j a \in A \\ x \in A_j \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{(**)} x \in A$ assurdo

quindi,

$$x \in A$$

Infine,

$$\varphi(M \backslash L_a) = \varphi(M \backslash A_a) \underbrace{=}_{A \text{ e' } \varphi\text{-diff}} a$$

$\langle 2.1.1.4 \rangle$ $L = M$

Supponiamo per assurdo $L \subset M$,

$$L \subset M \Rightarrow M \backslash L \neq \emptyset \Rightarrow \exists a = \varphi(M \backslash L)$$

Sia $L' = L \cup \{a\}$

$\langle 2.1.1.4.1 \rangle$ L' e' φ-diff

Siano $x, y \in L'$, poniamo la seguente relazione

$$x, y \in L \overset{\text{def}}{\Rightarrow} (x \leq' y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \leq y)$$

$$x \in L,\ y = a \overset{\text{def}}{\Rightarrow} x < a \quad (7)$$

Si ha:

$$(7) \Rightarrow a = \max_{\leq'} L' \quad (7.1)$$

Poiche' $(L, \leq)$ e' ben ordinato, e' facile vedere che $(L', \leq')$ e' ben ordinato. Sia $x \in L'$, allora

Case: $x \in L$

$$x \in L \Rightarrow \underbrace{\Rightarrow}_{\text{def di } \leq'} L_x = L'_x$$

$$\varphi(M \backslash L'_x) = \varphi(M \backslash L_x) \underbrace{=}_{L \text{ e' } \varphi\text{-diff}} x$$

Case: $x = a$

$$(7.1) \Rightarrow L'_a = L$$

$$\varphi(M \backslash L'_a) = \varphi(M \backslash L) \underbrace{=}_{\text{per def.}} a$$

In ogni caso

$$\varphi(M \backslash L'_x) = x$$

$$L' \text{ } \varphi\text{-diff } \Rightarrow L' \subseteq L \Leftrightarrow L \cup \{a\} \subseteq L \Rightarrow a \in L$$

$$a \underbrace{=}_{\text{per def.}} \varphi(M \backslash L),\ \varphi \text{ funzione di scelta } \Rightarrow a \in M \backslash L \Rightarrow a \notin L$$

assurdo.

$\langle 2.1.1.5 \rangle$ Q.E.D.

$$L = M,\ (L, \leq) \text{ ben ordinato} \Rightarrow (M, \leq) \text{ ben ordinato}$$

□

Theorem 3.24. *Induzione transfinita.*
Sia $(M, \leq)$ ben ordinato, e $I \subseteq M$, allora

$$\begin{cases} 1.\ \min M \in I \\ 2.\ \forall a \in M \quad (M_a \subseteq I \Rightarrow a \in I) \end{cases} \Rightarrow I = M$$

Nota: questo teorema e' una generalizzazione dell'induzione, infatti, per $M = \mathbb{N}$ si ottiene l'induzione classica.

Proof: Supponiamo per assurdo che $I \subset M$

$$I \subset M \Rightarrow M \backslash I \neq \emptyset \underbrace{\Rightarrow}_{M \text{ ben ordinato}} \exists m = \min M \backslash I$$

$$\begin{cases} m \in M \backslash I \Rightarrow m \notin I \\ 1. \Leftrightarrow \min M \in I \end{cases} \Rightarrow m \neq \min M \Rightarrow M_m \neq \emptyset$$

$$x \in M_m \Rightarrow x < m = \min M \backslash I \Rightarrow x \in M \backslash (M \backslash I) = I$$

$$\Rightarrow M_m \subseteq I \underbrace{\Rightarrow}_{2.} m \in I \text{ assurdo contro } m = \min M \backslash I \notin I$$

□

Theorem 3.25. *di Hausdorff.*
Sia $(M, \leq)$ un POSET

$$C \subseteq M \text{ e' una catena } \Rightarrow \exists C' \subseteq M \text{ catena massimale di } M\text{: } C \subseteq C'$$

Nota[3]

Proof: Se $C = M$, allora la tesi e' vera: basta scegliere $C' = C$.
Supponiamo $C \subset M$.
Proof sketch:La dimostrazione procede cosi': ben ordiniamo $M \backslash C$ ed estendiamo la catena C considerando tutti gli elementi di $M \backslash C$ che sono confrontabili con C. L'estensione ottenuta sara' la catena massimale cercata

$$C \subset M \Rightarrow B = M \backslash C \neq \emptyset \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Zermelo [3.23,pg.10]}} \exists \leq' :\ (B, \leq') \text{ e' ben ordinato (1)}$$

Sia $m = \min_{\leq'} B$.
Definiamo per induzione gli insiemi B_1, B_2:

$$m \overset{\text{def}}{\in} \begin{cases} B_1 & m \leq\geq C \\ B_2 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2)$$

dove $m \leq\geq C$ indica che m e' confrontabile con tutti gli elementi di C

Sia $b \in B \backslash \{m\}$,

$$b \overset{\text{def}}{\in} \begin{cases} B_1 & b \leq\geq C,\ \ b \leq\geq \{y \in B_1 \mid y <' b\} \\ B_2 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3)$$

Chiaramente $B_1 \cup B_2 = B$. Sia $C' = C \cup B_1$

[3] C catena di $(M, \leq) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $(C, \leq)$ e' un TOTET. (C utilizza la stessa relazione $\leq$ di M

⟨1⟩ C' e' una catena
Dobbiamo dimostrare che $\forall a, b \in C' \;\; a \leq\geq b$.

$$C \text{ catena } \Rightarrow \forall a, b \in C \;\; a \leq\geq b$$
$$(2) \Rightarrow a \in C,\; b \in B_1 \Rightarrow a \leq\geq b$$
$$b_1, b_2 \in B_1 \underbrace{\Rightarrow}_{B_1 \subseteq B,\ (B, \leq') \text{ ben ordinato}} b_1 \leq'\geq' b_2$$

Case: $b_1 \leq' b_2$
Case: $b_2 = m = \min_{\leq'} B$

$$b_1 \leq' b_2 = m = \min_{\leq'} B \Rightarrow b_1 = b_2 \Rightarrow b_1 \leq\geq b_2$$

Case: $b_2 > m$

$$(3) \Rightarrow b_2 \leq\geq \{y \in B \mid y <' b_2\} \underbrace{\Rightarrow}_{b_1 \leq' b_2} b_2 \leq\geq b_1$$

Case: $b_1 \geq' b_2$
Analogamente.

⟨2⟩ C' e' una catena massimale
Se per assurdo $\exists C'' : \;\; C'' \supset C'$, allora
$C'' \supset C' = C \cup B_1 \Rightarrow \exists c \in C'' : \;\; c \in M \backslash (C \cup B_1) = (M \backslash C) \cap (M \backslash B_1) = B \cap (M \backslash B_1) = B_2 \Rightarrow$
$\underbrace{\Rightarrow}_{(2),(3)} \exists d \in C \cup \{y \in B_1 \mid y <' c\} \subseteq C' : \;\; c, d$ non sono confrontabili
Assurdo contro C'' catena.

□

Corollary 3.26. *Sia $\emptyset \neq (M, \leq)$ un POSET, allora, per il teorema di Hausdorff si ha*

$$\exists C' \subseteq M \text{ catena massimale di } M$$

Proof:

$$M \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in M$$
$$\{a\} \text{ e' una catena di } M \underbrace{\Rightarrow}_{[3.25,\text{pg.}14]} \exists C' \text{ catena massimale di } M$$

□

Proof:

□

Definition 3.27. Lemma di Kuratowski-Zorn.
Sia $A \neq \emptyset$ un POSET,

$$\forall \Gamma \subseteq A \text{ catena di } A \quad \exists a \in A : \; a \text{ e' un maggiorante di } \Gamma \Rightarrow \exists m \in A \text{ elemento massimale di } A$$

Theorem 3.28.

Assioma della scelta $\Leftrightarrow$ Teorema di Zermelo $\Leftrightarrow$ Teorema di Hausdorff $\Leftrightarrow$ Lemma di Zorn

Proof:
⟨1⟩ Assioma della scelta $\Leftrightarrow$ Teorema di Zermelo
Vedi [3.23,pg.10]
⟨2⟩ Teorema di Zermelo $\Rightarrow$ Teorema di Hausdorff

La dimostrazione del teorema di Hausdorff vista in [3.25,pg.14], fa uso del teorema di Zermelo.

⟨3⟩ Teorema di Hausdorff $\Rightarrow$ Lemma di Zorn

Supponendo che per ogni catena di $\emptyset \neq (A, \leq)$ esiste un maggiorante, dimostriamo che $\exists m \in A$ elemento massimale di A.

$$A \neq \emptyset \quad \underbrace{\Rightarrow}_{Hausdorff,[3.26,\text{pg.}15]} \quad \exists C' \text{ catena massimale di } A$$

Per Hp $\exists m \in A$ maggiorante di C'

Supponiamo per assurdo che m non e' un massimale di A, allora

$$m \text{ no-massimale } \Rightarrow \exists a \in A : \ a > m \quad \underbrace{\Rightarrow}_{m \text{ maggiorante di } C'} \quad C' \cup \{a\} \text{ e' una catena di } A$$

assurdo contro la massimalita' di C'

⟨4⟩ Lemma di Zorn $\Rightarrow$ Assioma della scelta

Sia $M \neq \emptyset$. Dimostriamo che esiste una funzione φ di scelta su M.

Definiamo il seguente insieme:

$$\Phi = \{\varphi : S \longrightarrow M \mid S \subseteq \mathcal{P}(M)^*, \ \varphi(X) \in X \ \ \forall X \in S\}$$

$$\text{Sia } \varphi_a : \{a\} \longrightarrow M, \text{ con } \varphi_a(\{a\}) = a$$

$$\varphi_a \in \Phi \Rightarrow \Phi \neq \emptyset$$

Su Φ definiamo la seguente relazione d'ordine[4]:

$$\varphi \leq \varphi' \ \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \ \varphi \subseteq \varphi'$$

$(\Phi, \leq)$ e' un POSET.

Sia C una catena di $(\Phi, \leq)$. Consideriamo

$$\psi = \bigcup_{\varphi \in C} \varphi$$

⟨4.1⟩ $\psi \in \Phi$

⟨4.1.1⟩ ψ e' una funzione

Sia $x \in \operatorname{dom} \psi$ e siano $\varphi, \varphi' \in C : \ x \in \operatorname{dom} \varphi \cap \operatorname{dom} \varphi'$, allora

$$\varphi, \varphi \in C, \ C \text{ catena } \Rightarrow \varphi \subseteq \varphi' \vee \varphi' \subseteq \varphi \Rightarrow \varphi(x) = \varphi'(x)$$

Quindi ψ e' una funzione.

⟨4.1.2⟩ $\psi(x) \in x$

Infatti

$$\psi(x) = \varphi(x) \underbrace{\in}_{\varphi \in C \subseteq \Phi} x$$

⟨4.1.3⟩ $\operatorname{dom} \psi \subseteq \mathcal{P}(M)^*$

$$\varphi \in C \subseteq \Phi \Rightarrow \operatorname{dom} \varphi \subseteq \mathcal{P}(M)^* \ \ (*)$$

$$\operatorname{dom} \psi = \bigcup_{\varphi \in C} \operatorname{dom} \varphi \underbrace{\subseteq}_{(*)} \mathcal{P}(M)^*$$

Possiamo quindi affermare che $\psi \in \Phi$

$$\psi \in \Phi, \ \ \psi = \bigcup_{\varphi \in C} \varphi \Rightarrow \varphi \text{ maggiorante di } C$$

Abbiamo cosi' dimostrato che ogni catena di Φ ha un maggiorante. Allora per il Lemma di Zorn:

$$\exists \psi' \in \Phi \text{ massimale per } \Phi$$

⟨4.2⟩ ψ' e' la funzione di scelta cercata

[4] gia' vista in precedenza nella dimostrazione di [3.18,pg.7]

Supponiamo per assurdo che $\operatorname{dom}\psi' \neq \mathcal{P}(M)^*$, ovvero che $\operatorname{dom}\psi' \subset \mathcal{P}(M)^*$. Allora, possiamo estendere ψ' contraddicendo la massimalita' di ψ':

$$\operatorname{dom}\psi' \subset \mathcal{P}(M)^* \Rightarrow \exists A \in \mathcal{P}(M)^* \setminus \operatorname{dom}\psi'$$
$$\text{Sia } \psi'' = \psi \cup \{(A, a)\}, \text{ dove } a \in A \text{ e' fissato}$$
$$\psi'' \in \Phi, \quad \psi'' \supseteq \psi. \text{ Assurdo.}$$

□

4 Numeri ordinali

Definition 4.1. Sia α una classe.

α e' un numero ordinale $\Leftrightarrow$

$O1$. α e' un insieme

$O2$. $\beta \in \alpha \Rightarrow \beta \subseteq \alpha$

$O3$. $(\alpha, \in)$ e' un insieme ben ordinato

Sia Ord la classe di tutti i numeri ordinali.
Nota: $\emptyset \in \text{Ord}$.
Nota: alcune volte useremo la scrittura $a \overset{\in}{<} b$ al posto di $a \in b$, per sottolineare che $a < b$ secondo la relazione d'ordine $(\alpha, \in)$.
Con $a \overset{\in}{\leq} b$ intendiamo $a \overset{\in}{<} b \vee a = b$.

Proposition 4.2. *Sia* $\alpha \in \text{Ord}$,

1. $\beta \in \alpha \Rightarrow \beta \neq \alpha$
2. $\gamma \in \beta \in \alpha \Rightarrow \gamma \in \alpha$

Proof:
$\langle 1 \rangle$

$$\beta = \alpha \Rightarrow \alpha \in \alpha$$

assurdo contro [QUA,Oss8,pg.21].
$\langle 2 \rangle$

$$\beta \in \alpha \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{O2} \beta \subseteq \alpha \underbrace{\Rightarrow}_{\gamma \in \beta} \gamma \in \alpha$$

□

Lemma 4.3.

$$\alpha = \max_{\overset{\in}{<}} \alpha \cup \{\alpha\}$$

Proof:

$$\beta \in \alpha \cup \{\alpha\} \Rightarrow \beta \in \alpha \vee \beta = \alpha \Leftrightarrow \beta \overset{\in}{<} \alpha \vee \beta = \alpha \Leftrightarrow \beta \overset{\in}{\leq} \alpha$$

□

Theorem 4.4.

$$\alpha \in \text{Ord} \Rightarrow S\alpha \in \text{Ord}$$

dove $S\alpha = \alpha \cup \{\alpha\}$ *e' il successivo di* α *(vedi [QUA,Def,pg.18]).*

Proof: Dimostriamo le $O1, O2, O3$ della def [4.1,pg.17]

$\langle 1 \rangle$ $O1$

$$\alpha \in \text{Ord} \Rightarrow \alpha \text{ insieme} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,Oss5,pg.18]}} S\alpha \text{ insieme}$$

$\langle 2 \rangle$ $O2$

$$\beta \in S\alpha = \alpha \cup \{\alpha\} \Rightarrow \beta \in \alpha \vee \beta = \alpha$$

CASE: $\beta \in \alpha$

$$\beta \in \alpha \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{O2} \beta \subseteq \alpha \subseteq S\alpha$$

CASE: $\beta = \alpha$

$$\beta = \alpha \subseteq S\alpha$$

$\langle 3 \rangle$ $O3$

$\alpha \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{O3} (\alpha, \in)$ ben ordinato (1)

$\alpha \underbrace{=}_{\text{[4.3,pg.17]}} \max S\alpha \overset{\in}{<} \Rightarrow \alpha$ e' confrontabile con tutti gli elementi di $S\alpha$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow (S\alpha, \in)$ ben ordinato

□

Proposition 4.5. *Sia* $\{\alpha_i\}_I \subseteq \text{Ord}$.

$$(\{\alpha_i\}_I, \subseteq) \text{ e' una catena } \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \alpha_i \in \text{Ord}$$

In particolare, se abbiamo la successione di ordinali $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, ,$ *si ha*

$$\alpha_1 \in \alpha_2 \in \ldots \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i \in \text{Ord}$$

Proof:

$$(\{\alpha_i\}_I, \subseteq) \text{ e' una catena } \Leftrightarrow \alpha_i \subseteq \alpha_j \vee \alpha_j \subseteq \alpha_i \ \ \forall i, j \in I \ \ (1)$$

$\langle 1 \rangle$ $O1$

$$\alpha_i \in \text{Ord} \ \ \forall i \in I \underbrace{\Rightarrow}_{O1} \alpha_i \text{ insieme} \ \ \forall i \in I \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,Oss16,pg.22]}} \bigcup_{i \in I} \alpha_i \text{ e' un insieme}$$

$\langle 2 \rangle$ $O2$

$$\beta \in \bigcup_{i \in I} \alpha_i \Rightarrow \beta \in \alpha_i \in \text{Ord} \Rightarrow \beta \subseteq \alpha_i \subseteq \bigcup_{i \in I} \alpha_i$$

$\langle 3 \rangle$ $O3$

Siano $a, b \in \bigcup_{i \in I} \alpha_i$ e dimostriamo che a, b sono confrontabili secondo $\in$:

$$a, b \in \bigcup_{i \in I} \alpha_i \Rightarrow a \in \alpha_i, \ b \in \alpha_j \underbrace{\Rightarrow}_{(1)} a, b \in a_{ij} = \max\{a_i, a_j\}$$

$(a_{ij}, \in)$ ben ordinato $\Rightarrow a, b$ confrontabili

⟨4⟩ Dimostriamo la seconda parte della proposizione
E' sufficiente provare che $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \}$ e' una catena:
$\{\alpha_1, \alpha_2\}$ e' una catena, infatti, $\alpha_i, \alpha_j,\ i < j \Leftrightarrow h = i + h,\ \alpha_i \in \alpha_{i+1} \in \cdots \in \alpha_{i+h} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.2,\text{pg.}17]} \alpha_i \in \alpha_{i+h} = \alpha_j$

□

Definition 4.6. Poniamo

$$\alpha + 1$$

Grazie al teorema [4.4,pg.17] possiamo considerare la seguente successione di ordinali:

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \\
1 &\stackrel{\text{def}}{=} 0 + 1 = S0 = S\emptyset = \emptyset \cup \{0\} = [0] \\
2 &\stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1 = S1 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} \\
3 &\stackrel{\text{def}}{=} 2 + 1 = S2 = \{0, 1, 2\} \\
&\vdots \\
n &\stackrel{\text{def}}{=} (n-1) + 1 = S(n-1) = \{0, 1, \dots, n-1\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Questi ordinali vengono chiamati *ordinali finiti*, in quanto $|n| = n < \infty$. Gli ordinali non finiti si chiamano *ordinali transfiniti*. Indichiamo con Ord_∞ la classe di tutti gli ordinali transfiniti. Consideriamo

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_n n = \{0, 1, 2, \dots, \} = \mathbb{N}$$

Per la [4.5,pg.18], $\omega \in \text{Ord}$. Possiamo quindi considerare la succesione di ordinali:

$$\begin{aligned}
&\omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots \\
&2\omega \stackrel{\text{def}}{=} \omega + \omega \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n \in \omega} \omega + n
\end{aligned}$$

Sempre per la [4.5,pg.18], $\omega + \omega \in \text{Ord}$.
E cosi' via...

Lemma 4.7. *Sia* $\alpha \in \text{Ord}$*,*

$$n \in \alpha \Rightarrow 0, 1, \dots, n-1 \in \alpha$$

Proof:

$$n = \{0, 1, \dots, n-1\} \Rightarrow n - i \in n \in \alpha \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.2,\text{pg.}17]} n - i \in \alpha$$

□

Proposition 4.8. *ω e' il piu' piccolo ordinale transfinito, ovvero*

$$\alpha \in \text{Ord}_\infty,\ \alpha \subseteq \omega \Rightarrow \alpha = \omega$$

Proof:

$$|\alpha| = \infty \Rightarrow \alpha \neq \emptyset \ \ (0)$$

⟨1⟩ $0 \in \alpha$

$$(0) \Rightarrow \alpha \neq \emptyset, \ \ \alpha \subset \omega = \mathbb{N} \Rightarrow \exists n \in \alpha \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[4.7,pg.19]}} 0 \in \alpha$$

⟨2⟩ $n \in \alpha \Rightarrow n+1 \in \alpha$

$$|\alpha| = \infty, \ |n| = n \Rightarrow |\alpha \backslash n| = \infty \Rightarrow \exists m \in \alpha \backslash n \subset \omega$$
$$m \notin n, \ m \in \omega \Rightarrow m = \{0, 1, \ldots, n, n+1, \ldots, m-1\} \in \alpha \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[4.7,pg.19]}} n+1 \in \alpha$$

⟨3⟩ Q.E.D.

$$\text{passo 1, passo 2} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{def. di } \omega} \omega \subseteq \alpha$$
$$\begin{cases} \alpha \subseteq \omega \\ \omega \subseteq \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = \omega$$

□

Theorem 4.9.

$$\alpha \in \text{Ord} \Rightarrow \alpha \subseteq \text{Ord}$$

In altri termini:

$$\beta \in \alpha \in \text{Ord} \Rightarrow \beta \in \text{Ord}$$

Proof: Sia $\beta \in \alpha$ e dimostriamo che $\beta \in \text{Ord}$

⟨1⟩ O1

$$\beta \in \alpha \underbrace{\Rightarrow}_{\text{def. di insieme}} \beta \text{ e' un insieme}$$

⟨2⟩ O2

Sia $\gamma \in \beta$ dimostriamo che $\gamma \subseteq \beta$. Sia $\delta \in \gamma$, dimostriamo che $\delta \in \beta$:

$$\gamma \in \beta \in \alpha \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[4.2,pg.17]}} \gamma \in \alpha \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{O2} \gamma \subseteq \alpha$$
$$\delta \in \gamma \in \alpha \Rightarrow \delta \in \alpha$$
$$\beta, \gamma, \delta \in \alpha, \ \ \delta \overset{\in}{<} \gamma \overset{\in}{<} \beta \underbrace{\Rightarrow}_{(\alpha, \overset{\in}{<}) \text{ ben ordinato}} \delta \overset{\in}{<} \beta \Leftrightarrow \delta \in \beta$$

⟨3⟩ O3

$$\beta \in \alpha \underbrace{\Rightarrow}_{O2} \beta \subseteq \alpha \underbrace{\Rightarrow}_{(\alpha, \in) \text{ ben ordinato}} \Rightarrow (\beta, \in) \text{ ben ordinato}$$

□

Theorem 4.10.

$$\alpha \in \text{Ord}, \ \ S \subseteq \alpha \ \textit{segmento} \ \Rightarrow S \in \text{Ord}$$

Proof:
⟨1⟩ O1

$$\alpha \in \mathrm{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{O1} \alpha \text{ insieme}$$

$$S{\subseteq}\alpha,\ \alpha \text{ insieme} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,Oss2,pg.20]}} \quad S \text{ insieme}$$

⟨2⟩ O2
Sia $\beta \in S$ dimostriamo che $\beta{\subseteq}S$:
sia $\delta \in \beta$ dimostriamo che $\delta \in S$.

$$\delta \in \beta \Leftrightarrow \delta \overset{\in}{<} \beta,\ \ S \text{ segmento } \underbrace{\Rightarrow}_{(**)} \delta \in S$$

L'implicazione $(**)$ vale pero' se $\delta \in \alpha$, perche' S e' un segmento di α. Dimostriamo che $\delta \in \alpha$:

$$\delta \in \beta \in S{\subseteq}\alpha \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[4.2,pg.17]}} \quad \delta \in \alpha$$

⟨3⟩ O3

$$S{\subseteq}\alpha \quad \underbrace{\Rightarrow}_{(\alpha,\in) \text{ ben ordinato}} \quad \Rightarrow (S,\in) \text{ ben ordinato}$$

□

Theorem 4.11.

$$\alpha,\beta \in \mathrm{Ord} \Rightarrow \alpha = \beta \vee \alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha$$

Proof: Supponiamo $\alpha \neq \beta$ e dimostriamo $\alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha$.

⟨1⟩ Dimostriamo che

1. $\alpha{\cap}\beta \subset \alpha \Rightarrow \alpha{\cap}\beta \in \alpha{\setminus}\alpha{\cap}\beta$
2. $\alpha{\cap}\beta \subset \beta \Rightarrow \alpha{\cap}\beta \in \beta{\setminus}\alpha{\cap}\beta$

Basta dimostrare la 1., la 2. si ottiene scambiando α con β.

$$\alpha \in \mathrm{Ord} \Rightarrow (\alpha,\in) \quad \text{ben ordinato} \quad (0)$$

$$\alpha{\cap}\beta \subset \alpha,\ (\alpha,\in) \ \text{b. o.} \ \Rightarrow \exists \alpha' = \min_{\in} \alpha{\setminus}\alpha{\cap}\beta \ \ (1)$$

$$\alpha' \in \alpha{\setminus}\alpha{\cap}\beta \ \Rightarrow \alpha' \in \alpha,\ \alpha' \notin \beta \ (1.1)$$

⟨1.1⟩ $\alpha' = \alpha{\cap}\beta$
⟨1.1.1⟩ $\subseteq$

$$\delta \in \alpha' \underbrace{\in}_{(1.1)} \alpha \in \mathrm{Ord} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[4.2,pg.17]}} \quad \delta \in \alpha \quad (2)$$

$$\Rightarrow \alpha' {\subseteq} \alpha \quad (2.1)$$

$$\delta \in \alpha' \Leftrightarrow \delta \overset{\in}{<} \alpha' \underbrace{=}_{(1)} \min \alpha{\setminus}\alpha{\cap}\beta \Rightarrow \delta \notin \alpha{\setminus}\alpha{\cap}\beta \underbrace{\Rightarrow}_{(2)} \delta \in \alpha{\setminus}(\alpha{\setminus}\alpha{\cap}\beta) = \alpha{\cap}\beta{\subseteq}\beta \Rightarrow \delta \in \beta$$

Quindi, $\delta \in \alpha{\cap}\beta$

$\langle 1.1.2\rangle$ $\supseteq$

$$\delta \in \alpha\cap\beta \Rightarrow \delta \in \alpha,\ \ \delta \in \beta$$
$$\delta \in \alpha,\ \alpha' \underbrace{\in}_{(1.1)} \alpha,\ (\alpha, \in) \text{ b.o } \Rightarrow \delta = \alpha' \vee \delta \in \alpha' \vee \alpha' \in \delta \ \ (3)$$
$$\alpha' = \delta \in \alpha\cap\beta \Rightarrow \alpha' \in \beta \text{ assurdo contro (1.1)} \ \ (3.1)$$
$$\alpha' \in \delta \in \beta \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.2,\text{pg.}17]} \alpha' \in \beta \text{ assurdo contro (1.1)} \ \ (3.2)$$
$$(3),\ (3.1),\ (3.2) \Rightarrow \delta \in \alpha'$$

Possiamo cosi' dimostrare la 1.:

$$\alpha\cap\beta \underbrace{=}_{\text{passo 1.1}} \alpha' \underbrace{\in}_{(1)} \alpha\backslash\alpha\cap\beta$$

$\langle 2\rangle$ Si ha:

$$\alpha\cap\beta = \beta \ \vee \ \alpha\cap\beta = \alpha$$

Infatti, se per assurdo $\alpha\cap\beta \subset \beta \wedge \alpha\cap\beta \subset \alpha$:

$$\alpha\cap\beta \subset \beta \wedge \alpha\cap\beta \subset \alpha \underbrace{\Rightarrow}_{\text{passo 1}} \alpha\cap\beta \in (\alpha\backslash\alpha\cap\beta)\cap(\beta\backslash\alpha\cap\beta) = \emptyset \quad \text{assurdo}$$

Distinguiamo due casi

Case: $\alpha\cap\beta \subset \alpha$

$$\alpha\cap\beta \subset \alpha \underbrace{\Rightarrow}_{\text{passo 2}} \alpha\cap\beta = \beta$$
$$\alpha\cap\beta \subset \alpha \underbrace{\Rightarrow}_{\text{passo 1}} \beta = \alpha\cap\beta \in \alpha\backslash\alpha\cap\beta \subseteq \alpha \Rightarrow \beta \in \alpha$$

che e' quello che volevamo dimostrare.

Case: $\alpha\cap\beta = \alpha$

$$\alpha\cap\beta = \alpha \underbrace{\Rightarrow}_{\text{passo 2}} \alpha\cap\beta \subset \beta \underbrace{\Rightarrow}_{\text{passo 1}} \alpha = \alpha\cap\beta \in \beta\backslash\beta\cap\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha \in \beta$$

che e' quello che volevamo dimostrare.

□

Corollary 4.12. *Siano* $\alpha, \beta \in \text{Ord}$

$$\beta \subset \alpha \Leftrightarrow \beta \in \alpha$$

In particolare,

$$\beta \subseteq \alpha \Leftrightarrow \beta \overset{\in}{\leq} \alpha$$

Proof:

$\langle 1\rangle$ Dim. $\Leftarrow$

$$\beta \in \alpha \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{O2} \beta \subseteq \alpha$$
$$\alpha = \beta \Rightarrow \beta \in \alpha = \beta \Rightarrow \beta \in \beta \text{ assurdo contro [QUA,Oss8,pg.21]} \ \ (1.1)$$

Quindi $\beta \subset \alpha$

$\langle 2\rangle$ Dim. $\Rightarrow$

$$\alpha, \beta \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.11,\text{pg.}21]} \alpha = \beta \vee \alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha \underbrace{\Rightarrow}_{\alpha \subset \beta} \alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha \quad (1)$$

$$\alpha \in \beta \underbrace{\Rightarrow}_{O2} \alpha \subseteq \beta \subset \alpha \Rightarrow \alpha \subset \alpha \text{ assurdo} \quad (2)$$

$$(1),\ (2) \Rightarrow \beta \in \alpha$$

□

Proposition 4.13.

$$\beta \in \alpha \in \text{Ord} \Rightarrow \beta \textit{ e' un segmento di } (\alpha, \in)$$

Proof:

$$\beta \in \alpha \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.2,\text{pg.}17]} \beta \subseteq \alpha$$

Sia $\delta \in \beta$, $\gamma \in \alpha$ e $\gamma \overset{\in}{<} \delta$, dimostriamo che $\gamma \in \beta$:

$$\beta \in \alpha \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.9,\text{pg.}20]} \beta \in \text{Ord}$$

$$\gamma \overset{\in}{<} \delta \Leftrightarrow \gamma \in \delta$$

$$\gamma \in \delta \in \beta \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.2,\text{pg.}17]} \gamma \in \beta$$

□

Corollary 4.14. *Siano* $\alpha, \beta \in \text{Ord}$

$$(\alpha, \in) \simeq (\beta, \in) \Rightarrow \alpha = \beta$$

Proof:

$$\alpha, \beta \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.11,\text{pg.}21]} \alpha = \beta \vee \alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha$$

Case: $\alpha = \beta$
La tesi e' vera.
Case: $\alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha$

$$\alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha \underbrace{\Rightarrow}_{[4.13,\text{pg.}23]} \alpha \text{ segmento di } \beta \vee \beta \text{ segmento di } \alpha \quad (1)$$

$$(1),\ \alpha \simeq \beta \underbrace{\Rightarrow}_{[3.14,\text{pg.}6]} \alpha = \beta$$

quindi la tesi e' vera.

□

Proposition 4.15.

$$\{\alpha_i\}_{i \in I} \subseteq \text{Ord} \Rightarrow \bigcap_{i \in I} \alpha_i,\ \bigcup_{i \in I} \alpha_i \in \text{Ord}$$

Proof:
$\langle 1 \rangle$ $\bigcap$
$\langle 1.1 \rangle$ $O1$

Intersezione di insiemi e' un insieme.

⟨1.2⟩ $O2$

$$\beta \in \bigcap_{i\in I} \alpha_i \Rightarrow \beta \in \alpha_i \in \text{Ord}\ \forall i \underbrace{\Rightarrow}_{O2} \beta \subseteq \alpha_i\ \forall i \Rightarrow \beta \subseteq \bigcap_{i\in I} \alpha_i$$

⟨1.3⟩ $O3$

$$\bigcap_{i\in I} \alpha_i \subseteq \alpha_i,\ \ (\alpha_i, \in)\ b.o. \Rightarrow \left(\bigcap_{i\in I} \alpha_i,\ \in\right)\ \text{e' ben ordinato}$$

⟨2⟩ $\bigcup$

⟨2.1⟩ O1

Unione di insieme e' un insieme.

⟨2.2⟩ $O2$

$$\beta \in \bigcup_{i\in I} \alpha_i \Rightarrow \exists i :\ \beta \in \alpha_i \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{O2} \beta \subseteq \alpha_i \subseteq \bigcup_{i\in I} \alpha_i$$

⟨2.3⟩ $O3$

Dimostriamo che $S = \bigcup_{i\in I} \alpha_i$ e' ben ordinato secondo $\in$ utilizzando direttamente la definizione [3.1,pg.1].

⟨2.3.1⟩ B1

Siano $\alpha, \beta \in S$. Se per assurdo $\alpha \in \beta \wedge \beta \in \alpha$, allora:

$$\alpha, \beta \in S \Rightarrow \alpha \in \alpha_i \in \text{Ord},\ \beta \in \beta_j \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.9,\text{pg.}20]} \alpha, \beta \in \text{Ord}$$

$$\alpha \in \beta \in \alpha \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.2,\text{pg.}17]} \alpha \in \alpha \text{ assurdo}$$

⟨2.3.2⟩ B2

Sia $\emptyset \neq A \subseteq S$. Dimostriamo che $\exists \min_{\in} A$.

$$\emptyset \neq A \subseteq S = \bigcup_{i\in I} \alpha_i \Rightarrow \exists i :\ A \cap \alpha_i \neq \emptyset \underbrace{\Rightarrow}_{(\alpha_i,\in)\ \text{b.o.}} \exists \beta = \min_{\in} A \cap \alpha_i \quad (1)$$

$$\beta \in A \cap \alpha_i \Rightarrow \beta \in \alpha_i \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.9,\text{pg.}20]} \beta \in \text{Ord} \quad (2)$$

⟨2.3.2.1⟩ $\beta = \min_{\in} A$

Sia $\gamma \in A \setminus \{\beta\}$, dimostriamo che $\beta \overset{\in}{<} \gamma$.

$$\gamma \in A \subseteq S = \bigcup_{i\in I} \alpha_i \Rightarrow \gamma \in \alpha_j \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.9,\text{pg.}20]} \gamma \in \text{Ord}$$

$$\gamma, \beta \in \text{Ord},\ \gamma \neq \beta \underbrace{\Rightarrow}_{[4.11,\text{pg.}21]} \gamma \in \beta \vee \beta \in \gamma \quad (3)$$

Supp. per assurdo che $\gamma \in \beta$:

$\beta = \min A \cap \alpha_i \Rightarrow \beta \in \alpha_i$

$\gamma \in \beta \in \alpha_i \Rightarrow \gamma \in \alpha_i$

$\gamma \in A \Rightarrow \gamma \in A \cap \alpha_i \Rightarrow \beta = \min A \cap \alpha_i \in \gamma$

$\beta \in \gamma,\ \gamma \in \beta \Rightarrow \beta \in \beta$ assurdo (3.1)

$(3),\ (3.1) \Rightarrow \beta \in \gamma \Leftrightarrow \beta \overset{\in}{<} \gamma$

□

Proposition 4.16.

1. *In* $(\mathrm{Ord}, \in)$ *vale la c.c.d.f*
2. $\emptyset \neq C \subseteq \mathrm{Ord} \Rightarrow \exists \min_{\in} C$
3. $(\mathrm{Ord}, \in)$ *e' ben ordinato*

Proof:
⟨1⟩
Se cosi' non fosse si avrebbe una catena infinita di ordinali:

$$\alpha_0 \ni \alpha_1 \ni \alpha_2 \ni \dots$$

ma ogni α_i e' un insieme. Assurdo contro [QUA,thm17,pg.23]
⟨2⟩

$$1. \underbrace{\Rightarrow}_{[3.20,\text{pg.}8]} \exists c \in C \text{ minimale di } C \quad (*)$$

$$\alpha \neq c \in C \subseteq \mathrm{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.11,\text{pg.}21]} \alpha \overset{\in}{<} c \vee c \overset{\in}{<} \alpha \underbrace{\Rightarrow}_{(*)} c \overset{\in}{<} a$$

$$\Rightarrow \forall \alpha \in C \setminus \{c\} \ c \overset{\in}{<} a \Rightarrow c = \min_{\in} C$$

⟨3⟩
Usiamo la definizione [3.1,pg.1].
⟨3.1⟩ B1
Siano $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$. Se per assurdo $\alpha \in \beta, \beta \in \alpha$, allora

$$\alpha \in \beta \in \alpha \in \mathrm{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.2,\text{pg.}17]} \alpha \in \alpha \text{ assurdo}$$

⟨3.2⟩ B2
Per la 2.

□

Theorem 4.17. Ord *non e' un insieme*

Proof: Se per assurdo lo fosse, grazie al [4.16,pg.24] e alla [4.9,pg.20], Ord sarebbe un ordinale e quindi

$$\mathrm{Ord} \in \mathrm{Ord}$$

assurdo contro [QUA,Oss8,pg.21]. □

Proposition 4.18. *Siano* $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$

$$S\alpha = S\beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

Proof:

$$S\alpha = S\beta \Leftrightarrow \alpha \cup \{\alpha\} = \beta \cup \{\beta\} \quad (*)$$

Se per assurdo $\alpha \neq \beta$, allora

$$\alpha \in S\alpha = S\beta \underbrace{\Rightarrow}_{(*),\ \alpha \neq \beta} \alpha \in \beta$$

$$\beta \in S\beta = S\alpha \underbrace{\Rightarrow}_{(*),\ \alpha \neq \beta} \beta \in \alpha$$

$$\beta \in \alpha \in \beta \in \mathrm{Ord} \Rightarrow \beta \in \beta \text{ assurdo.}$$

□

4.1 Ordinali limite

Definition 4.19. $\lambda \in \mathrm{Ord}$ e' un *ordinale limite* $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\nexists \alpha \in \mathrm{Ord} : \lambda = S\alpha$.

Proposition 4.20. *Se β non e' un ordinale limite, allora esiste un unico $\alpha \in \mathrm{Ord} : \beta = S\alpha$. α si chiama il* precedente immediato *di β.*

Proof: Basta applicare la [4.18,pg.25]. □

Proposition 4.21.

1. $\exists \alpha : \beta = S\alpha \Rightarrow \exists \max_{\in} \beta = \alpha$
2. $\nexists \max_{\in} \beta \Rightarrow \beta$ *e' un ordinale limite*

Proof:
⟨1⟩

$$\beta = S\alpha = \alpha \cup \{\alpha\}$$
$$(\delta \in \alpha \Leftrightarrow \delta \overset{\in}{<} \alpha) \Rightarrow \alpha = \max S\alpha$$

⟨2⟩
La contronominale della 1.

□

Proposition 4.22.

$$0, \omega, 2\omega, 3\omega, \ldots, n\omega, \ldots$$

sono ordinali limite.

Proof:
⟨1⟩ 0
Se per assurdo $0 = S\alpha$, allora

$$\emptyset = 0 = \alpha \cup \{\alpha\} \Rightarrow \alpha \in \emptyset. \quad \text{assurdo}$$

⟨2⟩ ω

$$\omega = S\alpha = \alpha \cup \{\alpha\} \Rightarrow \alpha \in \omega \underbrace{\Rightarrow}_{\text{def. di } \omega} S\alpha \in \omega \Leftrightarrow \omega \in \omega \text{ assurdo}$$

⟨3⟩ $n\omega$
Analogamente al passo predente.

□

Theorem 4.23. *Sia λ un ordinale limite, allora, $(\mathrm{Ord}, \lambda, +)$ soddisfano i primi 4 assiomi di Peano, ovvero*

1. $\lambda \in \mathrm{Ord}$
2. $\alpha \in \mathrm{Ord} \Rightarrow S\alpha = \alpha + 1 \in \mathrm{Ord}$
3. $S\alpha = S\beta \Rightarrow \alpha = \beta$
4. $\nexists \alpha \in \mathrm{Ord} : \lambda = S\alpha$

Il 5. *assioma*[5] *non vale: non e' vero che*

$$\lambda \in M \subseteq \mathrm{Ord},\ (\beta \in M \Rightarrow S\beta \in M) \Rightarrow M = \mathrm{Ord}$$

[5] l'assiome di induzione

Proof: Basta applicare la definizione [4.19,pg.26], la [4.4,pg.17] e la [4.18,pg.25].

⟨1⟩ Il 5. assioma non vale
Come controesempio poniamo $\lambda = 0,\ M = \omega$.
M soddisfa, per costruzione, l'Hp del 5. assioma, ma $\omega \neq \text{Ord}$, perche' $\omega + 1 \in \text{Ord}$.

□

Proposition 4.24. *Sia λ un ordinale limite, allora*

$$\beta \in \lambda \Rightarrow S\beta \in \lambda$$

Proof:

$$\beta \in \lambda \underbrace{\Rightarrow}_{O2} \beta \subset \alpha$$
$$\beta \in \alpha,\ \beta \subset \alpha \Rightarrow S\beta = \beta \cup \{\beta\} \subseteq \alpha$$
$$\alpha \text{ ordinale limite } \Rightarrow S\beta \neq \alpha \Rightarrow S\beta \subset \alpha$$
$$\beta \in \lambda \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.9,\text{pg.}20]} \beta \in \text{Ord}$$
$$\underbrace{\Rightarrow}_{[4.12,\text{pg.}22]} S\beta \in \alpha$$

□

4.2 Ordinali e Insiemi Ben Ordinati

Theorem 4.25.

1. $(A, <)$ *ben ordinato* $\Rightarrow \exists! \overline{A} \in \text{Ord} : \ (\overline{A}, \in) \simeq (A, <)$
2. A, A' *ben ordinati,* $A \simeq A' \Rightarrow \overline{A} = \overline{A'}$

Quindi ad ogni classe di equivalenza di insiemi ben ordinati corrisponde uno ed uno solo ordinale. Questo ordinale e' esso stesso un insieme ben ordinato e fa parte della classe di equivalenza. In altre parole, $\overline{A}$ e' un rappresentante della classe di equivalenza A. Inoltre, per la 2., $\bar{\cdot}$ e' proprio una funzione (sotto l'equivalenza $\simeq$), ovvero, ad ogni classe di equivalenza associa uno ed un solo rappresentante, che e' dato da $\overline{A}$, con A un qualsiasi elemento della classe.

$\overline{A}$ *e' chiamato il* tipo d'ordine *di* A.

Proof:
⟨1⟩
Proof sketch:In questa dimostrazione gioca un ruolo fondamentale il teorema [3.18,pg.7] e la stretta relazione che che sussiste tra i segmenti e gli ordinali ([4.13,pg.23], [4.10,pg.20]

$$\text{Sia } a = \min_{<} A \Rightarrow \{a\} \subseteq A \text{ segmento}$$
$$(\{a\}, <) \simeq (1, \in) \quad (*)$$

dove 1 e' l'ordinale 1.

Sia $I = \{s \subseteq A \text{ segmento } \mid \exists \alpha \in \text{Ord} : (s, <) \simeq (\alpha, \in)\}$

$(*) \Rightarrow I \neq \emptyset$

$i \in I \Rightarrow \exists! \alpha_i \in \text{Ord} : i \simeq \alpha_i$, infatti: (1)

$\alpha_i \simeq i \simeq \alpha_i' \Rightarrow \alpha_i \simeq \alpha_i' \underbrace{\Rightarrow}_{\alpha_i, \alpha_i' \in \text{Ord}, \text{ [4.14,pg.23]}} \alpha_i = \alpha_i'$

Sia $\alpha = \bigcup_{i \in I} \alpha_i \underbrace{\in}_{\text{[4.15,pg.23]}} \text{Ord}$ (2)

$\alpha \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[4.4,pg.17]}} S\alpha \in \text{Ord}$ (2.1)

(2.1) $\underbrace{\Rightarrow}_{O3} (S\alpha, \in)$ ben ordinato (2.2)

$(A, <)$ b.o, (2.2) $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[3.18,pg.7]}} (A, <) \hookrightarrow (S\alpha, \in) \vee (S\alpha, \in) \hookrightarrow (A, <)$ (3)

Supponiamo per assurdo che $(S\alpha, \in) \hookrightarrow (A, <)$, allora

$(S\alpha, \in) \hookrightarrow (A, <) \Leftrightarrow \exists B \subseteq A$ segmento: $(S\alpha, \in) \simeq (B, <)$

$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{def. di } \alpha} S\alpha \subseteq \alpha \Rightarrow \alpha \subset S\alpha \subseteq \alpha \Rightarrow \alpha \subset \alpha$ assurdo

Quindi, per la (3), l'unico caso possibile e' $(A, <) \hookrightarrow (S\alpha, \in)$, e si ha:

$(A, <) \hookrightarrow (S\alpha, \in) \Leftrightarrow (A, <) \simeq (\beta, \in)$, con $\beta \subseteq S\alpha$ segmento $\underbrace{\Rightarrow}_{S\alpha \in \text{Ord}, \text{[4.10,pg.20]}} \beta \in \text{Ord}$

$\Rightarrow A \simeq \beta \in \text{Ord}$

L'unicita' di β segue dal thm [4.14,pg.23]

$\langle 2 \rangle$

Segue dalla 1. e dal thm [4.14,pg.23].

□

Theorem 4.26. *di induzione su* Ord.
Sia $C \subseteq \text{Ord}$,

$$\begin{cases} 1.\ 0 \in C \\ 2.\ \alpha \subseteq C \Rightarrow \alpha \in C \end{cases} \Rightarrow C = \text{Ord}$$

Proof: Applichiamo il thm [3.24,pg.14]

Sia $M = \text{Ord}$

$(\text{Ord}, \in)$ e' ben ordinato (vedi [4.16,pg.24])

$\min_{\in} \text{Ord} = 0 \underbrace{\in}_{2.} C$

$M_\alpha = \left\{\beta \in M \mid \beta \overset{\in}{<} \alpha\right\} = \{\beta \in \text{Ord} \mid \beta \in \alpha\} = \alpha$

$M_\alpha \subseteq C \Leftrightarrow \alpha \subseteq C \underbrace{\Rightarrow}_{3.} \alpha \in \mathcal{C}$

Quindi applicando il thm [3.24,pg.14], con $M = \text{Ord}$, $I = C$, si ha la tesi. □

Theorem 4.27. *di induzione su* Ord *(seconda versione).*

Sia $C \subseteq \mathrm{Ord}$,

$$\begin{cases} 1.\ 0 \in C \\ 2.\ \alpha \in C \Rightarrow S\alpha \in C \\ 3.\ \lambda \text{ ordinale limite, } \lambda \subseteq C \Rightarrow \lambda \in C \end{cases} \Rightarrow C = \mathrm{Ord}$$

Proof: Utilizziamo il thm [4.26,pg.28]. Basta provare che vale la 2.: supponiamo $\alpha \subseteq C$ e dimostriamo $\alpha \in C$. Distinguiamo pero' due casi:
Case: $\alpha = S\beta$

$$\beta \in S\beta = \alpha \subseteq C \Rightarrow \beta \in C \underbrace{\Rightarrow}_{3.} S\beta \in C \Leftrightarrow \alpha \in C$$

Case: $\alpha = \lambda$ ordinale limite

$$\lambda \text{ ord. lim.},\ \lambda = \alpha \subseteq C \underbrace{\Rightarrow}_{4.} \lambda \in C \Leftrightarrow \alpha \in C$$

□

Proposition 4.28. *Sia* $F : (\mathrm{Ord}, \in) \longrightarrow (\mathrm{Ord}, \in)$ *un omomorfismo (vedi [3.5,pg.3]), allora*

$$\alpha \in \mathrm{Ord} \Rightarrow \alpha \overset{\in}{\leq} F(\alpha)$$

dove $\alpha \overset{\in}{\leq} \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$

Proof:

$$\alpha, \beta \in \mathrm{Ord},\ \alpha \in \beta \quad \underbrace{\Rightarrow}_{F \text{ omomorfismo}} \quad F(\alpha) \in F(\beta)\ \ (1)$$

Procediamo per induzione (applicando il [4.26,pg.28]):

Sia $C = \left\{ \alpha \in \mathrm{Ord} \mid \alpha \overset{\in}{\leq} F(\alpha) \right\}$

$0 = \min_{\in} \mathrm{Ord} \Rightarrow 0 \overset{\in}{\leq} \alpha\ \ \forall \alpha \in \mathrm{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{F(0) \in \mathrm{Ord}} 0 \overset{\in}{\leq} F(0)$

$\Rightarrow 0 \in C$

Sia $\alpha \subseteq C$ dimostriamo che $\alpha \in C \Leftrightarrow \alpha \overset{\in}{\leq} F(\alpha)$:

$\alpha \subseteq C \Leftrightarrow \forall \beta \in \alpha\ \ \beta \overset{\in}{\leq} F(\beta)\ \ (2)$

$\beta \in \alpha \Leftrightarrow \beta \overset{\in}{<} \alpha \underbrace{\Rightarrow}_{(1)} F(\beta) \overset{\in}{<} F(\alpha)\ \ (3)$

$(2), (3) \Rightarrow \beta \overset{\in}{<} F(\alpha)\ \ \forall \beta \in \alpha \Leftrightarrow \beta \in F(\alpha)\ \ \forall \beta \in \alpha \Leftrightarrow \alpha \subseteq F(\alpha)$

$\alpha = F(\alpha) \Rightarrow \alpha \overset{\in}{\leq} F(\alpha) \Rightarrow \alpha \in C$

$\alpha \subset F(\alpha) \underbrace{\Rightarrow}_{\alpha, F(\alpha) \in \mathrm{Ord},\ [4.12,\mathrm{pg}.22]} \alpha \in F(\alpha) \Leftrightarrow \alpha \overset{\in}{<} F(\alpha) \Rightarrow \alpha \in C$

□

Definition 4.29. Siano $\alpha, \beta \in \text{Ord}$, e siano $(A, <_A), (B, <_B)$ insiemi ben ordinati tali che $\overline{(A, <_A)} = \alpha$, $\overline{(B, <_B)} = \beta$, $A \cap B = \emptyset$, dove $\overline{A}$ e' l'ordinale definito in [4.25,pg.27] (nota[6]).
Definiamo cosi' la somma tra α e β:

$$\alpha + \beta \stackrel{\text{def}}{=} \overline{(A \cup B, <)}$$

dove $<$ e' la seguente relazione: $x < y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} ((x, y \in A,\ x <_A y) \vee (x, y \in B,\ x <_B y) \vee (x \in B,\ y \in A)$
Ovvero, gli elementi di A sono minori di quelli di B, e gli elementi di A si confrontano usando $<_A$

e definiamo il prodotto:

$$\alpha\beta \stackrel{\text{def}}{=} \overline{(\alpha \times \beta, <)} \quad (\text{ prodotto cartesiano }),$$

dove $<$ e' la seguente relazione: $(x, y) < (x', y') \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x <_\alpha x') \vee (x = x',\ y <_\beta y')$
Ovvero, $<$ e' l'ordinamento lessicografico (quello del dizionario)

Proposition 4.30.

1. *Le definizioni di somma e prodotto sono ben poste*
2. $\alpha, \beta \in \text{Ord}$ *sono finiti* $\Rightarrow \alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ *coincidono con le usuali operazioni aritmetiche*
3. $+$ *e* $\cdot$ *coincidono con le definizioni date in [4.6,pg.19]*
4. *Per gli ordinali transfiniti,* $+, \cdot$ *sono associative ma non commutative*

Proof: Nota: scrivendo $A = \{a_0, \ldots, a_n, \ldots, \}$ intediamo che la relazione $<_A$ e' tale che

$$a_0 <_A a_1 <_A \ldots$$

⟨1⟩
Bisogna fare vedere che $+$ non dipende dalla scelta di A, B, ovvero che

$$\overline{A'} = \overline{A} = \alpha,\ \overline{B'} = \overline{B} = \beta \Rightarrow (A' \cup B', <) \simeq (A \cup B, <)$$

(questo e' vero perche' A, B sono sostanzialmente una rinominazione di α, β).
E dopo basta far vedere che $(A \cup B, <)$ e $(\alpha \times \beta, <)$ sono ben ordinati.
Questo e' semplice, perche'

$$\emptyset \neq C \subseteq A \cup B \Rightarrow \min C = \begin{cases} \min_{<_A} A \cap C & A \cap C \neq \emptyset \\ \min_{<_B} B \cap C & A \cap C = \emptyset \end{cases}$$

$$\emptyset \neq C = C_1 \times C_2 \subseteq \alpha \times \beta \Rightarrow \min C = \left(\min_{<_\alpha} C_1, \min_{<_\beta} C_2 \right)$$

⟨2⟩

$$|\alpha| < \infty \Rightarrow \alpha = n \quad \text{con } n \in \omega$$
$$\alpha = \overline{A}, \quad \text{con } A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$$
$$\beta = \overline{B}, \quad \text{con } B = \{b_0, \ldots, b_{m-1}\}$$
$$\alpha + \beta = \overline{A \cup B} = \overline{\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{m-1}\}} = n + m$$

⟨3⟩
Si procede ragionando come prima:

$$\alpha = \overline{A}, \quad \text{con } A = \{a_0, a_1, \ldots, \}$$
$$1 = \overline{B}, \quad \text{con } B = \{b_0\}$$
$$\alpha + 1 = \overline{A \cup B} = \overline{\{a_0, a_1, \ldots, b_0\}} = \overline{A \cup \{A\}} = \overline{S(A)} = S\alpha$$

analogamente si procede per gli altri casi.

[6] sostanzialmente, A si puo' pensare come l'insieme α con gli elementi rinominati, in modo che $A \cap B = \emptyset$.

$\langle 4 \rangle$
Dimostriamo che non vale la commutativa per $+$:
$\omega + n = \overline{\{a_0, a_1, \dots, \} \cup \{b_0, \dots, b_{n-1}\}} = \overline{\{a_0, a_1, \dots, b_0, \dots, b_{n-1}\}} = \{0, 1, \dots, \omega, \omega+1, \dots, \omega+n-1\}$
$n + \omega = \overline{\{b_0, \dots, b_{n-1}\} \cup \{a_0, a_1, \dots, \}} = \overline{\{b_0, \dots, b_{n-1}, a_0, a_1, \dots, \}} = \omega$
$\Rightarrow n + \omega \neq \omega + n$
Non vale neanche per $\cdot$:
$\omega 2 = \overline{\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1), \dots, \}} = \omega$
$2\omega = \overline{\{(0,0), (0,1), (0,2), \dots, (1,0), (1,1), (1,2), \dots, \}} = \{0, 1, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \}$
$\Rightarrow \omega 2 \neq 2\omega$

□

4.3 Cardinali

Definition 4.31. Definiamo la classe di tutti i *cardinali*:

$$\text{Card} \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in \text{Ord} \mid (\beta \in \alpha \Rightarrow \beta \not\sim \alpha)\}$$

dove con $\beta \not\sim \alpha$ intendiamo che β non e' equipotente ad α (vedi [QUA,Def1,pg.4]).
Definiamo la classe di tutti i cardinali transfiniti (ovvero, cardinali non finiti):

$$\text{Card}_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \text{Card} \backslash \omega = \{\alpha \in \text{Card} \mid \alpha \notin \omega\}$$

Sia $\alpha \in \text{Ord}$, definiamo il *numero cardinale* di α:

$$[\alpha]_\sim \stackrel{\text{def}}{=} \{\beta \in \text{Ord} \mid \beta \sim \alpha\}$$
$$\|\alpha\| \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\in} \{\beta \in \text{Ord} \mid \beta \sim \alpha\} = \min_{\in} [\alpha]_\sim$$

Nota: il minimo esiste per la [4.16,pg.24].

Example 4.32.

$$n,\ \omega \in \text{Card}$$
$$\omega + n,\ \omega + \omega \notin \text{Card}$$

Proof: Per definizione $n,\ \omega \in \text{Card}$. Invece,
$\omega + n = \{0, 1, \dots, \omega, \omega+1, \dots, \omega+n-1\} \sim \omega \Rightarrow \omega + n \notin \text{Card}$
$\omega + \omega = \bigcup_{n \in \omega} \omega + n \sim \omega$ Unione di numerabili e' un insieme numerabile, vedi [QUA,Oss7,pg.6]

□

Proposition 4.33. *Si ha:*

1. $\alpha \in \text{Card},\ \beta \in \text{Ord} \Rightarrow\ (\beta \in \alpha \Leftrightarrow \beta \precsim \alpha)$
2. $\alpha \neq \beta \in \text{Card}\ \Rightarrow\ \alpha \nsim \beta$

In altre parole, la 1. *afferma che un cardinale possiede tutti e solo gli ordinali strettamente piu' piccoli in potenza.*

Proof:

⟨1⟩
⟨1.1⟩ Dim. $\Rightarrow$

$$\beta \in \alpha \in \mathrm{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{O2} \beta \subseteq \alpha$$
$$\beta \in \alpha \in \mathrm{Card} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{def. di Card}} \beta \nsim \alpha$$
$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{def. di } \precsim} \beta \precnsim \alpha$$

⟨1.2⟩ Dim. $\Leftarrow$

$$\beta \precnsim \alpha \Rightarrow \begin{cases} \beta \precsim \alpha \\ \beta \nsim \alpha \end{cases} \quad (1)$$
$$\beta, \alpha \in \mathrm{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.11,\text{pg.}21]} \beta = \alpha \vee \alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha \underbrace{\Rightarrow}_{\beta \nsim \alpha} \alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha \quad (2)$$

Se per assurdo $\alpha \in \beta$:

$$\alpha \in \beta \in \mathrm{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{O2} \alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha \precsim \beta$$
$$\alpha \precsim \beta,\ \beta \precsim \alpha \underbrace{\Rightarrow}_{[\mathrm{QUA},22.1,\text{pg.}12]} \beta \sim \alpha \text{ assurdo}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{(2)} \beta \in \alpha$$

⟨2⟩

$$\alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta \in \mathrm{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.11,\text{pg.}21]} \alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha$$

Se per assurdo $\alpha \sim \beta$, allora

$$\alpha \sim \beta,\ \alpha \in \beta \Rightarrow \beta \notin \mathrm{Card}$$
$$\alpha \sim \beta,\ \beta \in \alpha \Rightarrow \alpha \notin \mathrm{Card}$$

In ogni caso si ottiene un assurdo.

□

Proposition 4.34. *Siano* $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$*,*

1. $\|\alpha\| \in \mathrm{Card}$
2. $\|\alpha\| \overset{\in}{\leq} \alpha$
3. $\|\alpha\| = \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \mathrm{Card}$
4. $\beta \precsim \alpha \Leftrightarrow \|\beta\| \overset{\in}{\leq} \|\alpha\|$
5. $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \|\alpha\| = \|\beta\|$

Proof:
⟨1⟩

$$\|\alpha\| \overset{\text{def}}{=} \min_{\in}[\alpha]_\sim = \min_{\in}\{\beta \in \text{Ord} \mid \beta \sim \alpha\} \quad (1)$$

$$\beta \in \|\alpha\| \Leftrightarrow \beta \overset{\in}{<} \|\alpha\| = \min[\alpha]_\sim \underbrace{\Rightarrow}_{(1)} \beta \notin [\alpha]_\sim \Leftrightarrow \beta \nsim \alpha \underbrace{\Rightarrow}_{\|\alpha\| \sim \alpha} \beta \nsim \|\alpha\|$$

$$(\beta \in \|\alpha\| \Rightarrow \beta \nsim \|\alpha\|) \Rightarrow \|\alpha\| \in \text{Card}$$

⟨2⟩

$$\|\alpha\|, \alpha \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[4.11,pg.21]}} \|\alpha\| = \alpha \vee \|\alpha\| \in \alpha \vee \alpha \in \|\alpha\|$$

Se per assurdo $\alpha \in \|\alpha\|$, allora

$$\alpha \in \|\alpha\| \Leftrightarrow \alpha \overset{\in}{<} \|\alpha\| = \min_{\in}[\alpha]_\sim \Rightarrow \alpha \notin [\alpha]_\sim \Leftrightarrow \alpha \nsim \alpha \text{ assurdo}$$

⟨3⟩

⟨3.1⟩ Dim. $\Rightarrow$

Segue dalla 1.

⟨3.2⟩ Dim. $\Leftarrow$

Supponiamo per assurdo $\alpha \neq \|\alpha\|$

$$\alpha \neq \|\alpha\| \in \text{Card} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[4.33,pg.31]}} \alpha \nsim \|\alpha\|$$

Assurdo contro $\|\alpha\| \in [\alpha]_\sim$

⟨4⟩

⟨4.1⟩ Dim. $\Rightarrow$

$$\|\beta\|, \|\alpha\| \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[4.11,pg.21]}} \|\beta\| = \|\alpha\| \vee \|\beta\| \in \|\alpha\| \vee \|\alpha\| \in \|\beta\|$$

Supponiamo per assurdo che $\|\alpha\| \in \|\beta\|$,

$$\|\alpha\| \overset{\in}{<} \|\beta\| = \min_{\in}[\beta]_\sim \Rightarrow \|\alpha\| \nsim \beta \sim \|\beta\| \Rightarrow \|\alpha\| \nsim \|\beta\|$$

$$\|\alpha\| \in \|\beta\| \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{O2} \|\alpha\| \subseteq \|\beta\|$$

$$\Rightarrow \|\alpha\| \precnsim \|\beta\| \quad (4)$$

(4), $\beta \precnsim \alpha \Rightarrow \alpha \sim \|\alpha\| \precnsim \|\beta\| \precnsim \alpha \Rightarrow \alpha \precnsim \alpha$. Assurdo

⟨4.2⟩ Dim. $\Leftarrow$

$$\|\beta\| \overset{\in}{\leq} \|\alpha\| \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{O2} \|\beta\| \subseteq \|\alpha\| \Rightarrow \|\beta\| \precnsim \|\alpha\|$$

$$\beta \sim \|\beta\| \precnsim \|\alpha\| \sim \alpha \Rightarrow \beta \precnsim \alpha$$

⟨5⟩

⟨5.1⟩ Dim. $\Rightarrow$

$$\alpha \sim \beta \underbrace{\Rightarrow}_{\text{per def. di } \|\|\|} \|\alpha\| \sim \alpha \sim \beta \sim \|\beta\| \Rightarrow \|\alpha\| \sim \|\beta\| \ (1)$$

$$\|\alpha\| \in \text{Ord},\ \|\alpha\| \sim \beta \Rightarrow \|\alpha\| \in [\beta]_\sim \underbrace{\Rightarrow}_{2.} \|\beta\| = \min[\beta]_\sim \overset{\in}{\leq} \|\alpha\| \ (2)$$

$$\text{Analogamente } \|\alpha\| = \min[\alpha]_\sim \overset{\in}{\leq} \|\beta\| \ (3)$$

$$(2),(3) \Rightarrow \|\alpha\| \overset{\in}{\leq} \|\beta\| \overset{\in}{\leq} \|\alpha\| \Rightarrow \|\alpha\| = \|\beta\|$$

$\langle 5.2 \rangle$ Dim. $\Leftarrow$

$$\alpha \sim \|\alpha\| = \|\beta\| \sim \beta$$

□

Proposition 4.35.

$$\{\beta_i\}_{i\in I} \subseteq \text{Card} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} \beta_i \in \text{Card}$$

Proof:

Sia $\gamma = \bigcup_{i\in I} \beta_i$

$$\beta_i \in \text{Ord} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.15,\text{pg.}23]} \gamma \in \text{Ord}$$

Supponiamo per assurdo che $\gamma \notin \text{Card}$

$$\gamma \in \text{Ord}\backslash\text{Card} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.34,\text{pg.}32]} \|\gamma\| \overset{\in}{<} \gamma \Leftrightarrow \|\gamma\| \in \gamma \Rightarrow \exists i:\ \|\gamma\| \in \beta_i \Leftrightarrow \|\gamma\| \overset{\in}{<} \beta_i \ (1)$$

$$\beta_i \in \text{Card} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.34,\text{pg.}32]} \|\beta_i\| = \beta_i \ (2)$$

$$\beta_i \subseteq \gamma \underbrace{\Rightarrow}_{[4.34,\text{pg.}32]} \|\beta_i\| \overset{\in}{\leq} \|\gamma\| \ (3)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow \|\gamma\| \overset{\in}{<} \beta_i = \|\beta_i\| \overset{\in}{\leq} \|\gamma\| \Rightarrow \|\gamma\| \overset{\in}{<} \|\gamma\|. \quad \text{Assurdo}$$

□

Definition 4.36. Sia A un insieme, sia $(A, <)$ un POSET ben ordinato A dato dal thm [3.23,pg.10]. Sia $\overline{A}$ il tipo d'ordine di A dato dal thm [4.25,pg.27]. Chiameremo $\|\overline{A}\|$ il numero cardinale dell'insieme A.
Notazione:

$$|A| \overset{\text{def}}{=} \|\overline{A}\|$$

Proposition 4.37. *La definizione di $\|\overline{A}\|$ e' ben posta, ovvero, non dipende dalla scelta della relazione d'ordine $<$ su A.*

Proof:

$$\alpha = \overline{(A, <)}$$
$$\beta = \overline{(A, <')}$$
$$\alpha \sim A \sim \beta \Rightarrow \alpha \sim \beta \underbrace{\Rightarrow}_{[4.34,\text{pg.}32]} \|\alpha\| = \|\beta\|$$

□

Proposition 4.38.

1. $\|\overline{A}\| \in [A]_\sim = \{X \mid X \text{ insieme}, X \sim A\}$
2. $A \sim B \Rightarrow \|\overline{A}\| = \|\overline{B}\|$

La 1. *dice che* $\|\overline{A}\|$ *e' un rappresentante della classe di equipotenza di* A. *Inoltre, per la* 2. $\|\bar{\cdot}\|$ *e' proprio una funzione, ovvero, ad ogni classe associa uno ed un solo rappresentante.*

Proof:
⟨1⟩
Per definizione di $\|\|$:

$$\|\overline{A}\| \underbrace{\sim}_{\text{def di } \|\|} \overline{A} \sim A \Rightarrow \|\overline{A}\| \sim A \Rightarrow \|\overline{A}\| \in [A]_\sim$$

⟨2⟩

$$\overline{A} \sim A \sim B \sim \overline{B} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.34,\text{pg.}32]} \|\overline{A}\| = \|\overline{B}\|$$

□

Theorem 4.39. *(Cantor)*

$$(\text{Ord}, \in) \simeq (\text{Card}_\infty, \in)$$

L'isomorfismo presentato nella dimostrazione lo indicheremo con $\aleph$.

Proof: Sia $\alpha \in \text{Ord}$, poniamo

$$\alpha^* \overset{\text{def}}{=} \min_{\in} \left\{\beta \in \text{Card} \mid \alpha \overset{\in}{<} \beta\right\} \quad (0)$$

⟨1⟩ $\left\{\beta \in \text{Card} \mid \alpha \overset{\in}{<} \beta\right\} \neq \emptyset$
Sia $\mathcal{P}(\alpha)$ l'insieme delle parti di α,

$$\alpha \underbrace{\precsim}_{[\text{QUA,thm27,pg.17}]} \mathcal{P}(\alpha) \sim \|\overline{\mathcal{P}(\alpha)}\| \in \text{Card} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.33,\text{pg.}31]} \alpha \in \|\overline{\mathcal{P}(\alpha)}\|$$

$$\text{Quindi } \alpha \in \|\overline{\mathcal{P}(\alpha)}\| \Rightarrow \|\overline{\mathcal{P}(\alpha)}\| \in \left\{\beta \in \text{Card} \mid \alpha \overset{\in}{<} \beta\right\}$$

Osserviamo che:

passo 1, [4.16,pg.24] ⇒ la definizione (0) e' ben posta

$$\alpha^* = \min \left\{\beta \in \text{Card} \mid \alpha \overset{\in}{<} \beta\right\} \Rightarrow \alpha \overset{\in}{<} \alpha^* \quad (1)$$

Definiamo per induzione transfinita una funzione $\aleph$ su Ord:

$$\aleph_0 = \omega$$
$$\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^*$$
$$\lambda \neq 0 \text{ ordinale limite}, \aleph_\lambda = \bigcup_{\beta \in \lambda} \aleph_\beta$$

⟨2⟩ $\aleph$ e' una funzione del tipo:

$$\aleph : \text{Ord} \longrightarrow \text{Card}_\infty$$

Dimostriamo intanto che $\operatorname{dom}\aleph = \mathrm{Ord}$. Procediamo per induzione transfinita (vedi [4.27,pg.28]):

1. $0 \in \operatorname{dom}\aleph$ (perche' abbiamo definito $\aleph_0 = \omega$)
2. $\alpha \in \operatorname{dom}\aleph \Rightarrow S\alpha = \alpha + 1 \in \operatorname{dom}\aleph$, (perche' abbiamo definito $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^*$)
3. $\lambda \subseteq \operatorname{dom}\aleph \Rightarrow \lambda \in \operatorname{dom}\aleph$, (perche' abbiamo definito $\aleph_\lambda$)

$$\underbrace{\Rightarrow}_{[4.27,\text{pg.}28]} \quad \operatorname{dom}\aleph = \mathrm{Ord}$$

(questo e' il motivo per cui si dice che $\aleph$ e' definita per induzione transfinita).

$\aleph$ e' una funzione, ovvero ad un elemento di $\operatorname{dom}\aleph$ corrisponde un solo elemento:

$\delta = 0 \Rightarrow \delta \neq \alpha + 1$, δ non e' un ordinale limite diverso da 0 $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{def di }\aleph}$ l'elemento associato a δ e' solo $\aleph_0$

$\delta = \alpha + 1 = S\alpha \Rightarrow \delta \neq 0$, δ non e' un ordinale limite $\Rightarrow \aleph_\delta = \aleph_{\alpha+1}$

$\alpha + 1 = \beta + 1 \Leftrightarrow S\alpha = S\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta \Rightarrow \aleph_\alpha = \aleph_\beta$

$\delta = \lambda \neq 0$ e' un ordinale limite $\Rightarrow \lambda \neq \alpha + 1$, $\lambda \neq 0 \Rightarrow \aleph_\delta = \aleph_\lambda$

Adesso dimostriamo che $\operatorname{Im}\aleph \subseteq \mathrm{Card}_\infty$. Procediamo per induzione

$C = \{\alpha \in \mathrm{Ord} \mid \aleph_\alpha \in \mathrm{Card}_\infty\}$

1. $\aleph_0 = \omega \in \mathrm{Card}_\infty \Rightarrow 0 \in C$
2. $\alpha \in C \Rightarrow \aleph_\alpha \in \mathrm{Card}_\infty$ (2)

$$\omega \underbrace{\overset{\in}{\leq}}_{(2)} \aleph_\alpha \overset{\in}{<} (\aleph_\alpha)^* \Rightarrow \aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^* \in \mathrm{Card}_\infty$$

3. $\lambda \neq 0$ ord. lim , $\lambda \subseteq C \Rightarrow \forall \beta \in \lambda \ \ \aleph_\beta \in \mathrm{Card}_\infty \underbrace{\Rightarrow}_{[4.35,\text{pg.}34]} \aleph_\lambda = \bigcup_{\beta\in\lambda} \aleph_\beta \in \mathrm{Card}_\infty$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{[4.27,\text{pg.}28]} \quad C = \mathrm{Ord}$$

$\langle 3 \rangle$ $\aleph$ e' un omomorfismo tra $(\mathrm{Ord}, \in)$ e $(\mathrm{Card}_\infty, \in)$

Procediamo per induzione,

$$C = \left\{\alpha \in \mathrm{Ord} \mid \beta \overset{\in}{<} \alpha \Rightarrow \aleph_\beta \overset{\in}{<} \aleph_\alpha\right\} \cup \{0\}$$

1. $0 \in C$ per costruzione
2. Supponiamo $\alpha \in C$, dimostriamo $\alpha + 1 \in C$:

$$\beta \overset{\in}{<} \alpha + 1 \Leftrightarrow \beta \in \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\} \Rightarrow \beta \overset{\in}{\leq} \alpha \underbrace{\Rightarrow}_{\alpha\in C} \aleph_\beta \overset{\in}{\leq} \aleph_\alpha \underbrace{\overset{\in}{<}}_{(1)} (\aleph_\alpha)^* = \aleph_{\alpha+1}$$

$$\left(\beta \overset{\in}{<} \alpha + 1 \Rightarrow \aleph_\beta \overset{\in}{<} \aleph_{\alpha+1}\right) \Rightarrow \alpha + 1 \in C$$

3. Supponiamo $\lambda \neq 0$ ordinale limite, $\lambda \subseteq C$. Dimostriamo $\lambda \in C$. Sia $\beta \in \lambda$

$$\beta \in \lambda \text{ ord. lim} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.24,\text{pg.}27]} \beta + 1 \in \lambda$$

$$\beta \overset{\in}{<} \beta + 1 \underbrace{\Rightarrow}_{\lambda\subseteq C} \aleph_\beta \overset{\in}{<} \aleph_{\beta+1} \quad \underbrace{\subseteq}_{\beta+1\in\lambda=\bigcup\aleph_\beta} \quad \aleph_\lambda \Rightarrow \aleph_\beta \overset{\in}{<} \aleph_\lambda$$

Quindi $\lambda \in C$

$\langle 4 \rangle$ $\aleph$ e' iniettiva

$$\aleph \text{ omomorfismo} \underbrace{\Rightarrow}_{[3.6,\text{pg.}3]} \aleph \text{ iniettiva}$$

$\langle 5 \rangle$ $\aleph$ e' surriettiva

Sia $\gamma \in \mathrm{Card}_\infty$, troveremo un α tale che $\aleph_\alpha = \gamma$.

Sia $T = \left\{\beta \in \mathrm{Ord} \mid \gamma \overset{\in}{<} \aleph_\beta\right\}$

$$\gamma \underbrace{\overset{\in}{\leq}}_{\aleph \text{ omomorfismo,[4.28,pg.29]}} \aleph_\gamma \underbrace{\overset{\in}{<}}_{(1)} (\aleph_\gamma)^* = \aleph_{\gamma+1} \Rightarrow \gamma + 1 \in T \Rightarrow T \neq \emptyset$$

Sia $\alpha = \min_{\in} T$

$\langle 6 \rangle$ α non e' un ordinale limite

Supponiamo per assurdo che lo sia

Case: $\alpha = 0$

$$0 = \alpha \in T \Rightarrow \gamma \overset{\in}{<} \aleph_0 = \omega \Leftrightarrow \gamma \in \omega \Rightarrow \text{ assurdo contro } \gamma \in \mathrm{Card}_\infty = \mathrm{Card} \backslash \omega$$

Case: $\alpha \neq 0$

$$\alpha \neq 0,\ \alpha \text{ ord. lim } \Rightarrow \aleph_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} \aleph_\beta$$

$$\alpha \in T \Rightarrow \gamma \overset{\in}{<} \aleph_\alpha \quad (5)$$

$$\beta \in \alpha \Leftrightarrow \beta \overset{\in}{<} \alpha = \min T \Rightarrow \beta \notin T \Rightarrow \aleph_\beta \overset{\in}{\leq} \gamma \quad (6)$$

$$(6) \underbrace{\Rightarrow}_{O2} \aleph_\beta \subseteq \gamma\ \forall \beta \in \alpha \Rightarrow \aleph_\alpha \subseteq \gamma$$

$$\Rightarrow \aleph_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} \beta \subseteq \gamma \underbrace{\Rightarrow}_{[4.12,\text{pg.}22]} \aleph_\alpha \overset{\in}{\leq} \gamma. \quad \text{Assurdo contro (5)}$$

passo $6 \Rightarrow \exists \delta :\ \alpha = S\delta = \delta + 1$

$$\alpha = \delta + 1 \Rightarrow \delta \in \alpha \underbrace{\Rightarrow}_{(6)} \aleph_\delta \overset{\in}{\leq} \gamma \overset{\in}{<} \aleph_\alpha = \aleph_{\delta+1} = (\aleph_\delta)^* \Rightarrow \aleph_\delta \overset{\in}{\leq} \gamma \overset{\in}{<} (\aleph_\delta)^* \underbrace{=}_{\text{def. di } *} \min\left\{\beta \in \mathrm{Card} \mid \aleph_\delta \overset{\in}{<} \beta\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{\gamma \in \mathrm{Card}} \aleph_\delta = \gamma$$

Abbiamo cosi' trovato che

$$\gamma = \aleph_\delta$$

□

Remark 4.1. L'isomorfismo $\aleph$ dato nella dimostrazione [4.39,pg.35], permette di mettere in "successione" tutti i cardinali:

$$\aleph_0 = \omega,\ \aleph_1 = \omega^*,\ \aleph_2 = (\omega^*)^*, \ldots, \aleph_\omega = \bigcup_{n \in \omega} \aleph_n, \ldots$$

Se assumiamo l'ipotesi del continuo si ha:

$$\aleph_0 = \omega = |\mathbb{N}|,\ \aleph_1 = \omega^* = |\mathbb{R}|$$

Nota: l'Ipotesi del continuo e' indipendente dagli assiomi della teoria degli insiemi.
Se assumiamo l'ipotesi del continuo generalizzata si ha:

$$\aleph_{\alpha+1} = \left|\mathcal{P}(\aleph_\alpha)\right|$$

Definition 4.40. Possiamo definire le operazioni di somma e prodotto su Card:

$$\alpha + \beta \overset{\text{def}}{=} \|A \cup B\|, \text{ dove } A, B \text{ sono insiemi tali che } \alpha = \|\overline{A}\|,\ \beta = \|\overline{B}\|$$

$$\alpha\beta \overset{\text{def}}{=} \|\overline{\alpha \times \beta}\|$$

Proposition 4.41.

1. *La definizione di somma non dipende dalla scelta di* A, B
2. $+, \cdot$ *ristrette ai cardinali finiti* $0, 1, \ldots, n, \ldots,$ *sono le usuali operazioni su* $\mathbb{N}$
3. *Vale la proprieta' commutativa e associativa*

Su Card_∞*, non otteniamo l'aritmetica usuale perche':*

$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ *(Unione di insiemi numerabile e' numerabile)*
$\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$
$1 + \aleph_0 = \aleph_0$

5 Appendice A

Qui di seguito vengono inclusi gli appunti cartacei.

Pagina 1 (volutamente lasciata in bianco)

Pagina 2 (volutamente lasciata in bianco)

Pagina 3 (volutamente lasciata in bianco)

allora $A^* = A \Rightarrow h : A^* = A \to B$ ad iniettiva $\Rightarrow A \preceq B$

Cantor 1890

Thm 27

$A \neq \emptyset \Rightarrow A \lneq P(A)$

Pf

- $A \precapprox P(A)$, infatti $x \mapsto \{x\}$ è iniettiva
- $\nexists f : A \to P(A)$ suriettiva, e quindi $\nexists \psi : A \leftrightarrow P(A)$ biettiva

  Se per ass $f : A \to P(A)$ sur, sia $A' = \{x \in A \mid x \notin f(x)\} \subseteq A \Rightarrow A' \in P(A)$

  f sur $\Rightarrow \exists a \in A : f(a) = A'$

  CASO $a \in A'$

  $a \in A' \Rightarrow a \notin f(a) = A' \subseteq A \Rightarrow a \notin A$ assurdo

  CASO $a \notin A'$

  $a \notin A' = f(a) \Rightarrow a \in A'$ assurdo

Lemma 27.0

X insieme, $a \in X$, $B_x \subseteq X \ \forall x \in X$, $B : X \to P(X)$, $x \mapsto B_x$ $\Rightarrow \{x \in X \mid x \notin B_x\} \neq B_a$

Pf

Per assurdo $B_a = \{x \in X \mid x \notin B_x\}$ • $a \in B_a \to a \notin B_a$ • $a \notin B_a \Rightarrow a \in B_a$ assurdo

6 *

Index

*, 40

ainAlphaEstOrd, 20
AlcuniCardinali, 32
AlcuniOrdinaliLimite, 26
AlphaBetaIsomAlloraUguali, 23
AlphaInOrdAlloraAlphaLessEqualF(Alpha), 29
AlphaIsomBetaAlloraUguali, 23
Appendice A, 39
AZHKZ, 15

BenOrdinatiImmersione, 7
BenOrdinatoEquivalenza, 2
BetaInAlphaEstSegmento, 23
BetaInOrdLimiteAlloraSuccBetaInOrdLim, 27

Cardinali, 31
cardinali, 31
CCDFestMinimale, 8
CorHausdorff, 15

DefBenOrdinato, 1
DefCardinali, 31
DefCCDF, 8
DefNumeroCardinaleDiA, 35
DefOmomorfismoOSET, 3
DefOperazioniOrdinali, 30
DefOrdinale, 17
DefOrdinaleLimite, 26
DefSegmento, 3

fdifferenziatiallorasegmenti, 9

Hausdorff, 14

ImmersionePOSET, 3
IncollamentoDiOmomorfismi, 6
InduzioneSuOrd, 29
InduzioneSuOrdII, 29
InduzioneTransfinita, 14
Insiemi, 1
Introduzione, 1

LemmaSegUnioneSingoletto, 7

MinimoUnico, 1

NinAlpha, 19
Numeri ordinali, 17
numero cardinale, 32

O2Forte, 22
OmegaEstPiuPiccolo, 20
OrdAlphaMax, 17
OrdBenOrdinato, 25
Ordcccdf, 25
OrdConfronto, 21
ordinale limite, 26
OrdinaleEstInsiemeBO, 28
Ordinali e Insiemi Ben Ordinati, 27
Ordinali limite, 26
OrdLimMax, 26
OrdNonEstInsieme, 25
OrdPeano, 27
OrdSegmento, 21
OrdSuccessivoEstIniettivo, 26
OrdTrans, 17

POSET ben ordinati, 1
precedente immediato, 26
PropAaSegmento, 4
PropBenOrdinamento, 1
PropCardinali, 32
PropNumeriCardinali, 33
PropOcar, 35
PropSommaProdottoInOcar, 38

SegMinMax, 3
SommaProdottoInOcar, 38
SsegmentoAisomorfoAalloraSestA, 6
ST-Restrizione, 5
STsegmenti, 4
SuccessioneOrdinali, 19
SuccEstOrd, 18

ThmCantorCardinali, 36
ThmFondamentaleOrdinali, 28
ThmZermelo, 10
tipo d'ordine, 28

UnicoOmodiA, 6
UnicoPrecImmediato, 26
UnioneCardinaliEstCardinale, 34

UnioneDiCatenaOrdinali, 18
UnioneIntersezioneEstOrd, 24
UnioneIntersezioneSegmenti, 4

Zorn lemma, 15