

Thm 5.8

$m_A F \Rightarrow \Leftrightarrow$
pg 141

$$F(A + \mu B) = \varphi(\mu) = \alpha_0 + \alpha_1 \mu + \dots + \alpha_s \mu^s \quad (1)$$

$$\text{con } \alpha_i \in K[B], \quad \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{s-1} = 0, \quad \alpha_s \neq 0 \quad (2)$$

$$\varphi(\mu) = \varphi(0) + \varphi'(0)\mu + \frac{\varphi^{(2)}(0)}{2!}\mu^2 + \dots +$$

Taylor pg 112

$$(1) \Rightarrow \alpha_j = \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{j!} \sum_{i_1, \dots, i_j} \frac{\partial^j F(A + \mu B)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_j}} b_{i_1} \dots b_{i_j} \quad (4)$$

(2) $\Rightarrow$ il polinomio α_s , con $s < s-1$, e' nullo, quindi tutti i suoi coeff $\leq \frac{\partial^j F(A + \mu B)}{\partial \dots}$ sono nulli. Invece, per α_s esiste almeno un coeff non nullo.

$$\left. \begin{aligned} \varphi'(0) &= \sum_i \frac{\partial F(A + \mu B)}{\partial x_i} b_i \Rightarrow \varphi'(0) = \sum_i \frac{\partial F(A)}{\partial x_i} b_i \\ \text{In generale} \quad \varphi^{(j)}(0) &= \sum_{i_1, \dots, i_j} \frac{\partial^j F(A)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_j}} b_{i_1} \dots b_{i_j} \end{aligned} \right\} (3)$$

Infine, ~~se~~ se $F \in P^n$ allora per la prop 5.8.1 si ha la tesi.

Prop 5.8.1

Homogeneous $\in K[x_1, \dots, x_{m+1}]$, $A \in P^m$

ogni derivata s -esima di F e' nulla in $A \Rightarrow$ ogni derivata r -esima e' nulla in $A \quad \forall r \leq s$

pg

Sia $G = \frac{\partial^{s-1} F}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{s-1}}}$ ^{qualsiasi} una derivata $s-1$ -esima di F , allora per Eulero (pg 116) si ha
 (e' G e' omog.)

$$\deg G \cdot G = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\partial G}{\partial x_j} x_j = \sum_j \frac{\partial^s F}{\partial x_j \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{s-1}}} x_j$$

$$\text{calcolato in } A \text{ si ha } \deg G \cdot G(A) = \sum_j \frac{\partial^s F(A)}{\partial x_j \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{s-1}}} \alpha_j \stackrel{H_p}{=} 0 \Rightarrow G(A) = 0$$

Prop 5.8.2

Sia $\varphi(\mu) = F(A + \mu B)$, allora

$$= \alpha_0 + \alpha_1 \mu + \dots$$

con $\alpha_i \in K[B]$

$$\alpha_s = \sum_{i_1, \dots, i_s} \frac{\partial^s F(A)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}} b_{i_1} \dots b_{i_s}$$

pg

Vedi la pg del Thm 5.8