$\Rightarrow$ Il Thm 5.1 non vale nel caso affine, infatti:

$\mathcal{Y}$: $y^2-x=0$ $\quad R$: $y=1$; $\mathcal{Y}^*$: $y^2-xt=0$ $\quad R^*$: $y=t$

$\mathcal{Y}\cap R=\{(1,1)\}$ (1)

$\mathcal{Y}^*\cap R^*=\{(1,1,1);[1,0,0)=R_\infty\}$ $\Rightarrow I(\mathcal{Y}^*\cap R^*,(1,1,1))<\deg\mathcal{Y}=2$ (Thm 5.1)

$\Rightarrow I(\mathcal{Y}^*\cap R^*,(1,1,1))=1$

Invece, se valesse il Thm 5.2, dalla (1) si avrebbe $I(\mathcal{Y}\cap R,(1,1))=\deg\mathcal{Y}=2$ assurdo.

$\Rightarrow I(\mathcal{Y}\cap R,(1,1))$

Oss 5.1.3

$R\not\subset F$, $F\in\mathbb{A}^n$

$B=(b_1,\dots,b_n)$ giacitura della retta R ovvero $(b_1,\dots,b_n,0)$ pt. improprio di R

$A\in R\setminus\{B\}$

$\Rightarrow I(R\cap F,A)=$ molteplicità di $\mu=0$ per $F(A+\mu B)$

Pf

Vedi [5.2] ; Nota 1: $m_{(\mu=0)}\varphi(\mu)=s \iff a_0=a_1=\dots=a_{s-1}=0$, $a_s\neq 0$

Oss 5.1.4

$F\in\mathbb{A}^n$ oppure $F\in\mathbb{P}^n$, si ha $m_A(F)=m_{(\mu=0)}\varphi(\mu)$

$A\in F$

dove $\varphi(\mu)=F(A+\mu B)\in(K[B])[\mu]$

ovvero $\varphi(\mu)=a_0+a_1\mu+\dots+a_d\mu^d$, $a_i\in K[B]$

Nota 1: Se $F\in\mathbb{A}^n\Rightarrow B=(b_1,\dots,b_n)$

$F\in\mathbb{P}^n\Rightarrow B=(b_1,\dots,b_{n+1})$

Pf

$$m_A(F)=\min_{B\neq A,\ B\in\text{Spazio},\ r=\text{retta }AB} I(r\cap F,A)\overset{\text{Oss 5.1.2, Oss 5.1.3}}{=}\min_{B\neq A}\left(m_{(\mu=0)}F(A+\mu B)\right)\quad(1)$$

Sia $s=m_0\varphi(\mu)$, ovvero $\varphi(\mu)=a_s\mu^s+\dots+a_d\mu^d$, $a_1=\dots=a_{s-1}\equiv 0$, $a_s\neq 0$ sono polinomi nulli di $K[B]$

$F(A+\mu B)=a_s(B)\mu^s+\dots+a_d(B)\mu^d\Rightarrow m_{(\mu=0)}F(A+\mu B)\geq s$ questo $\forall B\neq A$ (2)

$a_i(B)\in K$ è il polinomio valutato

$a_s\neq 0\Rightarrow\exists B: a_s(B)\neq 0\Rightarrow m_{(\mu=0)}F(A+\mu B)=s$ (3) ; (1), (2), (3) $\Rightarrow m_A(F)=s=m_0\varphi(\mu)$ $\square$