

CAPITOLO V

IPERSUPERFICI ALGEBRICHE

1. Polinomi derivati.

1. Sia A un dominio d'integrità fattoriale e sia K il suo campo delle frazioni che supporremo sempre di caratteristica 0. Sia $A[x]$ l'anello dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti in A . Se

$$F = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in A[x],$$

il polinomio

$$F' = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$$

è il *derivato* di F .

Risulta $F' = 0$ se e solo se F è costante.

• **Teorema 1.1** Se $F, G \in A[x]$ risulta:

- 1) $(F + G)' = F' + G'$;
- 2) $(aF)' = aF'$, se $a \in A$;
- 3) $(FG)' = F'G + FG'$;
- 4) $(F^k)' = kF^{k-1}F'$ per ogni intero $k > 0$.

DIMOSTRAZIONE. 1) Sia

$$F = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad G = \sum_{j=0}^m b_j x^j.$$

Uno dei due interi m, n non supera l'altro; supponiamo che sia $n \leq m$. Allora

$$F + G = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i + \sum_{j=n+1}^m b_j x^j$$

e quindi

$$(F+G)' = \sum_{i=1}^n i(a_i+b_i)x^{i-1} + \sum_{j=n+1}^m j b_j x^{j-1} = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1} + \sum_{j=1}^m j b_j x^{j-1} = F' + G'$$

2) È immediata.

3) Il coefficiente di x^{i+j} nel prodotto FG è

$$(a_0b_{i+j} + a_1b_{i+j-1} + \cdots + a_{i+j}b_0)x^{i+j} \quad (a_h = 0 \text{ se } h > n \text{ e } b_k = 0 \text{ se } k > m)$$

e quindi i coefficienti di x^{i+j-1} in $(FG)'$, in $F'G$ e in FG' sono rispettivamente

$$\begin{aligned}\gamma_{i+j} &= (i+j)(a_0b_{i+j} + a_1b_{i+j-1} + \cdots + a_{i+j}b_0), \\ \alpha_{i+j} &= a_1b_{i+j-1} + 2a_2b_{i+j-2} + \cdots + (i+j)a_{i+j}b_0, \\ \beta_{i+j} &= (i+j)a_0b_{i+j} + (i+j-1)a_1b_{i+j-1} + \cdots + a_{i+j-1}b_1.\end{aligned}$$

Si verifica subito che

$$\gamma_{i+j} = \alpha_{i+j} + \beta_{i+j}.$$

4) È vera per $k \leq 2$; per $k = 1$ banalmente, per $k = 2$ in quanto $(F^2)' = FF' + F'F = 2FF'$. Sia $k > 2$ e procediamo per induzione su k , supponendo che la 4) sia vera per ogni intero $h < k$. Allora

$$\begin{aligned}(F^k)' &= (F^{k-1}F)' = (F^{k-1})'F + F^{k-1}F' \\ &= ((k-1)F^{k-2}F')F + F^{k-1}F' = (k-1)F^{(k-1)}F' + F^{k-1}F' \\ &= kF^{k-1}F'.\end{aligned}$$

□

Sia t un'altra indeterminata e sia $Q(t)$ un polinomio in t a coefficienti in $A[x]$. Denotando con $(F(Q(t)))'$ il polinomio derivato del polinomio $F(Q(t)) \in A[x, t]$ rispetto a t si ha il

• **Teorema 1.2** $(F(Q(t)))' = F'(Q(t))Q'(t)$.

DIMOSTRAZIONE. Se $F(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, per il teorema 1.1 si ha

$$\begin{aligned}(F(Q(t)))' &= \left(\sum_{i=0}^n a_i Q^i(t) \right)' = \sum_{i=1}^n a_i (Q^i(t))' \\ &= \sum_{i=1}^n i a_i Q^{i-1}(t) Q'(t) = \left(\sum_{i=1}^n i a_i Q^{i-1}(t) \right) Q'(t) \\ &= F'(Q(t)) Q'(t).\end{aligned}$$

□

Per ogni intero $s \geq 0$ risulta definito il derivato s -mo o di ordine s , $F^{(s)}$, di F ponendo

$$F^{(0)} = F, \quad F^{(s)} = (F^{(s-1)})' \quad (s > 0).$$

Se F ha grado n risulta $F^{(s)} = 0$ per $s > n$.

Il derivato di ordine 2 di F si denota anche F'' .

Taylor
Teorema 1.3 Sia $F(x) \in K[x]$ di grado n . Se $h \in K$, si ha

$$(1) \quad F(x) = \sum_{i=0}^n \frac{F^{(i)}(h)}{i!} (x-h)^i.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$F(x+h) = \sum_{i=0}^n b_i x^i;$$

allora

$$F^{(i)}(x+h) = i!b_i + xG(x), \quad G(x) \in A[x]$$

e quindi, per $x=0$ si ha

$$F^{(i)}(h) = i!b_i.$$

Ne segue che

$$F(x+h) = \sum_{i=0}^n \frac{F^{(i)}(h)}{i!} x^i,$$

da cui, sostituendo x con $x-h$, si ottiene la (1). $\square$

La (1) è la *formula di Taylor* di $F(x)$ di punto iniziale h ; nel caso particolare $h=0$ essa diviene

$$F(x) = \sum_{i=0}^n \frac{F^{(i)}(0)}{i!} x^i,$$

che è la *formula di Mac Laurin* di $F(x)$.

Se φ è una funzione razionale in x , cioè un elemento del campo $K(x)$ delle frazioni di $K[x]$, si può scrivere $\varphi = F/G$ con $F, G \in K[x]$ e $G \neq 0$. La funzione razionale

$$(2) \quad \varphi' = \frac{F'G - FG'}{G^2}$$

non dipende dalla particolare coppia di polinomi F, G tali che $\varphi = F/G$. Basta dimostrarlo per $\varphi \neq 0$.

Se $F_0, G_0 \in K[x]$ sono tali che $\varphi = F_0/G_0$ e primi tra loro, essendo $FG_0 = F_0G$, ogni fattore di F_0 divide F e quindi $F = QF_0$ con $0 \neq Q \in K[x]$, da cui $QF_0G_0 = F_0G$ e quindi $G = QG_0$. Allora si ha

$$\begin{aligned} \frac{F'G - FG'}{G^2} &= \frac{(QF_0)'(QG_0) - (QF_0)(QG_0)'}{Q_0^2 G_0^2} \\ &= \frac{Q'F_0QG_0 + Q^2F_0'G_0 - QF_0Q'G_0 - Q^2F_0G_0'}{Q^2 G_0^2} \\ &= \frac{F_0'G_0 - F_0G_0'}{G_0^2}. \end{aligned}$$

La funzione razionale φ' espresso mediante la (2) è la *derivata* di φ .

In modo ovvio, per ogni intero $s \geq 0$ si definisce la derivata di ordine s o derivata s -ma $\varphi^{(s)}$ di φ , ponendo

$$\varphi^{(0)} = \varphi, \quad \varphi^{(s)} = (\varphi^{(s-1)})' \quad (s > 0).$$

Osservazione 1.4 È di immediata verifica che i teoremi 1.1 e 1.2 sussistono anche se si sostituiscono i polinomi F e G con funzioni razionali.

Teorema 1.5 Un elemento $a \in K$ è radice di molteplicità $s \geq 1$ per il polinomio $F(x) \in K[x]$ se e solo se

$$(3) \quad F(a) = F'(a) = \dots = F^{(s-1)}(a) = 0, \quad F^{(s)}(a) \neq 0.$$

$\Rightarrow$ **DIMOSTRAZIONE.** Se a è radice di molteplicità $s \geq 1$ per $F(x)$ si ha

$$F(x) = (x-a)^s G(x), \quad G(x) \in K[x], \quad G(a) \neq 0.$$

Se $s = 1$ le (3) sono vere perché $F'(x) = G(x) + (x-a)G'(x)$ e quindi $F'(a) = G(a) \neq 0$. Sia $s > 1$ e procediamo per induzione su s , supponendo che le (3) sussistano per ogni polinomio ed ogni sua radice di molteplicità $s-1$. Si ha

$$F'(x) = s(x-a)^{(s-1)}G(x) + (x-a)^s G'(x) = (x-a)^{(s-1)}G_1(x),$$

dove $G_1(x) = sG(x) + (x-a)G'(x)$. Poiché $G_1(a) = sG(a) \neq 0$, a è radice di molteplicità $s-1$ per il polinomio $F'(x)$. Quindi

$$F'(a) = F''(a) = \dots = (F')^{(s-2)}(a) = 0, \quad (F')^{(s-1)}(a) \neq 0$$

ed essendo $(F'(x))^{(i)} = (F(x))^{(i+1)}$ si hanno le (3).

$\Leftarrow$ Viceversa, sia $a \in K$ soddisfacente le (3). La formula di Taylor di $F(x)$ di punto iniziale a è (teorema 1.3) $\otimes$

$$F(x) = (x-a)^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(s+k)!} F^{(s+k)}(a) (x-a)^k \quad \underbrace{\quad}_{= G(x)} = (x-a)^s G(x) \quad G(a) \neq 0$$

e quindi, essendo $F^{(s)}(a) \neq 0$, a è radice di molteplicità s per $F(x)$. $\square$

Def $\otimes$ Sia $A[x_1, \dots, x_r]$ l'anello dei polinomi nelle indeterminate $x_1, \dots, x_r$ a coefficienti in A . Se $F \in A[x_1, \dots, x_r]$, posto $A_i = A[x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_r]$, si può scrivere

$$F = \sum_{m=0}^n a_m x_i^m, \quad a_m \in A_i.$$

$$\otimes \quad F(x) = \underbrace{F(a)}_0 + \underbrace{F'(a)}_0 (x-a) + \underbrace{\frac{F''(a)}{2!}}_0 (x-a)^2 + \dots + \underbrace{\frac{F^{(s-1)}(a)}{(s-1)!}}_0 (x-a)^{s-1} + \underbrace{\frac{F^{(s)}(a)}{s!}}_{\neq 0} (x-a)^s + \dots$$

Il polinomio

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{m=1}^n m a_m x_i^{m-1}$$

è il *derivato parziale* di F rispetto a x_i .

Se φ è un elemento del campo $K(x_1, \dots, x_r)$ delle frazioni di $K[x_1, \dots, x_r]$ e $F, G \in K[x_1, \dots, x_r]$ sono tali che $\varphi = F/G$, il derivato parziale di φ rispetto a x_i è

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{G \frac{\partial F}{\partial x_i} - F \frac{\partial G}{\partial x_i}}{G^2}.$$

Teorema 1.6 Se $F \in A[x_1, \dots, x_r]$ e $Q_1(t), \dots, Q_r(t)$ sono polinomi in una indeterminata t a coefficienti in $A[x_1, \dots, x_r]$, risulta

$$(F(Q_1(t), \dots, Q_r(t)))' = \sum_{h=1}^r \frac{\partial F}{\partial x_h}(Q_1(t), \dots, Q_r(t)) Q_h'(t).$$

DIMOSTRAZIONE. Ovviamente basta dimostrarlo nel caso in cui F è un monomio del tipo $F = x_1^{i_1} \cdots x_r^{i_r}$ ed in tal caso è una semplice verifica. $\square$

No **Corollario 1.7** Sia $F = F(x_1, \dots, x_r) \in A[x_1, \dots, x_r]$. Se $t_1, \dots, t_s$ sono altre indeterminate su A e

$$x_i = \sum_{j=1}^s a_{ij} t_j + b_i, \quad a_{ij}, b_i \in A, \quad 1 \leq i \leq r,$$

$$G(t_1, \dots, t_s) = F \left(\sum_{j=1}^s a_{1j} t_j + b_1, \dots, \sum_{j=1}^s a_{rj} t_j + b_r \right),$$

per ogni $1 \leq i \leq s$ risulta

$$\frac{\partial G}{\partial t_i} = \sum_{h=1}^r \frac{\partial F}{\partial x_h} \left(\sum_{j=1}^s a_{1j} t_j + b_1, \dots, \sum_{j=1}^s a_{rj} t_j + b_r \right) a_{hi}.$$

DIMOSTRAZIONE. Considerando F in $A[t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_s][x_1, \dots, x_r]$ e posto

$$Q_h(t_i) = a_{hi} t_i + \sum_{j \neq i} a_{hj} t_j + b_h, \quad 1 \leq h \leq r,$$

dal teorema 1.6 segue l'asserto. $\square$

Osservazione 1.8 Il teorema 1.6 sussiste anche se si sostituiscono i polinomi F e $Q_1, \dots, Q_r$ rispettivamente con elementi $\varphi \in K(x_1, \dots, x_r)$ e $\psi_1, \dots, \psi_r \in K(t)$ ed il suo corollario se si sostituisce F con φ .

Il polinomio

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)$$

è il derivato parziale di ordine 2 o del secondo ordine di F rispetto a x_i, x_j . In modo ovvio risultano definiti i polinomi derivati parziali di ordine s

$$\frac{\partial^s F}{\partial x_{i_s} \cdots \partial x_{i_1}}$$

per ogni intero $s > 0$. Come di consueto, scriveremo

$$\frac{\partial^s F}{\partial x_i^s} \quad \text{invece di} \quad \frac{\partial^s F}{\partial x_i \cdots \partial x_i}.$$

Osservazione 1.9 È di immediata verifica, e basta farla nel caso che F sia un monomio, che

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}.$$

2. Complementi sui polinomi.

1. Siano K ed A come nel § precedente.

⊥ **Teorema 2.1** Siano $x_1, \dots, x_r$ e $t_1, \dots, t_r$ indeterminate su A . Se

$$(1) \quad x_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} t_j + b_i, \quad a_{ij}, b_i \in K, \quad 1 \leq i \leq r, \quad \overline{x} = A \overline{t} + \overline{b}$$

con la matrice (a_{ij}) non singolare, l'applicazione

$$\varphi : K[x_1, \dots, x_r] \longrightarrow K[t_1, \dots, t_r]$$

definita da

$$\varphi(F(x_1, \dots, x_r)) = F \left(\sum_{j=1}^r a_{1j} t_j + b_1, \dots, \sum_{j=1}^r a_{rj} t_j + b_r \right)$$

per ogni $F \in K[x_1, \dots, x_r]$ è un isomorfismo di anelli che conserva il grado dei polinomi.

DIMOSTRAZIONE. Per verificare che φ è un omomorfismo di anelli bisogna verificare che se $F, G \in K[x_1, \dots, x_r]$, si ha

$$(2) \quad \varphi(F + G) = \varphi(F) + \varphi(G), \quad \varphi(FG) = \varphi(F)\varphi(G).$$

Le (2) basta verificarle nel caso che F e G sono monomi ed in tale caso la verifica è immediata.

Essendo $\det(a_{ij}) \neq 0$, le (1) sono invertibili e le loro inverse

$$(3) \quad t_j = \sum_{k=1}^r c_{jk} x_k + d_j, \quad 1 \leq j \leq r,$$

definiscono un omomorfismo

$$\psi: K[t_1, \dots, t_r] \longrightarrow K[x_1, \dots, x_r]$$

tale che, per ogni $H \in K[t_1, \dots, t_r]$

$$\psi(H(t_1, \dots, t_r)) = H\left(\sum_{k=1}^r c_{1k} x_k + d_1, \dots, \sum_{k=1}^r c_{rk} x_k + d_r\right).$$

Essendo le (3) le inverse delle (1), si ha

$$\sum_{j=1}^r a_{ij} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^r c_{jk} x_k + d_j\right)}_{t_j} + b_i = x_i$$

e quindi

$$\begin{aligned} (\psi\varphi)(F(x_1, \dots, x_r)) &= \psi\left(F\left(\sum_{j=1}^r a_{1j} t_j + b_1, \dots, \sum_{j=1}^r a_{rj} t_j + b_r\right)\right) = \\ &= F\left(\sum_{j=1}^r a_{1j} (\sum_{k=1}^r c_{jk} t_k + d_j) + b_1, \dots, \sum_{j=1}^r a_{rj} (\sum_{k=1}^r c_{jk} t_k + d_j) + b_r\right) \\ &= F(x_1, \dots, x_r); \end{aligned}$$

cioè $\psi\varphi$ è l'automorfismo identico di $K[x_1, \dots, x_r]$. Similmente $\varphi\psi$ è l'automorfismo identico di $K[t_1, \dots, t_r]$ e perciò φ è isomorfismo. Poiché i polinomi (1) sono lineari, il grado del polinomio $\varphi(F)$ non supera quello di F . Similmente quello di $F = (\psi\varphi)(F) = \psi(\varphi(F))$ non supera quello di $\varphi(F)$ e perciò i gradi di F e $\varphi(F)$ sono uguali. $\square$

Def. Un polinomio di $A[x_1, \dots, x_r]$ è omogeneo di grado $m \geq 0$ se e solo se è somma di monomi di grado m , cioè è del tipo

$$\sum a_{i_1 \dots i_r} x_1^{i_1} \cdots x_r^{i_r}, \quad a_{i_1 \dots i_r} \in A, \quad i_1 + \cdots + i_r = m.$$

POLINOMI OMOGENEI

I polinomi omogenei si dicono anche *forme*.

Ogni polinomio $F \in A[x_1, \dots, x_r]$ di grado $m \geq 0$ si può scrivere, in uno ed un solo modo, come somma

$$(4) \quad F = F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_m,$$

dove il polinomio F_i , se non nullo, è omogeneo di grado i . Il polinomio F_i si dice la *componente omogenea di grado i di F* (anche se $F_i = 0$) e la (4) si dice la *decomposizione di F in somma delle componenti omogenee*.

Lemma 2.2 Un polinomio $F \in A[x_1, \dots, x_r]$ non nullo è omogeneo di grado m se e solo se nell'anello dei polinomi $A[x_1, \dots, x_r, t]$ risulta

$$(5) \quad F(tx_1, \dots, tx_r) = t^m F(x_1, \dots, x_r).$$

DIMOSTRAZIONE. È chiaro che se F è omogeneo di grado m sussiste la (5).

Dim $\Leftarrow$ Viceversa, supponiamo che sussista la (5) e sia

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_m, \quad F_m \neq 0,$$

la decomposizione di F in somma di componenti omogenee. Allora

$$F(tx_1, \dots, tx_r) = t^m F(x_1, \dots, x_r) = t^m \sum_{i=0}^m F_i(x_1, \dots, x_r) \quad (1)'$$

Ma si ha anche

$$F(tx_1, \dots, tx_r) = \sum_{i=0}^m F_i(tx_1, \dots, tx_r) = \sum_{i=0}^m t^i F_i(x_1, \dots, x_r). \quad (2)'$$

Quindi deve essere

$$(1)' / (2)' \Rightarrow t^m F_m + t^{m-1} F_{m-1} + \dots + t^0 F_0 = t^m F_m + t^{m-1} F_{m-1} + \dots + t^0 F_0$$

$$t^m \left(\sum_{i=0}^{m-1} F_i(x_1, \dots, x_r) \right) - t^{m-1} F_{m-1}(x_1, \dots, x_r) - \dots - t F_1(x_1, \dots, x_r) - F_0 \equiv 0 \quad (3)'$$

essendo (3)' un polinomio identicamente nullo in $A[x_1, \dots, x_r][t]$

$$F_0 = F_1 = F_2 = \dots = F_{m-1} = 0, \Rightarrow F = F_m \Rightarrow F \text{ omogeneo}$$

ossia F è omogeneo. $\square$

Teorema 2.3 (Teorema di Eulero). Se $F \in A[x_1, \dots, x_r]$ è omogeneo di grado m risulta

$$\sum_{i=1}^r \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i = mF.$$

DIMOSTRAZIONE. Se t è un'altra indeterminata, per il lemma 2.2, si ha la (5). Derivando rispetto a t , ~~si ottiene~~ *si ottiene* ~~ambos i membri~~:

$$\sum_{i=1}^r \frac{\partial F}{\partial x_i} (tx_1, \dots, tx_r) x_i = mt^{m-1} F(x_1, \dots, x_r)$$

da cui, per $t = 1$, segue il teorema. $\square$

• **Lemma 2.4** Se $F \in A[x_1, \dots, x_r]$ è omogeneo, allora tutti i fattori di F sono omogenei.

• DIMOSTRAZIONE. Sia $F = fg$ e siano, $\deg F = m+n$

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_m, \quad g = g_0 + g_1 + \dots + g_n, \quad f_m, g_n \neq 0,$$

le decomposizioni di f e g in somma di componenti omogenee. Se f e g non sono entrambi omogenei e f_h e g_k sono le componenti omogenee di grado minimo che non sono nulle, si ha $h < m$ oppure $k < n$; quindi $h+k < m+n$ e perciò

$$F = fg = \underbrace{f_h g_k}_{h+k < m+n} + \dots$$

non è omogeneo.

$\Rightarrow F$ non è omogeneo, assurdo. $\square$

Osservazione 2.5 Se nel teorema 2.1 è $b_1 = \dots = b_r = 0$, l'isomorfismo φ trasforma polinomi omogenei in polinomi omogenei.

Definizione 2.6 Se $F = F(x_1, \dots, x_r) \in A[x_1, \dots, x_r]$ è omogeneo di grado m , il polinomio

$$F_* = F_*(x_1, \dots, x_{r-1}) = F(x_1, \dots, x_{r-1}, 1)$$

// sostituiamo a $x_r, 1$ //

di $A[x_1, \dots, x_r]$ si dice disomogeneizzato di F rispetto a x_r .

Se x_r^s è la massima potenza di x_r che divide F , il grado di F_* è $m-s$. In particolare, se x_r non divide F , allora F_* ha grado uguale a quello di F .

Definizione 2.7 Se $f = f(x_1, \dots, x_{r-1}) \in A[x_1, \dots, x_{r-1}]$ ha grado m e

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_m$$

è la decomposizione di f in somma di componenti omogenee, il polinomio omogeneo di grado m di $A[x_1, \dots, x_r]$

$$f^* = x_r^m f_0 + x_r^{m-1} f_1 + x_r^{m-2} f_2 + \dots + x_r f_{m-1} + f_m$$

si dice omogeneizzato di f rispetto a x_r .

$F_* = \text{disomogeneizzato}$
 $f^* = \text{omogeneizzato}$

Lemma 2.8 Si ha:

$$1) (F+G)_* = F_* + G_*, \quad (F+G)^* = F^* + G^*$$

$$2) (FG)_* = F_* G_*,$$

$$3) (fg)^* = f^* g^*,$$

$$4) f = (f^*)_*,$$

$$5) F = x_r^s (F_*)^*, \quad \text{quindi in generale } F \neq (F_*)^*$$

dove x_r^s è la massima potenza di x_r che divide F .

5.1) In particolare,

$$F = (F_*)^* \iff x_r \text{ non divide } F.$$

DIMOSTRAZIONE. Le 1), 4), 5) sono ovvie. La 1) e 2) derivano dal fatto che la valutazione è

in omomorfismo.

2) È immediata nel caso che F e G sono monomi. Se F è somma dei monomi $F_1, \dots, F_h$ e G è somma dei monomi $G_1, \dots, G_k$, per la 1) si ha

$$F_* = F_{1*} + \dots + F_{h*}, \quad G_* = G_{1*} + \dots + G_{k*},$$

e quindi

$$(FG)_* = \left(\sum_{i,j} F_i G_j \right)_* = \sum_{i,j} (F_i G_j)_* = \sum_{i,j} F_{i*} G_{j*} = F_* G_*.$$

3) Siano f, g di gradi m, n e siano

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_m, \quad g = g_0 + g_1 + g_2 + \dots + g_n,$$

le loro decomposizioni in somma di componenti omogenee. Allora $fg = \sum_{i,j} f_i g_j$ e quindi

$$(fg)^* = \sum_{i,j} x_r^{m+n-i-j} f_i g_j = \sum_{i,j} (x_r^{m-i} f_i) (x_r^{n-j} g_j) = f^* g^*. \quad \square$$

Corollario 2.9 Sia $F \in A[x_1, \dots, x_r]$ omogeneo, non divisibile per x_r . Allora: (Nota 1)

1) F è irriducibile se e solo se F_* è irriducibile,

2) i fattori di F_* sono i disomogeneizzati dei fattori di F ed i fattori di F sono gli omogeneizzati di quelli di F_* .

$$F_0 = F_1 F_2 \dots F_n \quad F_i \text{ fattori irriducibili} \iff F_* = F_{1*} \dots F_{n*}$$

F_{i*} sono i fattori irrid di F_*

decomp in fattori omogenei

$$\begin{aligned} \Rightarrow F &= F_1 + \dots + F_m = x_r^s (G_0 + \dots + G_{m-s}) \\ F_* &= G_{0*} + \dots + G_{m-s*} \quad (F_*)^* = G_0 + \dots + G_{m-s} \end{aligned}$$

1. richiediamo che F sia omogeneo perché la disomogeneizzazione è definita solo per gli omogenei

Cor 2.9.2 $F \in A[x_1, \dots, x_{r-1}]$
 1) F irrid $\Leftrightarrow F^* \text{ irrid}$; 2) $F = F_1 \dots F_h \Leftrightarrow F^* = F_1^* \dots F_h^*$
 irrid. irrid

$\frac{P}{f} \left[\frac{1}{f} \right] f^* = gh \Rightarrow f = (f^*)_* = g_* h_*$
 $\deg f^* = \sum_{i=1}^m x_i^{a_i} f_i + f_m \Rightarrow x_2 \times f^* \Rightarrow x_2 \times g_*, x_2 \times h \Rightarrow \deg g_*, \deg h_* > 0 \Rightarrow f \text{ rid; assurdo}$
 $\left. \begin{array}{l} f = gh \Rightarrow f^* = g^* h^* \\ \text{assurdo} \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ rid; assurdo}$

2 COMPLEMENTI SUI POLINOMI

119

• DIMOSTRAZIONE. 1) Se $F_* = fg$ con f, g di grado positivo, per il lemma 2.8 si ha $F = (F_*)^* = (fg)^* = f^* g^*$ e quindi F non è irriducibile. Viceversa, se $F = GH$ con G, H di grado positivo, si ha $F_* = (GH)_* = G_* H_*$. Nessuno dei polinomi G, H è divisibile per x_r , quindi G_*, H_* hanno entrambi grado positivo e perciò F_* non è irriducibile.

2) Se $F = F_1 F_2 \dots F_h$ è la decomposizione in fattori irriducibili di F , per il lemma 2.8 si ha $F_* = F_{1*} F_{2*} \dots F_{h*}$ e per la 1) i polinomi F_{i*} sono irriducibili. D'altra parte, se $F_* = f_1 f_2 \dots f_h$ è la decomposizione di F_* in fattori irriducibili, si ha $F = (F_*)^* = f_1^* f_2^* \dots f_h^*$ ed i polinomi f_i^* sono irriducibili, perché $f_i = (f_i^*)_*$. $\square$

Osservazione 2.10 Ovviamente si possono considerare disomogeneizzati ed omogeneizzati di polinomi rispetto ad una qualunque delle indeterminate $x_1, \dots, x_r$.

• **Teorema 2.11** Se il campo K è algebricamente chiuso, ogni polinomio omogeneo ~~grado~~ $F(x, y) \in K[x, y]$ nelle indeterminate x, y di grado positivo m si decompone nel prodotto di m fattori lineari omogenei in $K[x, y]$ e la decomposizione è unica, a meno dell'ordine dei fattori e di fattori costanti.

In altre parole, $F(x, y)$ è sempre riducibile. Non vale per più di due variabili.

• DIMOSTRAZIONE. Sia

$$F(x, y) = \sum_{i=0}^m a_i x^i y^{m-i} = a_0 y^m x^0 + \dots + a_m y^0 x^m$$

$a_i \in K;$

allora il polinomio disomogeneizzato di F rispetto a y è

$$F_*(x) = F(x, 1) = \sum_{i=0}^m a_i x^i = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \quad (1)$$

CASO: $a_m \neq 0$, ovvero y non divide $F(x, y)$

Se $a_m \neq 0$ e $b_1, \dots, b_h$ sono le radici distinte di $F_*(x)$ in K e $s_1, \dots, s_h$ sono le loro rispettive molteplicità, si ha

$$F_*(x) = a_m \prod_{j=1}^h (x - b_j)^{s_j}, \quad \sum_{j=1}^h s_j = m$$

e quindi (corollario 2.9) $(x - b_j)^* = x - b_j y$, $F_* = a_m \prod_{j=1}^h (x - b_j)^{s_j}$, $(F_*)^* = f_1^{s_1} \dots f_h^{s_h}$

$$F(x, y) = a_m \prod_{j=1}^h (x - b_j y)^{s_j}, \quad \sum_{j=1}^h s_j = m.$$

Nota: il passo (1) è quello che non permette di generalizzare la dim a più di due variabili, infatti se volessimo procedere per induzione, $F(x, y, z)_ = F(x, y, 1)_*$ dove dovrebbe essere omogeneo ma ciò non è sempre vero (ad ex $x^2 y + x z^2$).*

CASO $a_m = 0$:Se $a_m = 0$, sia a_k il coefficiente con indice massimo tale che $a_k \neq 0$; allora

$$F(x, y) = y^{m-k} \sum_{i=0}^k a_i x^i y^{k-i} \quad \leftarrow \text{applichiamo il caso precedente}$$

Per quanto visto prima, il polinomio $G(x, y) = \sum_{i=0}^k a_i x^i y^{k-i}$ ha una decomposizione in fattori lineari del tipo

$$d_k \neq 0 \Rightarrow y \text{ non divide } G(x, y) \xRightarrow{\text{CASO 1}} G(x, y) = a_k \prod_{j=2}^h (x - b_j y)^{s_j}, \quad \sum_{j=2}^h s_j = k$$

e quindi

$$F(x, y) = a_k y^{m-k} \prod_{j=2}^h (x - b_j y)^{s_j}, \quad \sum_{j=2}^h s_j = k.$$

L'unicità della decomposizione segue dalla fattorialità dell'anello $K[x, y]$: $\square$ $K[x, y]$ si decompone in maniera unica in $K[x, y]$ UFD**3. Risultante di due polinomi.**1. Siano sempre A e K come nei §§ precedenti. Se $F \in A[x]$ denoteremo con $d^0 F$ il suo grado.♦ **Teorema 3.1** Due polinomi $F, G \in A[x]$ di grado positivo hanno un fattore non costante in comune se e solo se esistono due polinomi non nulli $f, g \in A[x]$ tali che

$$(1) \quad Fg + Gf = 0, \quad d^0 f < d^0 F, \quad d^0 g < d^0 G.$$

⇒ ♦ **DIMOSTRAZIONE.** Se F, G hanno un fattore non costante H in comune si può scrivere

$$F = Hf, \quad G = -Hg, \quad \text{con } f, g \in A[x], \quad d^0 f < d^0 F, \quad d^0 g < d^0 G$$

e quindi

$$Fg + Gf = Hfg - Hgf = 0.$$

⇐ Viceversa, siano $f, g \in A[x]$ soddisfacenti le (1). Ogni fattore irriducibile non costante di F compare nella decomposizione in fattori irriducibili di $-Gf = Fg$ e poiché $d^0 f < d^0 F$ almeno un fattore non costante di F deve essere fattore di G . $\square$

$$\text{Hm } \deg \text{MCD}(F, G) > 0 \Leftrightarrow \exists f, g \in A[x] \begin{matrix} \deg f < \deg F \\ \deg g < \deg G \end{matrix} \quad Fg + Gf = 0$$

Siano

$$F = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad G = \sum_{j=0}^m b_j x^j$$

polinomi di $A[x]$ di gradi $n, m > 0$. I polinomi non nulli

$$f = \sum_{h=0}^{n-1} v_h x^h, \quad g = \sum_{k=0}^{m-1} u_k x^k, \quad \begin{array}{l} \deg f \leq n-1 \\ \deg g \leq m-1 \end{array}$$

sono tali che $Fg + Gf = 0$ se e solo se

$$(2) \quad \begin{array}{l} \text{coeff di grado } 0 \\ \text{coeff di grado } 1 \\ \text{coeff di grado } 2 \\ \vdots \\ \text{coeff di grado } n+m \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a_0 u_0 + b_0 v_0 = 0 \\ a_1 u_0 + a_0 u_1 + b_1 v_0 + b_0 v_1 = 0 \\ a_2 u_0 + a_1 u_1 + a_0 u_2 + b_2 v_0 + b_1 v_1 + b_0 v_2 = 0 \\ \dots \dots \dots \\ a_n u_{m-1} + b_m v_{n-1} = 0 \end{array} \right.$$

$$C_T = \sum_{i=0}^n a_i v_i, \quad \text{coeff di grado } i \text{ di } gF //$$

Riguardando le (2) come equazioni nelle $m+n$ indeterminate u_i, v_j si ha che esistono polinomi non nulli f, g soddisfacenti le (1) se e solo se è nullo il determinante dei coefficienti delle (2).

Definizione 3.2 Il trasposto

$$\mathcal{R}(F, G) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b_m \end{vmatrix} \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{matrix} a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \right\} m \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} b_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \right\} m \end{array}$$

del determinante dei coefficienti delle (2) si chiama *risultante dei polinomi* F, G .

In virtù del teorema 3.1 e di quanto sopra osservato si ha il seguente teorema.

Teorema 3.3 $\deg F, \deg G > 0$
I polinomi $F, G \in A[x]$ hanno un fattore non costante comune in $A[x]$ se e solo se il loro risultante è nullo.

Esempio 3.4 Se

$$F = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad G = x - k, \quad k \in A,$$

e F ha grado $n > 0$, si ha

$$\mathcal{R}(F, G) = F(k).$$

Se $n = 1$ è vero perché si ha

$$\mathcal{R}(F, G) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ -k & 1 \end{vmatrix} = a_0 + a_1 k = F(k).$$

Sia $n > 1$ e procediamo per induzione su n , supponendo che la cosa sia vera per ogni polinomio F di grado $m < n$. Si ha

$$\mathcal{R}(F, G) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -k & 1 \end{vmatrix} = a_n k^n + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ -k & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Se $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$, allora

$$\mathcal{R}(F, G) = a_n k^n + a_0 = F(k).$$

Se vi sono indici $0 < i < n$ per cui $a_i \neq 0$ e tra essi a_h è quello con indice massimo, posto

$$F_1 = a_0 + a_1 x + \dots + a_h x^h,$$

risulta

$$\mathcal{R}(F, G) = a_n k^n + \mathcal{R}(F_1, G) = a_n k^n + F_1(k) = F(k).$$

• **Teorema 3.5** Siano $F, G \in A[x]$ di gradi n, m rispettivamente. Esistono due polinomi $\varphi, \psi \in A[x]$ di gradi al più $m-1, n-1$ rispettivamente tali che

$$\mathcal{R}(F, G) = \varphi F + \psi G.$$

• **DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo gli $m+n$ polinomi

$$\begin{array}{rcl} F & = & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \\ xF & = & a_0 x + a_1 x^2 + \dots \\ \dots & & \\ x^{m-1}F & = & \dots \\ G & = & b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots \\ xG & = & b_0 x + b_1 x^2 + \dots \\ \dots & & \\ x^{n-1}G & = & \dots \end{array}$$

Siano $A_1, A_2, \dots, A_{m+n}$ i complementi algebrici degli elementi della prima colonna del risultante $\mathcal{R}(F, G)$. Moltiplicando i precedenti polinomi rispettivamente per $A_1, A_2, \dots, A_{m+n}$ e sommando ~~dei termini~~ ^{dei membri} si ottiene

Per Laplace I,
$$\left(\sum_{r=1}^m A_r x^{r-1} \right) F + \left(\sum_{r=m+1}^{m+n} A_r x^{r-m-1} \right) G = a_0 A_1 + b_0 A_{m+1} + x(\dots) + x^2(\dots) + \dots$$

Si ha $\varphi = \sum_{r=1}^m A_r x^{r-1}$, $\psi = \sum_{r=m+1}^{m+n} A_r x^{r-m-1}$. Laplace I $(a_1 A_1 + a_0 A_2 + b_1 A_{m+1} + b_0 A_{m+2})$

$\mathcal{R}(F, G) = a_0 A_1 + b_0 A_{m+1} \stackrel{\text{Laplace I}}{=} \mathcal{R}(F, G)$,

mentre i termini $(\dots)$ sono tutti nulli in quanto esprimono i prodotti degli elementi di una colonna del determinante $\mathcal{R}(F, G)$, diversa dalla prima, per i complementi algebrici degli elementi della prima. I polinomi richiesti sono Laplace II

$$\varphi = \sum_{r=1}^m A_r x^{r-1}, \quad \psi = \sum_{r=m+1}^{m+n} A_r x^{r-m-1}. \quad \square$$

$$\mathcal{R}(F, G) = a_0 A_1 + b_0 A_{m+1} = \varphi F + \psi G$$

Definizione 3.6 Il risultante di un polinomio $F \in A[x]$ e del polinomio derivato F' di F si chiama discriminante di F .

• **Teorema 3.7** Se il campo K di caratteristica 0 è algebricamente chiuso, un polinomio $F \in K[x]$ ha le radici in K tutte semplici se e solo se il suo discriminante è non nullo.

DIMOSTRAZIONE. Una radice $a \in K$ di F è semplice per F se e solo se $F'(a) \neq 0$ (teorema 1.5), cioè $x - a$ non è fattore di F' . Quindi F ha radici tutte semplici se e solo se non ha fattori di grado positivo in comune con F' . Il teorema segue, allora, dal teorema 3.3. $\square$

Esempio 3.8 1) Sia $F = ax^2 + bx + c \in K[x]$, con $a \neq 0$. Il discriminante di F è

$$\begin{vmatrix} c & b & a \\ b & 2a & 0 \\ 0 & b & 2a \end{vmatrix} = a(4ac - b^2).$$

Si ritrova il risultato, ben noto, che F ha le radici tutte semplici se e solo se $b^2 - 4ac \neq 0$.

2) Sia $F = x^3 + px + q \in K[x]$. Il discriminante di F è

$$\begin{vmatrix} q & p & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q & p & 0 & 1 \\ p & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4p^3 + 27q^2.$$

Thm 3.7

$F \in K[x]$ separabile $\Leftrightarrow \mathcal{R}(F, F') \neq 0$

Quindi il polinomio F ha le radici tutte semplici se e solo se $4p^3 + 27q^2 \neq 0$.

Def Siano $F, G \in A[x_1, \dots, x_r]$ e sia $A_i = A[x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_r]$.

Definizione 3.9 Se F e G come polinomi in x_i a coefficienti in A_i hanno entrambi grado positivo, il loro risultante, $R_{x_i}(F, G)$, che è un elemento di A_i , si chiama *risultante di F, G rispetto a x_i* . *In pratica prendendo F e G come in (1), usiamo A_i e B_j come coefficienti per costruire il risultante.*

Teorema 3.10 Siano $F, G \in A[x_1, \dots, x_r]$ omogenei di rispettivi gradi n, m positivi. Se in x_1 il polinomio F ha grado n ed il polinomio G ha grado m , il risultante di F, G rispetto a x_1 , se non è nullo, è omogeneo di grado mn .

DIMOSTRAZIONE. Siano

$$(1) \quad F = \sum_{i=0}^n A_i x_1^i, \quad G = \sum_{j=0}^m B_j x_1^j, \quad A_i, B_j \in A[x_2, \dots, x_r]$$

*B_j omogenei
deg $A_i = n-i$, A_i omogenei; deg $B_j = m-j$*

e sia $R(x_2, \dots, x_r)$ il loro risultante rispetto a x_1 . Sia t un'indeterminata. Poiché A_i, B_j , se non nulli, sono omogenei di gradi $n-i, m-j$ rispettivamente, si ha $A_i(t x_2, \dots, t x_r) = t^{n-i} A_i(x_2, \dots, x_r) \Rightarrow$

$$R(tx_2, \dots, tx_r) = \begin{vmatrix} t^n A_0 & t^{n-1} A_1 & \dots & A_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & t^n A_0 & \dots & t A_{n-1} & A_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & t A_{n-1} & A_n \\ t^m B_0 & t^{m-1} B_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & t^m B_0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & t B_{m-1} & B_m \end{vmatrix}$$

*t^m
 t^{n-1}
 t
 t^n
 t^{n-1}
 t*

Moltiplicando nel determinante la prima riga per t^m , la seconda per t^{m-1} , ..., la m -ma per t , la $(m+1)$ -ma per t^n , la $(m+2)$ -ma per t^{n-1} , ..., l'ultima per t , il determinante risulta moltiplicato per t^p con

$$p = (1 + 2 + \dots + m) + (1 + 2 + \dots + n) = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

Thm 3.10

$F, G \in A[x_1, \dots, x_r]$ omogenei

deg $F = n$, deg $G = m > 0$

deg $_{x_1} F = n$, deg $_{x_1} G = m$

$R_{x_1}(F, G) \neq 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{deg } R_{x_1}(F, G) = mn \\ R_{x_1}(F, G) \text{ omogeneo} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Quindi

$$\underbrace{t^p R(tx_2, \dots, tx_r)}_2 = \begin{vmatrix} t^{n+m}A_0 & t^{n+m-1}A_1 & \dots & t^m A_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t^{n+m-1}A_0 & \dots & t^m A_{n-1} & t^{m-1}A_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & & & tA_n \\ t^{n+m}B_0 & t^{n+m-1}B_1 & \dots & & & \dots & 0 \\ 0 & t^{n+m-1}B_0 & \dots & & & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & & & tB_m \end{vmatrix}$$

Considerando 2 come ottenuto da $R(x_2, \dots, x_r)$ moltiplicando le colonne i per t^{n+m-i} , $t^{n+m-i-1}, \dots, t$ e usando le propr. del determinante: Portando fuori segno di determinante t^{n+m} dalla prima colonna, t^{n+m-1} dalla seconda colonna, $\dots$, t dall'ultima, si ha

$$t^p R(tx_2, \dots, tx_r) = t^q R(x_2, \dots, x_r)$$

con

$$q = 1 + 2 + \dots + (m+n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} = p + mn.$$

Quindi

$$R(tx_2, \dots, tx_r) = t^{mn} R(x_2, \dots, x_r)$$

e, per il lemma 2.2, se $R(x_2, \dots, x_r)$ non è nullo è omogeneo di grado mn . $\square$

Osservazione 3.11 Il teorema 3.10 sussiste, ovviamente, considerando una qualsiasi altra indeterminata x_i invece di x_1 .

Esempio 3.12 Se $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m$ sono indeterminate su A e

$$F = \prod_{r=1}^n (x - y_r), \quad G = \prod_{s=1}^m (x - z_s)$$

si ha

$$(i) \quad \mathcal{R}_x(F, G) = \prod_{r=1}^n \prod_{s=1}^m (y_r - z_s).$$

Infatti, i polinomi $F, G \in A[y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m, x]$ sono omogenei di rispettivi gradi n, m e quindi $\mathcal{R}_x(F, G) \in A[y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m]$, che è non nullo in quanto F, G non hanno fattori di grado positivo in comune, è omogeneo di grado mn (teorema 3.10). Sostituendo in G un elemento z_s con un elemento

y_r , il polinomio G_1 che si ottiene ha in comune con F il fattore $x - y_r$ e quindi $\mathcal{R}_x(F, G_1) = 0$ (teorema 3.3). Poiché $\mathcal{R}_x(F, G_1)$ si ottiene da $\mathcal{R}_x(F, G)$ sostituendo z_s con y_r , ciò significa che $\mathcal{R}_x(F, G)$ è divisibile per il polinomio $y_r - z_s$. Ed allora, poiché $\mathcal{R}_x(F, G)$ ha grado mn ed ha gli mn fattori lineari $y_r - z_s$, si ha

$$(ii) \quad \mathcal{R}_x(F, G) = k \prod_{r=1}^n \prod_{s=1}^m (y_r - z_s), \quad 0 \neq k \in A.$$

Scritti F e G nella forma

$$F = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad G = \sum_{j=0}^m b_j x^j, \quad (a_n = b_m = 1)$$

si ha che $\mathcal{R}_x(F, G)$ è un polinomio omogeneo di grado m nelle a e omogeneo di grado n nelle b . Sviluppando il determinante si vede subito che il termine contenente b_0 al grado massimo è b_0^n , mentre quello contenente a_0 al grado massimo è a_0^m . Si ha

$$G(y_r) = \prod_{s=1}^m (y_r - z_s), \quad r = 1, 2, \dots, n,$$

quindi

$$\prod_{r=1}^n G(y_r) = \prod_{r=1}^n \prod_{s=1}^m (y_r - z_s)$$

e perciò

$$(iii) \quad \mathcal{R}_x(F, G) = k \prod_{r=1}^n G(y_r).$$

Il termine che contiene b_0 al grado massimo nel secondo membro della (iii) è kb_0^n e quindi deve essere $k = 1$.

Si ha, inoltre,

$$F(z_s) = \prod_{r=1}^n (z_s - y_r), \quad s = 1, 2, \dots, m,$$

e quindi

$$\prod_{s=1}^m F(z_s) = \prod_{s=1}^m \prod_{r=1}^n (z_s - y_r) = (-1)^{mn} \prod_{s=1}^m \prod_{r=1}^n (y_r - z_s).$$

Ed allora

$$(iv) \quad \mathcal{R}_x(F, G) = \prod_{r=1}^n \prod_{s=1}^m (y_r - z_s) = \prod_{r=1}^n G(y_r) = (-1)^{mn} \prod_{s=1}^m F(z_s).$$

Esempio 3.13 Siano

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad G = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m,$$

polinomi di $A[x]$ di gradi n, m tali che F in A abbia n radici $h_1, \dots, h_n$ e G abbia m radici $k_1, \dots, k_m$. Allora

$$\mathcal{R}(F, G) = a_n^m b_m^n \prod_{r=1}^n \prod_{s=1}^m (h_r - k_s).$$

Infatti, si può scrivere

$$F = a_n \prod_{r=1}^n (x - h_r), \quad G = b_m \prod_{s=1}^m (x - k_s)$$

ed allora, posto

$$F_1 = \prod_{r=1}^n (x - h_r), \quad G_1 = \prod_{s=1}^m (x - k_s),$$

per la (i) dell'esempio 3.12, si ha

$$\mathcal{R}(F, G) = a_n^m b_m^n \mathcal{R}(F_1, G_1) = a_n^m b_m^n \prod_{r=1}^n \prod_{s=1}^m (h_r - k_s).$$

Da questa si può dedurre l'esempio 3.4.

Esempio 3.14 Siano F_1, F_2, G polinomi in $A[x]$ di gradi positivi. Si ha

$$\mathcal{R}(F_1 F_2, G) = \mathcal{R}(F_1, G) \mathcal{R}(F_2, G).$$

Infatti, esiste un campo K_0 , contenente A come sottoanello, tale che in $K_0[x]$ i polinomi F_1, F_2, G hanno decomposizioni lineari del tipo

$$F_1 = a \prod_{r=1}^n (x - h_r), \quad F_2 = b \prod_{r=n+1}^q (x - h_r), \quad G = c \prod_{s=1}^m (x - k_s), \quad a, b, c \in A.$$

Un tale campo K_0 è, ad esempio, la chiusura algebrica del campo K delle frazioni di A .

Si ha (esempio 3.13)

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(F_1 F_2, G) &= (ab)^m c^{n+q} \prod_{r=1}^{n+q} \prod_{s=1}^m (h_r - k_s) \\ &= a^m c^n b^m c^q \prod_{r=1}^n \prod_{r=n+1}^{n+q} \prod_{s=1}^m (h_r - k_s) \\ &= \mathcal{R}(F_1, G) \mathcal{R}(F_2, G).\end{aligned}$$

Def Siano

$$F = F(x, y) = \sum_{i=0}^n a_i x^i y^{n-i}, \quad G = G(x, y) = \sum_{j=0}^m b_j x^j y^{m-j}, \quad a_i, b_j \in A,$$

forme di gradi positivi n, m nelle indeterminate x, y .

Definizione 3.15 Il determinante di ordine $n + m$

$$\mathcal{R}_{x,y}(F, G) \stackrel{df}{=} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & & & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & & & & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & & & b_m \end{vmatrix}$$

si dice *risultante delle forme F, G rispetto a x, y* .

Osservazione 3.16 1) Se $a_n b_m \neq 0$, il risultante di F, G rispetto a x, y coincide con il risultante dei polinomi disomogeneizzati di F, G rispetto a y

$$F_* = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad G_* = \sum_{j=0}^m b_j x^j.$$

2) Se $b_m \neq 0, a_n = \dots = a_{n-s+1} = 0, a_{n-s} \neq 0$, posto

$$(3) \quad F = y^s F_1, \quad F_1 = \sum_{i=0}^{n-s} a_i x^i y^{n-s-i},$$

$$1) \quad a_n b_m \neq 0 \Rightarrow \mathcal{R}_{x,y}(F, G) = \mathcal{R}(F_*, G_*)$$

Qs 1.36

1) $a_n b_m \neq 0 \Rightarrow R_{x,y}(F, G) = R(F_*, G_*)$

2) $b_m \neq 0$, y^s è la potenza ^{massima} di y che divide $\mathbb{F}$, ovvero $a_n = \dots = a_{m-s+1} = 0$, $a_{m-s} \neq 0$

$$R_{x,y}(F, G) = b_m^3 R_{x,y}(F_2, G)$$

Con $F = \gamma^3 F_2$

Dim 2)

$$R_{x,y}(F,G) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{m-3} & \overbrace{a_{m-2} \dots a_m}^m & 0 & \dots & 0 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{m-3} & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & \dots & 0 \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Applicando ripetutamente Laplace, ci spostiamo a sinistra fino a quando nell'ultima colonna incontriamo $a_{n-1} \neq 0$ che proviene dalla riga m .

[illegible]

$$= b_m^3 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} \\ & a_0 & \dots & a_{m-1} \\ & & \ddots & \\ b_0 & \dots & b_m \\ & & \ddots & \\ & & & b_0 & \dots & b_m \end{vmatrix} = b_m^3 R_{x,y}(F_1, G)$$

si ha

$$(4) \quad \mathcal{R}_{x,y}(F, G) = b_m^s \mathcal{R}_{x,y}(F_1, G).$$

• **Teorema 3.17** *I polinomi omogenei $F = F(x, y)$, $G = G(x, y)$ hanno un fattore non costante in comune in $A[x, y]$ se e solo se $\mathcal{R}_{x,y}(F, G) = 0$.*

• **DIMOSTRAZIONE.** Sia $\mathcal{R}_{x,y}(F, G) = 0$.

⇐ Se $a_n = b_m = 0$, i polinomi F e G hanno in comune il fattore y .

Se $a_n b_m \neq 0$, $\mathcal{R}_{x,y}(F, G)$ coincide con il risultante dei polinomi F_*, G_* , disomogeneizzati di F, G rispetto a y . Per il teorema 3.3, F_* e G_* hanno un fattore non costante in comune H e, per il corollario 2.9, il suo omogeneizzato H^* rispetto a y è un fattore di F e G .

Se $b_m \neq 0$ e $a_n = \dots = a_{n-s+1} = 0, a_{n-s} \neq 0$, si ha $F = y^s F_1$, dove F_1 è il polinomio (3) e si ha la (4). Deve essere $\mathcal{R}_{x,y}(F_1, G) = 0$ e quindi, per quanto visto prima, F_1 e G hanno un fattore non costante comune H , che è un fattore di F e G . Il caso $b_m = 0, a_n \neq 0$ è analogo.

⇒ Viceversa, sia H il fattore non costante comune a F e G . Se H è divisibile per y allora $a_n = b_m = 0$ e perciò $\mathcal{R}_{x,y}(F, G) = 0$. Altrimenti a_n o b_m è non nullo. Se $a_n b_m \neq 0$ il polinomio H_* , disomogeneizzato di H rispetto ad y , è un fattore dei polinomi F_* e G_* (corollario 2.9) e quindi $\mathcal{R}(F_*, G_*) = 0$ per il teorema 3.3. Infine $\mathcal{R}_{x,y}(F, G) = 0$ per l'osservazione 3.16, 1).

Sia ora $a_n = \dots = a_{n-s+1} = 0, a_{n-s} b_m \neq 0$; si ha $F = y^s F_1$, dove F_1 è il polinomio (3). Allora H è fattore di F_1 e si ha $\mathcal{R}_{x,y}(F_1, G) = 0$ per il caso precedente; infine, per l'osservazione 3.16, 2), risulta $\mathcal{R}_{x,y}(F, G) = 0$. Analogamente se $a_n \neq 0$ e $b_m = 0$. □

4. Ipersuperfici algebriche.

Def. Sia K un campo, che, da ora in avanti, supporremo sempre di caratteristica 0 e algebricamente chiuso.

Se $F \in K[x_1, \dots, x_r]$, uno zero di F in K^r è una soluzione dell'equazione $F = 0$, cioè una r -pla $(a_1, \dots, a_r) \in K^r$ in cui F si annulla.

• **Teorema 4.1** *Se $F \in K[x_1, \dots, x_r]$ è un polinomio non nullo, esistono in K elementi $a_1, \dots, a_r$ tali che $F(a_1, \dots, a_r) \neq 0$.*

• **DIMOSTRAZIONE.** Se $r = 1$ è vero perché F ha solo un numero finito di radici in K mentre K , essendo di caratteristica 0, possiede infiniti elementi.

Thm 3.17

CASO $a_m = b_m = 0$

$$y/F, y/G \Rightarrow y/MCD(F,G) \Rightarrow \deg MCD(F,G) > 0$$

CASO $a_m, b_m \neq 0$

$$0 = R_{x,y}(F,G) \stackrel{\text{oss 1.36 pg 128}}{=} R_{x,y}(F_*, G_*) \stackrel{\text{Thm 3.3 pg 121}}{\Rightarrow} \begin{cases} a_m b_m \neq 0 \\ H \text{ e' in comune a } F_*, G_* \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} H^* \text{ e' in comune} \\ \text{Cor 2.9} \\ \text{pg 118} \end{matrix} \text{ a } F, G$$

CASO $a_m = \dots = a_{m-(s-1)} = 0, a_{m-s} \neq 0, b_m \neq 0$

$$0 = R_{x,y}(F,G) \stackrel{\text{oss 1.36}}{=} b_m^{-1} R_{x,y}(F_2, G) \stackrel{b_m \neq 0}{\Rightarrow} R_{x,y}(F_2, G) = 0 \Rightarrow \dots \text{ caso precedente } H \text{ e' in comune } F_2, G$$

$$F = y^s F_2 \Rightarrow H \text{ e' in comune a } F, G$$

CASO $b_m = \dots = b_{m-(s-1)} = 0, b_{m-s} \neq 0, a_m \neq 0$

analogamente

$\Rightarrow$

CASO y/H :

$$y/H, H/F, H/G \Rightarrow y/(F,G) \Rightarrow a_m b_m = 0 \stackrel{\text{L'ultima colonna e' nulla}}{\Rightarrow} R_{x,y}(F,G) = 0$$

CASO $a_m b_m \neq 0$:

$$\bullet R_{x,y}(F,G) = R_{x,y}(F_*, G_*) \stackrel{\text{oss 1.36}}{=} 0 \stackrel{\text{Thm 3.3}}{\Rightarrow} \begin{cases} H \text{ a comune tra } F, G \\ a_m b_m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} H_* \text{ a comune tra } F_*, G_* \\ \text{Cor 2.9} \end{matrix}$$

CASO $a_m = \dots = a_{m-(s-1)} = 0, a_{m-s} \neq 0, b_m \neq 0$

$$R_{x,y}(F,G) = b_m^{-1} R_{x,y}(F_2, G) \stackrel{\text{oss 1.36}}{=} 0$$

$$\left. \begin{matrix} H \text{ a comune tra } F, G \\ b_m \neq 0 \Rightarrow y \nmid G \end{matrix} \right\} \Rightarrow y \nmid H \quad \left. \begin{matrix} H/F = y^s F_2 \\ H/G \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} H/F_2 \\ \text{caso precedente} \end{matrix} \Rightarrow R_{x,y}(F_2, G) = 0$$

Thm 4.1 $F \neq 0$

- 1) $|\{\bar{a} \in k^2 \mid F(\bar{a}) \neq 0\}| = \infty$
- 2) $s > 1 \Rightarrow |\{\bar{a} \in k^2 \mid F(\bar{a}) = 0\}| = \infty$

~~del 4.2~~

Sia $r > 1$ e procediamo per induzione su r , supponendo che il teorema sia vero per polinomi in $r - 1$ indeterminate. Sia F di grado positivo, altrimenti ~~non vi è niente da dimostrare~~ $\rightarrow$ Salvo un eventuale scambio di indici, è possibile supporre che F abbia grado positivo in x_1 cosicché

$$(1) \quad F = \sum_{i=0}^n B_i x_1^i, \quad B_i \in K[x_2, \dots, x_r], \quad B_n \neq 0.$$

Essendo $B_n \neq 0$, esistono in K elementi $a_2, \dots, a_r \in K$ tali che $B_n(a_2, \dots, a_r) \neq 0$; il polinomio

$$F(x_1, a_2, \dots, a_r) = \sum_{i=0}^n B_i(a_2, \dots, a_r) x_1^i, \quad \rightarrow \square^2$$

~~è non nullo e quindi esistono in K elementi a_1 tali che $F(a_1, a_2, \dots, a_r) \neq 0$.~~
□

• **Osservazione 4.2** Per ogni polinomio di grado positivo $F \in K[x_1, \dots, x_r]$ esistono in K^r infiniti elementi in cui F non si annulla e, se $r > 1$, esistono in K^r infiniti elementi in cui F si annulla.

Infatti, scritto F nella forma (1) e scelti $a_2, \dots, a_r$ in K tali che $B_n(a_2, \dots, a_r) \neq 0$, vi è solo un numero finito di elementi $a_1 \in K$ che sono radici del polinomio $F(x_1, a_2, \dots, a_r)$ e quindi vi sono infinite r -ple $(b, a_2, \dots, a_r)$ che non annullano F .

Se $r > 1$ esistono in K^{r-1} infiniti elementi $(c_2, \dots, c_r)$ tali che $B_n(c_2, \dots, c_r) \neq 0$; per ciascuna di tali $(r-1)$ -ple, essendo K algebricamente chiuso, esistono in K radici a_1 del polinomio $F(x_1, c_2, \dots, c_r)$ e risulta $F(a_1, c_2, \dots, c_r) = 0$.

~~Lemmi 4.3~~ $\rightarrow \square^1$

• **Teorema 4.3** Siano $F, G \in K[x_1, \dots, x_r]$. Se F è irriducibile ed ogni zero di F in K^r è anche zero di G , allora G è multiplo di F .

• **DIMOSTRAZIONE.** Se $G = 0$ il teorema è vero. Se $G \neq 0$ deve essere di grado positivo: infatti F ha grado positivo e quindi ha zeri (ricordiamo che $K = \overline{K}$) che devono essere anche zeri di G . Possiamo supporre che G abbia grado positivo in x_1 , ~~ad esempio~~; per il teorema 3.5 il risultante di F, G rispetto ad x_1 si può scrivere: $\rightarrow \square^3$

$$\mathcal{R}_{x_1}(F, G) = \varphi F + \psi G$$

$$\varphi, \psi \in (K[x_2, \dots, x_r])[x_1] \quad \text{del 4.3}$$

Quindi ogni zero di F è anche zero di $\mathcal{R}_{x_1} \in K[x_2, \dots, x_r]$. Se fosse $\mathcal{R}_{x_1}(F, G) \neq 0$ per il teorema 4.1 esisterebbero $a_2, \dots, a_r \in K$ tali che $\mathcal{R}_{x_1}(a_2, \dots, a_r) \neq 0$

$\rightarrow \square^1$

Thm 4.3
 $\left. \begin{array}{l} F \text{ irrid} \in K[x_1, \dots, x_r] \\ F(a) = 0 \Rightarrow G(a) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow F/G$

$$\text{se } \deg F = 0 \Rightarrow F = c \neq 0 \Rightarrow \forall k \in K \quad F(k) = c \neq 0 \quad \square$$

$$\square^2 \quad F(x_1, a_2, \dots, a_r) \in K[x_1] \Rightarrow \text{Ruffini} \quad F(x_1, a_2, \dots, a_r) \text{ ha } n \text{ radici } \{d_1, \dots, d_m\} \Rightarrow \\ \Rightarrow F(k, a_2, \dots, a_r) \neq 0 \quad \forall k \in K \setminus \{d_1, \dots, d_m\} \quad \square$$

Pf 4.2) 2)

$$F(x_1, \dots, x_r) = A_0 + A_1 x_1 + \dots + A_n x_1^n \in (K[x_2, \dots, x_r])[x_1]$$

$$A_n \neq 0 \Rightarrow \left| \{ \bar{a} \in K^{r-1} \mid A_n(\bar{a}) \neq 0 \} \right| = \infty \quad \text{Thm 4.2, d)} \quad (2)$$

$$F(x_1, \bar{a}) \in K[x_1] \Rightarrow \text{Ruffini} \quad F(x_1, \bar{a}) \text{ ha } n \text{ radici } \{d_{a_1}, \dots, d_{a_m}\} \quad (2)$$

$$\{ \bar{a} \in K^{r-1} \mid F(\bar{a}) = 0 \} \supseteq \{ (d_{a_i}, \bar{a}) \mid \bar{a} \in K^{r-1}, A_n(\bar{a}) \neq 0 \} \quad (2)$$

Lemma 4.3

$$\square^2 \rightarrow \begin{cases} \deg_{x_1} F > 0 \\ F(\bar{a}) = 0 \Rightarrow G(\bar{a}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \deg_{x_1} G > 0 \text{ oppure } G = 0 \quad (2)$$

Pf vedi sotto $\square^3$

Thm 4.3

$\square^3 \rightarrow$ infatti, supponendo che $\deg_{x_1} F > 0$ si deve avere $\deg_{x_1} G > 0$. Procediamo per assurdo:

$$\deg_{x_1} F > 0 \Rightarrow F = A_0 + A_1 x_1 + \dots + A_n x_1^n \quad A_i \in K[x_2, \dots, x_r] \\ A_n \neq 0$$

$$A_n G \neq 0 \Rightarrow \exists \bar{a} \in K^{r-1} : A_n(\bar{a}) G(\bar{a}) \neq 0 \Rightarrow \text{Nota: } G = G(x_2, \dots, x_r) / \deg_{x_1} G = 0$$

$$F(d, \bar{a}) = 0 \text{ per qualche } d \in K \Rightarrow G(d, \bar{a}) = 0 \quad \text{Ruffini} \quad \text{assurdo con } G(\bar{a}) \neq 0$$

$$\square^4 \rightarrow F(d) = 0 \xRightarrow{\text{Hp}} G(d) = 0 \Rightarrow R_{x_1}(F, G)(d) = 0 \quad (1)$$

$$(1), R_{x_1}(F, G) \neq 0 \Rightarrow \deg_{x_1} R_{x_1}(F, G) > 0 \quad \text{Lemma 4.3}$$

essendo, per def di R_{x_1} , si ha che $R_{x_1} \in K[x_2, \dots, x_r]$

Quindi si deve avere $R_{x_1}(F, G) = 0 \Rightarrow F, G$ hanno un fattore in comune $\Rightarrow F/G$ $\square$

0 mentre $F(x_1, a_2, \dots, a_r)$ ha certamente soluzioni. Quindi è $\mathcal{R}_{x_1} = 0$ ed F, G hanno un fattore comune (teorema 3.3); poiché F è irriducibile G è multiplo di F . $\square$

• **Corollario 4.4** Due polinomi $F, G \in K[x_1, \dots, x_r]$ che hanno gli stessi zeri in K^r hanno gli stessi fattori irriducibili, non necessariamente con gli stessi esponenti.

• **DIMOSTRAZIONE.** Per il teorema 4.3, ogni fattore irriducibile di F è fattore di G e viceversa. $\square$

• ~~2.4~~ Sia $\mathbb{A}^n$ lo spazio affine di dimensione n sul campo K ed in esso sia fissato un sistema di riferimento $(O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Sia $F \in K[x_1, \dots, x_n]$.

Un punto $P(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ è uno zero di F o soddisfa l'equazione $F = 0$ o è soluzione dell'equazione $F = 0$ se $F(P) = F(a_1, \dots, a_n) = 0$.

Dall'osservazione 4.2 segue che, se F ha grado positivo, in $\mathbb{A}^n$ esistono infiniti punti che sono soluzioni dell'equazione $F = 0$ e, se $n > 1$, infiniti punti che non lo sono.

L'equazione $F = 0$ non è, però, individuata dal suo insieme delle soluzioni. Infatti, se $F = F_1^{r_1} F_2^{r_2} \dots F_h^{r_h}$ è la decomposizione in fattori irriducibili di grado positivo di F , tutte le equazioni $F_1^{s_1} F_2^{s_2} \dots F_h^{s_h} = 0$, con s_i interi positivi, hanno in $\mathbb{A}^n$ lo stesso insieme di soluzioni.

• **Definizione 4.5** Sia $F \in K[x_1, \dots, x_n]$ di grado positivo. Se F è irriducibile, si chiama *ipersuperficie algebrica irriducibile di $\mathbb{A}^n$ definita dall'equazione $F = 0$* o da F l'insieme $\mathcal{F}$ delle soluzioni in $\mathbb{A}^n$ dell'equazione $F = 0$. Se il polinomio F è riducibile e

$$F = F_1^{r_1} F_2^{r_2} \dots F_h^{r_h}$$

è la sua decomposizione in fattori irriducibili F_i di grado positivo, si chiama *ipersuperficie algebrica $\mathcal{F}$ di $\mathbb{A}^n$ definita dall'equazione $F = 0$ o da F* in $\mathbb{A}^n$ l'insieme $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_h\}$ delle ipersuperfici algebriche irriducibili definite rispettivamente dalle equazioni $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_h = 0$, con associati gli interi $\{r_1, r_2, \dots, r_h\}$. Si dice anche che $\mathcal{F}$ è costituita dalle (o è spezzata nelle) ipersuperfici $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_h$ contate rispettivamente $r_1, r_2, \dots, r_h$ volte e si scrive

$$\mathcal{F} = r_1 \mathcal{F}_1 + r_2 \mathcal{F}_2 + \dots + r_h \mathcal{F}_h.$$

Le ipersuperfici $\mathcal{F}_i$ si dicono le componenti irriducibili di $\mathcal{F}$ e gli interi r_i le loro molteplicità. Le componenti di molteplicità 1 si dicono *semplici*, le altre *multiple*.

I punti di $\mathcal{F}$ sono quelli delle sue componenti.

Nota 1.

Notazione

con $\mathcal{A}$ di $\mathbb{A}^n$

Se $\mathcal{A}$ è definita da $F=0$, con F indicheremo anche l'insieme $F = \{\bar{x} \mid F(\bar{x})=0\}$ dei punti di $\mathcal{A}$

Cor 4.4

$$\left. \begin{array}{l} F, G \in K[x_1, \dots, x_n] \\ (F=0 \Leftrightarrow G=0) \\ F = f_1 \dots f_n \quad f_i \text{ irrid.} \end{array} \right\} \Rightarrow G = f_1^{s_1} \dots f_n^{s_n}$$

pf $(f_i(x)=0 \Rightarrow F(x)=0 \Rightarrow G(x)=0) \xRightarrow{\text{Thm 4.3}} f_i \mid G \quad \square$

Oss 4.31

Siano $F = z_1^{s_1} + \dots + z_n^{s_n}$, $G = s_1 G_1 + \dots + s_n G_n$ due ipersuperfici, allora

$$F \subseteq G \Rightarrow G_{i_1} = F_1, \dots, G_{i_n} = F_n \text{ con } F_i \mid G_i$$

ossia, le componenti di F sono componenti di G . Inoltre, $\left. \begin{array}{l} F, G \text{ irrid.} \\ F \subseteq G \end{array} \right\} \Rightarrow F = G$

pf

$$F \subseteq G \Leftrightarrow (F(P)=0 \Rightarrow G(P)=0) \quad \forall P$$

$$\left. \begin{array}{l} (F_i(P)=0 \Rightarrow F(P)=0 \Rightarrow G(P)=0) \quad \forall P \\ F_i \text{ irriducib.} \end{array} \right\} \xRightarrow[\text{pg 236}]{\text{Thm 4.1}} F_i \mid G \quad ; \quad F_i \mid G \quad \forall i$$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ &\exists G_{j_i} : F_i = \lambda_i G_{j_i} \\ &\Downarrow F_i, G_{j_i} \text{ monici} \\ &\lambda_i = 1, F_i = G_{j_i} \end{aligned}$$

Nota 1: ~~Esiste~~ Sia F un polinomio. E' sempre possibile scrivere $F = \lambda \bar{F}$ con $\bar{F}$ monico e si ha $\lambda \neq 0, \lambda \in K$

$$F(P)=0 \Leftrightarrow \bar{F}(P)=0$$

Quindi F e $\bar{F}$ definiscono la stessa ipersuperficie. Per questo motivo considereremo sempre monici i polinomi delle ipersuperfici

Le ipersuperfici in spazi affini si dicono *ipersuperfici affini*.

Nel caso $n = 2$ le ipersuperfici affini sono le *curve affini* e nel caso $n = 3$ sono le *superfici affini*.

Associando ad ogni equazione $F = 0$ al variare di F in $K[x_1, \dots, x_n]$ l'ipersuperficie $\mathcal{F}$ da essa definita in $\mathbb{A}^n$ si ottiene una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle equazioni e l'insieme delle ipersuperfici di $\mathbb{A}^n$. Si ha, infatti, il

Teorema 4.6 Due equazioni distinte $F = 0$ e $G = 0$ definiscono in $\mathbb{A}^n$ ipersuperfici distinte.

DIMOSTRAZIONE. Se F e G definiscono la stessa ipersuperficie, per il corollario 4.4 essi hanno gli stessi fattori irriducibili distinti $F_1, \dots, F_h$. Se $F = F_1^{r_1} \dots F_h^{r_h}$ e $G = k F_1^{s_1} \dots F_h^{s_h}$, $k \in K$, le ipersuperfici $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ definite dalle equazioni $F = 0$ e $G = 0$ sono $\mathcal{F} = r_1 \mathcal{F}_1 + \dots + r_h \mathcal{F}_h$ e $\mathcal{G} = s_1 \mathcal{F}_1 + \dots + s_h \mathcal{F}_h$, dove $\mathcal{F}_i$ è l'ipersuperficie definita da F_i . Essendo $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ deve essere $r_i = s_i$ per ogni indice i e quindi $F = 0$ e $G = 0$ sono la stessa equazione. $\square$

Poiché considereremo solo ipersuperfici algebriche, nel seguito, per brevità, ometteremo la parola algebrica riferita ad una ipersuperficie. Diremo anche ipersuperficie $F = 0$ invece di ipersuperficie di equazione $F = 0$.

Nota: il thm 4.6 stabilisce una biiezione tra le superfici e i polinomi. Possiamo quindi pensare $\rightarrow$

Definizione 4.7 Il grado del polinomio F che definisce l'ipersuperficie affine $\mathcal{F}$ si dice *ordine* o *grado* di $\mathcal{F}$.

+ oss 4.7.1 L'ordine di $\mathcal{F}$ è invariante per affinità. Infatti, se α è un'affinità di $\mathbb{A}^n$ e

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

sono le equazioni di α^{-1} , la trasformata mediante α di $\mathcal{F}$ è l'ipersuperficie di equazione

$$F' = F'(x'_1, \dots, x'_n) = F\left(\sum_{j=1}^n a_{1j} x'_j + b_1, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj} x'_j + b_n\right) = 0$$

e, per il teorema 2.1, il grado del polinomio F' è uguale a quello di F .

Esempio 4.8 1) Le ipersuperfici algebriche affini di ordine 1 sono gli iperpiani.

2) Le ipersuperfici algebriche affini di ordine 2 sono le *quadriche* affini.

4.6

es Γ sono le stesse ipersup $\Rightarrow \{\bar{x} \mid F(\bar{x})=0\} = \{\bar{x} \mid G(\bar{x})=0\} \Rightarrow$ Cor. 4.4
Pg. 131

$$\Rightarrow F = F_1^{r_1} \dots F_n^{r_n}, \quad G = F_1^{z_1} \dots F_n^{z_n} \quad \text{con } F_i \text{ irrid.}$$

ma allora $\sum z_i \bar{x}_i = \sum r_i \bar{x}_i = \Gamma = \sum z_i \bar{x}_i \Rightarrow z_i = r_i \Rightarrow F = G$ assurdo $\square$

$\square \Rightarrow$ una ipersuperficie come un polinomio F .

L'equazione di una quadrica affine $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{A}^n$ si può scrivere

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0, \quad a_{ij}, b_i, c \in K.$$

Se q è la forma quadratica definita su K^n che rispetto alla base $(e_1, \dots, e_n)$ ha come matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \text{per ogni } 1 \leq i, j \leq n,$$

l'equazione di $\mathcal{Q}$ si può scrivere

$$q(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0.$$

Esiste in K^n una base rispetto alla quale la matrice di q è diagonale (capitolo II, teorema 2.13) e quindi esiste un sistema di riferimento di $\mathbb{A}^n$ rispetto al quale l'equazione di $\mathcal{Q}$ è

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0.$$

I coefficienti a_i si possono ordinare in modo che sia $a_i \neq 0$ per $1 \leq i \leq r$ ed $a_i = 0$ per $r+1 \leq i \leq n$ e quindi la (2) si può scrivere

$$\sum_{i=1}^r a_i \left(x_i + \frac{b_i}{2a_i} \right)^2 + \sum_{i=r+1}^n b_i x_i + c' = 0.$$

Con la trasformazione affine

$$y_i = \begin{cases} x_i + \frac{b_i}{2a_i}, & \text{se } 1 \leq i \leq r, \\ x_i, & \text{se } r+1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

l'equazione di $\mathcal{Q}$ diviene

$$(3) \quad \sum_{i=1}^r a_i y_i^2 + \sum_{i=r+1}^n b_i y_i + c' = 0.$$

Se i coefficienti b_i non sono tutti nulli si può supporre che sia $b_{r+1} \neq 0$ ed allora, con l'ulteriore trasformazione affine

$$z_i = \begin{cases} y_i, & \text{se } i \neq r+1, \\ b_{r+1}y_{r+1} + \dots + b_n y_n + c', & \text{se } i = r+1, \end{cases}$$

la (3) diviene

$$(4) \quad \sum_{i=1}^r a_i z_i^2 + z_{r+1} = 0.$$

Essendo K algebricamente chiuso esiste in esso un elemento α_i tale che $\alpha_i^2 = a_i$ ($1 \leq i \leq r$) e quindi, con l'ulteriore trasformazione affine

$$u_i = \begin{cases} \alpha_i z_i, & \text{se } 1 \leq i \leq r, \\ z_i, & \text{se } r+1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

la (4) diviene

$$(5) \quad \sum_{i=1}^r u_i^2 + u_{r+1} = 0, \quad r < n.$$

Se nella (3) è $b_{r+1} = \dots = b_n = 0$, con la trasformazione affine

$$u_i = \begin{cases} \alpha_i y_i, & \text{se } 1 \leq i \leq r, \\ y_i, & \text{se } r+1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

essa diviene

$$(6) \quad \sum_{i=1}^r u_i^2 + c = 0, \quad r \leq n.$$

Quindi in $\mathbb{A}^n$ è possibile scegliere un sistema di riferimento in modo che rispetto ad esso l'equazione di una quadrica si può scrivere in una delle forme (5) o (6).

Def 8. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$, sia $x_1, \dots, x_{n+1}$ un sistema di coordinate omogenee per i punti. Sia $F \in K[x_1, \dots, x_{n+1}]$ un polinomio omogeneo di grado m . Se $P \in \mathbb{P}^n$ e F si annulla in un sistema di coordinate omogenee $(a_1, \dots, a_{n+1})$ di P , allora F si annulla in ogni sistema di coordinate omogenee $(ka_1, \dots, ka_{n+1})$ di P in quanto, per il teorema 2.3, si ha

$$F(ka_1, \dots, ka_{n+1}) = k^m F(a_1, \dots, a_{n+1}).$$

Ha senso allora dire che F si annulla in P oppure che P è zero di F in $\mathbb{P}^n$ o soluzione dell'equazione omogenea $F = 0$ e scriveremo anche $F(P) = 0$.

Def 9. Un cono affine, e un'ipersuperficie $F=0$ tale che
 o proiettivo
 $\forall P \in F \setminus \{0\} \quad (0, \overline{OP}) \subseteq F$
 $\uparrow$
 $\text{ret}_2 \text{ o } P$

- **Definizione 4.9** Se il polinomio omogeneo F è di grado positivo ed irriducibile, si chiama *ipersuperficie algebrica irriducibile di $\mathbb{P}^n$ definita dall'equazione $F = 0$* o da F l'insieme $\mathcal{F}$ dei punti di $\mathbb{P}^n$ che sono soluzioni dell'equazione $F = 0$.

Se F è riducibile, poiché tutti i suoi fattori di grado positivo sono omogenei (lemma 2.4), esattamente come nel caso affine, si definisce l'ipersuperficie algebrica $\mathcal{F}$ di $\mathbb{P}^n$ definita dall'equazione $F = 0$ o da F e si definiscono le componenti irriducibili di $\mathcal{F}$ e le loro molteplicità.

Le ipersuperfici di uno spazio proiettivo si dicono *ipersuperfici proiettive*.

Nel caso $n = 2$ le ipersuperfici proiettive sono le *curve proiettive*, nel caso $n = 3$ sono le *superfici proiettive*.

- **Osservazione 4.10** Un polinomio $F \in K[x_1, \dots, x_{n+1}]$ omogeneo di grado positivo definisce un'ipersuperficie proiettiva $\mathcal{F}$ in $\mathbb{P}^n$ ed un'ipersuperficie affine $\tilde{\mathcal{F}}$ in $\mathbb{A}^{n+1}$.

L'ipersuperficie $\tilde{\mathcal{F}}$ ha la proprietà: se contiene un punto P distinto dall'origine O di $\mathbb{A}^{n+1}$, allora contiene tutti i punti della retta OP , cioè $\tilde{\mathcal{F}}$ è un cono di vertice O .

Infatti, se una $(n+1)$ -pla non nulla $(a_1, \dots, a_{n+1})$ di elementi di K annulla F , annullano F anche tutte le $(n+1)$ -ple $(ka_1, \dots, ka_{n+1})$ al variare di k in K . Il cono $\tilde{\mathcal{F}}$ si chiama *cono affine associato a $\mathcal{F}$* .

Anche nel caso proiettivo un'ipersuperficie individua la sua equazione; infatti si ha il

- ✦ **Teorema 4.11** Due equazioni omogenee $F = 0$ e $G = 0$ distinte definiscono in $\mathbb{P}^n$ ipersuperfici distinte.

DIMOSTRAZIONE. Le due equazioni definiscono in $\mathbb{P}^n$ la stessa ipersuperficie $\mathcal{F}$ se e solo se definiscono la stessa ipersuperficie $\tilde{\mathcal{F}}$ in $\mathbb{A}^{n+1}$ (osservazione 4.10) e quindi il teorema segue dal teorema 4.6. $\square$

Anche nel caso di ipersuperfici proiettive, nel seguito, per brevità, ometteremo la parola *algebrica* riferita ad una ipersuperficie e diremo anche *ipersuperficie $F = 0$* invece di *ipersuperficie di equazione $F = 0$* .

- ✦ **Definizione 4.12** Il grado del polinomio F che definisce l'ipersuperficie proiettiva $\mathcal{F}$ si dice *grado* o *ordine* di $\mathcal{F}$.

L'ordine di $\mathcal{F}$ è invariante per proiettività. Infatti, se ω è una proiettività di $\mathbb{P}^n$ e

$$x_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x'_j, \quad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

Obs 4.10

Sia F un polinomio omogeneo, allora l'ipersuperficie $\mathcal{F}$ è un ~~caso~~ cono di vertice O
 $\Leftrightarrow$ affine

Pf $\Rightarrow$

Sia P un punto di F , ovvero $F(P) = 0$

La retta $(O, \overline{OP})$ ha equazione $X = \lambda P$

$$F \text{ omogeneo} \Rightarrow F(\lambda P) = \lambda^m F(P) = 0 \Rightarrow (O, \overline{OP}) \subseteq F$$

$$F(\lambda P) = 0 \quad \forall \lambda \in K \quad \Leftrightarrow (O, \overline{OP}) \subseteq F \quad \forall P \in F$$

Pf $\Leftarrow$

$$A \quad F \text{ cono di vertice } O \Leftrightarrow m_0 F = \deg F = m \Leftrightarrow F_0 = F_1 = \dots = F_{m-1} = 0$$

Obs 5.3.6 pg 141

Prop 5.3.3
pg 143

$\Uparrow$
 F è omogeneo di grado m
 (o meglio)

□

sono le equazioni di ω^{-1} , la trasformata di $\mathcal{F}$ mediante ω è l'ipersuperficie di equazione

$$F' = F'(x'_1, \dots, x'_{n+1}) = F\left(\sum_{j=1}^{n+1} a_{1j}x'_j, \dots, \sum_{j=1}^{n+1} a_{n+1j}x'_j\right) = 0$$

e, per il teorema 2.1, il polinomio F' ha grado uguale a quello di F .

Esempio 4.13 1) Le ipersuperfici algebriche proiettive di ordine 1 sono gli iperpiani.

2) Le ipersuperfici algebriche proiettive di ordine 2 sono le *quadriche* proiettive.

L'equazione di una quadrica proiettiva $\mathcal{Q}$ si può scrivere

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij}x_i x_j = 0, \quad a_{ij} \in K.$$

Se q è la forma quadratica su K^{n+1} che, rispetto alla base di K^{n+1} scelta per il sistema di coordinate omogenee in $\mathbb{P}^n$, ha come matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+11} & \dots & a_{n+1n+1} \end{pmatrix} \quad a_{ij} = a_{ji},$$

l'equazione di $\mathcal{Q}$ si può scrivere

$$q(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = 0.$$

Esiste una base di K^{n+1} rispetto alla quale la matrice di q è diagonale (capitolo II, teorema 2.13); se $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ è un sistema di coordinate omogenee rispetto a tale base, l'equazione di $\mathcal{Q}$ si scrive

$$(7) \quad \sum_{i=1}^r d_i y_i^2 = 0, \quad 0 \neq d_i \in K, \quad 1 \leq r \leq n+1.$$

Essendo K algebricamente chiuso, in esso esiste un elemento b_i tale che $b_i^2 = d_i$ ($1 \leq i \leq r$) e quindi con la trasformazione proiettiva

$$z_i = \begin{cases} b_i y_i, & \text{se } 1 \leq i \leq r, \\ y_i, & r+1 \leq i \leq n+1, \end{cases}$$

l'equazione di $\mathcal{Q}$ diviene

$$(8) \quad \sum_{i=1}^r z_i^2 = 0, \quad 1 \leq r \leq n+1.$$

Quindi è possibile scegliere un sistema di coordinate omogenee in $\mathbb{P}^n$ in modo che $\mathcal{Q}$ abbia equazione della forma (8).

Def 4. Da ora in avanti riguarderemo $\mathbb{P}^n$ come completamento proiettivo dello spazio affine $\mathbb{A}^n$ nel modo descritto nel capitolo IV, §5, in modo che l'iperpiano improprio sia $x_{n+1} = 0$. *Nota:* $\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{A}^n \cong \{x \mid x_{n+1} = 0\} = \text{iperpiano improprio}$

Oss 4.14

Se $\mathcal{F}$ è un'ipersuperficie proiettiva di $\mathbb{P}^n$, di equazione $F(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$, che non ha come componente l'iperpiano improprio $x_{n+1} = 0$, cioè il polinomio F non ha x_{n+1} come fattore, allora l'ipersuperficie affine $\mathcal{F}_*$ di $\mathbb{A}^n$ di equazione

$$F_*(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n, 1) = 0$$

è la restrizione affine di $\mathcal{F}$. Le due ipersuperfici $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_*$ hanno lo stesso ordine ed i punti di $\mathcal{F}_*$ sono i punti *propri* di $\mathcal{F}$.

Se $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_h$ sono le componenti irriducibili di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F} = r_1\mathcal{F}_1 + \dots + r_h\mathcal{F}_h$, dal lemma 2.8 segue che

$$\mathcal{F}_* = r_1\mathcal{F}_{1*} + \dots + r_h\mathcal{F}_{h*}.$$

Se $\mathcal{G}$ è un'ipersuperficie affine di $\mathbb{A}^n$ di ordine m , avente per equazione $g(x_1, \dots, x_n) = 0$, l'ipersuperficie proiettiva $\mathcal{G}^*$ di $\mathbb{P}^n$ di equazione

$$g^*(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0,$$

dove $g^*(x_1, \dots, x_{n+1})$ è il polinomio omogeneizzato di $g(x_1, \dots, x_n)$ rispetto a x_{n+1} , è il completamento proiettivo di $\mathcal{G}$. I punti di $\mathcal{G}^*$ che non sono punti di $\mathcal{G}$ sono i punti impropri di $\mathcal{G}$ o di $\mathcal{G}^*$. Se $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_h$ sono le componenti irriducibili di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G} = r_1\mathcal{G}_1 + \dots + r_h\mathcal{G}_h$, allora

Oss 4.15

Oss 4.16

$$\mathcal{G}^* = r_1\mathcal{G}_1^* + \dots + r_h\mathcal{G}_h^*. \quad (\text{per il cor 2.9.1})$$

Sempre dal lemma 2.8 segue che

cor 2.9

$$(\mathcal{G}^*)_* = \mathcal{G}, \quad \mathcal{F} = (\mathcal{F}_*)^*.$$

5. Intersezione di una ipersuperficie con una retta. Punti semplici e punti singolari.

Def 1. Sia $\mathcal{F}$ un'ipersuperficie proiettiva di $\mathbb{P}^n$ di ordine m , di equazione

$$F(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$$

F è omogeneo

Oss 4.14

Def Sia F una ipersuperficie di P^n . F è omogeneo. Richiediamo che $P^n \setminus A^n \not\subset F$
 $K[x_1, \dots, x_{n+1}]$ ovvero che l'iperpiano improprio non sia contenuto in F
 ovvero che $x_{n+1} \notin F$. (2)

Allora possiamo definire la restrizione ~~proiettiva~~ di F : F_*
 affine

Oss

Pr Se $y = x_1 \frac{y_1}{x_1} + \dots + x_n \frac{y_n}{x_n}$ allora $\frac{y}{x} = 1, \frac{y_1}{x_1} + \dots + \frac{y_n}{x_n}$
 inoltre $(F_*)^* = F$

Pr Basta applicare il cor 2.9 considerando la (2) e che F è omogeneo

Oss 4.15

~~$G^* \setminus G \subseteq P^n \setminus A^n$~~

Pr Sia $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $(y, t) \in G^* \Leftrightarrow G^*(y, t) = 0$ e tale che $(y, t) \notin G$

Se per assurdo $(y, t) \in P^n \setminus A^n$ allora $t \neq 0$

$$t \neq 0 \Rightarrow (y, t) = \left(\frac{y}{t}, 1\right)$$

$$0 = G^*\left(\frac{y}{t}, 1\right) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_{n+1}^{m-i} G_i\right) + G_n \left(\frac{y}{t}, 1\right) = \sum_{i=1}^{n-1} x_{n+1}^{m-i} G_i\left(\frac{y}{t}\right) = G\left(\frac{y}{t}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G\left(\frac{y}{t}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{t}, 1\right) \in G \text{ assurdo}$$

Oss 4.16

~~$G = (G^*)^* =$~~

~~G^* è omogeneo, (2), cor 2.9~~

~~$G^* = \sum_{i=1}^{n-1} x_{n+1}^{m-i} G_i + G_n \Rightarrow G^* \text{ non è divisibile da } x_{n+1} \text{ (1)}$~~

e sia $\mathcal{R}$ una retta di $\mathbb{P}^n$. Se $A = (a_1, \dots, a_{n+1})$ e $B = (b_1, \dots, b_{n+1})$ sono due punti distinti di $\mathcal{R}$, equazioni parametriche di $\mathcal{R}$ sono (capitolo IV, §3, n.2)

$$x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1, \dots \quad x_{n+1} = \lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1}$$

ed i punti comuni a $\mathcal{R}$ ed a $\mathcal{F}$ sono quelli che si ottengono per λ, μ tali che

$$(1) \quad \Phi(\lambda, \mu) = F(\lambda a_1 + \mu b_1, \dots, \lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1}) = 0.$$

Se il polinomio $\Phi(\lambda, \mu)$ è nullo, tutti i punti di $\mathcal{R}$ sono punti di $\mathcal{F}$ e diremo perciò che $\mathcal{R}$ è *contenuta* in $\mathcal{F}$, cosa che indicheremo scrivendo $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$.

Se il polinomio $\Phi(\lambda, \mu)$ non è nullo, è omogeneo di grado m in λ, μ . Esso si scompone nel prodotto di m fattori lineari omogenei (teorema 2.11); se $\eta_i \lambda - \xi_i \mu$, $i = 1, \dots, h$, sono i fattori lineari distinti, si ha

$$(2) \quad \Phi(\lambda, \mu) = \prod_{i=1}^h (\eta_i \lambda - \xi_i \mu)^{s_i}, \quad s_i > 0, \quad \sum_{i=1}^h s_i = m.$$

Se P_i è il punto di $\mathcal{R}$ che si ottiene per $\lambda = \xi_i, \mu = \eta_i$, i punti comuni a $\mathcal{R}$ ed a $\mathcal{F}$ sono $P_1, \dots, P_h$.

Il fatto che il polinomio $\Phi(\lambda, \mu)$ sia nullo e, nel caso che non sia nullo, gli esponenti s_i dei fattori della (2) che determinano i punti P_i , non dipendono dai particolari punti A e B scelti per scrivere le equazioni parametriche della retta $\mathcal{R}$.

Infatti, siano $A' = (a'_1, \dots, a'_{n+1})$ e $B' = (b'_1, \dots, b'_{n+1})$ altri due punti di $\mathcal{R}$ e

$$x_1 = \lambda' a'_1 + \mu' b'_1, \dots \quad x_{n+1} = \lambda' a'_{n+1} + \mu' b'_{n+1}$$

le equazioni parametriche di $\mathcal{R}$ determinate mediante A' e B' . I punti comuni a $\mathcal{R}$ e $\mathcal{F}$ si ottengono per λ', μ' tali che

$$(1') \quad \Phi'(\lambda', \mu') = F(\lambda' a'_1 + \mu' b'_1, \dots, \lambda' a'_{n+1} + \mu' b'_{n+1}) = 0.$$

Se $\Phi(\lambda, \mu)$ è nullo si ha $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ e perciò $\Phi'(\lambda', \mu')$ è nullo. Se $\Phi(\lambda, \mu)$ non è nullo, allora $\mathcal{R}$ ha in comune con $\mathcal{F}$ solo i punti $P_1, \dots, P_h$ e si ha

$$\Phi'(\lambda', \mu') = \prod_{i=1}^h (\eta'_i \lambda' - \xi'_i \mu')^{s'_i}, \quad s'_i > 0, \quad \sum_{i=1}^h s'_i = m,$$

dove $\lambda' = \xi'_i$ e $\mu' = \eta'_i$ determinano il punto P_i *(a meno di rinominare gli indici)*

$$P = (\lambda a_1 + \mu b_1, \dots, \lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1}) = (\lambda' a'_1 + \mu' b'_1, \dots, \lambda' a'_{n+1} + \mu' b'_{n+1}),$$

allora, su $\mathcal{R}$, (λ, μ) è un sistema di coordinate omogenee di P rispetto alla base $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n+1})$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{n+1})$ dello spazio vettoriale $\mathbf{R}$ che definisce $\mathcal{R}$, mentre (λ', μ') è un sistema di coordinate omogenee di P rispetto alla base $\mathbf{a}' = (a'_1, \dots, a'_{n+1})$, $\mathbf{b}' = (b'_1, \dots, b'_{n+1})$ di $\mathbf{R}$. Quindi esistono (capitolo IV, §3) un elemento $0 \neq k \in K$ ed una matrice invertibile (c_{ij}) di ordine 2 a elementi in K tali che

$$(3) \quad k\lambda = c_{11}\lambda' + c_{12}\mu', \quad k\mu = c_{21}\lambda' + c_{22}\mu'.$$

Mediante le (3) si ha

$$\begin{aligned} k(\eta_i\lambda - \xi_i\mu) &= \eta_i(c_{11}\lambda' + c_{12}\mu') - \xi_i(c_{21}\lambda' + c_{22}\mu') \\ &= (c_{11}\eta_i - c_{21}\xi_i)\lambda' + (c_{12}\eta_i - c_{22}\xi_i)\mu'. \end{aligned}$$

Essendo (ξ_i, η_i) e (ξ'_i, η'_i) sistemi di coordinate omogenee di P_i rispetto alle basi $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ e $(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$ di $\mathbf{R}$, esiste un elemento $0 \neq k_i \in K$ tale che

$$k_i\xi_i = c_{11}\xi'_i + c_{12}\eta'_i, \quad k_i\eta_i = c_{21}\xi'_i + c_{22}\eta'_i.$$

Posto $c = \det(c_{ij})$, da queste si ricava

$$\xi'_i = -\frac{k_i}{c}(c_{12}\eta_i - c_{22}\xi_i), \quad \eta'_i = \frac{k_i}{c}(c_{11}\eta_i - c_{21}\xi_i)$$

e quindi, a meno di un fattore non nullo in K , il fattore $\eta_i\lambda - \xi_i\mu$ mediante le (3) viene trasformato in $\eta'_i\lambda' - \xi'_i\mu'$. Mediante le inverse delle (3) il fattore $\eta'_i\lambda' - \xi'_i\mu'$ viene trasformato in $\eta_i\lambda - \xi_i\mu$, sempre a meno di un fattore non nullo in K . Quindi $\eta'_i\lambda' - \xi'_i\mu'$ è il trasformato solo del fattore $\eta_i\lambda - \xi_i\mu$ e perciò $s'_i = s_i$. Per denotare che P è un punto comune a $\mathcal{R}$ e a $\mathcal{F}$ scriveremo $P \in \mathcal{R} \cap \mathcal{F} = \mathcal{F} \cap \mathcal{R}$. All'esponente massimo s_i con cui il fattore $(\eta_i\lambda - \xi_i\mu)$, che determina il punto P_i , divide $\Phi(\lambda, \mu)$ si attribuisce il significato di numero di volte in cui P_i compare tra i punti comuni a $\mathcal{R}$ e $\mathcal{F}$ e si dice che s_i è la molteplicità d'intersezione in P_i di $\mathcal{R}$ con $\mathcal{F}$ o di $\mathcal{F}$ con $\mathcal{R}$ e si denota

$$I(\mathcal{R} \cap \mathcal{F}, P_i) = I(\mathcal{F} \cap \mathcal{R}, P_i) = s_i.$$

Nel caso che $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$, in ogni punto $P \in \mathcal{R}$ si definisce la molteplicità d'intersezione di $\mathcal{R}$ con $\mathcal{F}$ ponendo

$$I(\mathcal{R} \cap \mathcal{F}, P) = I(\mathcal{F} \cap \mathcal{R}, P) = \infty.$$

Se la retta $\mathcal{R}$ non è contenuta in $\mathcal{F}$ e $P_1, \dots, P_h$ sono i punti distinti che essa ha in comune con $\mathcal{F}$ e si conviene di contare P_i esattamente $s_i = I(\mathcal{R} \cap \mathcal{F}, P_i)$ volte ($1 \leq i \leq h$), poiché $\sum_{i=1}^h s_i = m$ si ha che i punti comuni a $\mathcal{R}$ e $\mathcal{F}$ sono m . Si ha, quindi, il seguente teorema, che attribuisce un significato geometrico all'ordine di un'ipersuperficie.

Teorema 5.1 Sia $\mathcal{F}$ un'ipersuperficie proiettiva di $\mathbb{P}^n$. Se $\mathcal{R}$ è una retta di $\mathbb{P}^n$ non contenuta in $\mathcal{F}$, allora $\mathcal{R}$ e $\mathcal{F}$ hanno in comune un numero finito di punti distinti e contando ciascuno tante volte quanta è in esso la molteplicità di intersezione di $\mathcal{R}$ con $\mathcal{F}$, il numero di punti comuni è uguale all'ordine di $\mathcal{F}$.

Om §. 4.2

Se $\mathcal{R} \not\subset \mathcal{F}$ e $A \in \mathcal{R} \cap \mathcal{F}$, poiché dalle equazioni di $\mathcal{R}$ segue che il punto A si ottiene per $\mu = 0$, si ha che μ è uno dei fattori del polinomio $\Phi(\lambda, \mu)$ e $I(\mathcal{R} \cap \mathcal{F}, A) = s$ è il massimo intero per cui μ^s divide $\Phi(\lambda, \mu)$. Quindi si ha:

(4) $I(\mathcal{R} \cap \mathcal{F}, A)$ è la molteplicità della radice $\mu = 0$ per il polinomio

$$\varphi(\mu) = \Phi(1, \mu) = F(a_1 + \mu b_1, \dots, a_{n+1} + \mu b_{n+1}).$$

Lemma 5.2 La molteplicità d'intersezione di un'ipersuperficie con una retta in un punto è invariante per proiettività.

DIMOSTRAZIONE. Siano $\mathcal{F}$ un'ipersuperficie, $\mathcal{R}$ una retta ed $A \in \mathcal{R} \cap \mathcal{F}$. Bisogna dimostrare che se ω è una proiettività di $\mathbb{P}^n$ e $\mathcal{F}', \mathcal{R}', A'$ sono i trasformati di $\mathcal{F}, \mathcal{R}, A$ mediante ω , si ha

$$I(\mathcal{R} \cap \mathcal{F}, A) = I(\mathcal{R}' \cap \mathcal{F}', A').$$

Se $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ si ha anche $\mathcal{R}' \subset \mathcal{F}'$ e quindi l'uguaglianza è vera, essendo ambo i membri ∞ . Sia $\mathcal{R} \not\subset \mathcal{F}$. Se $A = (a_1, \dots, a_{n+1})$ e $\mathcal{R} = AB$ con $B = (b_1, \dots, b_{n+1})$ allora $I(\mathcal{R} \cap \mathcal{F}, A) = s$ è il massimo intero per cui μ^s divide il polinomio $\Phi(\lambda, \mu)$ della (1). Se le equazioni di ω^{-1} sono

$$x_i = \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} x'_j, \quad i = 1, \dots, n+1,$$

l'equazione di $\mathcal{F}'$ è

$$F'(x'_1, \dots, x'_{n+1}) = F\left(\sum_{j=1}^{n+1} c_{1j} x'_j, \dots, \sum_{j=1}^{n+1} c_{n+1j} x'_j\right) = 0$$

e sistemi di coordinate omogenee per A', B' sono $(a'_1, \dots, a'_{n+1}), (b'_1, \dots, b'_{n+1})$ tali che

$$a_i = \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} a'_j, \quad b_i = \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} b'_j, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Equazioni di $\mathcal{R}'$ sono

$$x'_1 = \lambda a'_1 + \mu b'_1, \dots, \quad x'_{n+1} = \lambda a'_{n+1} + \mu b'_{n+1}$$

Thm 5.1

$$\sum_{P \in F \cap R} I(F \cap R, P) = \deg F, \text{ con } F \in \mathbb{P}^n, R \notin F$$

eg Dalla def. di $I(F \cap R, P)$, vedi pg 139

Ques 5.1.2

$$\left. \begin{array}{l} R \notin F \\ A \in R \cap F \\ F \in \mathbb{P}^n \end{array} \right\} \Rightarrow I(R \cap F, A) = \text{multiplicità di } \mu=0 \text{ per il pol } F(A+\mu B) \\ \text{con } B \in R \setminus \{A\}$$

eg

$$\text{La retta } (A, AB) = R,$$

$$A \in R \cap F \Rightarrow F(A) = 0 \Leftrightarrow \Phi(\lambda, 0) = 0 \text{ dove } \Phi \text{ è lo stesso di pg 138}$$

$$\overset{\text{omog.}}{\Rightarrow} F(\lambda A) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Phi(\lambda, 0) = 0 \Rightarrow \exists i: (n_i \lambda - \xi_i \cdot 0)^{s_i} = 0 \Leftrightarrow n_i = 0 \Rightarrow \mu^{s_i} / \Phi(\lambda, \mu)$$

Questo è vero $\forall \lambda \neq 0$, in particolare per $\lambda = 1$

si è la molteplicità di $\mu=0$
per $\Phi(\lambda, \mu)$

$$\Phi(1, \mu) = F(A + \mu B)$$

□

~~Per~~ ~~una~~

e $I(\mathcal{R}' \cap \mathcal{F}', A') = s'$ è il massimo intero per cui $\mu^{s'}$ divide il polinomio

$$\Phi'(\lambda, \mu) = F'(\lambda a'_1 + \mu b'_1, \dots, \lambda a'_{n+1} + \mu b'_{n+1}).$$

Si ha

$$\begin{aligned} \Phi'(\lambda, \mu) &= F\left(\sum_{j=1}^{n+1} c_{1j}(\lambda a'_j + \mu b'_j), \dots, \sum_{j=1}^{n+1} c_{n+1j}(\lambda a'_j + \mu b'_j)\right) \\ &= F\left(\lambda \sum_{j=1}^{n+1} c_{1j} a'_j + \mu \sum_{j=1}^{n+1} c_{1j} b'_j, \dots, \lambda \sum_{j=1}^{n+1} c_{n+1j} a'_j + \mu \sum_{j=1}^{n+1} c_{n+1j} b'_j\right) \\ &= F(\lambda a_1 + \mu b_1, \dots, \lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1}) \\ &= \Phi(\lambda, \mu) \end{aligned}$$

e quindi $s' = s$. □

Def Sia $\mathcal{F}$ un'ipersuperficie affine di $\mathbb{A}^n$ di ordine m , di equazione

$$f = f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

e sia $A(a_1, \dots, a_n)$ un suo punto. Sia $\mathcal{R}$ una retta passante per A . Siano $\mathcal{F}^*$ e $\mathcal{R}^*$ i rispettivi completamenti proiettivi di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{R}$.

Si definisce la *molteplicità d'intersezione in A di $\mathcal{F}$ con $\mathcal{R}$* o di $\mathcal{R}$ con $\mathcal{F}$, e si denota $I(\mathcal{F} \cap \mathcal{R}, A) = I(\mathcal{R} \cap \mathcal{F}, A)$, ponendo

$$(5) \quad I(\mathcal{F} \cap \mathcal{R}, A) = I(\mathcal{F}^* \cap \mathcal{R}^*, A). \quad ; \text{ Nota 1 } \square$$

Per calcolare la molteplicità d'intersezione possiamo procedere come segue.

Se $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ si ha $\mathcal{R}^* \subset \mathcal{F}^*$, avendo $\mathcal{F}^*$ in comune con $\mathcal{R}^*$ gli infiniti punti di $\mathcal{R}$, e quindi $I(\mathcal{F} \cap \mathcal{R}, A) = \infty$. ← □²

Sia $\mathcal{R} \not\subset \mathcal{F}$. Se $\mathcal{R}$ ha equazioni parametriche

$$x_1 = a_1 + \mu b_1, \dots, \quad x_n = a_n + \mu b_n$$

il suo punto improprio è (capitolo IV, esempio 5.3, 2)) $B_\infty(b_1, \dots, b_n, 0)$ ed equazioni parametriche di $\mathcal{R}^*$ sono

$$x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1, \dots, \quad x_n = \lambda a_n + \mu b_n, \quad x_{n+1} = \lambda.$$

Se

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_m$$

è la decomposizione di f in somma di componenti omogenee, l'equazione di $\mathcal{F}^*$ è

$$(6) \quad f^* = x_{n+1}^m f_0 + x_{n+1}^{m-1} f_1 + \dots + x_{n+1} f_{m-1} + f_m = 0$$

$\mathbb{A}^n$

Def

• Oss 5.1.3

Il thm 5.1 non vale nel caso affine, infatti:

$$\mathcal{Y}: y^2 - x = 0 \quad R: y=1 \quad ; \quad \mathcal{Y}^*: y^2 - xt = 0 \quad R^*: y=t$$

$$\mathcal{Y} \cap R = \{(1,1)\} \quad (1)$$

$$\mathcal{Y}^* \cap R^* = \{(1,1,1); (1,0,0) = R_{\infty}\} \Rightarrow I(\mathcal{Y}^* \cap R^*, (1,1,1)) \overset{0 \leq}{\leq} \deg \mathcal{Y}^* \overset{\text{thm 5.1}}{\overset{\uparrow}{=}} 2$$

Invece, se valesse il thm 5.2, dalla (1)

$$\text{si avrebbe } I(\mathcal{Y} \cap R, (1,1)) = \deg \mathcal{Y} = 2 \text{ assurdo.}$$

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ & I(\mathcal{Y}^* \cap R^*, (1,1,1)) = 1 \\ & \parallel \\ & I(\mathcal{Y} \cap R, (1,1)) \end{aligned}$$

Oss 5.1.3

$$R \not\subset F, F \in A^n$$

$$\begin{aligned} B = (b_1, \dots, b_n) & \text{ giacitura della retta } R \\ \text{osservo } (b_1, \dots, b_n, 0) & \text{ pt. improprio di } R \\ A \in R \setminus \{B\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I(R \cap F, A) = \text{molteplicità di } \mu=0 \text{ per } F(A+\mu B) \neq 0$$

P

Vedi $\mathbb{A}^2$; Notare

$$\text{Nota 1: } m_{(\mu=0)}(\varphi(\mu)) = s \Leftrightarrow d_0 = d_1 = \dots = d_{s-1} = 0, d_s \neq 0$$

Oss 5.1.4

$$F \in A^n \text{ oppure } F \in P^n$$

$$A \in F$$

$$\text{, si ha } m_A(F) = m_{(\mu=0)}(\varphi(\mu))$$

$$\text{dove } \varphi(\mu) = F(A+\mu B) \in (K[B])[\mu]$$

$$\text{osservo } \varphi(\mu) = d_0 + d_1 \mu + \dots + d_s \mu^s, d_i \in K[B]$$

Nota 2

$$B \in A^n \Rightarrow B = (b_1, \dots, b_n)$$

$$F \in P^n \Rightarrow B = (b_1, \dots, b_{n+1})$$

P

$$m_A(F) = \min_{\substack{B \neq A \\ B \in \text{Spazio} \\ Z = \text{retta } AB}} I(Z \cap F, A) \overset{\text{Oss 5.1.2}}{\overset{\text{Oss 5.1.3}}{=}} \min_{B \neq A} \left(m_{(\mu=0)}(F(A+\mu B)) \right) \quad (1)$$

$$\text{Sia } s = m_0(\varphi(\mu)), \text{osservo } \varphi(\mu) = d_s \mu^s + \dots + d_r \mu^r, d_1 = \dots = d_{s-1} = 0, d_s \neq 0$$

$$F(A+\mu B) = d_s(B) \mu^s + \dots + d_r(B) \mu^r \Rightarrow m_{(\mu=0)} F(A+\mu B) \geq s \text{ questo } \forall B \neq A \quad (2)$$

$$d_s \neq 0 \Rightarrow \exists R \cdot \mu^s \cdot (0) \Rightarrow m_{(\mu=0)} F(A+\mu B) = s \quad (1) \cdot (1) \cdot (2) \cdot (3) \Rightarrow m_A(F) = s = m_{(\mu=0)} \varphi(\mu)$$

e l'equazione (1) ~~è~~ *l'equazione di $R^* \cap F^*$ è d :*

$$(7) \quad \begin{aligned} \Phi(\lambda, \mu) &= f^*(\lambda a_1 + \mu b_1, \dots, \lambda a_n + \mu b_n, \lambda) \\ &= \sum_{i=0}^m \lambda^{m-i} f_i(\lambda a_1 + \mu b_1, \dots, \lambda a_n + \mu b_n) = 0. \end{aligned}$$

(6) $\Phi(1, \mu) = \sum f_i(A + \mu B) = f(A + \mu B) \quad (7)'$

Quindi, per la (6), si ha:

oss 5.1.2 pg 140

(8) $I(\mathcal{F} \cap \mathcal{R}, A)$ è la molteplicità della radice $\mu = 0$ per il polinomio

$$\varphi(\mu) = \Phi(1, \mu) = f^*(a_1 + \mu b_1, \dots, a_n + \mu b_n, 1) = f(a_1 + \mu b_1, \dots, a_n + \mu b_n). \quad (7)'$$

3. Sia $\mathcal{F}$ un'ipersuperficie di $\mathbb{P}^n$ o di $\mathbb{A}^n$.

Definizione 5.3 Se A è un punto di $\mathcal{F}$, la minima delle molteplicità d'intersezione di $\mathcal{F}$ con tutte le rette passanti per A (che è un intero positivo) si dice *molteplicità* di A per $\mathcal{F}$ o di $\mathcal{F}$ in A e si denota $m_A(\mathcal{F})$. I punti di $\mathcal{F}$ di molteplicità 1 si dicono *semplici*, quelli di molteplicità $s > 1$ si dicono *multipli* o *singolari*. Un punto di molteplicità s si dice anche s -uplo e se $s = 2$ si dice *doppio*.

Un'ipersuperficie priva di punti singolari si dice *non singolare*.

Dalla (5) segue che se $\mathcal{F}$ è affine e $\mathcal{F}^*$ è il suo completamento proiettivo, si ha

Oss 5.3.1 (9) $m_A(\mathcal{F}) = m_A(\mathcal{F}^*)$ per ogni $A \in \mathcal{F}$.

Dal lemma 5.2 segue il

Corollario 5.4 La molteplicità di un punto per una ipersuperficie proiettiva è invariante per proiettività.

Oss 5.3.2 **Esempio 5.5** 1) Sia $\mathcal{F}$ un'ipersuperficie affine o proiettiva. Si ha:

a) Se $\mathcal{G}$ è una componente irriducibile di $\mathcal{F}$ di molteplicità r , per ogni punto $A \in \mathcal{G}$ si ha $m_A(\mathcal{F}) \geq r m_A(\mathcal{G})$ e l'uguaglianza vale se e solo se A non appartiene a nessun'altra componente di $\mathcal{F}$.

b) I punti comuni a due componenti irriducibili di $\mathcal{F}$ sono multipli per $\mathcal{F}$.

Def 5.3

Sia $A \in F$

$$m_A(F) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\substack{B \in \text{Spazio} \\ B \neq A}} I((A, \overline{AB}) \cap F, A)$$

$\uparrow$
retta

dove Spazio = P^n se F è proiettivo, Spazio = A^n altrimenti.

Obs 5.3.1

se F affine $\Rightarrow m_A(F) = m_A(F^*)$
 $A \in F$

Pg

Sia $R = (A, \overline{AB})$

~~$R^* = R \cup \{R_{\infty}\}$~~

~~Caso $R_{\infty} \in F^*$~~

~~$R_{\infty} \in F^*$~~

~~F affine $\Rightarrow A \neq R_{\infty}$~~

~~$\Rightarrow R \in F$~~

~~e quindi $I(R^* \cap F^*, A) = \infty$~~

~~e quindi il minimo non viene influenzato~~

~~Caso $R_{\infty} \notin F^*$~~

~~Allora $R_{\infty} \in R^* \cap F^*$ e quindi $R^* \cap F^* = R \cap F^*$~~

~~$I(R \cap F, A) = I(R^* \cap F^*, A) = I(R \cap F^*, A)$~~

Basta applicare l'oss 5.1.4 pg 141

~~$m_A(F) = m_A(F^*) = m_A(F)$~~

$m_A(F^*) = \min_{\substack{B \in P^n \\ B \neq A \\ \exists \text{ retta } AB}} I(B \cap F^*, A) \stackrel{\text{def}}{=} m_A(F)$

Obs 5.3.2

Nota 1: l'uguaglianza si ha $\Leftrightarrow G$ è l'unica componente di F : $A \in G$
Nota 2: l'uguaglianza si ha $\Leftrightarrow \nexists G$ distinto dagli F_i : $A \in G$,

1. G irriducibile, G componente di F di molteplicità z .

$A \in G \Rightarrow m_A F \geq z m_A G$, Nota 1

2. $A \in F_1, F_2, \dots, F_p$ componenti di F , allora con z_i molteplicità di F_i , si ha

$m_A F \geq z_1 m_A F_1 + \dots + z_p m_A F_p = \sum_{i=1}^p z_i m_A F_i$, Nota 2

3. $m_A F = 1 \Leftrightarrow \exists ! G$ componente di F : $m_A G = 1$
(A semplice) G di molteplicità 1

Pg 1

$m_A G = 1 \Rightarrow G(A + \mu B) = \mu^z g(\mu)$; $F = G^z H$ $\Rightarrow F(A + \mu B) = \mu^{z+1} g(\mu) h(\mu)$

c) Se $\mathcal{F}$ è priva di componenti multiple, i punti multipli di $\mathcal{F}$ sono i punti multipli delle sue componenti e i punti comuni a due componenti.

Basta dimostrarlo nel caso proiettivo.

a) Sia $G = 0$ l'equazione di $\mathcal{G}$. Allora, l'equazione di $\mathcal{F}$ è $F = G^r H = 0$, con H che non è multiplo di G . Se $A = (a_1, \dots, a_{n+1})$, per ogni retta $\mathcal{R}: x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1, \dots, x_{n+1} = \lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1}$, posto

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda, \mu) &= F(\lambda a_1 + \mu b_1, \dots, \lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1}) \\ \Phi_1(\lambda, \mu) &= G(\lambda a_1 + \mu b_1, \dots, \lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1}) \\ \Phi_2(\lambda, \mu) &= H(\lambda a_1 + \mu b_1, \dots, \lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1})\end{aligned}$$

si ha

$$\Phi(\lambda, \mu) = \Phi_1^r(\lambda, \mu) \Phi_2(\lambda, \mu).$$

Se $s = m_A(\mathcal{G})$, allora esistono rette $\mathcal{R}$ per le quali il polinomio $\Phi_1(\lambda, \mu)$ è divisibile per μ^s , ma non per μ^{s+1} . Per tali rette il polinomio $\Phi(\lambda, \mu)$ è divisibile per μ^{rs} , quindi $m_A(\mathcal{F}) \geq rs$ e rs è il massimo esponente con cui μ lo divide, cioè $m_A(\mathcal{F}) = rs$, se e solo se $\Phi_2(\lambda, \mu)$ non è divisibile per μ , cioè se e solo se A non appartiene ad altre componenti di $\mathcal{F}$.

b) È immediata conseguenza della a).

c) Sia $\mathcal{F}$ priva di componenti multiple. Se A è un punto semplice di $\mathcal{F}$, per la a) esso non può essere multiplo per nessuna delle componenti di $\mathcal{F}$ e per la b) non può essere punto comune a due componenti. D'altra parte, dalla a) segue che un punto semplice A di una componente che non appartiene ad altre componenti di $\mathcal{F}$ è semplice per $\mathcal{F}$.

• Prop 5.3.3 2) Sia $\mathcal{F}$ una ipersuperficie di ordine m di $\mathbb{A}^n$, di equazione

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_m = 0,$$

dove i polinomi f_i sono le componenti omogenee di f . Se O è l'origine di $\mathbb{A}^n$ si ha

$$m_O(\mathcal{F}) = s \iff f_0 = f_1 = \dots = f_{s-1} = 0, \quad f_s \neq 0.$$

q Infatti, se $\mathcal{R}$ di equazioni parametriche $x_1 = b_1\mu, \dots, x_n = b_n\mu$ è una retta per O , il polinomio

$$\varphi(\mu) = f(b_1\mu, \dots, b_n\mu) \stackrel{\substack{f_i \text{ omogenee} \\ \downarrow}}{=} \sum_{i=0}^m \mu^i f_i(b_1, \dots, b_n)$$

ha la radice $\mu = 0$ di molteplicità s se e solo se

$$f_0 = f_1(b_1, \dots, b_n) = \dots = f_{s-1}(b_1, \dots, b_n) = 0, \quad f_s(b_1, \dots, b_n) \neq 0.$$

$$\square \xrightarrow{142} F(A+\mu B) = \mu^{2s+1} \int f(\mu) \Rightarrow m_{\mu=0} F(A+\mu B) \geq 2s+1 \geq 2s = 2 m_A G$$

|| Oss. 5.1.4

$m_A F$

$\mathcal{P}_2$ Analogamente alla $\mathcal{P}_1$, considerando $F = F_1^{z_1} F_2^{z_2} \dots F_p^{z_p} H$

$\mathcal{P}_3 \Rightarrow$ Se per assurdo $A \in F_1, \dots, F_p$, $p > 1$, per la 2) si ha

$$m_A F \geq \sum_{i=1}^p z_i \geq p > 1 \text{ assurdo}$$

$z_i \geq 1$

Quindi $\exists!$ G componente di F: $A \in G$. Se per assurdo $m_G F = \frac{2}{1}$, allora per la 2)

$$m_A F \geq 2 m_A G > m_A G \geq 1 \text{ assurdo}$$

$\uparrow$
A def. AEG

Quindi $r=1$.

Analogamente $m_A G = 1$.

$\Leftarrow$

$$m_A F \stackrel{1)}{=} m_A G \cdot \underset{4p}{r} \stackrel{1)}{=} 1$$

□

Ed allora, $m_O(\mathcal{F}) = s$ se e solo se

$$f_0 = f_1(b_1, \dots, b_n) = \dots = f_{s-1}(b_1, \dots, b_n) = 0 \quad \text{per ogni } b_1, \dots, b_n \in K,$$

mentre esistono $b_1, \dots, b_n \in K$ tali che $f_s(b_1, \dots, b_n) \neq 0$ e quindi (teorema 4.1) se e solo se $f_0 = f_1 = \dots = f_{s-1} = 0$, $f_s \neq 0$.

Prop 5.3.4 3) Sia $\mathcal{F}$ un'ipersuperficie di ordine m di $\mathbb{P}^n$, non contenente l'iperpiano improprio $x_{n+1} = 0$ come componente, di equazione

$$F(x_1, \dots, x_{n+1}) = F_0 x_{n+1}^m + F_1 x_{n+1}^{m-1} + \dots + F_m = 0,$$

dove $F_i \in K[x_1, \dots, x_n]$, se non nullo, è omogeneo di grado i .

X Sia $A_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$; dall'esempio precedente, applicato alla restrizione affine $\mathcal{F}_*$ di $\mathcal{F}$, che ha equazione

$$F_*(x_1, \dots, x_n) = F_0 + F_1 + \dots + F_m = 0,$$

segue che

$$m_{A_{n+1}}(\mathcal{F}) = s \iff F_0 = F_1 = \dots = F_{s-1} = 0, \quad F_s \neq 0.$$

Prop 5.3.5 4) Sia $\mathcal{F}$ un'ipersuperficie di ordine m di $\mathbb{P}^n$ non contenente l'iperpiano $x_r = 0$ come componente, di equazione

$$F(x_1, \dots, x_{n+1}) = F_0 x_r^m + F_1 x_r^{m-1} + \dots + F_m = 0,$$

N_a dove $F_i \in K[x_1, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_{n+1}]$, se non nullo, è omogeneo di grado i . Con la trasformazione proiettiva di coordinate

$$x'_j = x_j \quad \text{se } j \neq r, n+1, \quad x'_r = x_{n+1}, \quad x'_{n+1} = x_r,$$

il punto $A_r = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, dove 1 è al posto r -mo, viene trasformato in $A_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$ e dall'esempio 3) segue che

$$m_{A_r}(\mathcal{F}) = s \iff F_0 = F_1 = \dots = F_{s-1} = 0, \quad F_s \neq 0.$$

5) Un'ipersuperficie $\mathcal{F}$, affine o proiettiva, è un cono di vertice il punto A se e solo se per ogni punto $P \in \mathcal{F}$, distinto da A , la retta AP è contenuta in $\mathcal{F}$.

Def 5.3.6 L'ipersuperficie $\mathcal{F}$ di ordine m è un cono di vertice A se e solo se $m_A(\mathcal{F}) = m$.

Infatti, se $m_A(\mathcal{F}) = m$, per ogni retta $\mathcal{R}$ passante per A si ha $I(\mathcal{R} \cap \mathcal{F}, A) \geq m$ e quindi, se $\mathcal{R}$ passa per un altro punto di $\mathcal{F}$ è contenuta in $\mathcal{F}$ (teorema 5.1). Viceversa, sia $\mathcal{F}$ un cono di vertice A . Per ogni retta $\mathcal{R}$ passante per A se $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ si ha $I(\mathcal{R} \cap \mathcal{F}, A) = \infty$ per definizione, altrimenti $\mathcal{R} \not\subset \mathcal{F}$ e allora si ha $I(\mathcal{R} \cap \mathcal{F}, A) = m$ per il teorema 5.1; segue $m_A(\mathcal{F}) = m$.

Prop 5.3.5

Sia $F \in \mathbb{P}^n$ e sia A_i l'i-esimo punto fondamentale, ovvero $A_i = \delta_{i5}$, allora
 $m_{A_i} F = s \iff$ la massima potenza di x_i che compare in F e' $m-s$
 con $m = \deg F$

Pf $\Rightarrow$

$$F \text{ omogenea} \Rightarrow F = \sum_{j=0}^m x_i^{m-j} F_j \quad F_j \in K[x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}]$$

(1)

$\deg F_j = j, F_j \text{ omogenea oppure } F_j \text{ nullo}$

2 retta: $A_i \in \mathbb{P}^2$

$$A_i = 1 \Rightarrow \mathbb{P}^2 \not\subset \{x_i = 0\} \Rightarrow \exists! B \in \mathbb{P}^2 \cap \{x_i = 0\}, \quad B = [b_1, \dots, b_{i-1}, 0, b_{i+1}, \dots, b_{n+1}]$$

GE II

La retta r ha equazioni $X = \lambda A_i + \mu B$ $\iff$ $\begin{cases} x_i = \mu b_i \\ \vdots \\ x_{i-1} = \mu b_{i-1} \\ x_i = \lambda \\ \vdots \\ x_{i+1} = \mu b_{i+1} \\ \vdots \\ x_{n+1} = \mu b_{n+1} \end{cases}$

Sia $B' = [b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_{n+1}]$

$F_j \in K[x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}] \Rightarrow F_j(A_i + \mu B) = F_j(B')$

$$F(A_i + \mu B) = \sum_{j=0}^m \lambda^{m-j} \mu^j F_j(A_i + \mu B) \stackrel{(1)}{=} \sum_{j=0}^m \lambda^{m-j} \mu^j F_j(B') \stackrel{(2)}{=} \sum_{j=0}^m \lambda^{m-j} \mu^j F_j(B')$$

(2)

$$m_{A_i} F = s \iff m_{A_i} F(A_i + \mu B) = s \Rightarrow \mu^s / F(A_i + \mu B) \left. \begin{array}{l} \text{deg } F_j = j \\ (2)' \end{array} \right\} \Rightarrow F_j(B') = 0 \quad \forall j < s$$

Oss 5.1.4
pg 141'

$F_j(B') = 0$ $\iff$ questo vale $\forall$ retta t.c. $A_i \in \mathbb{P}^2$ e quindi $\forall B'$

$\Rightarrow F_j \equiv 0 \Rightarrow x_i^{m-s}$ e' la piu' grande potenza di x_i che compare in F

(1)

Pf $\Leftarrow$

Per $\forall \mu \quad F_0 = F_1 = \dots = F_{s-1} \equiv 0, F_s \neq 0$

$\exists B': F_s(B') \neq 0 \Rightarrow \mu^s / F \left. \begin{array}{l} (2) \\ \text{allora} \end{array} \right\} \Rightarrow m_{A_i} F(A_i + \mu B) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} m_{A_i} F = s$

Oss 5.3.6

Sia $F \in \mathbb{P}^n$ oppure $F \in \mathbb{A}^n$, $\deg F = m$

F e' un cono di vertice $A \iff m_A F = \deg F$

Pf

$\rightarrow$ next page

- **Osservazione 5.6** Un'ipersuperficie affine $\mathcal{F}$ di A^n è un cono di vertice l'origine O se e solo se il polinomio che la definisce è omogeneo.

Segue subito dall'esempio 5.5(2).
g. Oss. 4.10 pg 135'

- + **Osservazione 5.7** Nel piano, un cono $\mathcal{C}$ di vertice A e di ordine m è costituito da rette passanti per A e contando ciascuna di esse tante volte quanta è la sua molteplicità come componente di $\mathcal{C}$ il numero di tali rette è m .

Infatti, se B è un suo punto distinto da A , la retta AB è una componente di $\mathcal{C}$. Se $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_h$ sono le componenti (rette) distinte di $\mathcal{C}$ e $r_1, \dots, r_h$ sono le loro molteplicità, allora

$$\mathcal{C} = r_1 \mathcal{R}_1 + \dots + r_h \mathcal{R}_h, \quad r_1 + \dots + r_h = m.$$

Se $\mathcal{F}$ è proiettiva di equazione $F = 0$ e $\mathcal{R} = AB$ è una retta passante per A il polinomio $\Phi(\lambda, \mu)$ della (1) si può scrivere

$$\Phi(\lambda, \mu) = F(\lambda a_1 + \mu b_1, \dots, \lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1}) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \lambda^{m-i} \mu^i, \quad \alpha_i \in K.$$

Se $\mathcal{R} \not\subset \mathcal{F}$ esso non è nullo e per la formula di Mac Laurin (§1) applicata al polinomio

$$(10) \quad \varphi(\mu) = \Phi(1, \mu) = F(a_1 + \mu b_1, \dots, a_{n+1} + \mu b_{n+1}) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \mu^i$$

si ha

$$\alpha_i = \frac{1}{i!} \varphi^{(i)}(0), \quad 0 \leq i \leq m.$$

Posto

$$\frac{\partial^r F}{\partial a_{i_r} \dots \partial a_{i_1}} = \frac{\partial^r F}{\partial x_{i_r} \dots \partial x_{i_1}}(a_1, \dots, a_{n+1}),$$

risulta:

$$(10.0) \quad \alpha_0 = F(a_1, \dots, a_{n+1})$$

$$(10.1) \quad \alpha_1 = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial F}{\partial a_i} b_i$$

$$(10.2) \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 F}{\partial a_j \partial a_i} b_i b_j$$

Pj 5.3.6

$$\Rightarrow z \subseteq F \Rightarrow I(z \cap F, A) = \infty, \quad z \not\subseteq F \Rightarrow z \cap F = \{A\} \Rightarrow I(z \cap F, A) = \deg F$$

$\uparrow$
 F e' un cono di vertice A
 $\uparrow$
 Hm 5.1 pg 140

$$m_A^F = \min_{z: A \in z} I(z \cap F, A) \stackrel{(1)}{=} \deg F$$

$\Leftarrow$

Sia $B \neq A$ e supponiamo per assurdo che la retta $z = \overline{AB} \not\subseteq F$

$$z \not\subseteq F \Rightarrow I(z \cap F, A) = m' < \infty$$

$$m' \geq \min_{z: A \in z} I(z \cap F, A) = m; \text{ con } m = \deg F$$

$\uparrow$
 Hp

Per il thm 5.1 $m' \leq \deg F = m$

$$\Rightarrow m = m'$$

$\downarrow$
 thm 5.1

$$z \cap F = \{A\}$$

assurdo contro $B \in z$ $\square$

Qss 5.3.7

F e' un cono di vertice A i punto fondamentale i -esimo $\Leftrightarrow$ la i -esima variabile non compare in F

Pj

Basta applicare la 5.3.6 e la 5.3.5

Qss 5.7

$$\text{In } P^2 \text{ o } A^2$$

$$\begin{matrix} \text{C cono} \\ \text{di vertice } A \\ \text{di mult. } m \end{matrix} \Rightarrow C = z_1 R_1 + \dots + z_n R_n, \quad \begin{matrix} R_i \text{ retta, componente irriducibile} \\ z_1 + \dots + z_n = m \\ A \in R_i \quad \forall i \end{matrix}$$

Pj

Sia C un cono di vertice A in P^2

C e' irriducibile da non essere decomposto

Siano $R_1, \dots, R_h$ le componenti irriducibili di C che sono rette. Se per assurdo $\exists G$ componente irrid di C , con $\deg C \geq 2$, allora:

$$R_i \not\subseteq C; \text{ se per ass. } R_i \subseteq C \Rightarrow \left. \begin{matrix} R_i \subseteq C \\ R_i, C \text{ irrid} \end{matrix} \right\} \Rightarrow R_i = C \Rightarrow C \text{ retta} \Rightarrow \deg C = 1 \text{ assurdo}$$

Oss 5.3.1 pg 141

$$R_i \not\subseteq G \Rightarrow |Ring|_2 < \infty \Rightarrow | \bigcup_{i=1}^h Ring | < \infty \quad (1);$$

thm 5.1 pg 140

$$C \text{ cono, } A \text{ vertice, } B \in G \subseteq C \Rightarrow AB \subseteq C \Rightarrow \text{retta} \Rightarrow \exists i: AB = R_i \Rightarrow B \in R_i$$

Ans 5.3

$$|G| = \infty \text{ (thm 4.1, pg 129)} \Rightarrow \exists B \in G \setminus \bigcup R_i \quad (2);$$

assurdo contro (1)

$$(10.s) \quad \alpha_s = \frac{1}{s!} \sum_{i_1, \dots, i_s=1}^{n+1} \frac{\partial^s F}{\partial a_{i_s} \dots \partial a_{i_1}} b_{i_1} \dots b_{i_s}.$$

Se $\mathcal{F}$ è affine di equazione $f = 0$ e $\mathcal{R}$ è la retta passante per A di equazioni parametriche $x_i = a_i + \mu b_i$, ($1 \leq i \leq n$), il polinomio $\varphi(\mu)$ della (8) si può scrivere

$$(11) \quad \varphi(\mu) = f(a_1 + \mu b_1, \dots, a_n + \mu b_n) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \mu^i.$$

Se $\mathcal{R} \not\subset \mathcal{F}$ il polinomio $\varphi(\mu)$ non è nullo e per la formula di Mac Laurin si ha :

$$(11.0) \quad \alpha_0 = f(a_1, \dots, a_n)$$

$$(11.1) \quad \alpha_1 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial a_i} b_i$$

$$(11.2) \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial a_j \partial a_i} b_i b_j$$

...

$$(11.s) \quad \alpha_s = \frac{1}{s!} \sum_{i_1, \dots, i_s=1}^n \frac{\partial^s f}{\partial a_{i_s} \dots \partial a_{i_1}} b_{i_1} \dots b_{i_s}.$$

...

Sia nel caso proiettivo che nel caso affine, si ha: se $\mathcal{R} \not\subset \mathcal{F}$ e $A \in \mathcal{R} \cap \mathcal{F}$, allora

$$(12) \quad I(\mathcal{R} \cap \mathcal{F}, A) = s \iff \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{s-1} = 0, \quad \alpha_s \neq 0.$$

Da ciò segue che se $A \in \mathcal{F}$, allora $m_A(\mathcal{F}) = s$ se e solo se per ogni retta $\mathcal{R}$ passante per A risulta

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{s-1} = 0$$

ed esistono rette $\mathcal{R}$ passanti per A per le quali $\alpha_s \neq 0$.

Def 5.8

$m_A F = 1 \Leftrightarrow$
pg 141

$$F(A + \mu B) = \varphi(\mu) = \alpha_0 + \alpha_1 \mu + \dots + \alpha_s \mu^s \quad (1)$$

$$\text{con } \alpha_i \in K[B], \quad \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{s-1} = 0, \quad \alpha_s \neq 0 \quad (2)$$

$$\varphi(\mu) = \varphi(0) + \varphi'(0)\mu + \frac{\varphi^{(2)}(0)}{2!}\mu^2 + \dots +$$

Taylor pg 111

$$(1) \Rightarrow \alpha_j = \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{j!} \sum_{i_1, \dots, i_j} \frac{\partial^j F(A + \mu B)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_j}} b_{i_1} \dots b_{i_j} \quad (4)$$

(2) $\Rightarrow$ il polinomio α_s , con $s < s-1$, e' nullo, quindi tutti i suoi coeff $\leq \frac{\partial^s F(A + \mu B)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}}$ sono nulli. Invece, per α_s esiste almeno un coeff non nullo.

$$\left. \begin{aligned} \varphi'(\mu) &= \sum_i \frac{\partial F(A + \mu B)}{\partial x_i} b_i \Rightarrow \varphi'(0) = \sum_i \frac{\partial F(A)}{\partial x_i} b_i \\ \text{In generale} \quad \varphi^{(j)}(0) &= \sum_{i_1, \dots, i_j} \frac{\partial^j F(A)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_j}} b_{i_1} \dots b_{i_j} \end{aligned} \right\} (3)$$

Infine, ~~se~~ se $F \in \mathbb{P}^n$ allora per la prop 5.8.1 si ha la tesi.

Prop 5.8.1

Homogeneo $\in K[x_1, \dots, x_{m+1}]$, $A \in \mathbb{P}^m$

ogni derivata s -esima di F e' nulla in $A \Rightarrow$ ogni derivata r -esima e' nulla in $A \quad \forall r \leq s$

Def

Sia $G = \frac{\partial^{s-1} F}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{s-1}}}$ ^{qualsiasi} una derivata $s-1$ -esima di F , allora per Eukero (pg 116) ^(e' G e' omog.)

$$\deg G \cdot G = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\partial G}{\partial x_j} x_j = \sum_j \frac{\partial^s F}{\partial x_j \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{s-1}}} x_j$$

$$\text{calcolato in } A \text{ si ha } \deg G \cdot G(A) = \sum_j \frac{\partial^s F(A)}{\partial x_j \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{s-1}}} a_j \stackrel{H_p}{=} 0 \Rightarrow G(A) = 0$$

Prop 5.8.2

Sia $\varphi(\mu) = F(A + \mu B)$, allora
 $= \alpha_0 + \alpha_1 \mu + \dots$
con $\alpha_i \in K[B]$

$$\alpha_s = \sum_{i_1, \dots, i_s} \frac{\partial^s F(A)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}} b_{i_1} \dots b_{i_s}$$

□

Dalle (10.i) e le (11.i) segue, allora, che $m_A(\mathcal{F}) = s$ se e solo se in A si annullano tutti i polinomi derivati sino all'ordine $s - 1$, ma non tutti quelli di ordine s , del polinomio che definisce $\mathcal{F}$.

Se $\mathcal{F}$ è proiettiva, per il teorema di Eulero (teorema 2.3), per ogni intero $r \geq 1$ si ha

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j \frac{\partial^r F(A)}{\partial x_j \partial x_{i_{r-1}} \cdots \partial x_{i_1}} = \sum_{j=1}^{n+1} a_j \frac{\partial}{\partial a_j} \frac{\partial^{r-1} F(A)}{\partial x_{i_{r-1}} \cdots \partial x_{i_1}} = (m-r+1) \frac{\partial^{r-1} F(A)}{\partial x_{i_{r-1}} \cdots \partial x_{i_1}}$$

e quindi se in A si annullano tutti i polinomi derivati di ordine r di F , si annullano anche tutti quelli di ordine $< r$ e perciò F stesso. Quindi si ha il

● **Teorema 5.8** Sia $\mathcal{F}$ un'ipersuperficie e sia A un suo punto. Allora:

- 1) se $\mathcal{F}$ è proiettiva si ha: $m_A(\mathcal{F}) = s$ ~~se e solo se~~ se in A si annullano tutti i polinomi derivati di ordine $s - 1$ ma non tutti quelli di ordine s del polinomio F che la definisce;
- 2) se $\mathcal{F}$ è affine si ha: $m_A(\mathcal{F}) = s$ ~~se e solo se~~ se in A si annullano tutti i polinomi derivati sino all'ordine $s - 1$ ma non tutti quelli di ordine s del polinomio f che la definisce.

pg 146

Def Sia $\mathcal{F}$ un'ipersuperficie di ordine m , proiettiva di equazione $F = 0$ o affine di equazione $f = 0$.

Definizione 5.9 Se A è un punto di molteplicità s per $\mathcal{F}$, le rette $\mathcal{R}$ passanti per A tali che $I(\mathcal{R} \cap \mathcal{F}, A) > s$ si dicono *tangenti* a $\mathcal{F}$ in A . In particolare, sono tangenti a $\mathcal{F}$ in A tutte le rette passanti per A e contenute in $\mathcal{F}$.

Cor 5.9.1 N/ Se $\mathcal{F}$ è affine, una retta affine $\mathcal{R}$ è tangente a $\mathcal{F}$ in A se e solo se l'estensione proiettiva $\mathcal{R}^*$ di $\mathcal{R}$ è tangente in A all'estensione proiettiva $\mathcal{F}^*$ di $\mathcal{F}$. Q:

Cor 5.9.10 Se $m_A(\mathcal{F}) = s$, dalla (12) segue che sono tangenti a $\mathcal{F}$ in A tutte e solo le rette $\mathcal{R}$ per le quali risulta $\alpha_s = 0$.

Sia $s = 1$. Se $\mathcal{F}$ è proiettiva e $A = (a_1, \dots, a_{n+1})$, per la (10.1) la retta $\mathcal{R} = AB$ è tangente a $\mathcal{F}$ in A se e solo se il punto $B = (b_1, \dots, b_{n+1})$ appartiene all'iperpiano

$$(13) \quad \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial F}{\partial a_i} x_i = 0.$$

Oss 5.9.1

Sia F affine

$$R \text{ tg a } F \text{ in } A \Leftrightarrow R^* \text{ tg a } F^* \text{ in } A$$

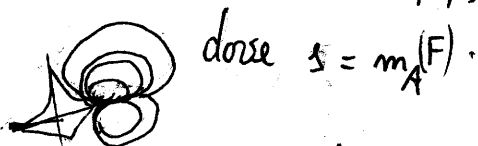
Def Per definizione $I(R \cap F, A) = I(R^* \cap F^*, A)$

Oss 5.9.10

Def Sia $F \in \mathbb{P}^n$, $A \in F$

Il cono tangente ad F in A e' l'ipersuperficie di equazione

$$C_1: \sum_{i_1, \dots, i_s} \frac{\partial^s F(A)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}} x_{i_1} \dots x_{i_s} = 0$$



dove $s = m_A(F)$.

Se $F \in \mathbb{A}^n$, allora

$$C_2: \sum_{i_1, \dots, i_s} \frac{\partial^s F(A)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}} (x_{i_1} - a_{i_1}) \dots (x_{i_s} - a_{i_s}) = 0, \text{ con } A = (a_1, \dots, a_n)$$

Si ha:

1. C e' un cono di vertice A

2. Sia R una retta t.c. $A \in R$, allora

$$R \subseteq C \Leftrightarrow R \text{ e' tangente a } F \text{ in } A$$

2.1 In particolare, $B \in C \setminus \{A\} \Rightarrow AB$ e' tangente a F in A

Prop 2.9

$$R \text{ tg a } F \text{ in } A \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} I(R \cap F, A) > s = m_A(F) \quad (1)$$

~~Sia $B \in R \setminus \{A\}$~~

$$m_A(F) = s \Leftrightarrow \ell_0(B) = \ell_1(B) = \dots = \ell_{s-1}(B) = 0 \quad \forall B \in \text{Spazio} \quad (2)$$

$$(1) \Leftrightarrow \ell_0(B) = \ell_1(B) = \dots = \ell_s(B) = 0, \text{ con } B \in R \setminus \{A\} \Leftrightarrow \ell_s(B) = 0$$

oppure B giacitura di R

$$0 = \ell_s(B) = \sum_{i_1, \dots, i_s} \frac{\partial^s F(A)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}} b_{i_1} \dots b_{i_s} = C(B)$$

C calcolato in B

CASO $F \in \mathbb{P}^n$

$$(3) \Leftrightarrow B \in C_1 \quad \forall B \in R \setminus \{A\} \Leftrightarrow R \subseteq C_1$$

$A \in R$
 $\uparrow$
per Hp

CASO $F \in \mathbb{A}^n$

Tale iperpiano passa per A perché, per il teorema di Eulero (teorema 2.3), si ha

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial F}{\partial a_i} a_i = mF(a_1, \dots, a_{n+1}) = 0.$$

Se $\mathcal{F}$ è affine e $A = (a_1, \dots, a_n)$, per la (11.1) la retta $\mathcal{R}$ passante per A di equazioni parametriche $x_i = a_i + \mu b_i$, $1 \leq i \leq n$, è tangente a $\mathcal{F}$ in A se e solo se $b_1, \dots, b_n$ sono tali che

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial a_i} b_i = 0,$$

e quindi se e solo se, per ogni $\mu \in K$, si ha

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial a_i} \mu b_i = 0.$$

Ed allora, dalle equazioni parametriche di $\mathcal{R}$ segue che il luogo delle rette $\mathcal{R}$ tangenti a $\mathcal{F}$ in A è l'iperpiano

$$(14) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial a_i} (x_i - a_i) = 0,$$

che passa per A .

Definizione 5.10 L'iperpiano (13) nel caso proiettivo o l'iperpiano (14) nel caso affine si chiama *iperpiano tangente* a $\mathcal{F}$ nel punto semplice A .

Sia $s > 1$. Nel caso proiettivo la retta $\mathcal{R} = AB$ è tangente a $\mathcal{F}$ in A se e solo se B appartiene all'ipersuperficie proiettiva $\mathcal{Q}$, di ordine s , di equazione

$$(15) \quad \sum_{i_1, \dots, i_s=1}^{n+1} \frac{\partial^s F}{\partial a_{i_s} \dots \partial a_{i_1}} x_{i_1} \dots x_{i_s} = 0.$$

L'ipersuperficie $\mathcal{Q}$ passa per A perché, per il teorema di Eulero, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{j, i_1, \dots, i_{s-1}} \frac{\partial^s F}{\partial a_j \partial a_{i_{s-1}} \dots \partial a_{i_1}} a_{i_1} \dots a_{i_{s-1}} a_j &= \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{s-1}} a_{i_1} \dots a_{i_{s-1}} \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial a_j} \frac{\partial^{s-1} F}{\partial a_{i_{s-1}} \dots \partial a_{i_1}} = \\ &= (m - s + 1) \sum_{i_1, \dots, i_{s-1}} a_{i_1} \dots a_{i_{s-1}} \frac{\partial^{s-1} F}{\partial a_{i_{s-1}} \dots \partial a_{i_1}} = 0. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{E}} \rightarrow B$ e' la giacitura di R , quindi $B \in C_2 \Leftrightarrow X \in R \Leftrightarrow X = A + \mu B$

$$0 = C(B) = \mu C(B) = C(\mu B) = C(X - A) = C_2(X) \quad \forall \mu \in K \quad (4)$$

(3) la (4) vale $\forall \mu \in K$ e quindi $C_2(X) = 0 \quad \forall X$

$$(4) \Leftrightarrow C_2(X) = 0 \quad \forall X \in R \Leftrightarrow R \in C_2$$

Q. 1. Nel caso $F \in A^n$ e' facile verificare che $A \in C_2$, ovvero $C_2(A) = 0$

Pf $C_2(A) = 0$

~~$\deg C_2(A) = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\partial^j C_2(A)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\partial^j F}{\partial x_j} = 0$~~

$F \in \mathbb{P}^n \Rightarrow F$ omogeneo $\Rightarrow \frac{\partial^j F}{\partial \dots}$ omogeneo

$$p \cdot \sum_{i_1, \dots, i_{j-1}} \frac{\partial^{j-1} F}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{j-1}}} x_{i_1} \dots x_{i_{j-1}} \stackrel{\text{Euler}}{=} \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i_1, \dots, i_{j-1}} \frac{\partial^{j-1} F}{\partial \dots} x_{i_1} \dots x_{i_{j-1}} \right) = \sum_{j, i_1, \dots, i_{j-1}} \frac{\partial^j F}{\partial \dots} x_j x_{i_1} \dots x_{i_{j-1}}$$

Calcolando l'uguaglianza in A si ha:

$$p \cdot \alpha_{j-1}(A) = C_2(A) \\ \parallel \in (2) \\ 0$$

Quindi $A \in C$. $\Rightarrow AB$ e' tangente a F in $A \Leftrightarrow AB \in C$
 Sia $B \in C \setminus \{A\}$ $\uparrow$ 2.1

Quindi, per definizione, C e' un cono di vertice A

Q. 2.1

Basta procedere a ritroso dalla (3), ponendo $R = AB$

Nel caso affine, la retta $\mathcal{R}$ è tangente a $\mathcal{F}$ in A se e solo se $b_1, \dots, b_n$ sono tali che

$$\sum_{i_1, \dots, i_s=1}^n \frac{\partial^s f}{\partial a_{i_s} \cdots \partial a_{i_1}} b_{i_1} \cdots b_{i_s} = 0,$$

quindi se e solo se, per ogni $\mu \in K$, si ha

$$\sum_{i_1, \dots, i_s=1}^n \frac{\partial^s f}{\partial a_{i_s} \cdots \partial a_{i_1}} \mu b_{i_1} \cdots \mu b_{i_s} = 0.$$

Ed allora, il luogo delle rette tangenti a $\mathcal{F}$ in A è l'ipersuperficie affine $\mathcal{Q}$, di ordine s , di equazione

$$(16) \quad \sum_{i_1, \dots, i_s=1}^n \frac{\partial^s f}{\partial a_{i_s} \cdots \partial a_{i_1}} (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_s} - a_{i_s}) = 0,$$

che passa per A .

L'ipersuperficie $\mathcal{Q}$, di equazione (15) nel caso proiettivo e di equazione (16) nel caso affine, è un cono di vertice A perché $m_A(\mathcal{Q}) = s$ (esempi 5.5, 5)).

Definizione 5.11 Il cono $\mathcal{Q}$ di equazione (15) nel caso proiettivo o di equazione (16) nel caso affine si dice *cono tangente* a $\mathcal{F}$ in A .

Osservazione 5.12 Se $\mathcal{F}$ è una curva piana e A è un suo punto di molteplicità s , il cono tangente a $\mathcal{F}$ in A è costituito da s rette passanti per A (osservazione 5.6). Se esse sono tutte distinte A si dice *punto s -plo ordinario* per $\mathcal{F}$.

I punti doppi ordinari si dicono *odi*.

I punti doppi non ordinari sono quelli nei quali le due rette tangenti alla curva sono coincidenti. Se A è un punto doppio non ordinario ed in esso la molteplicità d'intersezione della retta tangente con la curva è 3, si dice che A è una *cuspidale ordinaria* per la curva.

Cuspide = non nodo: 

Osservazione 5.13 1) Se $\mathcal{F}$ è un'ipersuperficie affine e $\mathcal{G}$ è l'iperpiano o il cono ad essa tangente nel punto A , allora l'iperpiano o cono tangente in A al completamento proiettivo $\mathcal{F}^*$ di $\mathcal{F}$ è il completamento proiettivo $\mathcal{G}^*$ di $\mathcal{G}$.

2) Se $\mathcal{F}$ è un'ipersuperficie proiettiva non contenente come componente l'iperpiano improprio e $\mathcal{G}$ è l'iperpiano o il cono ad essa tangente nel punto proprio A , allora l'iperpiano o cono tangente alla restrizione affine $\mathcal{F}_*$ di $\mathcal{F}$