Geometria III

AlpT (@freaknet.org)
http://freaknet.org/alpt

June 5, 2009

Abstract

Questo testo e' una rielaborazione personale degli appunti presi durante il corso di Geometria III, tenuto dalla Prof.ssa Raciti Grazia presso il dipartimento di Matematica, Catania, A.A. 2008/2009.
Saro' ben lieto di correggere ogni eventuale errore che mi comunicherai.

Buon lettura.

^_^

Copyright ©2008 Andrea Lo Pumo aka AlpT <alpt@freaknet.org>. All rights reserved.

This document is free; you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or (at your option) any later version.

This document is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for more details.

You should have received a copy of the GNU General Public License along with this document; if not, write to the Free Software Foundation, Inc., 675 Mass Ave, Cambridge, MA 02139, USA.

Contents

1 Introduzione **1**

2 Notazioni **1**

3 Polinomi ed Ipersuperfici **1**
3.1 Disomogeneizzato 1
3.2 Varie 2
3.3 Ipersuperficie minima 3

4 Molteplicita' d'intersezione **5**

5 Sistemi lineari di ipersuperfici **6**

6 Cono tangente **13**
6.1 Bezout 14

7 Cono proiettante **17**

8 Punti singolari **20**

9 Curve irriducibili **22**
9.1 Conica 24
9.2 Cubica 24
9.3 Quartiche 26

10 Curve razionali **28**

11 Polare **30**
11.1 Flessi 33
11.1.1 Cubiche 35

12 Gruppo di una cubica **42**

13 Teoremi "geometrici" **49**

14 Esercizi **51**

15 Appendice A **56**

16 * **227**

1 Introduzione

Questi appunti digitali sono un complemento degli appunti cartacei che sono stati acquisiti e inclusi nell'appendice.
L'ordine di lettura consigliato e' quello degli appunti cartacei.
Notazione: [QUA,OssX.Y.Z,pg.123] e' un riferimento alla proposizione OssX.Y.Z che trovate nell'appendice A, a pagina 123.

2 Notazioni

Definition 2.1.

$\mathbb{P}_i = \mathbb{P}_i^n =$ punto fondamentale i-esimo di $\mathbb{P}^n$
$\mathbb{P}_{ij} = \delta_{ij}$
K e' un campo di caratteristica 0, algebricamente chiuso

3 Polinomi ed Ipersuperfici

Proposition 3.1. *Siano* $F, G \in K[x_1, \ldots, x_r]$.

$$F \nsubseteq G \Rightarrow F \not| G$$

Per verificare che $F \not| G$, *e' sufficiente trovare un punto che sta' in* F *ma non in* G.

Proof:

$$F \Big| G \Rightarrow G = FH$$
$$F(P) = 0 \Rightarrow G(P) = 0$$

□

3.1 Disomogeneizzato

Proposition 3.2. *Sia* $F \in A[x_1, \ldots, x_r]$ *omogeneo, allora*

$$s = \max \left\{ t \mid x_r^t \Big| F \right\} \Rightarrow F = x_r^s (F_*)^*$$

dove l'omogeneizzazione e' stata fatta rispetto a x_r.

Proof: Scriviamo F come somma di monomi omogenei:
$F = f_1 + \cdots + f_h, \ \deg f_i = \deg F = m \ \ (1)$

$x_r^s \Big/ F \Rightarrow F = x_r^s(g_1 + \cdots + g_h), \ \ g_i = x_r^s f_i, \ \ \deg g_i = \deg f_i - s = m - s \ \ (2)$

$s = \max\left\{t \mid x_r^t \Big/ F\right\} \Rightarrow \exists i : \ \ x_r \not/ g_i \ \Rightarrow g_{i_*} = g_i \ (2.1)$

$F_* \underbrace{=}_{\text{[QUA,lemma2.8, 2),pg.118]}} g_{1_*} + \cdots + g_{h_*} \ \ (3)$

Sja $s_j = \max\left\{t \mid x_r^t \Big/ g_j\right\} \Rightarrow \deg g_{j_*} = \deg g_j - s_j \underbrace{=}_{(2)} m - s - s_j \ \ (4)$

Nota: per def. di s_j si ha $x_r^{s_j} g_{j_*} = g_j \ \ (4.1)$

$(2.1) \Rightarrow \deg g_{i_*} = \deg g_i = m - s \Rightarrow s_i = 0 \Rightarrow m - s = \deg g_{i_*} = \max\{\deg g_j \mid j = 1, \ldots, h\} \ \ (5)$

$(3), (5) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{def di }^*} (F_*)^* = \sum_{j=1}^{h} x_r^{(m-s)-\deg g_{j_*}} g_{j_*} \underbrace{=}_{(4)} \sum_{j=1}^{h} x_r^{s_j} g_{j_*} \underbrace{=}_{(4.1)} \sum_{j=1}^{h} g_j \ \ (6)$

$x_r^s (F_*)^* \underbrace{=}_{(6),\ (2)} F$

□

Proposition 3.3. *Siano $F, G \in A[x_1, \ldots, x_r]$ omogenei. Supponendo che $x_r \not/ F$, si ha*

$$F \Big/ G \Leftrightarrow F_* \Big/ G_*$$

Proof:
$\langle 1 \rangle$ Dim. $\Rightarrow$

$$G = FH \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,lemma2.8,pg.118]}} G_* = F_* H_*$$

$\langle 2 \rangle$ Dim. $\Leftarrow$

$$x_r \not/ F \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,lemma2.8,pg.118]}} (F_*)^* = F \ \ (1)$$

$$F_* \Big/ G_* \Rightarrow G_* = F_* H \Rightarrow (G_*)^* = (F_*)^* H^* \underbrace{=}_{(1)} F H^*$$

$$G \underbrace{=}_{\text{[QUA,lemma2.8,pg.118]}} x_r^s (G_*)^* = x_r^s F H^*$$

□

Proposition 3.4. *Sia $G \in A[x_1, \ldots, x_r]$, allora*

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} \equiv 0 \Rightarrow G \in K[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_r], \text{ ovvero } x_i \text{ non e' presente in } G$$

3.2 Varie

Proposition 3.5. *Sia F una ipersuperficie di $\mathbb{P}^r$ e G una sua componente irriducibile, con $\deg G > 1$.*

Supponendo che $\mathbb{P}_i \notin F$, si ha

$$G \Big/ \frac{\partial F}{\partial x_i} \Leftrightarrow G^2 \Big/ F$$

ovvero, G e' una componente comune a F e a $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ sse e' una componente multipla di F

Proof:
$\langle 1 \rangle$ Dim. $\Rightarrow$

$$G \Big/ F \Rightarrow F = GH \quad (1)$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial G}{\partial x_i} H + \frac{\partial H}{\partial x_i} G \quad (1)$$
$$G \Big/ \frac{\partial F}{\partial x_i} \underbrace{\Rightarrow}_{(1)} G \Big/ \frac{\partial G}{\partial x_i} H \underbrace{\Rightarrow}_{G \text{ irrid.}} G \Big/ \frac{\partial G}{\partial x_i} \vee G \Big/ H \quad (2)$$

Se $G \Big/ H$, per la (1) abbiamo la tesi. Supponiamo per assurdo che $G \Big\backslash H$, allora

$$G \Big\backslash H \underbrace{\Rightarrow}_{(2)} G \Big/ \frac{\partial G}{\partial x_i} \underbrace{\Rightarrow}_{\deg \frac{\partial G}{\partial x_i} < \deg G} \frac{\partial G}{\partial x_i} \equiv 0 \underbrace{\Rightarrow}_{DpaNulla} G \in K[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{r+1}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(\mathbb{P}_i) = G(0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0) = G(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{r \text{ zeri}}) \underbrace{=}_{G \text{ omogeneo}} 0 \Rightarrow \mathbb{P}_i \in G \Big/ F \Rightarrow \mathbb{P}_i \in F \text{ assurdo contro Hp.}$$

$\langle 2 \rangle$ Dim. $\Leftarrow$

$$G^2 \Big/ F \Rightarrow F = G^2 H = G(GH)$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial G}{\partial x_i} GH + \frac{\partial GH}{\partial x_i} G \Rightarrow G \Big/ \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

□

3.3 Ipersuperficie minima

Definition 3.6. Sia $\emptyset \neq \Gamma \subseteq \mathbb{P}^n$. Sia G una ipersuperficie, poniamo

$$G = \Gamma \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{X \in \mathbb{P}^n \mid G(X) = 0\} = \Gamma$$

Supponendo non vuoto l'insieme $\mathcal{G} = \{G \text{ ipersuperficie } \mid G = \Gamma\}$, sia

$$G' \in \{G \in \mathcal{G} \mid \deg G = \min(\deg \mathcal{G})\}$$
$$\text{dove } \deg \mathcal{G} = \{\deg G \mid G \in \mathcal{G}\}$$

G' e' l'ipersuperficie di $\mathcal{G}$ di grado minimo. Chiameremo G' la *ipersuperficie minima* di Γ, o diremo piu' brevemente "ipersuperficie di Γ".
Nota: nella proposizione [3.7,pg.3] vedremo che G' e' unica, ovvero che

$$|\{G \in \mathcal{G} \mid \deg G = \min(\deg \mathcal{G})\}| = 1$$

Proposition 3.7. *Sia $\emptyset \neq \Gamma \subseteq \mathbb{P}^n$, G' una ipersuperficie minima di Γ e sia $G \in \mathcal{G}$ con $G = F_1^{r_1} \cdots F_s^{r_s}$, con F_i irriducibili e distinti fra loro, allora*

$$G = \Gamma \Rightarrow G' = F_1 F_2 \cdots F_s$$

Questo dimostra che l'ipersuperficie minima e' unica, ovvero:

$$\{G \in \mathcal{G} \mid \deg G = \min(\deg \mathcal{G})\} = \{(F_1 F_2 \cdots F_s)\}$$

Proof:
$\{X \mid G'(X) = 0\} = \Gamma = \{X \mid G(X) = 0\} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,cor4.4,pg.131]}} G', G$ hanno gli stessi fattori irriducibili $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} G = F_1^{g_1} \cdots F_s^{g_s} \\ G' = F_1^{g_1'} \cdots F_s^{g_s'} \end{cases} \quad (1)$$

Se per assurdo $g_i > 1$, allora:

sia $G'' = F_1 \cdots F_s$

$\begin{cases} \deg G' = \sum_{i=1}^{s'} g_i' > s = \deg G'' \\ G', G'' \in \mathcal{G} \end{cases} \Rightarrow G'$ non e' una ipersuperficie minima. Assurdo contro Hp.

Quindi,

$$g_i' = 1 \ \forall i \Rightarrow G' = F_1 \cdots F_s$$

□

Proposition 3.8. *Sia G' l'ipersuperficie minima di Γ, e sia G una ipersuperficie,*

$$\begin{cases} G = \Gamma \\ \deg G = \deg G' \end{cases} \Rightarrow G = G'$$

Proof:
Case: G' irriducibile

Nota: qui di seguito intenderemo le uguaglianze a meno di costanti non nulle

Supponiamo per assurdo che $\nexists s : \ G = (G')^s$

$\{X \mid G'(X) = 0\} = \pi_{P,F} = \{X \mid G(X) = 0\}$, G' irriducibile $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,Thm4.3,pg.130]}} G' \Big| G$

$G' \Big| G \Rightarrow G = (G')^s H, \ \text{ con } G' \not| H \ (1)$

$G \neq (G')^s \Rightarrow H$ non e' costante $\Leftrightarrow \deg H > 0$

$\begin{cases} \{X \mid H(X) = 0\} \subseteq \{X \mid G(X) = 0\} = \{X \mid G'(X) = 0\} \\ \deg H > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,Thm4.3,pg.130]}} \exists H_1$ fattore irriducibile di $H : \ H_1 \Big| G' \underbrace{\Rightarrow}_{G' \text{ irriducibile}} H_1 = G' \Rightarrow$

$\Rightarrow G' = H_1 \Big| H$ assurdo contro (1)

Quindi si deve avere:

$$G = (G')^s \text{ per qualche } s \underbrace{\Rightarrow}_{\deg G = \deg G'} s = 1, \ G = G'$$

Case: G' spezzato

$$\begin{cases} G = F_1^{g_1} \cdots F_s^{g_s},\ F_i \text{ irriducibili e distinti} \\ G = \Gamma = G' \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{[3.7,\text{pg.}3]} G' = F_1 \cdots F_s$$

$$s = \deg G' = \deg G = \sum_{i=1}^{s} g_i \Rightarrow g_i = 1 \ \ \forall i \Rightarrow G = G'$$

□

Proposition 3.9. *Sia $G \in \mathcal{G}$ e sia $G' \in \mathcal{G}$ l'ipersuperficie minima di Γ, sia R una retta e $P \in R \cap \Gamma$, allora*

$$I(G' \cap R, P) \leq I(G \cap R, P)$$

Proof: Proof sketch:Se $G = F_1^{g_1} \cdots F_s^{g_s}$, allora per la [3.7,pg.3], $G' = F_1 \cdots F_s$, quindi per definizione di molteplicita' d'intersezione si vede che deve essere $I(G' \cap R, P) \leq I(G \cap R, P)$ □

4 Molteplicita' d'intersezione

Proposition 4.1. *In $\mathbb{P}^2$ sia F una ipersuperficie e $R = ax + by + ct$ una retta, con $b \neq 0$. Presentiamo un metodo per calcolare i punti $F \cap R$ e le loro molteplicita' $I(R \cap F, P)\ \ \forall P \in F \cap R$.*

1. *Ricavando $y = \frac{-ax-ct}{b}$ e sostituendo in F, si ottiene un polinomio H, nelle due variabili x, t.*
2. *Per il teorema [QUA,thm2.11,pg.119] H si spezza in fattori lineari $h_1, \ldots, h_t$ distinti,*
$$H = h_1^{s_1} \cdots h_r^{s_r}$$
3. *Ad ogni h_i corrisponde un punto $P_i \in F \cap R$ e inoltre $F \cap R = \{P_1, \ldots, P_r\}$.*
4. *Infine, $s_i = I(R \cap F, P_i)$*

Proof: Il metodo esposto segue direttamente dalla definizione di $I(R \cap F, P)$, infatti, la retta R si puo' scrivere nella seguente forma parametrica:

$$R: \begin{cases} x = \mu \\ y = \frac{-a\mu - c\lambda}{b} = -\frac{a}{b}\mu - \frac{c}{b}\lambda \\ t = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, t) \in R \Leftrightarrow (x, y, t) = \lambda A + \mu B, \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c}{b} \\ 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \\ 0 \end{pmatrix}$$

e sostituire y in F equivale a considerare il polinomio $F(\lambda A + \mu B)$, dove pero' λ, μ sono indicate ancora con le lettere t, x, ovvero se $[F]_y$ e' F con y sostituita, allora

$$[F]_y = F(tA + xB)$$

Applicando allora la definizione di $I(R \cap F, P)$, si ha la tesi. □

Example 4.2. Sia $F = x^3 + y^4 - xy$ e $R = x$, allora

$$F \cap R: \begin{cases} x = 0 \\ y^4 = 0 \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{[4.1,\text{pg.}5]} (0,0) \text{ e' l'unico punto d'intersezione ed ha } I(F \cap R, (0,0)) = 4$$

Osserviamo pero' che questo non basta per affermare che

$$m_{(0,0)}(F) = 4$$

infatti, considerando la retta $S:\ x=y$, si ha

$$\begin{cases} x^3+y^4-xy=0 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x+x^2-1)=0 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x-P_{1x})(x-P_{2x})=0 \\ x=y \end{cases} \quad , \quad P_{1x}, P_{2x} \text{ distinti } \Rightarrow$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{[4.1,\text{pg.}5]} \ S\cap F = \left\{ (0,0),\ \underbrace{P_1, P_2}_{\text{distinti}},\ \ I(S\cap F,(0,0))=2,\ \ I(S\cap F, P_i)=1 \right\}$$

Da quest'ultimo deduciamo:

$$m_{(0,0)}(F) \underbrace{=}_{\text{def}} \min_{r \text{ retta per } (0,0)} I(r\cap F,(0,0)) \le I(S\cap F,(0,0)) = 2$$

5 Sistemi lineari di ipersuperfici

Definition 5.1. Indichiamo con Λ_n il sistema delle ipersuperfici di grado n di $\mathbb{P}^r$, ovvero

$\Lambda_n = \mathbb{P}\left(K[x_1,\dots,x_{r+1}]_n\right)$
dove $K[x_1,\dots,x_{r+1}]_n = \{F \in K[x_1,\dots,x_{r+1}] \mid F \text{ omogeneo con } \deg F = n \vee F \equiv 0\}$

Definition 5.2. Sia Λ un sistema lineare di ipersuperfici di $\mathbb{P}^h$.

$$P \text{ e' un punto base di } \Lambda \ \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \ \forall F \in \Lambda\ P \in F \Leftrightarrow \forall F \in \Lambda\ F(P)=0$$

$\bigcap\Lambda$ e' l'insieme di tutti i punti base di Λ.
Con $\Lambda(P_1,\dots,P_n)$ indichiamo il sottospazio di Λ tale che

$$P_1,\dots,P_n \in F \ \ \forall F \in \Lambda$$

Proposition 5.3.

$$\Lambda = \mathbb{P}(\langle F_1,\dots,F_{d+1}\rangle) \Rightarrow \bigcap\Lambda = F_1\cap F_2\cap\dots\cap F_{d+1}$$

Quindi, per trovare i punti base di Λ, e' sufficiente prendere le intersezioni di $d+1$ ipersuperfici che formano una base di Λ.
In particolare, nel caso di un fascio ($d=1$), basta prendere due qualsiasi $F_1 \neq F_2 \in \Lambda$.

Proof:
$\langle 1\rangle\ \subseteq$

$$P \in \bigcap\Lambda \Rightarrow F(P)=0\ \ \forall F\in\Lambda \Rightarrow F_i(P)=0\ \ \forall i=1,\dots,d+1$$

$\langle 2\rangle\ \supseteq$
Sia $P:\ \ F_1(P)=\dots=F_{d+1}=0$
$F \in \Lambda = \mathbb{P}(\langle F_1,\dots,F_{d+1}\rangle) \Rightarrow F = \lambda_1F_1+\dots+\lambda_{d+1}F_{d+1}$
$F(P) = \lambda_1F_1(P)+\dots+\lambda_{d+1}F_{d+1}(P)=0 \Rightarrow P\in F$
Quindi P e' un punto base di Λ

□

Corollary 5.4. *Sia* $\Lambda = \mathbb{P}(\langle F_1, \dots, F_{d+1}\rangle)$*, con* $F_i \in \Lambda_n$*, allora:*

$$F_i, F_j \text{ non hanno componenti a comune } \forall i \neq j \Rightarrow \left|\bigcap \Lambda\right| \leq n^2$$

In particolare $\left|\bigcap \Lambda\right| < \infty$.
Inoltre, vale un viceversa piu' debole:

$$\left|\bigcap \Lambda\right| < \infty \Rightarrow \text{ non esiste una componente comune a tutti gli } F_i$$

Proof:
$\langle 1 \rangle$ Dimostriamo la prima parte
Si utilizza il thm di Bezout [QUA,thm1.2,pg.158].
Sia $m = \deg F_i \deg F_j = n^2$ Se per assurdo $\left|\bigcap \mathbb{P}(\langle F_1, \dots, F_{d+1}\rangle)\right| = m+1$, si deve avere:

$$|F_1 \cap \dots \cap F_{d+1}| \underbrace{=}_{[5.3,\text{pg.}6]} \left|\bigcap \Lambda\right| = m+1$$

$$|F_i \cap F_j| \geq |F_1 \cap \dots \cap F_{d+1}| = m+1 = \deg F_i \deg F_j + 1 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Bezout [QUA,thm1.2,pg.158]}} \quad F_i, F_j \text{ hanno una componente a comune}$$

Assurdo contro Hp.
$\langle 2 \rangle$
Supponiamo $\left|\bigcap \Lambda\right| < \infty$ se per assurdo esiste una componente C comune a tutti gli F_i, si ha:

$$C \subseteq F_i \ \forall i \Rightarrow C \subseteq F_1 \cap \dots \cap F_{d+1} \underbrace{=}_{[5.3,\text{pg.}6]} \bigcap \Lambda \Rightarrow \left|\bigcap \Lambda\right| \geq |C| = \infty$$

assurdo.

□

Proposition 5.5.

$$\dim \Lambda(P) = \dim \Lambda - 1 \Leftrightarrow P \notin \bigcap \Lambda$$

ovvero, P impone una condizione a Λ *sse P non e' un suo punto base.*
Per prendere dei punti che impogono ognuno una condizione su Λ *si puo' procedere cosi':*

$$\begin{aligned} &P_1 \notin \bigcap \Lambda \\ &P_2 \notin \bigcap \Lambda(P_1) \\ &P_3 \notin \bigcap \Lambda(P_1, P_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Al massimo possiamo arrivare fino a P_d*, con* $d = \dim \Lambda$*. In questo caso,* $\Lambda(P_1, \dots, P_d)$ *e' formato da una sola ipersuperficie.*

Proof: Sia $B = \{F_1, \dots, F_{d+1}\}$ una base di Λ. Le coordinate rispetto a B degli elementi del sottospazio $\Lambda(P_1, \dots, P_r)$ si ottengono dalle soluzioni di

$$\begin{pmatrix} F_1(P_1) & \dots & F_{d+1}(P_1) \\ F_1(P_2) & \dots & F_{d+1}(P_2) \\ \vdots & & \\ F_1(P_r) & \dots & F_{d+1}(P_r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{d+1} \end{pmatrix} = 0$$

Infatti,

$$F \in \Lambda \Leftrightarrow F = \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_{d+1} F_{d+1}$$
$$F(P_i) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 F_1(P_i) + \cdots + \lambda_{d+1} F_{d+1}(P_i) = 0$$

Nel caso $r = 1$, $P = P_1$, $\Lambda(P)$ e' dall'equazione:

$$\begin{pmatrix} F_1(P) & \dots & F_{d+1}(P) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{d+1} \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

$\langle 1 \rangle$ Dim. $\Rightarrow$

Se per assurdo P e' un punto base di Λ, allora

$$P \in \bigcap \Lambda \Rightarrow F(P) = 0 \ \ \forall F \in \Lambda \Rightarrow F_i(P) = 0$$

Quindi la (1) ha come soluzione tutte i possibili $(\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}) \in K^{d+1}$, ovvero

$$\Lambda(P) = \Lambda \Rightarrow \dim \Lambda = \Lambda(P)$$

e questo e' assurdo contro $\dim \Lambda(P) = \dim \Lambda - 1$

$\langle 2 \rangle$ Dim. $\Leftarrow$

Supponiamo per assurdo che $\dim \Lambda(P) \neq \dim \Lambda - 1$,

$$\Lambda(P) \subseteq \Lambda \Rightarrow \dim \Lambda - 1 \leq \dim \Lambda(P) \leq \dim \Lambda \underbrace{\Rightarrow}_{\dim \Lambda(P) \neq \dim \Lambda - 1} \dim \Lambda(P) = \dim \Lambda$$

$$\begin{cases} \Lambda(P) \subseteq \Lambda \\ \dim \Lambda(P) = \dim \Lambda \end{cases} \Rightarrow \Lambda(P) = \Lambda$$

$$\Lambda = \Lambda(P) = \{F \in \Lambda \mid P \in F\} \Rightarrow P \in F \ \ \forall F \in \Lambda \Rightarrow P \in \bigcap \Lambda$$

assurdo contro ipotesi.

Il caso generale si ottiene per induzione. □

Proposition 5.6. *Sia* $\Lambda = \mathbb{P}(\langle F_1, F_2 \rangle)$ *un fascio, ovvero* $\dim \Lambda = 1$*, allora*

$$\exists! F \in \Lambda : \ \ P \in F \Leftrightarrow P \notin \bigcap \Lambda = F_1 \cap F_2$$

Proof: Basta applicare la [5.5,pg.7] o rileggere il punto b') di [QUA,Esempio6.6,pg.156]. □

Proposition 5.7. *Sia dato il seguente sistema lineare di ipersuperfici:*

$$\Lambda = \mathbb{P}(\langle F_1, \dots, F_{d+1} \rangle)$$

allora

$\dim \Lambda(P_1, \dots, P_d) = 0 \Rightarrow$ *L'equazione* $F(X)$ *dell'unica ipersuperficie di* $\Lambda(P_1, \dots, P_d)$ *e' data da:*

$$F(X) = \begin{vmatrix} F_1(X) & F_2(X) & \dots & F_{d+1}(X) \\ F_1(P_1) & F_2(P_1) & \dots & F_{d+1}(P_1) \\ F_1(P_2) & F_2(P_2) & \dots & F_{d+1}(P_2) \\ \vdots & & & \\ F_1(P_{d+1}) & F_2(P_{d+1}) & \dots & F_{d+1}(P_{d+1}) \end{vmatrix} = 0$$

Proof: Sviluppando secondo la prima riga, con la regola di Laplace, il determinante della tesi si vede che $F(X)$ e' combinazione lineare di $F_1(X), \dots, F_{d+1}(X)$ e quindi:

$$F = \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_{d+1} F_{d+1} \Rightarrow F \in \mathbb{P}(\langle F_1, \dots, F_{d+1} \rangle) = \Lambda$$

Inoltre, $F(P_i) = 0$ perche' il determinante $F(P_i)$ ha due righe uguali.

$$F(P_i) = 0 \ \ \forall i, \ \ F \in \Lambda \Rightarrow F \in \Lambda(P_1, \dots, P_d)$$

Poiche' $\dim \Lambda(P_1, \dots, P_d) = 0$, F e' proprio l'unica ipersuperficie di $\Lambda(P_1, \dots, P_d)$. □

Proposition 5.8. *Sia Λ un sistema lineare di curve di ordine m, allora*

1. *Imporre che un punto P sia tale che* $\begin{cases} P \in F \\ m_P(F) \geq s_i \end{cases}$ $\forall F \in \Lambda$ *equivale a imporre* $\dfrac{s_i(s_i+1)}{2}$ *condizioni*
2. *Imporre che:* $\big((m_P(F) \leq m-r,\ \mathcal{P}_P^r(F) = G) \vee m_P(F) > m-r\big)\ \forall F \in \Lambda$

   equivale a imporre $\dfrac{(m-r)(m-r+3)}{2} = \dim \Lambda_{m-r}$ *condizioni*

con $\mathcal{P}_P^r(F) = G$ intendiamo che l'equazione della r-polare di P e' uguale a una fissata curva G, Λ_{m-r} e' il sistema lineare delle curve di ordine $m-r$

Se c e' il numero totale di condizioni imposte e Λ' e' il sottospazio di Λ che rispetta le condizioni, allora:

$$\dim \Lambda' \geq \dim \Lambda - c$$

L'uguaglianza vale sse le condizioni sono tutte indipendenti tra loro.
Ricordiamo che $\dim \Lambda_m = \frac{m(m+3)}{2}$ *(vedi [QUA,Esempio6.3,pg.154]).*

Proof:
⟨1⟩
Basta rileggere la [QUA,Cor6.5,pg.155]
⟨2⟩
$\mathcal{P}_P^r(F)$ ha equazione (vedi [QUA,Def4.1,pg.177]):

$$\sum_{i_1+\cdots+i_3=m-r} \frac{\partial^{m-r} F(P)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \partial x_3^{i_3}} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}$$

Inoltre,

$$F \in \Lambda \Leftrightarrow F = \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_{d+1} F_{d+1}$$
$$\text{con } \{F_1, \ldots, F_{d+1}\} \text{ base di } \Lambda,\ d = \dim \Lambda$$

Quindi ogni coefficiente di $\mathcal{P}_P^r(F)$ e' del tipo

$$C_{i_1 i_2 i_3} = \lambda_1 \frac{\partial^{m-r} F_1(P)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \partial x_3^{i_3}} + \cdots + \lambda_{d+1} \frac{\partial^{m-r} F_{d+1}(P)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \partial x_3^{i_3}}$$

Case: Supponiamo che $m_P(F) \leq n-r$, cosi' che' $\mathcal{P}_P^r(F)$ esiste
Imporre che $\mathcal{P}_P^r(F) = G$ equivale a dire che

$$\exists \lambda \in K^* :\ C_{i_1 i_2 i_3} = \lambda G_{i_1 i_2 i_3}\ \ \forall i_1, i_2, i_3 \quad (1)$$

ovvero che i coefficienti $C_{i_1 i_2 i_3}$ siano un multiplo dei coefficienti di G. In generale, se abbiamo un vettore $X = (x_1, \ldots, x_n)$ non nullo (supponiamo ad esempio $x_n \neq 0$), allora imporre $X = \lambda Y$ equivale a

$$X = \lambda Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = \frac{x_n}{y_n},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{x_n}{y_n} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1/x_n \\ \vdots \\ x_{n-1}/x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1/y_n \\ \vdots \\ y_{n-1}/y_n \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_i/x_n = y_i/y_n\ \forall i = 1, \ldots, n-1 \Leftrightarrow x_i y_n = y_i x_n\ \forall i = 1, \ldots, n-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_n & & & & \\ 0 & y_n & & & \\ 0 & 0 & y_n & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = x_n \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

(nota[1]) Quindi imporre la proporzionalita' tra due vettori di lunghezza n, equivale a imporre $n-1$ condizioni.
Se con Y indichiamo il vettore dei coefficienti di G e con X quello dei coefficienti $C_{i_1 i_2 i_3}$ abbiamo che la (1) impone $\nu_{2+1,m-r}-1$ condizioni, dove $\nu_{2+1,m-r}$ e' il numero di tutti i coefficienti $C_{i_1 i_2 i_3}$.
$\nu_{2+1,m-r}$ e' pari al numero di monomi di grado $m-r$ con 3 variabili (vedi [QUA,Oss6.1.1,pg.153]):

$$\nu_{2+1,m-r} = \binom{2+m-r}{2} = \frac{(2+m-r)(1+m-r)}{2}$$

Quindi il numero di condizioni imposte e':

$$\frac{(2+m-r)(1+m-r)}{2} - 1 = \frac{(m-r)(m-r+3)}{2}$$

CASE: $m_P(F) > m-r$
In questo caso $\mathcal{P}_P^r(F)$ non esiste e $C_{i_1 i_2 i_3} = 0$. Quindi il vettore X che avevamo visto in (2) e' nullo, cioe' $x_i = 0\ \forall i$. Ma allora, le condizioni (2) sono verificate da F.
Questo dimostra che le (2) includono anche le F tali che $m_P(F) > m-r$.

Infine,

$$\dim \Lambda' \underbrace{\geq}_{\text{[QUA,thm6.4,pg.155]}} \dim \Lambda - c \underbrace{=}_{\text{[QUA,Esempio6.3,pg.154]}} \frac{m(m+3)}{2} - c$$

□

Proposition 5.9. *Sia Λ un sistema lineare di curve di ordine m, e sia P un punto, allora*

Imporre che: $\forall F \in \Lambda\ (m_P(F) = 1,\ t_P(F) = R) \vee m_P(F) > 1$, dove R e' una retta fissata, equivale a imporre 2 condizioni

Proof: Basta osservare che:

$$\mathcal{P}_P^{m-1}(F) = t_P(F), \quad \text{con } m = \deg F$$

e applicare la [5.8,pg.9]. □

Theorem 5.10. *Siano F_1, F_2 due cubiche distinte con*

$$F_1 \cap F_2 = \{P_1, \ldots, P_9\}, \quad |F_1 \cap F_2| = 9$$

Sia F una cubica, si ha:

$$\{P_1, \ldots, P_8\} \subseteq F \Rightarrow P_9 \in F$$

Proof:

$$F_1, F_2 \text{ distinte } \Rightarrow \Lambda = \mathbb{P}(\langle F_1, F_2 \rangle) \text{ e' un fascio } (1)$$
$$(1) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[5.3,pg.6]}} F_1 \cap F_2 = \{P_1, \ldots, P_9\} \text{ sono i punti base di } \Lambda \quad (2)$$

$\langle 1 \rangle$ Dimostriamo che $F \in \Lambda$
Supponiamo per assurdo che $F \notin \Lambda$. Sia $\Lambda' = \mathbb{P}(\langle F_1, F_2, F \rangle)$, si ha:
$F \notin \Lambda,\ \dim \Lambda = 1 \Rightarrow \dim \Lambda' = 2$ (3)

$$\{P_1, \ldots, P_8\} \subseteq F_1 \cap F_2 \cap F \subseteq \{P_1, \ldots, P_9\} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{[5.3,pg.6]}} \{P_1, \ldots, P_8\} \subseteq \bigcap \Lambda' \subseteq \{P_1, \ldots, P_9\} \quad (3.1)$$

[1] alternativamente si puo' dire che

$$X = \lambda Y \Leftrightarrow \rho \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} = 1$$

$\langle 1.1 \rangle$ Dimostriamo che

$$\nexists T \subseteq F_1 \cap F_2 : \ |T| = 4, \ F_1 \cap F_2 \cap R = T, \ \text{ con } R \text{ retta}$$

ovvero, i punti $P_1, \ldots, P_9$ sono quattro a quattro non allineati.

Se cosi' non fosse,

$$T = \{Q_1, \ldots, Q_4\}, \ F_1 \cap F_2 \cap R = T, \ \text{ con } R \text{ retta}$$

$$\sum_{i=1}^{4} I(R \cap F_j, Q_i) \geq 4 > \deg F_j \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm5.1,pg.140']}} R \text{ componente di } F_j$$

$\Rightarrow$ R e' componente di F_1 e di F_2. Assurdo contro Hp

$\langle 1.2 \rangle$ Dimostriamo che

$$\nexists T \subseteq F_1 \cap F_2 : \ |T| = 7, \ F_1 \cap F_2 \cap C = T, \ \text{ con } C \text{ conica}$$

Si procede come prima utilizzando Bezout ([QUA,thm1.6,pg.162]):

$$T = \{Q_1, \ldots, Q_7\}, \ F_1 \cap F_2 \cap C = T, \ \text{ con } C \text{ conica}$$

$$\sum_{i=1}^{7} I(C \cap F_j, Q_i) \geq 7 > 6 = 2 \deg F_j \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm1.6,pg.162]}} C \text{ componente di } F_j$$

$\Rightarrow$ C e' componente di F_1 e di F_2. Assurdo contro Hp

$\langle 1.3 \rangle$ Dimostriamo che

$$\nexists T \subseteq F_1 \cap F_2 : \ |T| = 3, \ F_1 \cap F_2 \cap R = T, \ \text{ con } R \text{ retta}$$

ovvero, i punti $P_1, \ldots, P_8$ sono tre a tre non allineati.

Se cosi' non fosse, supponiamo per semplicita' $T = \{P_1, P_2, P_3\}$, si ha

$T = \{P_1, P_2, P_3\}, \ F_1 \cap F_2 \cap R = T, \ \text{ con } R \text{ retta}$

$R = P_1 P_2$

Sia $A \in R \setminus \{P_1, \ldots, P_9\}$

$A \notin \{P_1, \ldots, P_9\} \underbrace{\supseteq}_{(3.1)} \bigcap \Lambda' \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[5.5,pg.7]}} A$ impone una condizione indipendente per Λ' (4)

(4) $\Rightarrow \dim \Lambda'(A) = \dim \Lambda' - 1 = 1$ (4.1)

$G \in \Lambda'(A) \Rightarrow G \cap R \supseteq \{P_1, P_2, P_3, A\} \Rightarrow R$ e' una componente di G $\Rightarrow$

$\Rightarrow G = R + C$ dove C e' una conica, spezzata o meno

$|\{P_4, P_5, P_6, P_7\}| = 5$, sono 4 a 4 non allineati (passo 1.1) $\Rightarrow$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[GI,4.1,pg.33],[GI,4.2,pg.34]}} \exists! \text{ conica C': } P_4, \ldots, P_7 \in C' \Rightarrow C = C'$$

$G = R + C' \ \forall G \in \Lambda'(A) \Rightarrow \Lambda'(A) = \{G\} \Rightarrow \dim \Lambda'(A) = 0$

Assurdo contro (4.1).

$\langle 1.4 \rangle$ Dimostriamo che

$$\nexists T \subseteq F_1 \cap F_2 : \ |T| = 6, \ F_1 \cap F_2 \cap C = T, \ \text{ con } C \text{ conica}$$

Si procede come prima, considerando

$$T = \{P_1, \ldots, P_6\}$$

e scegliendo pero' $A \in C \setminus \{P_1, \ldots, P_6\}$. Si avra' cosi' che:

$$\Lambda'(A) = \{G\} \text{ dove } G \text{ e' la cubica spezzata in } G = C + R, \ \text{ con } R = P_7 P_8$$

questo e' assurdo perche' si deve avere $\dim \Lambda'(A) = 1$.

$\langle 1.5 \rangle$ Q.E.D.

Sia $A \in P_1P_2 \setminus \{P_1, \dots, P_9\}$, allora, come prima

$$\dim \Lambda'(A) = 1$$

Sia $B \in P_1P_2 \setminus \{P_1, \dots, P_9, A\}$,

$\dim \Lambda'(A,B) \geq \dim \Lambda'(A) - 1 = 0 \Rightarrow \exists F' \in \Lambda'(A,B)$

$F' \in \Lambda'(A,B) \subseteq \Lambda' \Rightarrow \bigcap \Lambda' \subseteq F' \Rightarrow P_1, \dots, P_8 \in F'$

$F' \in \Lambda'(A,B),\ P_1, P_2 \in F' \Rightarrow P_1P_2 \cap F' \supseteq \{P_1, P_2, A, B\} \Rightarrow P_1P_2$ e' una componente di $F' \Rightarrow F' = P_1P_2 + C$

$$\begin{cases} P_1, \dots, P_8 \in F' = P_1P_2 + C \\ \text{Per il passo 1.2 e il passo 1.4 si ha: } \{P_3, \dots, P_8\} \nsubseteq C \Rightarrow \exists P_i \notin C \end{cases} \Rightarrow P_i \in P_1P_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow P_1, P_2, P_i \in P_1P_2 \cap F'$

e questo e' assurdo contro il passo 1.3.

$\langle 2 \rangle$ Q.E.D.

$$F \in \Lambda \underbrace{\Rightarrow}_{(2)} P_9 \in \Lambda$$

□

Proposition 5.11. *Sia $C \in \Lambda_m$, con $m \leq n$ (vedi [5.1,pg.6]).*
Indichiamo con $\Lambda_n(C)$ il sottospazio di Λ_n formato dalle ipersuperfici Λ_n che hanno C come componente, ovvero

$$\Lambda_n(C) \stackrel{def}{=} \mathbb{P}\left(\left\{F \in K[x_1, \dots, x_{r+1}]_n \;\middle|\; C \Big/ F\right\}\right)$$

allora

$$\dim \Lambda_n(C) = \dim \Lambda_{n-m}$$

Proof: Nota: qui di seguito con C indichiamo direttamente l'equazione di C. Sia

$$W = \left\{F \in K[x_1, \dots, x_{r+1}]_n \mid C \Big/ F\right\}$$

$\langle 1 \rangle$ W e' un sottospazio vettoriale

Siano $F_1, F_2 \in W$, allora

$$F_1, F_2 \in W \Leftrightarrow C \Big/ F_1,\ C \Big/ F_2 \Leftrightarrow F_1 = H_1C,\ F_2 = H_2C$$

$$\lambda F_1 + \mu F_2 = (\lambda H_1 + \mu H_2)C \Rightarrow \lambda F_1 + \mu F_2 \in W$$

Consideriamo la seguente applicazione lineare :

$$C\cdot : K[x_1, \dots, x_{r+1}]_{n-m} \longrightarrow W$$
$$H \mapsto CH$$

che associa H ad H moltiplicato per C.

E' chiaro che $C\cdot$ e' biettiva (per definizione di W), quindi

$C\cdot$ isomorfismo $\Rightarrow \dim W = \dim K[x_1, \dots, x_{r+1}]_{n-m}$ (1)

$$\dim \Lambda_n(C) = \dim \mathbb{P}(W) = \dim W - 1 \underbrace{=}_{(1)} \dim K[x_1, \dots, x_{r+1}]_{n-m} - 1 = \dim \mathbb{P}(K[x_1, \dots, x_{r+1}]_{n-m}) = \dim \Lambda_{n-m}$$

□

Proposition 5.12. *Sia C una curva irriducibile, $\deg C = n$. Sia Λ_m il sistema di curve di ordine $m < n$, e $\Lambda \subseteq \Lambda_m$, allora*

$$\begin{cases} \bigcap \Lambda \subseteq C \\ \left|\bigcap \Lambda\right| \leq mn \end{cases} \Rightarrow \dim \Lambda \leq mn - \left|\bigcap \Lambda\right|$$

Proof: Sia $\sigma = mn - \left|\bigcap \Lambda\right|$. Supponiamo per assurdo che $\dim \Lambda > \sigma$, allora

$\dim \Lambda > \sigma \Rightarrow \exists D \in \Lambda(P_1, \ldots, P_{\sigma+1})$, dove $P_1, \ldots, P_{\sigma+1} \in C \setminus \left|\bigcap \Lambda\right|$ sono punti distinti

$D \in \Lambda \Rightarrow \bigcap \Lambda \subseteq D \cap C$

$P_1, \ldots, P_{\sigma+1} \in D \cap C \setminus \left(\bigcap \Lambda\right)$

$\Rightarrow |D \cap C| \geq \left|\bigcap \Lambda\right| + \sigma + 1 = mn + 1 > mn \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm1.2,pg.158],Bezout}} C, D$ hanno una componente a comune $\Rightarrow$

$\underbrace{\Rightarrow}_{C \text{ irriducibile}} C \Big| D \Rightarrow \deg C \leq \deg D \Leftrightarrow n \leq m$

assurdo contro ipotesi: $m < n$. □

6 Cono tangente

Proposition 6.1. *In alcuni casi l'equazione del cono tangente e' immediata*

1. *Data $F \in \mathbb{A}^n$, scritta in componenti omogenee $F = f_1 + f_2 + \cdots + f_m$, e $O \in F$ l'origine di $\mathbb{A}^n$, si ha*

$$m_O(F) = s \Rightarrow f_s = \mathrm{Ctg}_O(F)$$

ovvero, $f_s = 0$ e' l'equazione del cono tangente.
Nota: f_s e' il sotto-polinomio di grado piu' piccolo, non nullo, omogeneo di F.

2. *Data $F \in \mathbb{P}^n$, scritta mettendo in evidenza x_i:*

$$F = \sum_{i=0}^{m} F_i x_i^{m-i}$$
$$F_i \in K[x_1, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x_{n+1}], \ \deg F_i = i, \ F_i \text{ omogeneo}$$

si ha

$$m_{\mathbb{P}_i}(F) = s \Rightarrow F_s = \mathrm{Ctg}_{\mathbb{P}_i}(F)$$

Nota: F_s e' il primo coefficiente non nullo della x_i ddi grado massimo.

Proof:
⟨1⟩ Dim. 1

$m_O(F) = s \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{[QUA,prop5.3.3,pg.52]}} f_0 = f_1 = \cdots = f_s \equiv 0, \ f_{s+1} \neq 0$ (1)

$B \in \mathrm{Ctg}_O(F) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{[QUA,conotangente,pg.147]}} OB$ e' una retta tg $\Leftrightarrow I(OB \cap F, O) > m_O(F) = s$

$I(OB \cap F, O) = r \geq s + 1 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{dimostraz. di [QUA,prop5.3.3,pg.143]}} f_0(B) = f_1(B) = \cdots = f_{r-1}(B) = 0, \ f_r(B) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{(1)} f_s(B) = f_{s+1}(B) = \cdots = f_{r-1}(B) = 0, \ f_r(B) \neq 0$ (2)

Quindi

$$B \in \mathrm{Ctg}_O(F) \underbrace{\Rightarrow}_{(2)} f_s(B) = 0$$

viceversa

$f_s(B) = 0 \Rightarrow \exists r \geq s+1 : \ f_s(B) = f_{s+1}(B) = \cdots = f_{r-1}(B) = 0, \ \ f_r(B) \neq 0$ (nota: se $OB \subseteq F$ allora $r = m$) $\Rightarrow$

$\underbrace{\Rightarrow}_{(2)} B \in \mathrm{Ctg}_O(F)$

Quindi $f_s = 0$ e' proprio l'equazione di $\mathrm{Ctg}_O(F)$.

$\langle 2 \rangle$ Dim. 2

Riutilizzando quanto visto nella dimostrazione di [QUA,prop5.3.5,pg.144'] , si procede analogamente a prima (sostituendo f_i con F_i e O con A_i.

□

6.1 Bezout

Lemma 6.2. *Siano F, G curve in $\mathbb{P}^2$. Sia $r(x_1, x_2, x_3) = p_3 x_1 - p_1 x_3$ una retta. Supponendo che $\mathbb{P}_2 = Y_\infty \notin F \cup G$, si ha*

$$r \Big/ \mathcal{R}_{x_2}(F, G) \Leftrightarrow \exists P \in r \cap F \cap G$$

Proof:

$\langle 1 \rangle$ $\mathcal{R}_{x_2}(F, G) = R(x_1, x_3)$ con R polinomio omogeneo, $\deg R = mn$, oppure $R = 0$

Scriviamo F, G mettendo in evidenza x_2:

$$F = \sum_{i=0}^{n} A_i x_2^i, \ \ A_i \in K[x_1, x_3], \quad \text{omogeneo} \ , \ \deg A_i = n - i$$

$$G = \sum_{i=0}^{m} B_i x_2^i, \ \ B_i \in K[x_1, x_3], \quad \text{omogeneo} \ , \ \deg B_i = m - i$$

$$A_i(0x, 0y) \underbrace{=}_{A_i \text{ omogeneo}} 0^{\deg A_i} A_i(x, y) \underbrace{=}_{0^0 = 1} \begin{cases} 0 & \deg A_i = n - i > 0 \\ A_n & n - i = 0 \end{cases} \Rightarrow F(\mathbb{P}_2) = F(0, 1, 0) = A_n 1^n = A_n \Rightarrow$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\mathbb{P}_2 \notin F \ \Leftrightarrow \ F(\mathbb{P}_2) \neq 0} \quad A_n \in K \setminus \{0\} \ \Rightarrow \ \deg_{x_2} F = n = \deg F$$

analogamente $\deg_{x_2} G = \deg G$

$$\begin{cases} F, G \text{ omogenei} \\ \deg_{x_2} F = \deg F \\ \deg_{x_2} G = \deg G \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm3.10,pg.124]}} \quad \mathcal{R}_{x_2}(F, G) = R(x_1, x_3)$$

$\langle 2 \rangle$ Dim. $\Rightarrow$

Sia $f = F(p_1, x_2, p_3), \ \ g = G(p_1, x_2, p_3) \in K[x_2]$.

Sia $P = (p_1, p_2, p_3)$ un punto di r (2)

$r \Big/ \mathcal{R}_{x_2}(F,G) \underbrace{=}_{\text{passo 1}} R(x_1, x_3)$

$P \in r \Rightarrow r(p_1, p_3) = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{r \Big/ \mathcal{R}} \mathcal{R}_{x_2}(F,G)(p_1, p_3) = 0$

$\mathcal{R}(f,g) \underbrace{=}_{\text{def}} \mathcal{R}_{x_2}(F,G)(p_1,p_3) = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm3.3,pg.121]}} \exists H \in K[x_2] : \ H \Big/ f,\ H \Big/ g,\ \deg H > 0$ (1)

K alg. chiuso $\exists p_2 \in K : \ H(p_2) = 0 \Rightarrow f(p_2) = g(p_2) = 0 \Leftrightarrow F(p_1,p_2,p_3) = G(p_1,p_2,p_3) = 0 \Leftrightarrow P \in F \cap G$ (3)

(2), (3) $\Rightarrow P \in r \cap F \cap G$

$\langle 3 \rangle$ Dim. $\Leftarrow$

$P \in F \cap G \Rightarrow F(P) = G(P) = 0 \Leftrightarrow f(p_2) = g(p_2) = 0 \Rightarrow x_2 - p_2 \Big/ f, g \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm3.3,pg.121]}} \mathcal{R}(f,g) = 0 \Leftrightarrow$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{passo 1}} \mathcal{R}_{x_2}(F,G)(p_1,p_3) = 0 \Leftrightarrow R(p_1,p_3) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\mathcal{R}_{x_2} \text{ omogeneo}} R(\lambda p_1, \lambda p_3) = 0 \ \ \forall \lambda \in K$ (4)

$P \in r \Rightarrow r(P) = 0 \Leftrightarrow r(p_1,p_3) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{r \text{ omogeneo}} r(\lambda p_1, \lambda p_3) = 0 \ \ \forall \lambda \in K$ (5)

$\{(\lambda p_1, \lambda p_3) \mid \lambda \in K\}$ sono tutte le radici di r, (4), (5) $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm4.3,pg.130]}} r \Big/ R$

□

Theorem 6.3. *Siano F, G due curve in $\mathbb{P}^2$, e siano*

1. $P \in F \cap G \cap \mathbb{A}^2, P = (p_1, p_2, 1)$
2. $\mathbb{P}_2 \notin F \cup G$
3. $\{P\} = F \cap G \cap \{Q \in \mathbb{P}^2 \mid q_1 = p_1\}$
   ovvero, la retta $x = p_1$ si incontra solo in P con F e G

allora

$$I(C \cap D, P) = m_{x_1 = p_1} \mathcal{R}_y(F_*, G_*)(x_1)$$

Proof: Sia $r = p_3 x_1 - p_1 x_3 \underbrace{=}_{p_3 = 1} x_1 - p_1 x_3$. P e' un punto di r. Per definizione ([QUA,thm1.5,pg.161]),

$I(C \cap D, P) = s$ tale che $\mathcal{R}_{x_2}(F,G) = r^s H, \ \ r \not\Big| H \Rightarrow r_*^s H_* = \mathcal{R}_{x_2}(F,G)_* = \mathcal{R}_{x_2}(F_*, G_*) \Leftrightarrow$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{r_* = x_1 - p_1} (x_1 - p_1)^s H_* = \mathcal{R}_{x_2}(F_*, G_*)$ (1)

$r \not\Big| H \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[3.3,pg.2]}} r_* \not\Big| H \underbrace{\Rightarrow}_{\text{(1), def di molteplicita'}} s = m_{x_1 = p_1} \mathcal{R}_{x_2}(F_*, G_*)$

□

Theorem 6.4. *Siano F_1, F_2 curve di grado n, con*

$$\{P_1, \ldots, P_{n^2}\} = F_1 \cap F_2 \text{ punti distinti}$$

Sia D curva <u>irriducibile</u> di grado m, tale che

$$D \cap F_1 = \{P_1, \dots, P_{mn}\}$$

allora si ha

$$\exists E \text{ curva di grado } n-m: \quad E \cap F_1 = \{P_{mn+1}, \dots, P_{n^2}\}$$

Proof: Sia $P \in D \backslash F_1$, e sia $F: \ \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$ il fascio di base F_1, F_2.

$$P \notin F_1 \Rightarrow P \neq P_i \ \ \forall i = 1, \dots, n^2 \ \ (0)$$

Per la [QUA,Esempio6.6,a',pg.156], si ha

$$\exists \overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2: \ \ P \in C = \overline{\lambda}_1 F_1 + \overline{\lambda}_2 F_2 \ \ (1)$$

$$(1) \Rightarrow \deg C = \deg F_1 = \deg F_2 = n \ \ (1.1)$$

Inoltre,

$\langle 1 \rangle$ $\exists H$ curva $: C = DH$

$$P_i \in F_1 \cap F_2 \Leftrightarrow F_1(P_i) = F_2(P_i) = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{(1)} C(P_i) = 0 \Leftrightarrow F_1 \cap F_2 \subseteq C \Leftrightarrow P_1, \dots, P_{n^2} \in C \ \ (2)$$

$$D \cap F_1 = \{P_1, \dots, P_{mn}\}, \ \ (2) \Rightarrow D \cap C \supseteq \{P_1, \dots, P_{mn}\} \ \ (3)$$

$$P \in D \backslash F_1, \ P \underbrace{\in}_{(1)} C, \ (3), \ (0) \Rightarrow |D \cap C| \geq mn+1 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm1.2,pg.158]}} \quad C, D \text{ hanno una componente in comune} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{D \text{ irriducibile }, \ \text{[QUA,oss4.31,pg.131']}} \quad D \subseteq C \Rightarrow C = DH \ \ (4)$$

$$DH = C, \ \deg D = m, \ (1.1) \Rightarrow \deg H = n - m \ \ (5)$$

$\langle 2 \rangle$ $P_{mn+1}, \dots, P_{n^2} \in H$

$$\{P_{mn+1}, \dots, P_{n^2}\} \cap D = \emptyset \ \ (6), \text{ infatti se per assurdo } P_{mn+i} \in D$$

$$D \cap F_1 \underbrace{=}_{\text{Hp}} \{P_1, \dots, P_{mn}\} \ \ (*)$$

$$P_{mn+i} \in F_1 \cap F_2 \Rightarrow P_{mn+i} \in F_1 \ \text{, assurdo contro } (*)$$

$$(6) \Leftrightarrow D(P_{mn+i}) \neq 0 \ \ (6.1)$$

Inoltre,

$$(2) \Rightarrow P_{mn+i} \in C = DH \Leftrightarrow D(P_{mn+i}) H(P_{mn+i}) = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{(6.1)} H(P_{mn+i}) = 0 \Rightarrow P_{mn+i} \in H$$

$\langle 3 \rangle$ H, F_1 non hanno componenti a comune

Osserviamo che $\overline{\lambda}_2 \neq 0$, infatti

$$\overline{\lambda}_2 = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{(1)} C = \overline{\lambda}_1 F_1 \Rightarrow 0 \underbrace{=}_{P \in C, \ (1)} C(P) = \overline{\lambda}_1 \underbrace{F_1(P)}_{\neq 0, \ P \in D \backslash F_1} > \overline{\lambda}_1 = 0$$

$$\overline{\lambda}_1 = \overline{\lambda}_2 = 0 \Rightarrow C = 0 \text{ assurdo}$$

Se per assurdo $L \Big/ H, F_1$,

$$\begin{cases} DH \underbrace{=}_{(4)} C \underbrace{=}_{(1)} \overline{\lambda}_1 F_1 + \overline{\lambda}_2 F_2 \\ L \Big/ H, F_1 \\ \overline{\lambda}_2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow L \Big/ F_2$$

$L \Big/ F_1, F_2 \Rightarrow F_1, F_2$ hanno una componente a comune $\Rightarrow |F_1 \cap F_2| = \infty$ assurdo contro ipotesi $\langle 4 \rangle$ Q.E.D.

Se per assurdo $H \cap F_1 \supsetneq \{P_{mn+1}, \ldots, P_{n^2}\}$ si ha

$$|H \cap F_1| > n^2 - (mn+1) + 1 = n(n-m) = \deg F \deg H \Rightarrow$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm1.2,pg.158],Bezout}} \quad H, F_1 \text{ hanno una componente a comune}$$

assurdo contro passo 3. Quindi, per il passo 2 si ha

$$H \cap F_1 = \{P_{mn+1}, \ldots, P_{n^2}\}$$

che e' la tesi.

□

7 Cono proiettante

Definition 7.1. Sia F un'ipersuperficie di $\mathbb{P}^n$ e π un iperpiano. Preso un punto $P \notin \pi$, possiamo considerare il seguente insieme di punti:

$$\pi_{P,F} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{Q \in F \cap \pi} PQ$$

ovvero, l'insieme formato dai punti di tutte le rette passanti per P e per un punto di $F \cap \pi$. π_P, F si chiama *cono proiettante*.

Lemma 7.2. *Sia $\pi \subseteq \mathbb{P}^n$ un iperpiano e $P \in \mathbb{P}^n \backslash \pi$. Indicheremo con $\pi_P(X)$ la proiezione di centro P sull'iperpiano π (vedi [GII,5.5,pg.86]), ovvero*

$$\{\pi_P(X)\} = PX \cap \pi$$

$\pi_P(X)$ e' una funzione di tipo

$$\pi_P(X) : \mathbb{P}^n \backslash \{P\} \longrightarrow \pi$$

$\pi_P(X)$ si puo' pero' intendere come un vettore di polinomi in $(K[X])^{n+1}$, infatti si ha:

$$\pi_P(X) = k(X)P + X$$

$$\text{con } k(X) = -\frac{\pi(X)}{\pi(P)} = -\frac{\sum_i a_i x_i}{\sum_i a_i P_i} \in K[X]$$

$$\text{dove } \pi \text{ ha equazione } \pi(X) = a_1 x_1 + \cdots + a_{n+1} x_{n+1} = 0$$

Con questa interpretazione $\pi_P(X)$ diventa una funzione del tipo:

$$\pi_P(X) : \mathbb{P}^n \longrightarrow \pi \cup \{(0, 0, \ldots, 0)\}$$

infatti, l'unica cosa che cambia e'

$$\pi_P(P) = (0, 0, \ldots, 0)$$

Proof:
⟨1⟩ Dimostriamo che $\pi_P(X) \in K[X]$
L'equazione $\pi(X)$ di π e':

$$\pi(X) = a_1x_1 + \cdots + a_{n+1}x_{n+1} = 0 \quad \text{con qualche } a_i \neq 0$$

$$P \notin \pi \Rightarrow \pi(P) \neq 0 \Leftrightarrow \sum_i a_iP_i \neq 0 \quad (0)$$

Si ha:
$\pi_P(X) \in \pi, \quad P \notin \pi \Rightarrow \pi_P(X) \neq P$ (2) $\{\pi_P(X)\} = \pi \cap PX$ (1)

$$Q = \pi_P(X) \underbrace{\Leftrightarrow}_{(1),(2)} \begin{cases} Q \in PX \\ \pi(Q) = 0 \\ X \neq P \\ Q \neq P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q = \lambda P + \mu X \\ \pi(Q) = 0 \\ Q, X \neq P \end{cases} \qquad (2)$$

$$Q, X \neq P \Leftrightarrow Q = \frac{\lambda}{\mu}P + X, \ \mu \neq 0, \ X \neq P \Leftrightarrow Q = kP + X, \ X \neq P$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} Q = kP + X \\ \pi(kP + X) = 0 \\ X \neq P \end{cases} \qquad (3)$$

$$\pi(kP + X) = 0 \Leftrightarrow \sum_i a_i(kP_i + X_i) = 0 \Leftrightarrow k\sum_i a_iP_i + \sum_i a_iX_i \underbrace{\Leftrightarrow}_{(0) \Rightarrow \sum_i a_iP_i \neq 0} k = -\frac{\sum_i a_iX_i}{\sum_i a_iP_i}$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} Q = k(X)P + X \\ k(X) = -\frac{\sum_i a_iX_i}{\sum_i a_iP_i} \\ X \neq P \end{cases}$$

Abbiamo cosi' ottenuto che

$$\pi_P(X) = k(X)P + X, \quad \text{con } k(X) = -\frac{\sum_i a_iX_i}{\sum_i a_iP_i} \in K[X]$$

⟨2⟩ Dimostriamo che $\pi_P(P) = (0, 0, \ldots, 0)$

$$\pi_P(P) = k(P)P + P \underbrace{=}_{k(P)=-1} -P + P = (0, 0, \ldots, 0)$$

□

Proposition 7.3. *Nelle ipotesi della def [7.1,pg.17], si ha:*

1. $\pi_{P,F}$ *e' una ipersuperficie*
2. $\pi_{P,F}$ *e' un cono di vertice* P
3. *Un'equazione di* $\pi_{P,F}$ *e':* $F(\pi_P(X)) = 0$, *dove* $\pi_P(X)$ *e' data dalla [7.2,pg.17]*
4. F' *e' l'ipersuperficie minima di* $F \Rightarrow F'(\pi_P(X)) = 0$ *e' l'ipersuperficie minima di* $\pi_{P,F}$

4.1 $\deg F'(\pi_P(X)) = \deg F'$

Per la def. di ipersuperficie minima vedi [3.6,pg.3].

Proof:
⟨1⟩

$$\pi_{P,F} = \bigcup_{Q\in F} PQ = \{X \in \mathbb{P}^n \mid X \in PQ,\ Q \in F \cap \pi\} \quad (1)$$

$$X \in \pi_{P,F}\setminus\{P\} \underbrace{\Leftrightarrow}_{(1)} \begin{cases} X \in PQ\setminus\{P\} \\ Q \in \pi \\ F(Q) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q = \pi_P(X) \\ F(Q) = 0 \\ X \neq P \end{cases} \Leftrightarrow F(\pi_P(X)) = 0,\ X \neq P \quad (2)$$

$$\pi_P(X) \underbrace{=}_{[7.2,\text{pg.}17]} k(X)P + X = \left(-\sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{\pi(P)} x_i\right) P + X \text{ e' lineare} \quad (3)$$

$$\pi_P(X) \underbrace{\in}_{[7.2,\text{pg.}17]} (K[X])^{n+1} \Rightarrow F(\pi_P(X)) \in K[X], \quad (3.1)$$

F omogeneo, $\pi_P(X)$ lineare , $(3.1) \Rightarrow F(\pi_P(X))$ e' omogeneo (3.2)

$$\pi_P(P) \underbrace{=}_{[7.2,\text{pg.}17]} 0 \Rightarrow P \in F(\pi_P(X)) \quad (2.1)$$

$(2), (2.1) \Rightarrow (X \in \pi_{P,F} \Leftrightarrow F(\pi_P(X)) = 0)$ (3.3)

Per le $(3.1), (3.2), (3.3)$, possiamo cosi' concludere che $G(X) = F(\pi_P(X)) = 0$ e' una ipersuperficie che ha per soluzione tutti e soli i punti di $\pi_{P,F}$.

$\langle 1.1 \rangle$ $\pi_{P,F}$ e' un cono di vertice P

Infatti, basta applicare la definizione di $\pi_{P,F}$ e la definizione di cono [QUA,Def,pg.134].

$$\text{Sia } \mathcal{G} = \{H \text{ ipersuperficie} \mid \{X \mid H(X) = 0\} = \pi_{P,F}\}$$
$$G \in \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G} \neq \emptyset \underbrace{\Rightarrow}_{[3.6,\text{pg.}3]} \exists\, G' \text{ ipersuperficie minima di } \pi_{P,F}$$

$\langle 1.2 \rangle$ Supponiamo che F' sia l'ipersuperficie minima di F, e per semplicita' poniamo $F = F'$. Tutti i conti fin'ora svolti rimangono validi. Dimostriamo che l'equazione G data dalla (3.3) e' proprio G'.

$$G' \text{ ipersuperficie minima } \Rightarrow \begin{cases} \{X \mid G'(X) = 0\} = \pi_{P,F} = \{X \mid G(X) = 0\} \\ \deg G' \leq \deg G \end{cases} \quad (3.4)$$
$$G(X) = F(\pi_P(X)) \underbrace{\Rightarrow}_{(3)} \deg G \leq \deg F \quad (4)$$

$\langle 1.3 \rangle$ Dimostriamo che $G' = 0$ e $G = 0$ sono la stessa equazione.

Per definizione di G' si ha

$$\{X \in \pi \mid G'(X) = 0\} = \{X \in \pi \mid F(X) = 0\} \quad (4.1)$$

Ovvero, l'equazione G' ristretta nei punti di π e' una equazione dei punti di F.

$$\begin{cases} F \text{ e' per ipotesi l'ipersuperficie minima di } \{X \in \pi \mid F(X) = 0\} \\ (4.1) \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{[3.9,\text{pg.}5]} I(R \cap F, Q) \leq I(R \cap G', Q) \quad (4.2)$$

dove R e' una qualsiasi retta di π e $Q \in R$

Sia R una retta tale che $R \subseteq \pi$ e che non sia una componente di $F \cap \pi$ e di G', per il

[QUA,thm5.1,pg.140'] si ha:

$$\sum_{Q\in F\cap R} I(R\cap F, Q) = \deg F \quad (5)$$

$$R\subseteq\pi,\ \pi_{P,F}\cap\pi\subseteq F,\ F\cap\pi\subseteq\pi_{P,F} \Rightarrow R\cap F = \pi_{P,F}\cap R \Leftrightarrow R\cap F = G'\cap R \quad (6)$$

$$\deg F \underbrace{=}_{(5)} \sum_{Q\in F\cap R} I(R\cap F, Q) \underbrace{\leq}_{(4.2)} \sum_{Q\in F\cap R} I(R\cap G', Q) \underbrace{=}_{(6)} \sum_{Q\in G'\cap R} I(R\cap G', Q) =$$

$$\underbrace{=}_{\text{[QUA,thm5.1,pg.140']}} \deg G' \underbrace{\leq}_{(3.4)} \deg G \underbrace{\leq}_{(4)} \deg F$$

$$\Rightarrow \deg F = \deg G' = \deg G$$

$$\begin{cases} G' \text{ ipersuperficie minima di } \pi_{P,F} \\ G = \pi_{P,F} \\ \deg G = \deg G' \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[3.8,pg.4]}} G = G'$$

□

Proposition 7.4. *Nelle ipotesi della def [7.1,pg.17], se $\mathbb{P}_r$ e' l'r-esimo punto fondamentale, si ha:*

$$\textit{L'equazione di } \pi_{\mathbb{P}_r,F} \textit{ e': } F\left(x_1,\dots,x_{r-1},-\frac{\sum_{i\neq r} a_i x_i}{a_r},x_{r+1},\dots,x_{n+1}\right) = 0$$

dove l'equazione di π e': $a_1x_1+\cdots+a_{n+1}x_{n+1}=0$

In altre parole, per trovare l'equazione di $\pi_{\mathbb{P}_r,F}$ si calcola x_r dall'equazione di π e si sostituisce in F.

Proof: Basta applicare la [7.3,pg.18] al punto

$$P = \mathbb{P}_r = (0,0,\dots,0,\underbrace{1}_{\text{posto } r},0,\dots,0)$$

□

Proposition 7.5. *Alcuni dei teoremi di Geometria I riguardanti il vertice di un cono ([GI,5.9,pg.48]) valgono per le ipersuperfici F di $\mathbb{P}^3$.*
Riportiamo qui di seguito gli enunciati:

1. $\exists V_1\neq V_2\in F$ *vertici* $\Rightarrow$ F *e' spezzata*
2. V *e' vertice* $\Leftrightarrow$ $\forall$*rette* r: $V\in r$ *si ha* $r\cap F = r \vee r\cap F = V$
3. $\begin{cases} R_1\neq R_2\subseteq F \text{ rette} \\ \{V'\} = R_1\cap R_2 \\ \exists V\in F \text{ vertice} \end{cases} \Rightarrow V' = V$ *e' un vertice di* F

Il seguente teorema vale solo per le F con $\deg F = 2$:

$$F \textit{ e' spezzata} \Rightarrow \exists\infty \textit{vertici} \in F$$

8 Punti singolari

Proposition 8.1. *Sia F una curva priva di componenti multiple, ovvero*

$$F = F_1+\cdots+F_r, \quad F_i \textit{ componenti irriducibili}$$

allora

$$m_P(F) > 1 \Rightarrow (\exists i \neq j : \ P \in F_i \cap F_j \quad \vee \quad m_P(F_i) > 1)$$

Proof: Vedi [QUA,Oss5.3.2,pg.142'] □

Theorem 8.2. *Sia F una curva, tale che*

$$\begin{aligned} &F = F_1 + \cdots + F_r, \quad F_i \text{ componente irriducibile, } F_i \neq F_j \ \forall i \neq j \\ &\{P \in F \mid m_P(F) > 1\} = \{P_1, \ldots, P_h\}, \ \ h < \infty, \ P_i \neq P_j \ \ \forall i \neq j \\ &s_i = m_{P_i}(F) \end{aligned}$$

allora

$$\sum_{i=1}^{h} s_i(s_i - 1) \leq n(n-1)$$

Proof: Se $n = 1$, il thm e' vero perche' $h = 0$ (una retta non ha punti singolari).
A meno di proiettivita', possiamo supporre che

$$(0,0,1) \notin F \quad (0)$$

Sia $F' = \frac{\partial F}{\partial x_3}$,

$$m_P(F) > 1 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm5.8,pg.147], [QUA,prop5.8.1,pg.146']}} P \in F \cap F'$$

⟨1⟩ F, F' non hanno componenti in comune

Se per assurdo $\exists G$ irriduc. t.c. $G \Big| F, G \Big| F'$, allora

$$G \Big| F \Rightarrow F = GH \Rightarrow F' = \frac{\partial F}{\partial x_3} = \frac{\partial G}{\partial x_3} H + G \frac{\partial H}{\partial x_3} \quad (1)$$

$$G \Big| F', \ G \Big| G, \ (1) \Rightarrow G \Big| \frac{\partial G}{\partial x_3} H \underbrace{\Rightarrow}_{G \text{ irrid.}} G \Big| \frac{\partial G}{\partial x_3} \vee G \Big| H$$

Case: $G \Big| H$

$$G \Big| H, \ \ F = GH \Rightarrow F = G^t \overline{H}, \ t > 1 \Rightarrow F \text{ ha una componente multpla}$$

assurdo contro Hp.

Case: $G \Big| \frac{\partial G}{\partial x_3}$

$$\begin{cases} \deg G > \deg \frac{\partial G}{\partial x_3} \\ G \Big| \frac{\partial G}{\partial x_3} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial x_3} \equiv 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[3.4,pg.2]}} G \in K[x_1, x_2]$$

$$F = GH \text{ omogeneo} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,lemma2.4,pg.117]}} G \text{ omogeneo}$$

$$\Rightarrow G(0,0,1) = G(0,0) = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{F=GH} F(0,0,1) = 0$$

Assurdo contro (0)

⟨2⟩ Q.E.D.

F, F' non hanno componenti a comune $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm1.2,pg.158]},Bezout}$ $|F\cap F'| < \infty \Rightarrow F\cap F' = \{P_1, \dots, P_h\}$

$m_{P_i}(F) = s_i \Rightarrow$

$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm5.8,pg.147]}}$ le derivate di ordine $s_i - 1$ sono nulle $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ le derivate di $F' = \dfrac{\partial F}{\partial x_3}$ di ordine $s_i - 2$ sono nulle $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm5.8,pg.147]}}$ $m_{P_i}(F') \geq s_i - 1$ (3)

$\sum_{i=1}^{h} s_i(s_i-1) \underbrace{\leq}_{(3)} \sum_{i=1}^{h} m_{P_i}(F)m_{P_i}(F')$ $\underbrace{\leq}_{\text{[QUA,cor1.10,pg.165]}}$ $\deg F \deg F' = n(n-1)$

$\sum_{i=1}^{h} s_i(s_i-1) \leq n(n-1)$

□

9 Curve irriducibili

Proposition 9.1. *Sia C una curva in $\mathbb{P}^2$,*

$$C \text{ non ha punti singolari } \Rightarrow C \text{ e' irriducibile}$$

Proof: Se per assurdo C e' spezzata in almeno due componenti C_1, C_2 (distinte o meno) si ha:
$C_1\cap C_2 \underbrace{\neq}_{\text{Bezout [QUA,thm1.2,pg.158]}} 0 \Rightarrow \exists P \in C_1\cap C_2$ (1)

$C_1 \neq C_2 \underbrace{\Rightarrow}_{(1)} P$ e' un punto comune a due componenti $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,oss5.3.2,pg.142']}}$ P e' singolare

$C_1 = C_2 \underbrace{\Rightarrow}_{(1)} P$ sta' in una componente che ha molteplicita' almeno 2 $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,oss5.3.2,pg.142']}}$ P e' singolare

in ogni caso si ha un'assurdo. □

Proposition 9.2. *Sia F una ipersuperficie in $\mathbb{P}^n$ e R una retta, allora*

$$\begin{cases} F\cap R = \{P\} \\ m_P(F) = 1 \end{cases} \Rightarrow F \text{ e' irriducibile}$$

In altre parole, se F incontra in un solo punto la retta R e questo punto e' semplice, allora F e' irriducibile.

Proof: Supponiamo per assurdo che sia spezzata in almeno due componenti F_1, F_2.

Per [QUA,Oss5.1.0,pg.140'] si ha: $F_1\cap R \neq \emptyset$, $F_2\cap R \neq \emptyset$

$F_1\cap R,\ F_2\cap R \subseteq F\cap R \underbrace{=}_{\text{per Hp}} \{P\}$

$\Rightarrow F_1\cap R = F_2\cap R = \{P\}$ (1)

Infine,

$$(1) \Rightarrow P \in F_1 \cap F_2 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,oss5.3.2,pg.142']}} m_P(F) \geq 2$$

assurdo contro $m_P(F) = 1$. □

Proposition 9.3. *Sia C una curva, allora*

$$\begin{cases} C \cap R_\infty = \{P\} \\ m_P(C) = 1 \end{cases} \Rightarrow C \text{ e' irriducibile}$$

dove $R_\infty = \mathbb{P}^2 \backslash \mathbb{A}^2$ e' la retta impropria.
In altre parole, se C ha un solo punto improprio e questo punto improprio e' semplice, allora C e' irriducibile.

Proof: Applica la [9.2,pg.22] □

Proposition 9.4. *Sia*

1. *C una curva,* $\deg C = n$
2. *$P \in C$,* $m_P(C) = n - 1$
3. *P unico punto singolare di C*

allora

$$C \text{ riducibile } \Leftrightarrow \exists R \text{ retta: } R \subseteq \mathrm{Ctg}_P(C) \cap C$$

Proof:
⟨1⟩ Dim. ⇐

$$R \subseteq C \Rightarrow R \Big/ C \Rightarrow C \text{ riducibile}$$

⟨2⟩ Dim. ⇒

$$C = F_1 + F_2$$

Case: F_1 e' una retta
Poniamo $R = F_1$
P unico pt. singolare $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,Oss5.1.2,pg.140']}} R \cap F_2 = \{P\} \Rightarrow P \in R \subseteq C \Rightarrow I(R \cap C, P) = \infty \Rightarrow$
$\Rightarrow R$ e' una tangente in $P \Leftrightarrow R \subseteq \mathrm{Ctg}_P(C)$
Case: F_1 non e' una retta
Possiamo supporre che F_1 sia irriducibile. Sia $d_i = \deg F_i$, $m_i = m_P(F_i)$
$d_1 + d_2 = \deg C = n$
P unico pt. singolare $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,Oss5.1.2,pg.140']}} F_1 \cap F_2 = \{P\}$ (1)
F_1 irrid. $\Rightarrow m_P(F_1) < \deg F_1 \Leftrightarrow m_1 < d_1 \Leftrightarrow m_1 = d_1 - r$, con $r > 0$ (2)
$n - 1 = m_P(C) \underbrace{=}_{\text{(1), [QUA,Oss5.1.2,pg.140']}} m_1 + m_2 \underbrace{=}_{\text{(2)}} d_1 - r + m_2 \Rightarrow m_2 = n - 1 - d_1 + r \underbrace{=}_{n = d_1 + d_2} d_2 - 1 + r \geq d_2$
$m_2 \geq d_2 \Leftrightarrow m_P(F_2) \geq \deg F_2 \Leftrightarrow m_P(F_2) = \deg F_2 \Rightarrow$
$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,Oss5.3.6,pg.144'], [QUA,Oss5.7,pg.145']}} F_2$ e' un cono spezzato in d_2 rette

Allora, se chiamiamo R una tale retta, possiamo procedere come nel caso precedente e avremo:

$$R \subseteq \mathrm{Ctg}_P(C)$$

□

Definition 9.5. Sia C una curva e $P \in C$.
P e' ordinario $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ha tutte le tangenti distinte.
Una *cuspide* e' un punto doppio non ordinario.
Un *nodo* e' un punto doppio ordinario.
Una *cuspide ordinaria* e' un punto doppio P non ordinario, e la sua unica retta tangente r e' tale che $I(C \cap r, P) = 3$.

9.1 Conica

Proposition 9.6. *Sia C una conica in $\mathbb{P}^2$,*

$$C \text{ e' irriducibile } \Leftrightarrow C \text{ non ha punti singolari}$$

Proof:
⟨1⟩ Dim. ⇒

$$C \text{ irriducibile} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,oss2.2,pg.168]}} C \text{ non ha punti singolari}$$

⟨2⟩ Dim. ⇐
Basta applicare la [9.1,pg.22]

□

Proposition 9.7. *Sia $F \in \mathbb{P}^2$ una conica. La matrice A (nota[2]) che usavamo in geometria I (vedi [GI,3,pg.10]) e' la matrice dei coefficienti del sistema*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

nelle incognite x, y, z. Quindi dal teorema [QUA,thm5.8,pg.147] segue:

$$\rho(A) = 3 \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow \text{l'unica soluzione e' } (0,0,0) \text{ (che non e' un punto)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \nexists P \in F : \ m_P(F) > 1 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{[9.6,pg.24]}} F \text{ e' irriducibile}$$
$$\rho(A) = 2 \Leftrightarrow \exists \infty^1 \text{ soluzioni } \Leftrightarrow \exists! P : \ m_P(F) = 2 \Leftrightarrow F = R + S, \text{ rette distinte, } R \cap S = \{P\}$$
$$\rho(A) = 1 \Leftrightarrow \exists \infty^2 \text{ soluzioni } \Leftrightarrow \exists R \text{ retta } : \ \forall P \in R \ m_P(F) = 2 \Leftrightarrow F = 2R$$

9.2 Cubica

Proposition 9.8. *Sia C una cubica (nota[3]),*

$$\exists P \in C \text{ flesso: } t_P(C) \nsubseteq C \Rightarrow C \text{ e' irriducibile}$$

[2] A si chiama discriminante della conica
[3] per la definizione di flesso vedi [11.5,pg.33]

Proof:

$$P \in C \text{ flesso} \Leftrightarrow \begin{cases} m_P(C) = 1 \\ I(t_P(C) \cap C, P) \geq 3 \end{cases}$$

$$I(t_P(C) \cap C, P) \geq 3 = \deg C \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm5.1,pg.140']}} \Rightarrow t_P(C) \subseteq C \vee t_P(C) \cap C = \{P\} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{per Hp } t_P(C) \not\subseteq C} t_P(C) \cap C = \{P\}$$

$$\begin{cases} m_P(C) = 1 \\ t_P(C) \cap C = \{P\} \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[9.2,pg.22]}} C \text{ irriducibile}$$

□

Proposition 9.9. *Sia C una cubica.*

C e' irriducibile $\Leftrightarrow$ si verifica una delle seguenti:

1. *C e' priva di punti singolari*
2. *P e' l'unico punto singolare di C e inoltre una delle seguenti condizioni e' verificata:*
   - 2.1 *P e' un nodo*
   - 2.2 *P e' una cuspide con retta tangente non contenuta in C*

Proof:

$\langle 1 \rangle$ Dim. $\Rightarrow$

Supponiamo che C abbiamo qualche punto singolare e dimostriamo la 2.

$\langle 1.1 \rangle$ C irriducibile $\Rightarrow$ l'unico punto singolare e' un P punto doppio

Procediamo per assurdo.

$$Q \in C \underbrace{\Rightarrow}_{\deg C = 3} 1 \leq m_Q(C) \leq 3$$

Si hanno quindi due casi:

Case: $\exists Q \in C : \ m_Q(C) = 3$

$$m_Q(C) = 3 = \deg C \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{[QUA,Oss5.3.6,pg.144']}} C \text{ e' un cono di vertice } Q \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,Oss5.7,pg.145']}} C \text{ e' riducibile}$$

assurdo.

Case: $\exists Q \in C \setminus \{P\} : \ m_Q(C) = 2$

Questo e' assurdo contro [QUA,Oss2.2.1,pg.168].

Se C e' irriducibile abbiamo solo due casi: P e' un nodo oppure P e' una cuspide.

Case: P cuspide

In questo caso esiste una sola tangente r per P.

Case: $r \subseteq C$

Allora,

$$r \Big/ C \Rightarrow C \text{ riducibile}$$

assurdo

$\langle 2 \rangle$ Dim. $\Leftarrow$

Case: 1.

Basta applicare la prop [9.1,pg.22].

Case: 2.

$2. \Rightarrow P$ e' l'unico punto singolare di C (2)

$2. \Rightarrow P$ e' un nodo o una cuspide con retta tg non $\subseteq C$ (2.1)

$2. \Rightarrow m_P(C) = 2$ (2.2)

Supponiamo per assurdo che C sia spezzata e come prima esaminiamo i vari casi.
CASE: $C = 3R$, R retta
In questo caso tutti gli infiniti[4] punti di C sono tripli. Assurdo contro (2).
CASE: $C = 2R + S$, con R, S rette distinte
Sia $P \in R$.

$$R \text{ e' una componente di molteplicita' } 2 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,oss5.3.2,pg.142']}} m_P(C) \geq 2$$

quindi tutti gli infiniti punti di R sono singolari. Assurdo contro (2)
CASE: $C = R + S + T$, con R, S, T rette distinte
Sia $\{A_1\} = R \cap S$, $\{A_2\} = S \cap T$
CASE: $A_1 = A_2$

$$\begin{cases} A_1 = A_2 \\ R, S, T \text{ distinte} \end{cases} \Rightarrow R \cap S \cap T = \{A_1\} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,oss5.3.2,pg.142']}} m_{A_1}(C) \geq 3$$

Questo e' assurdo contro $(2), (2.2)$, in quanto P e' l'unico punto singolare, ed ha $m_P(C) = 2$
CASE: $A_1 \neq A_2$

$$A_1 \in R \cap S \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,oss5.3.2,pg.142']}} m_{A_1}(C) \geq 2$$

$$A_2 \in S \cap T \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,oss5.3.2,pg.142']}} m_{A_2}(C) \geq 2$$

$$\Rightarrow C \text{ ha almeno due punti singolari}$$

assurdo contro (2).
CASE: $C = F + R$, con F conica irriducibile e R retta
Per [QUA,thm1.2,pg.158] si ha $F \cap R \neq 0$. Sia $P \in F \cap R$.
Supponiamo che P non sia un nodo, ovvero che sia una cuspide e sia r la tangente a C in P.

$$C = F + R \Rightarrow R \subseteq C, \;\; P \in R \Rightarrow I(R \cap C, P) = \infty \underbrace{\Rightarrow}_{\text{definizione}} R \text{ e' tangente } \underbrace{\Rightarrow}_{P \text{ cuspide}} R = r$$

$r = R \subseteq C$
quindi la tangente e' contenuta in C
$\langle 2.0.1 \rangle$ Q.E.D.
In conclusione gli unici casi possibili sono

2.1 e 2.2

□

Example 9.10. Vedi pg. 43,44 degli appunti gialli.

9.3 Quartiche

Definition 9.11. Una quartica e' una curva di ordine 4.

Per le quartiche irriducibili non abbiamo alcuna caratterizzazione.

[4] sono infiniti per [QUA,thm4.1,pg.129']

Proposition 9.12. *Sia C una quartica e sia $P \in C$ l'unico punto singolare di C, con $m_P(C) = 3$, allora*

$$C \text{ riducibile } \Leftrightarrow C \text{ ha per componente una retta tangente in } P$$

Corollario:

$$\text{Nessuna delle rette del cono tangente in } P \text{ divide } C \Leftrightarrow C \text{ e' irriducibile}$$

Proof: Basta applicare la proposizione [9.4,pg.23]. □

Example 9.13. Dimostriamo che $C = x^4 + y^4 - xy^2$ e' irriducibile.

$$\begin{cases} C^* = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + y^4 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - iy^2)(x^2 + iy^2) = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - \sqrt{iy})(x + \sqrt{iy})(x - i\sqrt{iy})(x + i\sqrt{iy}) = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow C^* \cap \{t = 0\} = \{\text{quattro punti di molteplicita' } 1\}$

Quindi non esistono punti singolari impropri.
Applicando il teorema [QUA,thm5.8,pg.146] si vede che $O = (0, 0)$ e' l'unico punti singolare proprio:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial x} = 4x^3 - y^2 = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial y} = (4y^2 - 2x)y = 0 \\ C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

Quindi l'unico punto singolare e' O (1).
Direttamente dall'equazione (vedi [QUA,prop5.3.3,pg.143]) si vede che O e' un punto triplo (2).
Per la [6.1,pg.13], il cono tangente ad O e' $xy^2 = 0$. Quindi le rette tangenti sono $x = 0, y = 0$, tuttavia

$$x \not\subset C, \quad y \not\subset C$$

quindi non sono contenute in C.
Allora per [9.12,pg.26] C e' irriducibile.

Proposition 9.14. *Sia C una quartica e siano $P_1, P_2, P_3 \in C$ gli unici punti singolari distinti, con $m_{P_i}(C) = 2 \ \forall i$, allora*

C riducibile $\Rightarrow$ si verifica uno dei seguenti casi:

1. *C si spezza in due coniche irridicibili*
1. $\Rightarrow$ *i punti P_1, P_2, P_3 sono una cuspide e due nodi*
2. *C ha per componente una retta R, e si ha:*
   2.1 *$R = P_iP_j$ con $i \neq j$*

   oppure
   2.2 $\exists i : \ R \in \mathrm{Ctg}_{P_i}(C)$

Corollario:

$$\begin{cases} P_1, P_2, P_3 \text{ non sono cuspide-nodo-nodo} \\ P_iP_j \nsubseteq C \ \forall i \neq j \\ \left(\forall \text{ retta } R \subseteq \mathrm{Ctg}_{P_i}(C) \ \ R \nsubseteq C\right) \ \forall i = 1, 2, 3 \end{cases} \Rightarrow C \text{ e' irriducibile}$$

Proof: Per ipotesi:

gli unici punti singolari di C sono P_1, P_2, P_3 e inoltre sono doppi (1)

CASE: C si spezza in C_1, C_2 coniche irriducibili

(!)ATTENZIONE(!) dimostrazione incompleta

Si deve avere $C_1 \neq C_2$, infatti

$C_1 = C_2 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,Oss5.3.2,pg.142']}}$ tutti gli infiniti punti di $C_1 = C_2$ sono singolari. assurdo contro (1)

inoltre,

(1), $C_1 \neq C_2 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,Oss5.3.2,pg.142']}} C_1 \cap C_2 = \{P_1, P_2, P_3\} \Rightarrow$

$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Bezout [QUA,thm1.6,pg.162]}} I(C_1 \cap C_2, P_1) + I(C_1 \cap C_2, P_2) + I(C_1 \cap C_2, P_3) = 4 \Rightarrow \exists i : \ I(C_1 \cap C_2, P_i) = 2$

Si dimostra che

$I(C_1 \cap C_2, P_i) = 2 \Rightarrow t_1(P_i) = t_2(P_i)$, con $t_j(P)$ tangente di C_j in $P \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,exemp5.15,pg.151]}} \text{Ctg}_{P_i}(C) = (t_1(P_i))^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P_i$ e' una cuspide

Si dimostra anche che $\{P_1, P_2, P_3\} \setminus \{P_i\}$ sono nodi.

CASE: C ha per componente una retta R

Per [QUA,Oss5.3.2,pg.142'], C si deve spezzare. Supponiamo che $R \neq P_i P_j \ \forall i \neq j$, allora

$C = R + G$, (1), $R \cap G \underbrace{\neq}_{\text{[QUA,thm1.2,pg.158]}} \emptyset \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,Oss5.3.2,pg.142']}} \exists i : \ P_i \in R \cap G$

Infine,

$P_i \in R \subseteq C \Rightarrow I(R \cap C, P_i) = \infty \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,oss5.9.0,pg.147]}} R$ e' tangente a C in $P_i \Leftrightarrow R \subseteq \text{Ctg}_{P_i}(C)$

□

10 Curve razionali

Theorem 10.1. *Se C e' irriducibile e $\delta(C) = 0$ allora C e' razionale.*
Per trovare le equazioni parametriche si utilizza questo metodo:

1. *Siano $P_1, \ldots, P_h$ i punti singolari di C*
2. *Siano $Q_1, \ldots, Q_{n-3} \in C$ punti distinti e distinti dai punti $\{P_i\}$, dove $n = \deg C$*
3. *Sia Λ_d il fascio di sub-aggiunte di C, di ordine $n-2$, passanti per $Q_1, \ldots, Q_{n-3}$.*
   Tale fascio puo' essere trovato considerando due qualsiasi di queste subaggiunte G, H (nota[5]):

$$\lambda G + \mu H = 0$$

Che per $\mu \neq 0$ ([6]), e' equivalente a

$$\lambda G + H = 0$$

Quindi, al variare di λ otteniamo una subaggiunta D_λ.

[5] in alcuni casi G, H si possono scegliere spezzate per agevolare i calcoli

[6] $\mu = 0$ rappresenta un'eccezione

4. $D_\lambda \cap C = \{P_1, \dots, P_h\} \cup \{Q_1, \dots, Q_{n-3}\} \cup \{R_\lambda\}$
   Scrivendo le coordinate di R_λ (dipendenti da λ), si ottengono le equazioni parametriche di C

Proof: Vedi [QUA,thm3.4,pg.173]. □

Proposition 10.2. *Sia C curva di ordine n.*
Se C e' irriducibile con un punto P di molteplicita' $n-1$, allora la procedura [10.1,pg.28] puo' essere cosi' semplificata:

1. *Sia r_λ il fascio di rette passanti per P (al variare di λ)*
2. $r_\lambda \cap C = \{P, R_\lambda\}$
   Le coordinate di R_λ danno le equazioni parametriche di C.

Proof: C e' razionale per [QUA,Cor3.6,pg.175].
Applichiamo il [10.1,pg.28]: sia D una curva subaggiunta di ordine $n-2$.
$P \in C,\ m_P(C) = n-1 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{def di subaggiunta}} m_P(D) \geq n-2 \underbrace{\Rightarrow}_{D \text{ ha ordine } n-2} m_P(D) = n-2 = \deg D \Leftrightarrow$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{[QUA,oss5.3.6,pg.144']}}$ D e' un cono in P $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,oss5.7,pg.145']}}$ D si spezza in $n-2$ rette $r_1, \dots, r_{n-2}$ passanti per P (1)

Supponiamo che D passi per $Q_1, \dots, Q_{n-3}$, allora
$Q_i, P \in D \underbrace{\Rightarrow}_{D \text{ cono in P}} Q_iP \subseteq D \underbrace{\Rightarrow}_{(1)} \exists j_i :\ r_{j_i} = Q_iP$ (2)

$Q_iP \neq Q_jP\ \ \forall i \neq j$ (3) infatti,

$Q_i, Q_j, P \in Q_iP \cap C \Rightarrow I(C \cap Q_iP, Q_i) + I(C \cap Q_iP, Q_j) + I(C \cap Q_iP, P) \underbrace{\geq}_{m_P(C)=n-1} 1+1+n-1 = n+1 \Rightarrow$

$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm5.1,pg.140']}}$ $Q_iP \subseteq C \Rightarrow C$ e' spezzata. Assurdo

$(1),(2),(3) \Rightarrow \{r_1, \dots, r_{n-2}\} = \{Q_1P, Q_2P, \dots, Q_{n-3}P\} \cup \{r_D\}$ (4)

$C \cap Q_1P = \{Q_1, P\}$, (5) infatti,

se per assurdo $\exists Q \in C \cap Q_1P \setminus \{Q_1, P\}$, procedendo come in (4), C sarebbe spezzata. asssurdo.

Quindi qualsiasi subaggiunta D e' spezzata in $n-3$ rette fisse e in una r_D variabile. Allora,

$$C \cap D = C \cap Q_1P \cup C \cap Q_2P \cup \dots \cup C \cap Q_{n-3}P \cup C \cap r_D \underbrace{=}_{(5)} \{P, Q_1, \dots, Q_{n-3}\} \cup \{R_D\}$$

Quindi al variare delle subaggiunte D del fascio, l'unico punto che varia e' $\{R_D\} = C \cap r_D$. Le sue coordinate danno l'equazione parametrica di C.
Sia r_λ il fascio di rette passanti per P.

$$m_P(C) = n-1,\ \deg C = n,\ \ C \text{ irrid.} \ \Rightarrow r_\lambda \cap C = \{P, R_\lambda\},\ R_\lambda \neq P$$

Al variare di λ, R_λ puo' essere $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-3}$ oppure R_D, per qualche D.
In definitiva, per ottenere R_D, basta considerare $r_\lambda \cap C$. □

Example 10.3. E' possibile applicare la [10.2,pg.29] all'esempio [9.13,pg.27].

Proposition 10.4. *Per scrivere le equazioni parametriche di una quartica C nel caso in cui*

$$|\{P \in C \mid P \text{ singolare}\}| = |\{P \in C \mid m_P(C) = 2\}| = 3$$

possiamo adottare la seguente procedura:

1. *Verifica l'irriducibilita' di C provando ad applicare [9.14,pg.27].*
   Se non e' irriducibile o se non e' possibile provare la sua irriducibilita', fermati. Non sappiamo se e' razionale.

2. *Siano P_1, P_2, P_3 i punti doppi distinti. Considera il fascio di coniche passanti per P_1, P_2, P_3,*

$$F_\lambda = G + \lambda H$$

   per costruire tale fascio, come coniche base G, H scegli:

   $H = P_1P_2 \cdot P_1P_3$
   $G = P_2P_3 \cdot t(P_1)$, *dove $t(P_1)$ e' una tangente qualsiasi di C in P_1, ovvero $t(P_1) \subseteq \mathrm{Ctg}_{P_1}(C)$*

3. $F_\lambda \cap C = \{P_1, P_2, P_3, R_\lambda\}$.
   Le coordinate di R_λ danno le equazioni parametriche di C.

Proof: La procedura si basa sul [10.1,pg.28], tuttavia, al posto di considerare $\{Q_1, \ldots, Q_{n-3}\} \underbrace{=}_{n=4} \{Q_1\}$, e imporre il passaggio del fascio da P_1, P_2, P_3, Q_1, stiamo imponendo la condizione:

$$\begin{cases} P_1, P_2, P_3 \in F_\lambda \\ \mathrm{Ctg}_{P_1}(F_\lambda) = t(P_1) \end{cases} \qquad \forall \lambda \in K \quad (*)$$

Si puo' dimostrare la condizione $(*)$ conduce comunque ad avere:

$$F_\lambda \cap C = \{P_1, P_2, P_3, R_\lambda\}$$

Per imporre $(*)$, basta scegliere come conica base del fascio $(P_2P_3)t(P_1)$, ad esempio $G = (P_2P_3)t(P_1)$ (vedi Geometria I, [GI,4,pg.33], Fascio di coniche, Dati 4 punti, caso $A = B \neq C \neq D$), □

11 Polare

Proposition 11.1. *Sia C una curva di ordine n, e $A \in \mathbb{P}^2$*

$$\mathcal{P}^r_A(C) \text{ esiste } \Leftrightarrow m_A(C) \leq n - r$$

Proof:
⟨1⟩ Dim. ⇒

$$m_A(C) > n - r \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm5.8,pg.147]}} \text{le derivate di ordine } m_A(C) - 1 \text{ sono tutte nulle } \Rightarrow$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,prop5.8.1,pg.146']}} \text{le derivate di ordine } n - r \text{ sono tutte nulle } \Rightarrow \mathcal{P}^r_A(C) \text{ non esiste}$$

⟨2⟩ Dim. ⇐

$$m_A(C) \leq n - r \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm5.8,pg.147]}} \text{qualche derivata di ordine } m_A(C) \text{ non si annulla} \quad (1)$$

Se per assurdo si annullassero tutte le derivate di ordine $n - r$ si avrebbe:

$$\begin{cases} m_A(C) \leq n - r \\ \text{tutte le derivate } n - r\text{-esime nulle} \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,prop5.8.1,pg.146']}} \text{tutte derivate le derivate } m_A(C)\text{-esime nulle}$$

assurdo contro (1).
Quindi l'equazione di $\mathcal{P}^r_A(C)$ esiste.

□

Proposition 11.2. *Sia C una conica. La sua unica polare e' la retta polare $\mathcal{P}_A^1(C) = \mathcal{P}_A^{n-1}(C)$. Distinguiamo i seguenti casi:*

CASE: *C irriducibile*
$\mathcal{P}_A^1(C)$ *e' la retta polare che conoscevamo in Geometria I ([GI,3.4,pg.21]) e*

$$A \in C \Rightarrow \mathcal{P}_A^1(C) = t_A(C)$$

dove $t_A(C)$ e' la tangente di C in A.

CASE: *C riducibile*
CASE: *$C = 2R$, R retta*

$$A \in C \Rightarrow \nexists\, \mathcal{P}_A^1(C)$$

inoltre

$$A \notin C \Rightarrow \mathcal{P}_A^1(C) = R$$

CASE: *$C = R + S$, R, S rette distinte*
Sia $\{P\} = R \cap S$, allora

$$\nexists\ \mathcal{P}_P^1(C)$$

e inoltre,

1. $P \in \mathcal{P}_A^1(C)\ \ \forall A \neq P$
2. $A \in R \Rightarrow \mathcal{P}_A^1(C) = R$
   $A \in S \Rightarrow \mathcal{P}_A^1(C) = S$

Proof: Sia F l'equazione di C.
CASE: C irriducibile
L'equazione di $\mathcal{P}_A^1(C)$ e' (vedi [QUA,oss4.1.1,pg.178]):

$$\frac{\partial F}{\partial x}a_1 + \frac{\partial F}{\partial y}a_2\frac{\partial F}{\partial t}a_3 = 0 \quad (1)$$

quindi utilizzando la [9.7,pg.24], si ha la tesi.
CASE: C riducibile
CASE: $C = 2R$, R retta
CASE: $A \in C$

$$A \in C = 2R \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,oss5.3.2,pg.142']}} m_A(C) = 2 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,oss4.2,pg.179']}} \mathcal{P}_A^1(C) \text{ non esiste}$$

CASE: $A \notin C$

$$C = 2R \Rightarrow F = (ax + by + ct)^2 = R^2 \quad (2)$$
$$(1) \underbrace{\Leftrightarrow}_{(2)} 2R(aa_1 + ba_2 + ca_3) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{A \notin R \Leftrightarrow (aa_1 + ba_2 + ca_3) \neq 0} R = 0$$
$$\Rightarrow \mathcal{P}_A^1(C) = R$$

CASE: $C = R + S$, R, S rette distinte

$$P \in R \cap S,\ C = R + S \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,oss5.3.2,pg.142']}} m_P(C) = 2 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,oss4.2,pg.179']}} \mathcal{P}_A^1(C) \text{ non esiste}$$

Sia $\{P\} = R \cap S$ e $A \neq P$

$$m_P(C) = 2 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm5.8,pg.147], (1)}} P \in \mathcal{P}_A^1(C)$$

Infine,

$$A \in R \setminus \{P\} \Rightarrow m_A(C) = 1 \quad (3)$$

$$(3),\ C = R + S \Rightarrow R = t_A(C) \underbrace{=}_{\text{[QUA,oss4.2,pg.178']}} \mathcal{P}_A^1(C)$$

□

Proposition 11.3. *(questo teorema e' una versione piu' debole di [QUA,thm4.8,pg.181]). Sia C una curva irriducibile, con $n \geq 1$, e sia $A \in \mathbb{P}^2$ un punto fissato, allora*

$$m_A(C) \leq n-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\{t \text{ retta } | P \in C,\ m_P(C) = 1,\ t = t_P(C),\ A \in t\}| \leq n(n-1) - \left|\{P \in C \mid m_P(C) > 1\}\right| \leq n(n-1)$$

In altre parole, il numero di rette tangenti in punti semplici di C, che passano per A, e' $\leq n(n-1)$. Tale numero viene chiamato la classe di C. *Nota* [7]

Proof: Si ha,

$$m_A(C) \leq n-1 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[11.1,pg.30]}} \mathcal{P}_A^1(C) \text{ esiste} \quad (1)$$

$$C \text{ irriducibile} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Bezout [QUA,thm1.2,pg.158]}} |C \cap \mathcal{P}_A^1(C)| \leq \deg C \deg \mathcal{P}_A^1(C) = n(n-1) \quad (2)$$

$$(1) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm4.5,pg.179']}} C \cap \mathcal{P}_A^1(C) = \{P \in C \mid m_P(C) > 1\} \cup \{P \in C \mid m_P(C) = 1,\ t_P(C) \ni A\} \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow \{t \text{ retta } | P \in C,\ m_P(C) = 1,\ t = t_P(C),\ A \in t_P(C)\} = \left\{AP \text{ retta } | P \in C \cap \mathcal{P}_A^1(C) \setminus \{P \in C \mid m_P(C) > 1\}\right\}$$

$$\Rightarrow |\{t \text{ retta } | t \subseteq \mathrm{Ctg}_P(C),\ m_P(C) = 1,\ A \in t\}| = |C \cap \mathcal{P}_A^1(C) \setminus \{P \in C \mid m_P(C) > 1\}| =$$

$$\underbrace{=}_{(3)} |C \cap \mathcal{P}_A^1(C)| - |\{P \in C \mid m_P(C) > 1\}| \underbrace{\leq}_{(2)} n(n-1) - |\{P \in C \mid m_P(C) > 1\}|$$

□

Proposition 11.4. *Sia C una curva, $\deg C = n \geq 3$ e sia $P \in C, m = m_P(C)$, si ha*

1. $m \geq 3 \Rightarrow \mathcal{P}_P^{n-2}(C)$ *non esiste*
2. $m = 2 \Rightarrow \mathcal{P}_P^{n-2}(C) = \mathrm{Ctg}_P(C)$
3. $m = 1 \Rightarrow$
   - 3.1 $\Rightarrow$ $P \in \mathcal{P}_P^{n-2}(C)$
   - 3.2 $\Rightarrow$ $m_P\left(\mathcal{P}_P^{n-2}(C)\right) = 1$
   - 3.3 $\Rightarrow$ $t_P\left(\mathcal{P}_P^{n-2}(C)\right) = t_P(C)$
   - 3.4 $\Rightarrow$ $\left(\mathcal{P}_P^{n-2}(C)\right.$ *e' spezzata in* $\left.R_1 + R_2 \Rightarrow R_i = t_P(C),\ R_j \not\ni P\right)$

Proof:

$\langle 1 \rangle$ Dim .1

---

[7] $m_P(C) = 1 \Rightarrow \deg \mathrm{Ctg}_P(C) = 1 \Leftrightarrow$ il cono tangente e' una sola retta $\Leftrightarrow \mathrm{Ctg}_P(C) = t_P(C)$

Per la prop [11.1,pg.30]

⟨2⟩ Dim. 2.

Per la [QUA,oss4.2,pg.178']

⟨3⟩ Dim. 3.1

Per la [QUA,oss4.2.2,pg.178]

⟨4⟩ Dim 3.2

L'equazione di $\mathcal{P}_P^{n-2}(C)$ e'

$$G = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F(P)}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j = 0 \quad (1)$$

Calcoliamo le derivate di G per applicare il teorema [QUA,thm5.8,pg.147]:

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 F(P)}{\partial x_1 \partial x_1} x_1^2 + 2\frac{\partial^2 F(P)}{\partial x_1 \partial x_2} x_1 x_2 + 2\frac{\partial^2 F(P)}{\partial x_1 \partial x_3} x_1 x_3\right) = 2\frac{\partial^2 F(P)}{\partial x_1 \partial x_1} x_1 + 2\frac{\partial^2 F(P)}{\partial x_1 \partial x_2} x_2 + 2\frac{\partial^2 F(P)}{\partial x_1 \partial x_3} x_3$$

$$\frac{\partial G(P)}{\partial x_1} = 2\frac{\partial^2 F(P)}{\partial x_1 \partial x_1} p_1 + 2\frac{\partial^2 F(P)}{\partial x_1 \partial x_2} p_2 + 2\frac{\partial^2 F(P)}{\partial x_1 \partial x_3} p_3 \underbrace{=}_{\text{[QUA,ThmDiEulero,pg.116]}} 2(n-1)\frac{\partial F(P)}{\partial x_1}$$

analogamente si ha: $\frac{\partial G(P)}{\partial x_i} = 2(n-1)\frac{\partial F(P)}{\partial x_i} \quad \forall i = 1,2,3 \quad (2)$

Quindi,

$$m_P(C) \underbrace{=}_{\text{per Hp}} 1 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm5.8,pg.147]}} \exists i : \frac{\partial F(P)}{\partial x_i} \neq 0 \underbrace{\Rightarrow}_{(2)} \frac{\partial G(P)}{\partial x_i} \neq 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm5.8,pg.147]}} m_P\left(\mathcal{P}_P^{n-2}(C)\right) = 1$$

⟨5⟩ Dim 3.3

Per la 3.2, il cono tangente a P in $\mathcal{P}_P^{n-2}(C)$ e' la retta di equazione:

$$\sum_i \frac{\partial G(P)}{\partial x_i} x_i = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{(2)} \sum_i \frac{\partial F(P)}{\partial x_i} x_i = 0$$

ovvero e' la stessa equazione del cono tangente $\mathrm{Ctg}_P(C) = t_P(C)$

⟨6⟩ Dim 3.4

Supponiamo $\mathcal{P}_P^{n-2}(C)$ spezzata. Poiche' ha grado 2 deve essere spezzata in due rette R, S.

Sia R la retta che passa per P, allora

$$R \in P,\ R \subseteq \mathcal{P}_P^{n-2}(C) \Rightarrow I(R \cap \mathcal{P}_P^{n-2}(C), P) = \infty \Rightarrow R \text{ e' tangente a } \mathcal{P}_P^{n-2}(C) \text{ in } P \quad (3)$$

$$m_P\left(\mathcal{P}_P^{n-2}(C)\right) \underbrace{=}_{3.2} 1 \Rightarrow \text{ la tangente e' unica } \Rightarrow R = t_P\left(\mathcal{P}_P^{n-2}(C)\right) \underbrace{=}_{3.3} t_P(C)$$

Se per assurdo anche $S \ni P$, allora

$$P \in R \cap S \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,prop5.3.3,pg.52]}} m_P\left(\mathcal{P}_P^{n-2}(C)\right) \geq 2$$

□

11.1 Flessi

Definition 11.5. Sia C una curva.

$$P \in C \text{ e' un flesso} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} P \text{ e' semplice},\ I(t_P(C) \cap C, P) \geq 3$$

$$P \in C \text{ e' un flesso ordinario} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} P \text{ e' semplice},\ I(t_P(C) \cap C, P) = 3$$

Proposition 11.6.

1. *Per una retta tutti i suoi punti sono flessi*
2. *Per una curva spezzata in rette, tutti i suoi punti sono flessi*
3. *Per una conica irriducibile, non esistono flessi*

Proof:
⟨1⟩
Infatti,

$$t_P(R) = R \Leftrightarrow I(t_P(R) \cap R, P) = \infty$$

⟨2⟩
Dalla 1.
⟨3⟩
Infatti,

$$C \text{ irriducibile} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm5.1,pg.140']}} I(t_P(C) \cap C, P) \leq \deg C = 2 \Rightarrow P \text{ non e' un flesso}$$

□

Theorem 11.7. *Sia C una curva con $\deg C \geq 3$ e $P \in C$ punto semplice, allora*

$$P \text{ e' un flesso } \Leftrightarrow \mathcal{P}_P^{n-2}(C) \text{ e' spezzata}$$

Proof: Sia F l'equazione di C,
⟨1⟩ Dim. $\Rightarrow$

P semplice $\Rightarrow$ P ha una sola tangente $R = t_P(C)$
P flesso $\Leftrightarrow I(R \cap C, P) \geq 3 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{[QUA,Oss5.1.2,pg.140']}}$
$\Leftrightarrow$ la molteplicita' di $\mu = 0$ per $F(P + \mu B) = \alpha_0(B) + \alpha_1(B)\mu + \cdots + \alpha_m(B)\mu^m \in K[\mu]$ e' ≥ 3, $\forall B \in R \setminus \{P\}$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha_0(B) = \alpha_1(B) = \alpha_2(B) = 0 \ \forall B \in R \setminus \{P\} \Rightarrow \alpha_2(B) \underbrace{=}_{\text{[QUA,prop5.8.2,pg.146']}} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F(P)}{\partial x_i \partial x_j} b_i b_j = 0 \ \forall B \in R \setminus \{P\}$ $\Leftrightarrow$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{def. di equazione polare}} R \setminus \{P\} \subseteq \mathcal{P}_P^{n-2}(C) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{[QUA,Cor5.1.3,pg.140']}} \Leftrightarrow R \subseteq \mathcal{P}_P^{n-2}(C) \Rightarrow \mathcal{P}_P^{n-2}(C) \text{ e' spezzata} \quad (1)$$

⟨2⟩ Dim. $\Leftarrow$

$$m_P(C) = 1,\ \mathcal{P}_P^{n-2}(C) \text{ spezzata} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[11.4,pg.32],3.4}} R = t_P(C) \subseteq \mathcal{P}_P^{n-2}(C) \underbrace{\Leftrightarrow}_{(1)} \alpha_2(B) = 0 \ \forall B \in R \setminus \{P\}$$

$R = t_P(C)$, $m_P(C) = 1 \Rightarrow I(R \cap C, P) \geq 2 \Rightarrow \alpha_0(B) = \alpha_1(B) = 0 \ \forall B \in R \setminus \{P\}$
$\alpha_0(B) = \alpha_1(B) = \alpha_3(B) = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,prop5.8.2,pg.146']}} I(R \cap C, P) \geq 3 \Leftrightarrow$ P e' un flesso

□

Proposition 11.8. *Sia H l'Hessiana della curva C, con $\deg C \geq 3$, allora*

1. *$H(P)$ e' il discriminante della conica polare in P*
2. *$H \cap C = \{P \in C \mid m_P(C) > 1\} \cup \{P \in C \mid P \text{ flesso}\}$*

Questa proposizione fornisce un metodo costruittivo per trovare i flessi di una curva:

1. *Trova tutti i punti singolari di C utilizzando il [QUA,thm5.8,pg.147]*
2. *Calcola l'equazione H dell'Hessiana*
3. *Calcola i punti del sistema $H \cap C$*
4. *Scarta da $H \cap C$ i punti singolari trovati al passo* 1.

Proof:
$\langle 1 \rangle$
La conica polare $\mathcal{P}_P^{n-2}(C)$ ha equazione :

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 F(P)}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j = 0 \quad (1)$$

il discriminante della (1) e' il determinante della matrice $A = (\frac{\partial^2 F(P)}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j=1,2,3}$ che e' proprio l'Hessiana.
$\langle 2 \rangle$
$\langle 2.1 \rangle$ $\supseteq$
Sia $P \in C$: $m_P(C) > 1$, allora
CASE: $m_P(C) \geq 3$

$$m_P(C) \geq 3 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm5.8,pg.147]}} \frac{\partial^2 F(P)}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \ \forall i,j \Rightarrow H(P) = 0 \Rightarrow P \in H$$

CASE: $m_P(C) = 2$

$$m_P(C) = 2 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,oss4.2,pg.178']}} \mathcal{P}_P^{n-2}(C) = \mathrm{Ctg}_P(C) \Rightarrow$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,oss5.7,pg.145']}} \mathcal{P}_P^{n-2}(C) \text{ e' spezzata } \underbrace{\Rightarrow}_{\text{1., [9.7,pg.24]}} A = H(P) = 0 \Rightarrow P \in H$$

$\langle 2.2 \rangle$ $\subseteq$
Sia $P \in H \cap C$.
CASE: $m_P(C) > 1$
allora $P \in \{P \in C \mid m_P(C) > 1\}$
$\langle 2.2.1 \rangle$ $m_P(C) = 1$

$$P \in H \Rightarrow A = H(P) = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{1., [9.7,pg.24]}} \mathcal{P}_P^{n-2}(C) \text{ e' spezzata } (*)$$

$$m_P(C) = 1, \ (*) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[11.7,pg.34]}} P \text{ e' un flesso di } C$$

□

11.1.1 Cubiche

Proposition 11.9. *Sia C una cubica irriducibile, allora*

1. *C ha un nodo $\Rightarrow$ C ha solo 3 flessi e questi flessi sono allineati*
2. *C ha una cuspide $\Rightarrow$ C ha solo 1 flesso*
3. *C e' non singolare $\Rightarrow$ C ha solo 9 flessi*

Nota[8].

Proof: Segue dalla terza formula di Plucker ([QUA,oss5.7,pg.183]). Qui di seguito diamo una dimostrazione alternativa.
⟨1⟩

C irriducibile con un nodo $\Rightarrow C$ e' proiettivamente equivalente a $xyt = x^3 + y^3$

Applicando il metodo [11.8,pg.34], si vede che $xyt = x^3 + y^3$ ha solo tre flessi, che sono soluzione del sistema

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{y \neq 0} \begin{cases} \left(\frac{x}{y}\right)^3 + 1 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(-\frac{x}{y}\right)^3 - 1 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{x}{y} = 1, \omega, \omega^2 \text{ radici terze dell'unita' }, \ t = 0$$

Tutti questi punti stanno nella retta $t = 0$.

Poiche' la molteplicita' di intersezione $I(R \cap C, P)$ e l'allineamento dei tre punti sono proprieta' preservate dalle proiettivita', si ha la tesi.

⟨2⟩

Si procede analogamente, considerando

$$tx^2 = y^3$$

⟨3⟩

Si procede analogamente, considerando

$$y^2 = x(x-1)(x-k), \quad k \in K \setminus \{0, 1\}$$

Per i calcoli vedi [QUA,Oss6.6.1,pg.187]

□

Proposition 11.10. *Sia C una cubica irriducibile e $P \in C$ un punto di flesso, allora*

$$\{t \mid t \text{ tangente di } C,\ P \in t\} = \{t_P(C)\} \cup \{PB \mid B \in S \cap C,\ m_B(C) = 1\}$$

dove la conica polare in P e' spezzata in $\mathcal{P}^1_P(C) = R + S$, con $R = t_P(C)$, $P \notin S$.
Nota: questa proposizione fornisce un metodo costruttivo per trovare le tangenti uscenti da un punto di flesso P di una cubica irriducibile:

1. *Verifica che P e' un flesso e che C e' irriducibile*
2. *Calcola l'equazione della tangente $R = t_P(C)$ (nota[9])*
3. *Calcola l'equazione della conica polare $\mathcal{P}^1_P(C)$*
4. *Se riesci a individuare le componenti R, S, considera $T = S$, altrimenti considera $T = \mathcal{P}^1_P(C)$. (nota[10])*
5. *Interseca $T \cap C$ ed escludi P ed i punti singolari.*
6. *Per ogni punto B cosi' ottenuto, calcola la retta PB.*
7. *$\{R\} \cup \{PB \mid B$ punto ottenuto prima$\}$ sono le tangenti cercate.*

[8] Se C e' irriducibile, puo' avere al massimo un punto doppio. Quindi questo puo' essere o un nodo o una cuspide ordinaria

[9] Se P e' un punto fondamentale, puoi utilizzare il thm [6.1,pg.13].

[10] Si puo' ricavare S dividendo $\mathcal{P}^1_P(C)$ con R

Proof:
P flesso $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[11.7,pg.34]}}$ $\mathcal{P}_P^{n-2}(C) = \mathcal{P}_P^1(C)$ e' spezzata (0)

P flesso $\Rightarrow m_P(C) = 1$, (0) $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[11.4,pg.32]}}$ $\mathcal{P}_P^1(C)$ e' spezzata in due rette $R+S$, con $P \in R = t_P(C)$, $P \notin S$ (1)

P flesso $\Rightarrow I(t_P(C) \cap C, P) = 3 = \deg C \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm5.1,pg.140']}} t_P(C) \cap C = \{P\}$ (1.1)

$m_P(C) = 1 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm4.5,pg.179']}} \mathcal{P}_P^1(C) \cap C = \{B \in C \mid m_B(C) > 1\} \cup \{B \in C \mid m_B(C) = 1,\ P \in t_B(C)\}$ (2)

$\mathcal{P}_P^1(C) \cap C \underbrace{=}_{(1)} (R \cup S) \cap C = R \cap C \cup S \cap C \underbrace{=}_{(1)} (t_P(C) \cap C) \cup (S \cap C) \underbrace{=}_{(1.1)} \{P\} \cup (S \cap C)$ (2.1)

t tangente di C, $P \in t \Leftrightarrow t = t_B(C)$ con B semplice, infatti: (3)

$m_B(C) \geq 2$, $t = t_B(C) \Rightarrow I(t \cap C, B) > m_B(C) \geq 2 \underbrace{\Rightarrow}_{P \in t} I(t \cap C, B) + I(t \cap C, P) > 3 \Rightarrow t \subseteq C$ assurdo, C e' irrid.

t tangente di C, $P \in t \underbrace{\Leftrightarrow}_{(3)} t = t_B(C)$, $B \in C$, $m_B(C) = 1$, $P \in t \underbrace{\Leftrightarrow}_{(2)} t = t_B(C)$, $B \in \mathcal{P}_P^1(C) \cap C \cap \{B \mid m_B(C) = 1\}$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{(2.1)} t = t_B(C)$, $B \in (\{P\} \cup (S \cap C)) \cap \{B \in C \mid m_B(C) = 1\} \underbrace{=}_{m_P(C)=1} \{P\} \cup (S \cap \{B \in C \mid m_B(C) = 1\}) \Leftrightarrow$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{P \in t} t = t_P(C) = R \vee t = PB,\ B \in S \cap \{B \in C \mid m_B(C) = 1\}$

□

Proposition 11.11. *Sia C una cubica irriducibile e singolare. Sia $P \in C$ un suo flesso, allora*

$$1 \leq |\{t \mid t \text{ tangente di } C,\ P \in t\}| \leq 2$$

Se C ha una cuspide, allora

$$|\{t \mid t \text{ tangente di } C,\ P \in t\}| = 2$$

Proof: Nota: in questa dimostrazione faremo ricorso al Gruppo di una Cubica (vedi [12.1,pg.42]).

⟨1⟩ Dim che $|\{t \mid t \text{ tangente di } C,\ P \in t\}| < 4$

C singolare $\Leftrightarrow \{B \in C \mid m_B(C) > 1\} \neq \emptyset$ (0)

$|\{t \mid t \text{ tangente di C}, P \in t\}| \underbrace{=}_{\text{[11.10,pg.36]}} |\{t_P(C)\} \cup \{PB \mid B \in S \cap C,\ m_B(C) = 1\}| =$

$= 1 + |\{PB \mid B \in S \cap C,\ m_B(C) = 1\}|$ (1)

S retta, C cubica $\Rightarrow |S \cap C| \leq 3$ (2)

Per quanto visto nella dim. di [11.10,pg.36], si ha:

$$\{P\}\cup(S\cap C) \underbrace{=}_{[11.10,\text{pg.}36]} \{B\in C \mid m_B(C)>1\}\cup\{B\in C \mid m_B(C)=1,\ P\in t_B(C)\} \quad (3.0)$$

$$\Rightarrow \{B\in C \mid m_B(C)>1\}\subseteq\{P\}\cup(S\cap C) \underbrace{\Rightarrow}_{m_P(C)=1} \{B\in C \mid m_B(C)>1\}\subseteq S\cap C \quad (3.1)$$

$$(3.1),\ (0)\Rightarrow \exists B\in S\cap C:\ m_B(C)>1 \quad (3)$$

$$C \text{ cubica irriducibile, } (0) \underbrace{\Rightarrow}_{[\text{QUA,Oss2.2.1,pg.168}]} \exists!\ B\in C:\ m_B(C)=2 \underbrace{\Rightarrow}_{(3)} \exists!\ B\in S\cap C:\ m_B(C)>1 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{(2),(3.1)} S\cap C=\{B,A_1,A_2\},\ \text{con } m_{A_i}(C)=1,\ m_B(C)=2 \quad (3.1)$$

$$(1),(2),(3),(3.1)\Rightarrow |\{t \mid t \text{ tangente di C, } P\in t\}|\leq 3$$

Nel caso in cui A_1, A_2, B coincidono, ovvero non esistono punti semplici in $S\cap C$, per la (1), si ha

$$|\{t \mid t \text{ tangente di } C,\ P\in t\}|=1$$

Supponiamo adesso che $B\notin\{A_1,A_2\}$, ovvero esistono punti semplici in $S\cap C$, allora per quanto visto nella dim. [11.10,pg.36] si ha:

$$\{A_1,A_2\}=\{B\in S\cap C \mid m_B(C)=1\} \underbrace{=}_{[11.10,\text{pg.}36]} \{B\in S\cap C \mid m_B(C)=1,\ t_B(C)\ni P\} \quad (4)$$

Per imporre la legge di gruppo su C^* scegliamo $O=P_0=P$.

$$(4) \underbrace{\Leftrightarrow}_{[12.14,\text{pg.}47]} 2A_i=O\ \forall i=1,2$$

$$2(A_1+A_2)=2A_1+2A_2=O+O=O \underbrace{\Leftrightarrow}_{[12.14,\text{pg.}47]} A_1+A_2\in\{B\in C \mid t_B(C)\ni P\} \underbrace{=}_{(3.0)} \{P,A_1,A_2\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1+A_2=P=O\vee A_1+A_2=A_1\vee A_1+A_2=A_2$$

Supponiamo per assurdo che $A_1\neq A_2$, allora

Case: $A_1+A_2=O$

$$A_1+A_2=O\Rightarrow A_1=-A_2 \underbrace{=}_{2A_2=O} A_2\Rightarrow A_1=A_2$$

assurdo

Case: $A_1+A_2=A_1$

$$A_1+A_2=A_1\Rightarrow A_2=O=P$$

$P=A_2\in S\Rightarrow P\in S$ assurdo, in quanto S e' la componente di $\mathcal{P}^1_P(C)$ tale che $P\notin S$

Case: $A_1+A_2=A_2$

come prima.

Quindi deve necessariamente essere $A_1=A_2$, e allora

$$\{B\in S\cap C \mid m_B(C)=1\} \underbrace{=}_{(3.1)} \{A_1,A_2\}=\{A_1\} \underbrace{\Rightarrow}_{(1)} |\{t \mid t \text{ tangente di } C,\ P\in t\}|=2$$

$\langle 2\rangle$ C ha una cuspide

Questo caso viene esaminato nella prop [11.12,pg.38]

□

Proposition 11.12. *Sia C una cubica irriducibile con cuspide e sia $P\in C$ il suo flesso, allora*

$$|\{t \mid t \text{ tangente di } C,\ P\in t\}|=2$$

Proof: Basta usare la prop [11.11,pg.37], tuttavia diamo qui di seguito una dimostrazione alternativa piu' diretta: applichiamo la [11.10,pg.36] alla forma canonica di C:

$$tx^2 = y^3$$

Qui di seguito includiamo i conti svolti con Maple:

```
> F:=t*x^2-y^3;
```

$$F := tx^2 - y^3$$

```
> H:=det(hessian(F,[x,y,t]));
```

$$H := 24\,x^2 y$$

```
> solve(H=0, F=0, x,y,t);
```

$$\{x = x, y = 0, t = 0\}, \{t = t, y = 0, x = 0\}$$

```
> X:=(1,0,0); # e' l'unico flesso,  O=(0,0,1) e' un punto doppio,
anzi e' l'unica cuspide
> Cpolare:=(xx,yy,zz)  ->
>   multiply(<x|y|t>, multiply((subs(x=xx,y=yy,z=zz,hessian(F,[x,y,t])),<x,y,t>)));
```

$$X := 1, 0, 0$$

```
> grad(F,[x,y,t]);
```

$$[2\,xt, -3\,y^2, x^2]$$

```
> Cpolare(X);
```

$$x\,(2\,xt + 2\,t) + 2\,xt$$

```
> S:=x*(2*x+2)+2*x; # e' la componente della conica polare che
non passa per X
```

$$S := x\,(2\,x + 2) + 2\,x$$

```
> solve(S=0, F=0, x,y,t);
```

$$\{t = t, y = 0, x = 0\}, \left\{y = y, x = -2, t = 1/4\,y^3\right\}$$

```
> #Quindi abbiamo ottenuto solo un punto Q=(-2,1,1/4) non singolare,
(O e' l'unico punto singolare di F)
> #Quindi le rette tangenti, passanti per X sono solo t=0,  e XQ.
> clear;
```

$$clear$$

□

Proposition 11.13. *Sia C una cubica non singolare, e sia $P \in C$ uno dei suoi 9 flessi, allora*

$$|\{t \mid t \text{ tangente di } C,\ P \in t\}| = 4$$

Proof:

P flesso $\underbrace{\Rightarrow}_{[11.7,\text{pg.}34]}$ $\mathcal{P}_P^{n-2}(C) = \mathcal{P}_P^1(C)$ e' spezzata (0)

P flesso $\Rightarrow m_P(C) = 1$, (0) $\underbrace{\Rightarrow}_{[11.4,\text{pg.}32]}$ $\mathcal{P}_P^1(C)$ e' spezzata in due rette $R+S$, con $P \in R = t_P(C)$, $P \notin S$ (1)

P flesso $\Rightarrow I(t_P(C) \cap C, P) = 3 = \deg C \underbrace{\Rightarrow}_{[\text{QUA,thm5.1,pg.140'}]} t_P(C) \cap C = \{P\}$ (1.1)

$m_P(C) = 1 \underbrace{\Rightarrow}_{[\text{QUA,thm4.5,pg.179'}]} \mathcal{P}_P^1(C) \cap C = \{B \in C \mid m_B(C) > 1\} \cup \{B \in C \mid m_B(C) = 1,\ P \in t_B(C)\} =$

$\underbrace{=}_{C \text{ non singolare}} \{B \in C \mid m_B(C) = 1,\ P \in t_B(C)\}$ (2)

$\mathcal{P}_P^1(C) \cap C \underbrace{=}_{(1)} (R \cup S) \cap C = R \cap C \cup S \cap C \underbrace{=}_{(1)} (t_P(C) \cap C) \cup (S \cap C) \underbrace{=}_{(1.1)} \{P\} \cup (S \cap C)$ (2.1)

⟨1⟩ Si ha

$$|\{t \mid t \text{ tangente di } C,\ P \in t\}| = 1 + |S \cap C|$$

Infatti,

t tangente di $C \underbrace{\Leftrightarrow}_{C \text{ non singolare}} t = t_B(C)$ con B semplice (3)

t tangente di C, $P \in t \underbrace{\Leftrightarrow}_{(3)} t = t_B(C)$, $B \in C$, $m_B(C) = 1$, $P \in t \underbrace{\Leftrightarrow}_{(2)} t = t_B(C)$, $B \in \mathcal{P}_P^1(C) \cap C \Leftrightarrow$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{(2.1)} t = t_B(C)$, $B \in \{P\} \cup (S \cap C) \underbrace{\Leftrightarrow}_{P \in t} t = PB$, $B \in S \cap C \vee t = t_P(C) = R$ (3.1)

Se per assurdo $PB = R \Rightarrow B \in R \Rightarrow \{P, B\} \subseteq R \cap C \underbrace{\Rightarrow}_{P \notin S \Rightarrow P \neq B} |R \cap C| \geq 2$ Assurdo contro (1.1). (3.2)

$B \neq B' \in S \cap C \Rightarrow PB \neq PB'$, infatti: (3.3)

$PB = PB' \Rightarrow B, B' \in PB \underbrace{\Rightarrow}_{B \neq B' \in S} PB = S \Rightarrow P \in S$ assurdo contro (1.1)

(3.1), (3.2), (3.3) $\Rightarrow |\{t \mid t \text{ tangente di } C,\ P \in t\}| = |\{t \mid t = PB,\ B \in S \cap C\}| + |\{R\}| = |S \cap C| + 1$

Quindi non ci resta che contare $|S \cap C|$.

C non singolare $\underbrace{\Rightarrow}_{[9.1,\text{pg.}22]}$ C irriducibile

S retta, $\deg C = 3$, C irriducibile $\underbrace{\Rightarrow}_{[\text{QUA,thm5.1,pg.140'}]} |S \cap C| \leq 3$

⟨2⟩ $|S \cap C| = 3$

Supponiamo per assurdo che $|S \cap C| < 2$

$|S \cap C| < 2 \underbrace{\Rightarrow}_{[\text{QUA,thm5.1,pg.140'}]} \exists B \in S \cap C :\ I(S \cap C, B) = 2 \underbrace{\Rightarrow}_{C \text{ non sing.} \Rightarrow m_B(C) = 1} S = t_B(C)$ (4)

$B \in S \underbrace{\Rightarrow}_{(2),(2.1)} P \in t_B(C) \underbrace{=}_{(4)} S \Rightarrow P \in S$ assurdo contro (1)

Quindi

$$|\{t \mid t \text{ tangente di } C,\ P \in t\}| \underbrace{=}_{\text{passo 1}} 1 + |S \cap C| \underbrace{=}_{\text{passo 2}} 4$$

□

12 Gruppo di una cubica

Definition 12.1. Sia C una cubica irriducibile e sia

$$C^* \stackrel{\text{def}}{=} \{B \in C \mid m_B(C) = 1\}$$

Siano $A, B \in C^*$. Poiche' C e' irriducibile, per il thm [QUA,thm5.1,pg.140'] la retta AB si incontra con C in un'unico punto punto $P \in C^*$ tale che

$$I(AB \cap C, A) + I(AB \cap C, B) + I(AB \cap C, P) = \deg C = 3$$

Se $A = B$ poniamo $AB = t_A(C)$, dove $t_A(C)$ e' la tangente in A di C. Se inoltre $A = B$ e' un flesso, allora poniamo $P = A$ (nota[11])

.

Possiamo allora definire la seguente funzione:

$$[] : C^* \times C^* \longrightarrow C^*$$
$$[AB] \stackrel{\text{def}}{=} P$$

Utilizzeremo la seguente notazione:

$$[A] \stackrel{\text{def}}{=} [AA]$$

$[A]$ si chiama *tangenziale* di A.

Proposition 12.2. *Siano $A, B, A_1, A_2, A_3 \in C^*$, si ha*

1. $[AB] = [BA]$
2. $[A\,[AB]] = B$
3. A_1, A_2, A_3 *sono allineati* $\Leftrightarrow [A_1 A_2] = A_3$

3.1 $[A_1 A_2] = A_3 \Leftrightarrow [A_i A_j] = A_h\ \forall i, j, h$ *distinti*

Nota: con "sono allineati" intediamo che i punti A_1, A_2, A_3 sono l'intersezione di C con una retta, ovvero

$$C \cap R = \{A_1, A_2, A_3\},\ \sum_i I(C \cap R, A_i) = \deg C = 3$$

(gli A_i potrebbero anche coincidere)

[11] In pratica se contiamo le rispettive molteplicita' dei punti, abbiamo:

$$C \cap AB = \{A_1, A_2, A_3\}$$

con $A_1 = A, A_2 = B$ e $P = A_3$. Ogni A_i contribuisce di 1 punto nel conteggio delle molteplicita'.

Proof: Seguono direttamente dalla definizione di []. La 3.1 e' un'immediata conseguenza della 3.. □

Proposition 12.3.

$$P \text{ e' un flesso di } C \Leftrightarrow [P] = P$$

Proof:

$$PP = t_P(C)$$
$$P \text{ flesso } \Leftrightarrow I(PP \cap C, P) = 3 = \deg C \Leftrightarrow PP \cap C = \{P\} \Leftrightarrow [PP] = P$$

□

Proposition 12.4. *Siano $A, B, P \in C^*$,*

$$A = B \Leftrightarrow [PA] = [PB]$$

In altre parole, $[P\cdot]$ e' una funzione iniettiva.

Proof:
⟨1⟩ Dim. ⇐
Sia $C = [PA] = [PB]$.

$$A \underbrace{=}_{[12.2,\text{pg.}42]} [P\,[PA]] = [PC] = [P\,[PB]] \underbrace{=}_{[12.2,\text{pg.}42]} B$$
$$\Rightarrow A = B$$

□

Definition 12.5. Fissato un punto $P_0 \in C^*$, definiamo la seguente operazione su C^*:

$$+ : C^* \times C^* \longrightarrow C^*$$
$$A + B \stackrel{\text{def}}{=} [P_0\,[AB]]$$

Proposition 12.6. *Siano $A, B, C \in C^*$, allora*

$$C = [AB] \Leftrightarrow A, B, C \text{ sono allineati } \Leftrightarrow (A + B) + C = [P_0]$$

Proof:
$(A + B) + C = [P_0P_0] \Leftrightarrow [P_0\,[[P_0\,[AB]]C]] = [P_0P_0] \underbrace{\Leftrightarrow}_{[12.4,\text{pg.}43]} [[P_0\,[AB]]C] = P_0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{[12.2,\text{pg.}42],\ 3.1} [P_0[P_0\,[AB]]] = C \Leftrightarrow$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{[12.2,\text{pg.}42],\ 2.}$ $[AB] = C \underbrace{\Leftrightarrow}_{(1)} A, B, C$ allineati

□

Proposition 12.7. *Sia $A \in C^*$, allora*

$$2A + [A] = [P_0]$$

dove con $2A$ intendiamo $(A + A)$.

Proof:

$$A, A, [AA] \text{ allineati } \underbrace{\Rightarrow}_{[12.6,\text{pg.}43]} 2A + [AA] = [P_0P_0]$$

□

Proposition 12.8. *Sia $O \in C$ un flesso, poniamo $P_0 = O$, e sia $X \in C$ allora*

$$X \text{ e' un flesso } \Leftrightarrow 3X = O$$

dove con $3X$ intendiamo $(X + X) + X$.

Proof:

$$P_0 = O \text{ flesso } \underbrace{\Leftrightarrow}_{[12.3,\text{pg.}43]} [P_0P_0] = P_0 = O \quad (1)$$

$$X \text{ flesso } \Leftrightarrow X, X, X \text{ sono allineati } \underbrace{\Leftrightarrow}_{[12.6,\text{pg.}43]} (X + X) + X = [P_0P_0] \underbrace{=}_{(1)} O$$

□

Theorem 12.9. *Sia C una cubica irriducibile e D una conica. Siano*

$$C \cap D = \{A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3\}$$

i 6 punti di intersezione tra C e D (nota[12]). Si ha:

$$C \cap D \subseteq C^* \Rightarrow [A_1B_1], [A_2B_2], [A_3B_3] \text{ sono allineati}$$

Nota: imponiamo che $C \cap D \subseteq C^*$ perche' altrimenti l'operazione $[A_1B_1]$ non e' definita.

Proof: Sia $R = [A_1B_1][A_2B_2]$ la retta passante per i punti $[A_1B_1], [A_2B_2]$. Consideriamo la cubica

$$C' = D + R$$

allora

$C \cap C' = (C \cap D) \cup (C \cap R) = \{A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3\} \cup \{[A_1B_1], [A_2B_2], [[A_1B_1][A_2B_2]]\}$

C irriducibile $\Rightarrow C, C'$ non hanno componenti a comune

$A_1, B_1, [A_1B_1]$ sono allineati (vedi [12.2,pg.42])

$$\underbrace{\Rightarrow}_{[\text{QUA,thm6.7,pg.188}]} C \cap C' \setminus \{A_1, B_1, [A_1B_1]\} = C \cap E, \quad \text{dove } E \text{ e' una conica}$$

$C \cap E = C \cap C' \setminus \{A_1, B_1, [A_1B_1]\} = \{A_2, A_3, B_2, B_3, [A_2B_2], [[A_1B_1][A_2B_2]]\}$

C, E non hanno componenti a comune

$A_2, B_2, [A_2B_2]$ sono allineati

$$\underbrace{\Rightarrow}_{[\text{QUA,thm6.7,pg.188}]} C \cap E \setminus \{A_2, B_2, [A_2B_2]\} = C \cap R, \text{ dove } R \text{ e' una retta } \Rightarrow C \cap R \text{ sono allineati } (*)$$

$(*) \Leftrightarrow A_3, B_3, [[A_1B_1][A_2B_2]]$ sono allineati $\underbrace{\Leftrightarrow}_{[12.2,\text{pg.}42]} [A_3B_3] = [[A_1B_1][A_2B_2]] \Leftrightarrow$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{[12.2,\text{pg.}42]} [A_3B_3], [A_1B_1], [A_2B_2]$ sono allineati

□

Theorem 12.10. *Sia C una cubica irriducibile e R una retta Siano*

$$C \cap R = \{A_1, A_2, A_3\}$$

i 3 punti di intersezione tra C e R, contati con le rispettive molteplicita'. Si ha:

$$C \cap R \subseteq C^* \Rightarrow [A_1], [A_2], [A_3] \text{ sono allineati}$$

Nota: imponiamo che $C \cap R \subseteq C^*$ perche' altrimenti l'operazione $[A_1A_1]$ non e' definita.

[12] possono anche coincidere tra loro. Sono 6 se contati con le rispettive molteplicita' (vedi Bezout).

Proof: Applichiamo la [12.9,pg.44] considerando la conica

$$R + R$$

□

Proposition 12.11. *Sia C una cubica irriducibile*

$$A, B \text{ sono flessi } \Rightarrow [AB] \text{ e' un flesso}$$

O equivalentemente, per la [12.8,pg.44]:

$$A, B \text{ flessi } \Rightarrow 3\,[AB] = O$$

Proof: Poniamo $A_1 = A, A_2 = B, A_3 = [AB]$. Applicando la [12.10,pg.44] si ha:
$[A_1A_1]\,,\ [A_2A_2]\,,\ [A_3A_3]$ sono allineati $\underbrace{\Leftrightarrow}_{A_1,A_2 \text{ flessi},[12.3,\text{pg.}43]}$ $A_1, A_2, [A_3A_3]$ sono allineati $\Leftrightarrow$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{[12.2,\text{pg.}42]}$ $[A_3A_3] = [A_1A_2] \underbrace{=}_{\text{def}} A_3$ $\underbrace{\Leftrightarrow}_{[12.3,\text{pg.}43]}$ A_3 flesso

□

Theorem 12.12. *Sia C una cubica irriducibile, allora $(C^*, +)$ e' un gruppo abeliano, dove $+$ e' l'operazione definita in [12.5,pg.43]. In particolare,*

1. *P_0 e' l'elemento neutro*
2. *$-A = [A\,[P_0]]$*

Proof:
⟨1⟩ P_0 e' l'elemento neutro

$$P_0 + P_0 = [P_0\,[P_0P_0]] \underbrace{=}_{[12.2,\text{pg.}42]} P_0$$

⟨2⟩ $-A = [A\,[P_0P_0]]$
Infatti,

$$A + [A\,[P_0P_0]] = [P_0\,[A\,[A\,[P_0P_0]]]] \underbrace{=}_{[12.2,\text{pg.}42]} [P_0\,[P_0P_0]] \underbrace{=}_{[12.2,\text{pg.}42]} P_0$$

⟨3⟩ $+$ e' commutativa

$$A + B = [P_0\,[AB]] \underbrace{=}_{[12.2,\text{pg.}42]} [P_0\,[BA]] = B + A$$

⟨4⟩ $+$ e' associativa
Dobbiamo dimostrare che

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Si ha:
$(A + B) + C = A + (B + C) \Leftrightarrow [P_0\,[(A + B)C]] = [P_0\,[A(B + C)]] \underbrace{\Leftrightarrow}_{[12.4,\text{pg.}43]} [(A + B)C] = [A(B + C)] \Leftrightarrow$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{[12.2,\text{pg.}42]}$ $A, B + C, [(A + B)C]$ allineati $(*)$
Poniamo

$$A_1 = B \qquad A_2 = P_0 \qquad A_3 = A + B$$
$$B_1 = [AB] \qquad B_2 = [BC] \qquad B_3 = C$$

e sia D la seguente conica spezzata:

$$D = B_2B_3 + A_2A_3$$

Per la [12.2,pg.42],

$$A_1, B_2, B_3 \text{ sono allineati}$$
$$B_1, A_2, A_3 \text{ sono allineati}$$
$$\Rightarrow D \cap C = \{A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3\}$$

Allora, per la [12.9,pg.44] si ha che i punti

$$A = [B\,[AB]]$$
$$B + C = [P_0\,[BC]]$$
$$[(A + B)C] = [C(A + B)]$$

sono allineati, ovvero la $(*)$.

□

Theorem 12.13. *Sia C una cubica irriducibile e siano $Q_1, \ldots, Q_{3n} \in C^*$, allora*

$$\exists D \text{ curva di ordine } n \text{ t.c. } D \cap C = \{Q_1, \ldots, Q_{3n}\} \Leftrightarrow Q_1 + \cdots + Q_{3n} = n\,[P_0]$$

Proof:

$\langle 1 \rangle$ Dim. $\Rightarrow$

Procediamo per induzione su n

$\langle 1.1 \rangle$ $n = 1$

Gia' visto nella prop [12.6,pg.43]

$\langle 1.2 \rangle$ $n - 1 \Rightarrow n$

Consideriamo

$$A_1 = [Q_1Q_2]$$
$$A_2 = [Q_3Q_4]$$
$$A_3 = [AB]$$

E sia E la seguente curva di ordine $n + 1$:

$$E = D + A_1A_2$$

si ha

$E \cap C = (C \cap D) \cup (C \cap A_1A_2) = \{Q_1, \dots, Q_{3n}\} \cup \{A_1, A_2, [A_1A_2]\} \subseteq C^*$

Q_1, Q_2, A_1 allineati

$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm6.7,pg.188]}}$ $C \cap E' = \{Q_3, \dots, Q_{3n}, A_2, [A_1A_2]\}$, dove E' e' una curva di ordine n

Q_3, Q_4, A_2 allineati

$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,thm6.7,pg.188]}}$ $C \cap E'' = \{Q_5, \dots, Q_{3n}, [A_1A_2]\}$, con E'' curva di ordine $n-1$

$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Hp induttiva}}$ $Q_5 + \cdots + Q_{3n} + [A_1A_2] = (n-1)\,[P_0P_0]$ (1)

$A_1 = [Q_1Q_2] \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[12.6,pg.43]}} A_1 + Q_1 + Q_2 = [P_0P_0]$

$A_2 = [Q_3Q_4] \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[12.6,pg.43]}} A_2 + Q_3 + Q_4 = [P_0P_0]$

$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + A_1 + A_2 = 2\,[P_0P_0]$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow Q_1 + \cdots + Q_{3n} + A_1 + A_2 + [A_1A_2] = (n+1)\,[P_0P_0]$

$A_3 = [A_1A_2] \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[12.6,pg.43]}} A_1 + A_2 + [A_1A_2] = [P_0P_0]$

$\Rightarrow Q_1 + \cdots + Q_{3n} = (n+1)\,[P_0P_0] - [P_0P_0] = n\,[P_0P_0]$

$\langle 2 \rangle$ Dim. $\Leftarrow$

□

Proposition 12.14. *Sia C irriducibile, $P_0 = O \in C^*$ un flesso, allora*

1. $2X = O \Leftrightarrow X \in \{B \in C \mid O \in t_B(C)\}$
2. $[P + X] = [P] \quad \forall P \in C,\ \forall X \in \{X \mid 2X = O\}$

Nota: la prop [11.10,pg.36] fornisce un metodo per trovare i punti B della 1..
Se inoltre $C = C^*$, ovvero se C e' non singolare, allora

1.1 $\{X \in C \mid 2X = O\} = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, *con* $A_i \neq A_j\ \forall i \neq j$, $A_0 = O$

3. $A_i + A_j = A_h \quad \forall i, j, h > 0$ *distinti*
4. *Sia* $\sigma_i : C \longrightarrow C$, $\sigma_i(P) = P + A_i$, *allora* $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ *e' un gruppo di funzioni*

Proof:

$$O \text{ flesso } \Rightarrow [OO] = O$$

$\langle 1 \rangle$

$2X = X + X = [O\,[XX]]$

$O = [OO]$

$\Rightarrow [O\,[XX]] = [OO] \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[12.4,pg.43]}} [XX] = O \Leftrightarrow X \in \{B \in C \mid O \in t_B(C)\}$

$\langle 1.1 \rangle$

Infine, se C e' non singolare, per la [11.10,pg.36] e la [11.13,pg.41] si ha

$$\{B \in C \mid O \in t_B(C)\} = \{O = A_0, A_1, A_2, A_3\}\,, \quad \text{con } A_i \neq A_j\ \forall i \neq j$$

$\langle 2 \rangle$

$$2P + [P] \underbrace{=}_{[12.7,\text{pg.}43]} O \underbrace{=}_{[12.7,\text{pg.}43]} 2(P+X) + [P+X] = 2P + 2X + [P+X] \underbrace{=}_{2X=O} 2P + [P+X] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ [P] = [P+X]$$

$\langle 3 \rangle$

$$2(A_i + A_j) = 2A_i + 2A_j = O \underbrace{\Rightarrow}_{1.1} \exists h :\ A_i + A_j = A_h$$

$$(1) \Leftrightarrow A_i = -A_i \ \ (1.1)$$

$$A_h = O \Rightarrow A_i + A_j = O \Leftrightarrow A_i = -A_j = A_j \Rightarrow A_i = A_j$$

$$A_h = A_i \Rightarrow A_i + A_j = A_i \Rightarrow A_j = OA_h = A_j \Rightarrow A_i + A_j = A_j \Rightarrow A_i = O$$

In definitiva, se supponiamo $0 < i \neq j$, si deve avere

$$A_h \notin \{O = A_0, A_i, A_j\}$$

ovvero

$$i, j, h > 0 \text{ distinti}$$

$\langle 4 \rangle$

$\langle 4.1 \rangle$ σ_i e' biettiva

$$\text{iniettiva: } \sigma_i(P) = \sigma_i(Q) \Leftrightarrow P + A_i = Q + A_i \Leftrightarrow P = Q$$

$$\text{surriettiva: } \sigma_i(Q - A_i) = Q$$

$\langle 4.2 \rangle$ Per dimostrare che le σ_i formano un sottogruppo finito di $S(C)$ (permutazioni su C), basta provare che([13]):

$$\sigma_i\sigma_j \in \{\sigma_0, \ldots, \sigma_3\} \quad \forall i, j$$

$$\sigma_i^2 = +2A_i = +O = \sigma_0$$

$$i \neq j \Rightarrow \sigma_i\sigma_j = +A_i + A_j \underbrace{=}_{3.} +A_h = \sigma_h$$

□

Proposition 12.15. *Sia C irriducibile e $Q_1, \ldots, Q_r \in C^*$, $O = P_0$ flesso di C. Supponiamo che $Q_1 + \cdots + Q_r = O$, allora*

1. *$Q_1, \ldots, Q_s$ sono flessi $\Rightarrow Q_{s+1} + \cdots + Q_r$ e' un flesso*
2. *$\{Q_1, \ldots, Q_s\} = \{P \in C \mid P \text{ flesso}\}$, tutti distinti $\Rightarrow Q_{s+1} + \cdots + Q_r = O$*

Proof:

$\langle 1 \rangle$

$$Q_1, \ldots, Q_s \text{ flessi} \underbrace{\Leftrightarrow}_{[12.8,\text{pg.}44]} 3Q_1, \ldots, 3Q_s = O \ \ (1)$$

$$Q_1 + \cdots + Q_r = O \Rightarrow 3(Q_1 + \cdots + Q_r) = O \Leftrightarrow 3Q_1 + \cdots + 3Q_s + 3(Q_{s+1} + \cdots + Q_r) = O \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{(1)} 3(Q_{s+1} + \cdots + Q_r) = O \underbrace{\Leftrightarrow}_{[12.8,\text{pg.}44]} Q_{s+1} + \cdots + Q_r \text{ flesso}$$

[13] Questo per la caratterizzazione dei sottogruppi finiti

⟨2⟩
Per la [QUA,Oss6.20.1,pg.197], si ha

$$Q_1 + \cdots + Q_s = O$$

e quindi la tesi.

□

13 Teoremi "geometrici"

In questa sezione elenchiamo alcuni teoremi (gia' dimostrati altrove) che riguardano proprieta' che possono essere interpretate solo dal punto di vista geometrico.

Theorem 13.1. *Sotto le seguenti ipotesi:*

1. C *curva,* $\deg C = m$
2. D *curva,* $\deg D = n \geq m$
3. $|C \cap D| = mn$ *(nota*[14]*). In altre parole,* C, D *non hanno componenti a comune.*
4. R *retta,* $|C \cap R| = m$.
5. $C \cap R \subseteq C \cap D$*, ovvero* $C \cap R = C \cap D \cap R$.
6. $I(R \cap D, P) = I(R \cap C, P) \ \ \forall P \in C \cap D$

si ha

$$\exists E \text{ curva: } \begin{cases} \deg E = n - 1 \\ C \cap D \setminus R = E \cap C \\ |E \cap C| = m(n-1) \end{cases}$$

Proof: Basta usare la stessa dimostrazione del [QUA,thm6.7,pg.188], cambiando 3 con m. □

Theorem 13.2. *Siano* F_1, F_2 *curve di grado* n*, con*

$$\{P_1, \ldots, P_{n^2}\} = F_1 \cap F_2 \text{ punti distinti}$$

Sia D *curva irriducibile di grado* m*, tale che*

$$D \cap F_1 = \{P_1, \ldots, P_{mn}\}$$

allora si ha

$$\exists E \text{ curva di grado } n - m : \ \ E \cap F_1 = \{P_{mn+1}, \ldots, P_{n^2}\}$$

Proof: Vedi [6.4,pg.15] □

Theorem 13.3. *Sia* C *una conica irriducibile, e siano* $A_1, \ldots, A_6 \in C$*, allora*

$$\begin{cases} A_1, \ldots, A_6 \text{ sono a tre a tre non allineati} \\ \{P_i\} = A_i A_{i+1} \cap A_{i-2} A_{i+3} \end{cases} \Rightarrow P_1, P_2, P_3 \text{ sono allineati}$$

[14] i punti sono contati con le rispettive molteplicita'

Proof: [QUA,Cor1.12,pg.166] □

Theorem 13.4. *Siano F_1, F_2 due cubiche distinte con*

$$F_1 \cap F_2 = \{P_1, \ldots, P_9\}, \quad |F_1 \cap F_2| = 9$$

Sia F una cubica, si ha:

$$\{P_1, \ldots, P_8\} \subseteq F \Rightarrow P_9 \in F$$

Proof: [5.10,pg.10] □

Theorem 13.5. *Sia*

1. *C cubica irriducibile*
2. *D curva, $\deg D = n + m$*
3. *$C \not| D$*
4. *$C \cap D \subseteq C^*$*
5. *$\exists E$ di ordine n t.c. $E \cap C \subseteq C \cap D$, $|E \cap C| = 3n$. (nota[15])*

allora

$$\exists F \text{ di ordine } m \text{ t.c. } C \cap D \backslash E \cap C = F \cap C, \ |F \cap C| = 3m$$

Proof: [QUA,Cor6.19,pg.195] □

Theorem 13.6. *Sia C una cubica irriducibile e D una conica. Siano*

$$C \cap D = \{A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3\}$$

i 6 punti di intersezione tra C e D (nota[16]). Si ha:

$$C \cap D \subseteq C^* \Rightarrow [A_1B_1], \ [A_2B_2], \ [A_3B_3] \text{ sono allineati}$$

Proof: [12.9,pg.44] □

Theorem 13.7. *Sia C una cubica irriducibile e R una retta Siano*

$$C \cap R = \{A_1, A_2, A_3\}$$

i 3 punti di intersezione tra C e R, contati con le rispettive molteplicita'. Si ha:

$$C \cap R \subseteq C^* \Rightarrow [A_1], \ [A_2], \ [A_3] \text{ sono allineati}$$

Proof: [12.10,pg.44] □

[15] il conteggio di $|E \cap C|$ si intende con le rispettive molteplicita' dei punti
[16] possono anche coincidere tra loro. Sono 6 se contati con le rispettive molteplicita' (vedi Bezout).

14 Esercizi

Example 14.1. Sia F la curva $x^2z - yz^2 = 0$,

1. i punti impropri di F si ottengono col sistema

$$\begin{cases} x^2z - yz^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \end{cases}$$

Quindi

$$F \cap (\mathbb{P}^2 \backslash \mathbb{A}^2) = (\mathbb{P}^2 \backslash \mathbb{A}^2)$$

ovvero, la retta impropria e' contenuta in F, ed e' una sua componente. (Infatti, possiamo mettere z in evidenza in $x^2z - yz^2$)

2. la restrizione affine di F e'

$$F_* = x^2 - y = 0$$

3. per il punto 1., F non e' irriducibile in $\mathbb{P}^2$ ($\mathbb{P}^2 \backslash \mathbb{A}^2$ e' una sua componente).
Vediamo cosa accade in $\mathbb{A}^2$:

$G = (F_*)^* = x^2 - yz$ e' una conica
Cerchiamo i punti singolari:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y} = -z = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial z} = -y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0) \text{ che non e' un punto in } \mathbb{P}^2 \Rightarrow G \text{ non ha punti singolari } \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{G e' una conica, [9.6,pg.24]}} \quad G \text{ e' irriducibile}$$

Quindi F e' irriducibile in $\mathbb{A}^2$.

4. Consideriamo la retta $R = x$,

$$R \cap F : \begin{cases} x^2z - yz^2 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) \in \{(0, 0, 1),\ (0, 1, 0)\}$$

Calcoliamo $I(R \cap F, (0, 0, 1))$:

$$\begin{aligned} &R : \ \lambda(0, 0, 1) + \mu(0, 1, 0) \\ &F((0, 0, 1) + \mu(0, 1, 0)) = F(0, \mu, 1) = -\mu \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu = 0 \text{ ha molteplicita' } 1 \Leftrightarrow I(R \cap F, (0, 0, 1)) = 1 \end{aligned}$$

Infine,

$$I(R \cap F, (0, 0, 1)) + I(R \cap F, (0, 1, 0)) = \deg F = 3 \Rightarrow I(R \cap F, (0, 1, 0)) = 2$$

5.

6. Per la [QUA,prop5.3.5,pg.144'], la molteplicita' di $(0,1,0)$ e' data da $3-1=2$, dove 1 e' l'esponente massimo di y in F. Il cono tangente in $(0,1,0)$ e' (vedi [6.1,pg.13]) $z^2=0$. Procediamo in maniera diversa:

$R: \ \lambda(0,1,0)+\mu(b_1,b_2,b_3)$
$F((0,1,0)+\mu(b_1,b_2,b_3)) = b_1b_3\mu^3-(\lambda+\mu b_2)\mu^2b_3^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu=0$ ha molteplicita' 2 per $F((0,1,0)+\mu(b_1,b_2,b_3)) \in K[b_1,b_2,b_3] \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,oss5.1.4,pg.142']}} m_{(0,1,0)}(F)=2$

Example 14.2. Il polinomio $f(x)=x^4-9x^3+29x^2-39x+18 \in \mathbb{C}[x]$ ha soluzioni multiple?

Proof: Per il teorema [QUA,thm3.7,pg.123] si ha

$$f(x) \text{ separabile } \Leftrightarrow \mathcal{R}(f(x),f'(x)) \neq 0$$

ovvero

$$f(x) \text{ ha una radice multipla } \Leftrightarrow \mathcal{R}(f(x),f'(x)) = 0$$

Calcoliamo $\mathcal{R}(f(x),f'(x))$:

$$f'(x)=4x^3-27x^2+58x-39$$

$$\mathcal{R}(f(x),f'(x)) = \begin{vmatrix} 1 & -9 & 29 & -39 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 29 & -39 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 29 & -39 & 18 \\ 4 & -27 & 58 & -39 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -27 & 58 & -39 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -27 & 58 & -39 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -27 & 58 & -39 \end{vmatrix} = 0$$

□

Proposition 14.3. *Sia F una ipersuperficie di $\mathbb{P}^n$ e sia π un iperpiano tangente a F in un suo punto $O \in F$.*
Sia f l'ipersuperficie di $\mathbb{P}^{n-1}$ ottenuta dal sistema

$$\begin{cases} F=0 \\ \pi=0 \end{cases}$$

allora,

1. $I(R \cap f, O) = I(R \cap F, O)$ *dove R e' una qualsiasi retta $\subseteq \pi$*
2. $m_O(f) \geq 2$
3. $R \subseteq \pi$ *retta e' tangente a f in O* $\Rightarrow I(R \cap f, O) \geq 3$

Proof:
⟨1⟩
L'equazione di f e' proprio quella di F ristretta in π. Quindi, applicando la definizione di $I()$ si ottiene

$$I(R \cap f, O) = I(R \cap F, O)$$

⟨2⟩

π iperpiano tangente in $O, O \in R \subseteq \pi \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[QUA,Oss5.9.10,pg.147']}} \quad R$ e' tangente in O a $F \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I(R \cap F, O) \geq 2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{1.} I(R \cap f, O) \geq 2$

Quindi $\forall R: \ O \in R \subseteq \pi \ I(R \cap f, O) \geq 2$

$\Rightarrow m_O(f) = \min I(R \cap f, O) \geq 2$

$\langle 3 \rangle$

$R \subseteq \pi$ retta e' tangente a f in $O \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{def. di tangente}} \quad I(R \cap f, O) > m_O(f) \geq 2 \Rightarrow I(R \cap f, O) \geq 3$

$\square$

Example 14.4. In $\mathbb{P}^2$, sia data la seguente famiglia di quartiche:

$$F: \quad x^4 - 2ky^3 - 3k^2y^2 - 2k^2x^2 + k^4 = 0$$

dove $k \in \mathcal{C}$ e' un parametro.
Studiare la sua razionalizzazione.

Proof: Notiamo che possiamo scrivere F nella seguente forma equivalente:

$$F: \quad (x^2 - k^2)^2 - ky^2(2y + 3k) = 0$$

Se $k = 0$, F diventa il seguente cono:

$$x^4 = 0$$

quindi, non e' razionale (la razionalita' e' definita solo per curve irriducibili).
Supponiamo $k \neq 0$.
Calcoliamo i punti impropri di F:

$$\begin{cases} F^* = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow Y_\infty = (0,1,0) \text{ e' l'unico punto improprio}$$

Poiche' l'esponente massimo di y nell'equazione di F e' 3, si ha che Y_∞ e' semplice (vedi [QUA,prop5.3.5,pg.144']). Allora,

$$\begin{cases} Y_\infty \text{ semplice} \\ Y_\infty \text{ e' l'unico punto improprio} \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{[9.3,\text{pg.}23]} F \text{ e' irriducibile} \quad (1)$$

Calcoliamo i punti singolari propri di F:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 - 4k^2x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -6ky^2 - 6k^2y = 0 \\ F = 0 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{k \neq 0} \begin{cases} x(x^2 - k^2) = 0 \\ y(y + k) = 0 \\ (x^2 - k^2)^2 - ky^2(2y + 3k) = 0 \end{cases}$$

Distinguendo i casi $x = 0$, $x^2 = k^2$ si vede che gli unici punti singolari sono

$$A = (0, -k),\ B = (k, 0),\ C = (-k, 0)$$

A,B,C non annullano le derivate seconde di F, quindi sono dei punti doppi.
Si ha:
A, B, C sono gli unici punti singolari e sono doppi, F e' una quartica irriducibile $\underbrace{\Rightarrow}_{[10.1,\text{pg.}28]}$ F e' razionale $\forall k \neq 0$

Come fascio di sub-aggiunte, consideriamo il seguente fascio di coniche:

$$(AC)(BY_\infty) + \lambda(AY_\infty)(BC)$$

Le equazioni delle rette AC, BY_∞, AY_∞, BC sono:

$$BY_\infty: \ x - k = 0$$
$$AC: \ x + y + k = 0$$
$$AY_\infty: \ x = 0$$
$$BC: \ y = 0$$

Quindi l'equazione del fascio diventa:

$$(x - k)(x + y + k) + \lambda xy = 0 \quad (2)$$

Calcoliamo adesso l'intersezione tra il fascio e F:

$$\begin{cases} (x-k)(x+y+k)+\lambda xy=0 \\ (x^2-k^2)^2-ky^2(2y+3k)=0 \end{cases} \quad (3)$$

$$(x-k)(x+y+k)+\lambda xy=0 \Leftrightarrow x^2-k^2+(x-k)y+\lambda xy=0 \Leftrightarrow y=-\frac{x^2-k^2}{x-k+\lambda x} \quad (4)$$

$$(x^2-k^2)^2-ky^2(2y+3k)=0 \Leftrightarrow (x^2-k^2)^2-k\frac{(x^2-k^2)^2}{(x-k+\lambda x)^2}\left(-2\frac{x^2-k^2}{x-k+\lambda x}+3k\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-k^2)^2\left((x-k+\lambda x)^3-k\left(-2(x^2-k^2)+3k(x-k+\lambda x)\right)\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-k^2)^2x^2(x+3\lambda x+3x\lambda^2+x\lambda^3-3k\lambda^2-k-6k\lambda)=0$$

Escludendo le soluzioni che si hanno per $(x^2-k^2)^2x^2=0$, si ha:

$$x=k\frac{3\lambda^2+1+6\lambda}{1+3\lambda+3\lambda^2+\lambda^3}$$

Infine, sostituendo la x in (4), si ottiene la parametrizzazione di F. □

15 Appendice A

Qui di seguito vengono inclusi gli appunti cartacei.

16 *

Index

*, 56
2PPP, 43

AlgoEquParam, 29
Appendice A, 55

Bezout, 14

ChiEstLaSupMinima, 4
classe di C, 33
ComponenteAcomuneConDerivata, 3
Conica, 24
ConicaMatA, 25
Cono proiettante, 17
cono proiettante, 17
Cono tangente, 13
ConoProiettantePuntoFondamentale, 20
ConoTgImmediato, 13
CorTrovarePuntiBase, 7
CstarEstGruppo, 44
Cubica, 25
CubicaFlessoIrriducibile, 25
CubicaIrriducibile, 25
CubicaNumFlessi, 36
CubicaPer8PtPassaPerIlNono, 10
Cubiche, 36
Curva1soloPtImpr, 23
CurvaIrriducibileConPuntoMultiploMassimo, 23
CurvaSempliceIrriducibile, 22
Curve irriducibili, 22
Curve razionali, 29
CurvePassantiPerPuntiDiIrriducibile, 13
cuspide, 24
cuspide ordinaria, 24

DefConoProiettante, 17
DefCuspideNodo, 24
DefFlesso, 34
DefGruppoCubica, 41
DefIpersupMinima, 3
DefPuntoBase, 6
DefSommaInCstar, 42
Disomogeneizzato, 1
DpaNulla, 2

EF1-Eser11, 50
EF1-Eser2, 51
EquazioneDeterminanteUnicaIpersuperfice, 8
EquazioneFlessi, 43
Esercizi, 50

FascioEquParam, 29
FdivGsseF*divG*, 2
Flessi, 34
FlessoPolareSpezzata, 35

Gruppo di una cubica, 41

ImporreCondizioniIndipendenti, 7
Intersezione3nGruppo, 45
Introduzione, 1
Ipersup1SoloPtRetta, 23
Ipersuperficie minima, 3
ipersuperficie minima, 3

Lambdan, 6
Lemma2.8-5, 1
LemmaIIBezout, 14

MolIntDalSistema, 5
Molteplicita' d'intersezione, 5
MoltIntersezSupMinima, 5

nodo, 24
NonBasesseUnaSola, 8
Notazioni, 1
NoveAllineati, 43
NumDiCondizioni, 9
NumDiCondizioniTangente, 10
NumeroPtsingolari, 21
NumTangentiPassantiFlesso, 40
NumTangentiPassantiFlessoCconCuspide, 39
NumTangentiPassantiFlessoCsingolare, 38

Oss2.1.0, 21

PerDueFlessiTerzoFlesso, 44
Polare, 31
PolareDiUnaConica, 31
PolareEsiste, 31
PolareStessaTg, 33
Polinomi ed Ipersuperfici, 1
ProiezionePiP, 17

PropConoProiettante, 19
PropDiRes, 41
PropSommaCstar, 42
Punti singolari, 21
PuntiUscentiFlessoEstGruppo, 46
punto ordinario, 24

Quartica1SoloPtTriplo, 27
Quartica3PtDoppi, 28
QuarticaEquParam, 30
Quartiche, 27

ResFissataIniettiva, 42
ResPFlesso, 42

SistemaCheContieneC, 12
Sistemi lineari di ipersuperfici, 6
SommaFlessi, 47
StessoGradoEstSupMinima, 4

TangentiUscentiDalFlesso, 37
tangenziale, 41
TangenzialiAllineati, 44
Teorema1.7, 15
Teorema4.8', 33
Teoremi "geometrici", 48
thm1.11, 16
Thm6.7Generalizzato, 48
ThmPrePascal, 16
TreAllineatiSommaCstar, 42
TrovareFlessi, 35
TrovarePuntiBase, 6

Varie, 2