Geometria II

AlpT (@freaknet.org)
http://freaknet.org/alpt

April 1, 2008

Abstract

Questo testo e' una rielaborazione personale degli appunti presi durante il corso di Geometria II, tenuto dalla Prof.ssa Orlando presso il dipartimento di Matematica, Catania, A.A. 2007/2008.
Saro' ben lieto di correggere ogni eventuale errore che mi comunicherai.
Buon lettura.

^_^

Copyright ©2007 Andrea Lo Pumo aka AlpT <alpt@freaknet.org>. All rights reserved.

This document is free; you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or (at your option) any later version.

This document is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for more details.

You should have received a copy of the GNU General Public License along with this document; if not, write to the Free Software Foundation, Inc., 675 Mass Ave, Cambridge, MA 02139, USA.

Contents

1 Spazio affine **1**
- 1.1 Sistema di riferimento . . . 2
- 1.2 Sottospazio affine . . . 3
- 1.3 Equazioni cartesiane . . . 4
  - 1.3.1 Dato il sottospazio . . . 4
  - 1.3.2 Date le equazioni . . . 5
  - 1.3.3 Dato il sottospazio - II . . . 6
  - 1.3.4 Data la base del sottospazio . . . 6
  - 1.3.5 Equazioni parametriche . . . 6
  - 1.3.6 Equazione dell'iperpiano . . . 7
- 1.4 Congiungente . . . 8
- 1.5 Spazi paralleli . . . 12
- 1.6 Proiezione . . . 14
- 1.7 Teoremi classici . . . 16
  - 1.7.1 Teorema di Talete . . . 17
  - 1.7.2 Teorema di Pappo . . . 19
  - 1.7.3 Teorema di Desargues . . . 20
- 1.8 Isomorfismi affini . . . 21
  - 1.8.1 Omotetia . . . 29
  - 1.8.2 Equazioni di un'isomorfismo . . . 31

2 Forme bilineari **32**
- 2.1 Congruenza . . . 37
- 2.2 b degenere . . . 38
- 2.3 Ortogonalita' . . . 40
  - 2.3.1 Isotropo . . . 43
- 2.4 Forma quadratica . . . 44
- 2.5 Diagonalizzazione di b simmetrica . . . 45

3 Spazio vettoriale euclideo **56**
- 3.1 Endomorfismo unitario . . . 61

4 Spazio affine euclideo **67**
- 4.1 Isometria . . . 68
  - 4.1.1 Teorema spettrale . . . 70

5 Spazio proiettivo **73**
- 5.1 Sottospazio proiettivo . . . 74
- 5.2 Riferimento . . . 77
- 5.3 Equazioni cartesiane proiettive . . . 79
- 5.4 Sottospazio generato . . . 80
  - 5.4.1 Formula di Grassman proiettiva . . . 83
- 5.5 Proiezione (spazi proiettivi) . . . 86
- 5.6 Isomorfismo proiettivo . . . 88
  - 5.6.1 Punti uniti e autovalori . . . 92

6 Spazio affine proiettivo **94**
6.1 Coordinate proprie improprie 95
6.2 Teoremi classici (proiettivi) 99
6.3 Dualita' 102
6.4 Teoremi duali 110

7 Esercizi **113**

8 * **117**

1 Spazio affine

Uno spazio affine e' una terna $(\mathcal{A}, \mathbf{V}, \rightarrow)$, dove $\mathcal{A}$ e' un qualsiasi insieme non vuoto, $\mathbf{V}$ e' un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale, e $\rightarrow$ e' una funzione

$$\rightarrow : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{V}$$
$$Q - P := \overrightarrow{PQ} := \rightarrow(a, b)$$

dotato della seguente struttura:

As 1. $\forall P \in \mathcal{A},\ \forall v \in \mathbf{V}\ \ \exists! Q \in \mathcal{A} :\ \ \overrightarrow{PQ} = v$

As 2. $\forall P, O, Q \in \mathcal{A}\ \ \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PQ}$

Gli elementi di $\mathcal{A}$ vengono chiamati punti.
Si dice che $\mathcal{A}$ ha una struttura di spazio affine sullo spazio vettoriale $\mathbf{V}$.

Alcune immediate proposizioni che valgono $\forall P, Q, P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \mathcal{A}$:

1. $\overrightarrow{PP} = \underline{0}$

   Proof:
   $$\overrightarrow{PP} \underbrace{=}_{As.2} \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} \Rightarrow \overrightarrow{PP} = \underline{0}$$

2. $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

   Proof:
   $$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \underline{0}$$

3. $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{Q_1Q_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_2}$ (proposizione del parallelogramma)

   Proof:
   $$\overrightarrow{P_1Q_1} = \underbrace{\overrightarrow{P_1P_2}}_{=\overrightarrow{Q_1Q_2}} + \underbrace{\overrightarrow{P_2Q_1}}_{=\overrightarrow{P_2Q_2}+\underbrace{\overrightarrow{Q_2Q_1}}_{=-\overrightarrow{Q_1Q_2}}} = \overrightarrow{Q_1Q_2} - \overrightarrow{Q_1Q_2} + \overrightarrow{P_2Q_2} = \overrightarrow{P_2Q_2}$$

Example 1.1. di spazio affine.

$$\mathcal{A} = \mathbf{V},\ \ \overrightarrow{uv} = v - u$$

E' uno spazio affine, infatti

$$\forall u, v \in \mathbf{V}\ \ \exists! w \in \mathbf{V} :\ \ \overrightarrow{uv} = w$$
$$w = v - u$$
$$\forall u, w, v \in \mathcal{A}\ \ \overrightarrow{uw} + \overrightarrow{wv} = w - u + v - w = v - u = \overrightarrow{uv}$$

Indicheremo questo particolare spazio affine con $\mathbf{V}_a$.
Un caso particolare si ha quando $\mathbf{V} = \mathbb{K}^n$.
$(\mathbb{K}^n)_a$ lo indicheremo con $\mathcal{A}^n$ o con $\mathcal{A}^n(\mathbb{K})$

1.1 Sistema di riferimento

Dato uno spazio affine $(\mathcal{A}, \mathbf{V}, \rightarrow)$, possiamo fissare un riferimento affine $\Omega = (O, \varepsilon = e_1, e_2, \ldots, e_n)$, dove $O \in \mathcal{A}$ e ε e' una base di $\mathbf{V}$, con $\dim \mathbf{V} = n$.
Poiche' le componenti di un vettore di $\mathbf{V}$ rispetto alla base fissata sono uniche, chiamiamo $[\overrightarrow{OP}]_\varepsilon$ le coordinate di $P \in \mathcal{A}$, ovvero

$$\overrightarrow{OP} = p_1 e_1 + p_2 e_2 + \cdots + p_n e_n$$
$$[\overrightarrow{OP}]_\varepsilon = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{K}^n$$

Con $P(p_1, p_2, \ldots, p_n)_\Omega$, o con $[P]_\Omega$ indichiamo le coordinate di P rispetto al sistema di riferimento Ω.

Proposition 1.2. *Le componenti di $\overrightarrow{PQ}$ sono:*

$$[\overrightarrow{PQ}]_\varepsilon = [Q]_\Omega - [P]_\Omega = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, \ldots, q_n - p_n)$$

Proof:
$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} =$
$= -(p_1 e_1 + p_2 e_2 + \cdots + p_n e_n) + (q_1 e_1 + q_2 e_2 + \cdots + q_n e_n) = (q_1 - p_1)e_1 + \cdots + (q_n - p_n)e_n$

Proposition 1.3. *Supponiamo di avere due riferimenti $\Omega = (O, B)$ e $\Omega' = (O', C)$. Allora si ha*

$$[P]_{\Omega'} = [O]_{\Omega'} + P_{B \to C}[P]_\Omega$$

dove $P_{B \to C}$ e' la matrice del cambiamento di base.

Proof:
per cambiare le coordinate di un punto Q da un sistema all'altro basta cambiare la base del vettore $\overrightarrow{OQ}$ e quindi
$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}$
$[\overrightarrow{O'P}]_C = [\overrightarrow{O'O}]_C + [\overrightarrow{OP}]_C = [\overrightarrow{O'O}]_C + P_{B \to C}[\overrightarrow{OP}]_B$ [P e' la mat. di cambiamento di base]
$[O]_{\Omega'} = [\overrightarrow{O'O}]_C$
$[P]_\Omega = [\overrightarrow{OP}]_B, \;\; [P]_{\Omega'} = [\overrightarrow{O'P}]_C$
$[P]_{\Omega'} = [O]_{\Omega'} + P_{B \to C}[P]_\Omega$

□

Definition 1.4. Sia $\mathcal{A} = \mathcal{A}^n$. Il riferimento $\Omega = ((0, 0, \ldots, 0), \varepsilon)$, dove ε e' la base canonica, viene detto riferimento standard o canonico.

Proposition 1.5. *Sia $\mathcal{A} = \mathcal{A}^n$, e Ω il suo riferimento canonico. Preso un $P \in \mathcal{A}$, vale la seguente:*

$$[P]_\Omega = P$$

Proof:

$$P \underbrace{=}_{\varepsilon \text{ e' la base canonica}} [P]_\varepsilon$$
$$[P]_\Omega = [OP]_\varepsilon = [P]_\Omega - \underbrace{[O]_\Omega}_{=(0,0,\ldots,0)} = [P]_\Omega = P$$

□

1.2 Sottospazio affine

Dato uno spazio affine $(\mathcal{A}, \mathbf{V}, \rightarrow)$, un punto $P_0 \in \mathcal{A}$ e un sottospazio $W \subseteq \mathbf{V}$, nasce il sottospazio affine $S \leq \mathcal{A}$:

$$S = (P_0, W) := \left\{ Q \in \mathcal{A} : \ \overrightarrow{P_0Q} \in W \right\}$$

che viene detto *sottospazio passante per P_0 e parallelo a W*. W e' la giacitura del sottospazio.
Di sicuro $P_0 \in S$, perche' $P_0P_0 = \underline{0} \in W$.
Se $\dim W = 0$, allora $W = \{\underline{0}\}$ e quindi $S = \{P_0\}$. In questo caso, S si chiama punto.
Se $\dim W = 1$, S si dice retta.
Se $\dim W = 2$, S si dice piano.
Se $\dim W = \dim \mathbf{V} - 1$, S si dice iperpiano.

Proposition 1.6. *Sia $S = (P_0, W)$ un sottospazio affine di $(\mathcal{A}, \mathbf{V}, \rightarrow)$, allora $(S, W, \rightarrow)$ e' uno spazio affine.*

Proof:
As 2 e' verificato perche' stiamo usando sempre la stessa $\rightarrow$ dello spazio iniziale.

In $\mathcal{A}$, per **As 1**: $\forall P \in S, \ \forall v \in W \subseteq \mathbf{V} \ \ \exists! Q \in \mathcal{A} : \ \overrightarrow{PQ} = v \in W$
ma per definizione di S si ha che $Q \in S,$ quindi vale l'**As 1** per S :
$\forall P \in S, \ \forall v \in W \ \ \exists! Q \in S : \ \overrightarrow{PQ} = v$

Proposition 1.7. *In $\mathbf{V}_a$, sia $S = (v, W)$ un suo sottospazio, allora*

$$S = v + W$$

.
Si dice che S e' un traslato di W.

Proof:

$$S = \left\{ v' \in \mathcal{A} = \mathbf{V} \mid \overrightarrow{v'v} = v - v' \in W \right\}$$
$$v - v' \in W \Leftrightarrow v' - v \in W \Leftrightarrow v' - v = w \in W \Leftrightarrow v' = w + v$$
$$S = \{v + w \mid w \in W\}$$

Proposition 1.8. *Preso $P_1 \in S$, $(P_1, W) = (P_0, W)$. Quindi un sottospazio non determina univocamente P_0.*

***Proof*:**
$\langle 1 \rangle 1$. *Dim* $\subseteq$

$$Q \in (P_1, W) \Rightarrow \overrightarrow{P_1Q} \in W$$
$$\overrightarrow{P_1Q} = \overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_0Q}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0Q} = \underbrace{\overrightarrow{P_1Q}}_{\in W} + \underbrace{\overrightarrow{P_0P_1}}_{\in W \, per \, Hp} \in W \Leftrightarrow Q \in (P_0, W)$$

$\langle 1 \rangle 2$. *Dim* $\supseteq$
La dimostrazione e' simmetrica: basta usare la precedente, sostituendo a P_0 P_1 e viceversa.

Proposition 1.9. *Immediata conseguenza:*

$$\forall A, B \in S \;\; \overrightarrow{AB} \in W$$

, infatti

$$A \in S \Rightarrow (P_0, W) = (A, W), \; B \in S \Rightarrow \overrightarrow{AB} \in W$$

Proposition 1.10. *$v \in W$ e' un vettore che ha per estremi due punti di S.*

***Proof** :*

$$\begin{aligned} & P_0 \in S \\ & \exists! Q \in \mathcal{A} : \; P_0 Q = v \underbrace{\in}_{Hp} W \qquad \textit{[per } \textbf{\textit{As. 1}}\textit{]} \\ & \qquad \Rightarrow Q \in S \end{aligned}$$

Proposition 1.11. *Intersezione non vuota di sottospazi affini di $\mathcal{A}$ e' ancora un sottospazio affine di $\mathcal{A}$, ovvero:*

$$S_i = (P_i, W_i) \leq \mathcal{A} \;\; \forall i \in I$$

$$\bigcap_{i \in I} S_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i \in I} S_i = \left(P, \bigcap_{i \in I} W_i \right) \leq \mathcal{A}, \quad \textit{con } P \in \bigcap_{i \in I} S_i$$

Proof:

⟨1⟩1. Dim che $\bigcap_{i \in I} S_i \leq \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} & \bigcap_{i \in I} W_i \text{ e' un sottospazio vett. di } \mathbf{V} \;\; [\text{prop [AL,3.4.1,pg.17]}] \\ & \bigcap_{i \in I} S_i \neq \emptyset \Rightarrow \exists P \in S_i \;\; \forall i \in I \\ & \forall i \in I \; P \in S_i \underbrace{\Rightarrow}_{[1.8,\text{pg.3}]} \forall i \in I \; S_i = (P, W_i) \end{aligned}$$

⟨1⟩2. Dim. che $\bigcap_{i \in I} S_i = \left(P, \bigcap_{i \in I} W_i\right)$

$$Q \in \bigcap_{i \in I} S_i \Leftrightarrow \forall i \in I \; Q \in S_i \Leftrightarrow \forall i \in I \; \overrightarrow{PQ} \in W_i \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in \bigcap_{i \in I} W_i \Leftrightarrow Q \in \left(P, \bigcap_{i \in I} W_i \right)$$

□

1.3 Equazioni cartesiane

1.3.1 Dato il sottospazio

Sia $S = (P, W)$ un sottospazio affine di $(\mathcal{A}, \mathbf{V}, \rightarrow)$, con $\dim \mathcal{A} = n, \dim S = k$. Sia

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m = n - k$$

il sistema che rappresenta W rispetto alla base ε.
Fissato il riferimento $\Omega = (O, \varepsilon = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\})$, con $O \in \mathcal{A}$ arbitrario, le equazioni cartesiane di S sono:

$$(1)\ \ AX = A^t[P]_\Omega,$$
$$\text{con } (A^t[P]_\Omega)_{j1} = a_{j1}p_1 + a_{j2}p_2 + \cdots + a_{jn}p_n$$

Ovvero, se I e' l'insieme delle soluzioni del sistema (1) si ha

$$Q \in S \Leftrightarrow [Q]_\Omega \in I$$

Proof:
$\langle 1\rangle 1$. Dim. che $Q \in S \Rightarrow [Q]_\Omega \in I$

$$Q \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in W \Leftrightarrow A^t[\overrightarrow{PQ}]_\varepsilon = {}^t\underline{0}$$

$$\begin{cases} A^t[\overrightarrow{PQ}]_\varepsilon = {}^t\underline{0} \\ [\overrightarrow{PQ}]_\varepsilon = [Q]_\Omega - [P]_\Omega \end{cases} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix} = {}^t\underline{0}$$

$$\Leftrightarrow A^t([Q]_\Omega - [P]_\Omega) = {}^t\underline{0} \Leftrightarrow A^t[Q]_\Omega = A^t[P]_\Omega \Leftrightarrow [Q]_\Omega \in I$$

$\langle 1\rangle 2$. Dim. che $[Q]_\Omega \in I \Rightarrow Q \in S$
Basta procedere a ritroso.

□

1.3.2 Date le equazioni

In $(\mathcal{A}, \mathbf{V}, \rightarrow)$, con $\dim \mathcal{A} = n$, $P \in \mathcal{A}$, e riferimento $\Omega = (O, \varepsilon)$. Sia dato il sistema

$$A^tX = B\ \ (1)$$
$$A \in M^{m,n}(\mathbb{K}),\ \ B \in M^{m,1}(\mathbb{K})$$

se (1) ammette coordinate di punti di $\mathcal{A}$ come soluzioni, allora rappresenta un sottospazio affine S di $\mathcal{A}$, passante per uno dei punti le cui coordinate soddisfano (1), e giacente nel sottospazio definito da $A^tX = {}^t\underline{0}$, rispetto alla base ε, ovvero

$$Q \in S \Leftrightarrow [Q]_\Omega \in I$$

dove I sono le soluzioni del sistema. Inoltre, $\dim S = n - \rho(A)$.

Proof:
$\langle 1\rangle 1$. Dim $\Leftarrow$
Sia $[P]_\Omega$ una soluzione di (1), ovvero

$$A^t[P]_\Omega = B$$

Sia $[Q]_\Omega$ un'altra soluzione (non necessariamente distinta) di (1), ovvero

$$A^t[Q]_\Omega = B$$

, allora

$$A^t[P]_\Omega = A^t[Q]_\Omega \Leftrightarrow A^t[\overrightarrow{PQ}]_\varepsilon = \underline{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in \text{un certo } W \subseteq \mathbf{V}$$

quindi $\forall Q \in \mathcal{A}:\ \ [Q]_\Omega \in I\ \ \overrightarrow{PQ} \in W$.

⟨1⟩2. Dim $\Rightarrow$
Per Hp $A^tX = B$ e' l'equazione di S, quindi $Q \in S \Rightarrow A^t[Q]_\Omega = B$

□

1.3.3 Dato il sottospazio - II

Poniamoci nelle ipotesi di [1.3.1,pg.4]. Per trovare le equazioni cartesiane di S, conoscendo l'equazione di W e un punto $P \in S$, si puo' procedere in questo modo:

1. Calcoliamo $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ cosi'
$$^tB = A^t[P]_\Omega$$
2. Le equazioni cartesiane di S sono:
$$A^tX = B \quad (1)$$
con $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Proof:
Per la prop. [1.3.2,pg.5], la (1) e' il sistema del sottospazio S' che ha per giacitura il sottospazio definito da $A^tX = {}^t\underline{0}$, ovvero proprio W. Inoltre, S' passa per un punto Q t.c. $[Q]_\Omega$ e' soluzione di (1). Ma per costruzione, $[P]_\Omega$ e' soluzione di (1). Quindi $S' = (P, W) = S$

□

1.3.4 Data la base del sottospazio

Nelle ipotesi di [1.3.1,pg.4], sia $B = w_1, w_2, \ldots, w_k$ una base di W, dove $[w_i]_\varepsilon = (w_{1i}, w_{2i}, \ldots, w_{ni})$, $i = 1, 2, \ldots, k = \dim W$.
La condizione

$$\rho \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} & \ldots, & w_{n1} \\ w_{12} & w_{22} & \ldots, & w_{n2} \\ \vdots & & & \\ w_{1k} & w_{2k} & \ldots, & w_{nk} \\ x_1 - p_1 & x_2 - p_2 & \ldots & x_n - p_n \end{pmatrix} = k$$

dove $[P]_\Omega = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

da' le equazioni cartesiane di S: per Kroneker basta trovare un minore di ordine k non nullo e imporre che tutti i suoi orlati abbiano determinante nullo. Otteniamo cosi' $n - k$ equazioni.

Proof: Per definizione $Q \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in W$. Allora imponendo che $\overrightarrow{PQ} \in W$, cosi' come facevamo in [AL,4.14,pg.28] (nota[1]), otteniamo la tesi.

1.3.5 Equazioni parametriche

Nelle ipotesi di [1.3.1,pg.4], sia $B = w_1, w_2, \ldots, w_k$ una base di W, dove $[w_i]_\varepsilon = (w_{1i}, w_{2i}, \ldots, w_{ni})$, $i = 1, 2, \ldots, k = \dim W$. Il seguente sistema rappresenta S al variare dei parametri $t_1, t_2, \ldots, t_k$:

$$^tX = {}^t[P]_\Omega + \sum_{i=1}^{k} t_i {}^t[w_i]_\varepsilon$$

[1] ovvero imponiamo che le componenti di $\overrightarrow{PQ}$ siano c.l. delle componenti dei vettori base di W

in altri termini:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t_1 w_{11} + \cdots + t_k w_{1k} \\ \vdots \\ x_n = p_n + t_1 w_{n1} + \cdots + t_k w_{nk} \end{cases}$$

Proof:

Sia $Q \in S$, e $X = [Q]_\Omega$,

$Q \in S \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \in W \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = t_1 w_1 + t_2 w_2 + \cdots + t_k w_k$ (3)

$w_i = w_{1i} e_1 + w_{2i} e_2 + \ldots, w_{ni} e_n, \;\; i = 1, 2, \ldots, k$

$(3) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = t_1(w_{11} e_1 + w_{21} e_2 + \cdots + w_{n1} e_n) + \cdots + t_k(w_{1k} e_1 + w_{2k} e_2 + \ldots, w_{nk} e_n) =$

$= (t_1 w_{11} + \cdots + t_k w_{1k}) e_1 + \cdots + (t_1 w_{n1} + \cdots + t_k w_{nk}) e_n$

$[\overrightarrow{PQ}]_\varepsilon = (t_1 w_{11} + \cdots + t_k w_{1k}, \cdots, , t_1 w_{n1} + \cdots + t_k w_{nk})$ (4)

$[\overrightarrow{PQ}]_\varepsilon = [Q]_\Omega - [P]_\Omega$ (5)

$(4), (5) \Rightarrow [Q]_\Omega = X = [P]_\Omega + (t_1 w_{11} + \cdots + t_k w_{1k}, \cdots, , t_1 w_{n1} + \cdots + t_k w_{nk})$

Example 1.12. Se nello spazio standard volessimo trovare le equazioni cartesiane di una retta passante per un punto P e parallela a un vettore v, bastera' considerare il sottospazio $S = (P, \mathcal{L}(v))$, dove $\mathcal{L}(v)$ e' il sottospazio vettoriale generato da v: $\mathcal{L}(v) = \{av, \;\; a \in \mathbb{R}\}$, ovvero tutti i vettori paralleli a v. $S = (P, \mathcal{L}(v))$ e' proprio la retta, infatti:

$$S = (P, \mathcal{L}(v)) = \left\{ \text{punti Q} \mid \overrightarrow{PQ} \in \mathcal{L}(v) \right\}$$

1.3.6 Equazione dell'iperpiano

In $(\mathcal{A}, \mathbf{V}, \rightarrow)$, $\dim \mathcal{A} = n$, l'equazione di un qualsiasi iperpiano S e' del tipo

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

Ovvero, il suo numero di equazioni e' 1, infatti, $\dim \mathcal{A} - \dim S = 1$.

Example 1.13. Supponiamo di voler trovare l'equazione dell'iperpiano S che contiene il sottospazio T, di equazioni:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

allora, l'equazione di S e' una combinazione lineare delle equazioni di T, cioe':

$$\lambda_1(a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n - b_1) + \lambda_2(a_{21} x_1 + \cdots + a_{2n} x_n - b_2) + \cdots + \lambda_m(a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n - b_m) = 0 \quad (2)$$

Proof:

Infatti, $T \subseteq S \Rightarrow T = S \cap T$, ma allora si deve avere che

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ a_1x_2 + \cdots + a_nx_n = b \end{cases}$$

con $a_1x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ equazione di S

e quindi l'ultima equazione (quella di S) e' c.l. delle precedenti, ovvero,

$$a_1x_2 + \cdots + a_nx_n - b = \lambda_1(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1) + \cdots + \lambda_m(a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n - b_m) = 0$$

□

Ovviamente, al variare dei parametri $\lambda_i,\ i = 1, \dots, m$ otteniamo iperpiani diversi. Se avessimo altre condizioni, potremmo ridurre il numero dei parametri. Ad esempio, se sappiamo che $P \in S$, possiamo sostituire le coordinate di P, e ricavarci un parametro in funzione degli altri.
E' da notare che in $\mathcal{A}^3$, la (2) e' il fascio di piani che consideravamo in geometria I.

1.4 Congiungente

Siano $S_1 = (P_1, W_1),\ \ S_2 = (P_2, W_2)$ due sottospazi affini di $(\mathcal{A}, \mathbf{V}, \rightarrow)$.

Definition 1.14. La congiungente $\overline{S_1S_2}$ e' il piu' piccolo sottospazio affine di $\mathcal{A}$ che contiene $S_1 \cup S_2$, ovvero, sia S' un sottospazio, si ha $S_1 \cup S_2 \subseteq S' \Rightarrow \overline{S_1S_2} \subseteq S'$.
Grazie alla proposizione [1.11,pg.4], $\overline{S_1S_2}$ puo' essere pensato come

$$\overline{S_1S_2} = \bigcap_{i \in I} T_i$$

con $T_i \leq \mathcal{A} :\ S_1 \cup S_2 \subseteq T_i\ \ \forall i \in I$

Nota[2].

Theorem 1.15.

$$\overline{S_1S_2 \dots S_r} = \left(P_1,\ W_1 + W_2 + \cdots + W_r + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \dots, \overrightarrow{P_1P_r}\right)\right)$$

Proof:

Proof: Dimostriamo per $r = 2$.
Sia $Z = \text{giac}\overline{S_1S_2}$, e sia $Z' = W_1 + W_2 + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right)$

$\langle 1 \rangle 1$. Dim $\subseteq$
Poiche' $P_1 \in S_1 \subseteq S_1 \cup S_2 \subseteq \overline{S_1S_2}$ si ha $\overline{S_1S_2} = (P_1, Z)$.

$$w \in W_1 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{prop. [1.10,pg.4]}} \exists Q_1 \in S_1 :\ w = P_1Q_1$$

$$P_1, Q_1 \in S_1 \subseteq \overline{S_1S_2} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{prop. [1.9,pg.4]}} \overrightarrow{P_1Q_1} = w \in Z$$

$$(w \in W_1 \Rightarrow w \in Z) \Rightarrow W_1 \subseteq Z$$

[2] in effetti, il concetto di congiungente e' simile a quello di chiusura di un insieme (topologia) e a quello di gruppo generato da un insieme (algebra II)

analogamente si vede che $W_2 \subseteq Z$. Inoltre,

$$P_1, P_2 \subseteq S_1 \cup S_2 \subseteq \overline{S_1 S_2} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{prop. [1.9,pg.4]}} \overrightarrow{P_1 P_2} \in Z$$

Z e' un sottospazio vettoriale, quindi, $\overrightarrow{P_1 P_2} \in Z \Leftrightarrow \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}\right) \subseteq Z$

Poiche' $W_1 + W_2 + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}\right)$ e' il piu' piccolo sottospazio che contiene entrambi i tre addendi (vedi [AL,3.6.1,pg.18]), si ha

$$Z \supseteq W_1 + W_2 + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}\right) = Z'$$
$$P \in (P_1, Z') \Rightarrow \overrightarrow{P_1 P} \in Z' \subseteq Z \Rightarrow P \in \overline{S_1 S_2}$$
$$\overline{S_1 S_2} \supseteq \left(P_1,\ W_1 + W_2 + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}\right)\right)$$

$\langle 1 \rangle 2$. Dim $\supseteq$

$$P \in S_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1 P} \in W_1 \subseteq W_1 + W_2 + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}\right) \Rightarrow P \in \left(P_1,\ W_1 + W_2 + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}\right)\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_1 \subseteq \left(P_1,\ W_1 + W_2 + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}\right)\right)$$
$$\overrightarrow{P_1 P_2} \in \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}\right) \subseteq W_1 + W_2 + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}\right) = Z' \Rightarrow P_2 \in (P_1, Z') \Rightarrow (P_1, Z') = (P_2, Z')$$
$$P \in S_2 \Rightarrow \overrightarrow{P_2 P} \in W_2 \subseteq W_1 + W_2 + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}\right) \Rightarrow P \in (P_2, Z')$$
$$\Rightarrow S_2 \subseteq (P_2, Z')$$
$$S_1, S_2 \subseteq (P_2, Z') \underbrace{\Rightarrow}_{\text{per def. di congiungente}} \overline{S_1 S_2} \subseteq (P_2, Z') = (P_1, Z') = \left(P_1, W_1 + W_2 + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}\right)\right)$$

□

Corollary 1.16.

1. $\overline{S_1} = (P_1, W_1) = S_1$;
2. $\overline{S_1 S_2 S_3} = \overline{\overline{S_1 S_2} S_3}$
3. $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow \overline{S_1 S_2} = S_2$

Proof:
$\langle 1 \rangle 1$. Dim 2.

$$\overline{S_1 S_2} \underbrace{=}_{\text{[1.15,pg.8]}} \left(P_1, W_1 + W_2 + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}\right)\right)$$
$$\overline{\overline{S_1 S_2} S_3} = \left(P_1, \left(W_1 + W_2 + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}\right)\right) + W_3 + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_3}\right)\right)$$
$$= \left(P_1, W_1 + W_2 + W_3 + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}, \overrightarrow{P_1 P_3}\right)\right) = \overline{S_1 S_2 S_3}$$

$\langle 1 \rangle 2$. Dim 3.

$$\overline{S_1S_2} = (P_1, W_1 + W_2 + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right))$$

$S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow W_1 \subseteq W_2$, infatti

$$w_1 \in W_1 \Rightarrow \exists! Q_1 \in S_1 : \; W_1 = \overrightarrow{P_1Q_1}$$

$$P_1, Q_1 \in S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow P_1, Q_1 \in S_2 \Rightarrow \overrightarrow{P_1Q_1} \in W_2 \Rightarrow w_1 \in W_2$$

$$\begin{cases} W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_1 + W_2 = W_2 \\ P_1, P_2 \in S_2 \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} \in W_2 \end{cases} \Rightarrow W_2 + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right) = W_2$$

$$W_1 + W_2 + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right) = W_2 \Rightarrow \overline{S_1S_2} = (P_1, W_2) \underbrace{=}_{P_1 \in S_2} S_2$$

□

Corollary 1.17. *Siano $P_1, P_2, \ldots, P_r \in \mathcal{A}$. P_i lo possiamo considerare come il sottospazio affine $P_i = (P_i, \{\underline{0}\})$. Si ha:*

$$\overline{P_1P_2 \ldots P_r} = \left(P_1, \; \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r}\right)\right)$$

Proof:

Dal thm [1.15,pg.8]:

$$\begin{aligned} \overline{P_1P_2 \ldots P_r} &= \left(P_1, \; \{\underline{0}\} + \{\underline{0}\} + \cdots + \{\underline{0}\} + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r}\right)\right) \\ &= \left(P_1, \; \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r}\right)\right) \end{aligned}$$

□

Definition 1.18.
I punti $P_1, P_2, \dots, P_r \in \mathcal{A}$ si dicono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow \dim \overline{P_1 P_2 \dots P_r} = r-1$, ovvero se la congiungente ha la dimensione massima.
Ad esempio: due punti sono l.i quando individuano una retta, tre punti sono l.i quando individuano un piano, ...
La condizione $\dim \overline{P_1 P_2 \dots P_r} = r-1$, equivale alla l.i. dei vettori $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \dots, \overrightarrow{P_1P_r}$.
Diamo queste altre definizioni:

$$P_1, P_2, \dots, P_r \text{ sono allineati } \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \dim \overline{P_1 P_2 \dots P_r} \leq 1$$
$$P_1, P_2, \dots, P_r \text{ sono complanari } \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \dim \overline{P_1 P_2 \dots P_r} \leq 2$$

Theorem 1.19.

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2} \in W_1 + W_2$$

Proof:
$\langle 1 \rangle 1$. Dim $\Rightarrow$

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists P \in S_1, S_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P} \in W_1 \ \wedge \ \overrightarrow{P_2P} \in W_2 \quad (1)$$
$$\overrightarrow{PP_2} = -\overrightarrow{P_2P} \in W_2 \Rightarrow \overrightarrow{PP_2} \in W_2$$
$$\overrightarrow{P_1P_2} = \underbrace{\overrightarrow{P_1P}}_{\in W_1} + \underbrace{\overrightarrow{PP_2}}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$$

$\langle 1 \rangle 2$. Dim $\Leftarrow$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \in W_1 + W_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2} = w_1 + w_2 \in W_1 + W_2 \underbrace{\Rightarrow}_{[1.9,\text{pg.4}]} \exists P \in S_1 : w_1 = \overrightarrow{P_1P}$$
$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1P} + w_2 \Leftrightarrow \underbrace{-w_2}_{\in W_2} = \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{P_2P} \in W_2$$
$$\overrightarrow{P_2P} \in W_2 \Rightarrow P \in S_2$$
$$P \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$$

□

Corollary 1.20.

$$\overline{S_1S_2} = (P_1, W_1 + W_2) \Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$$

Proof:

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \underbrace{\Leftrightarrow}_{[1.19,\text{pg.11}]} \overrightarrow{P_1P_2} \in W_1 + W_2 \Leftrightarrow \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right) \subseteq W_1 + W_2 \Leftrightarrow W_1 + W_2 = W_1 + W_2 + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right)$$
$$\overline{S_1S_2} = \left(P_1, W_1 + W_2 + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right)\right) = (P_1, W_1 + W_2)$$

□

Theorem 1.21.

$$\dim \overline{S_1S_2} = \begin{cases} \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2 & S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \\ \dim(W_1 + W_2) + 1 & S_1 \cap S_2 = \emptyset \end{cases}$$

Proof:
CASE: $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$
Per il thm [1.15,pg.8],
$$\overline{S_1 S_2} = \left(P_1,\ W_1 + W_2 + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}\right)\right) \underbrace{=}_{[1.20,\text{pg.}11]} (P_1,\ W_1 + W_2) \Rightarrow \dim \overline{S_1 S_2} = \dim(W_1 + W_2)$$
CASE: $S_1 \cap S_2 = \emptyset$
Per il thm [1.15,pg.8],
$$\overline{S_1 S_2} = \left(P_1,\ W_1 + W_2 + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}\right)\right)$$
$$\dim \overline{S_1 S_2} = \dim(W_1 + W_2 + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}\right)) =$$
$$\underbrace{=}_{\text{thm [AL,5.4,pg.32]}} \dim(W_1 + W_2) + \dim \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}\right) - \dim(W_1 + W_2) \cap \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}\right) =$$
$$S_1 \cap S_2 = \emptyset \underbrace{\Rightarrow}_{[1.20,\text{pg.}11]} \overrightarrow{P_1 P_2} \notin W_1 + W_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (W_1 + W_2) \cap \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}\right) = \emptyset \Rightarrow \dim(W_1 + W_2) \cap \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}\right) = 0$$
$$= \dim(W_1 + W_2) + \dim \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}\right) = \dim(W_1 + W_2) + 1$$
□

1.5 Spazi paralleli

Siano $S_1 = (P_1, W_1)$, $S_2 = (P_2, W_2)$ due sottospazi affini di $(\mathcal{A}, \mathbf{V}, \rightarrow)$, con $0 < \dim S_1 \leq \dim S_2$.

Definition 1.22.

$$S_1 \parallel S_2 \Leftrightarrow W_1 \subseteq W_2 \vee W_2 \subseteq W_1$$

Proposition 1.23.

$$\dim S_1 = \dim S_2,\ S_1 \parallel S_2 \ \Leftrightarrow\ W_1 = W_2$$

Proof:
⟨1⟩1. Dim ⇒
$\dim S_1 = \dim S_2 \Leftrightarrow \dim W_1 = \dim W_2$ (1)
$S_1 \parallel S_2 \Leftrightarrow W_1 \subseteq W_2 \vee W_2 \subseteq W_1$
supponiamo $W_1 \subseteq W_2$ (2)
(1), (2) $\underbrace{\Rightarrow}_{[\text{AL,}4.10.2,\text{pg.}26]}$ $W_1 = W_2$
⟨1⟩2. Dim ⇐
Per definizione.
□

Theorem 1.24.

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset,\ \dim S_1 \leq \dim S_2,\quad S_1 \parallel S_2 \quad \Leftrightarrow \quad S_1 \subseteq S_2$$

Ad esempio, in $\mathcal{A}^3$, se una retta si incontra con un piano, e il piano e la retta sono paralleli, allora la retta e' contenuta nel piano.

Proof:
⟨1⟩1. Dim ⇒

$$S_1 \parallel S_2, \dim S_1 \leq \dim S_2 \Rightarrow W_1 \subseteq W_2$$
$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists Q \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow S_1 = (Q, W_1), \;\; S_2 = (Q, W_2)$$
$$P \in S_1 = (Q, W_1) \Rightarrow \overrightarrow{QP} \in W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow P \in S_2$$

⟨1⟩2. Dim ⇐

$$S_1 \text{ sottospazio } \Rightarrow S_1 \neq \emptyset; S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$$
$$w \in W_1 \underbrace{\Rightarrow}_{[1.10,\text{pg.}4]} \exists P \in S_1 : \; \overrightarrow{P_1 P} = w$$
$$P_1, P \in S_1 \subseteq S_2 \underbrace{\Rightarrow}_{[1.9,\text{pg.}4]} \overrightarrow{P_1 P} = w \in W_2$$
$$W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow \dim W_1 \leq \dim W_2 \Leftrightarrow \dim S_1 \leq \dim S_2$$

□

Corollary 1.25. *Supponendo che $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, $S_1 \parallel S_2$,*

$$\dim S_1 = \dim S_2 \Leftrightarrow S_1 = S_2$$

Proof:

per il thm di prima: $S_1 \subseteq S_2$, $S_2 \subseteq S_1 \Rightarrow S_1 = S_2$

Corollary 1.26. *Il V postulato di Euclide e' verificato.*
Dato $S \leq \mathcal{A}, P \in \mathcal{A}$,

$$\exists! T \leq \mathcal{A} : \; \dim T = \dim S, \; P \in T, \;\; T \parallel S$$

Proof:
Sia $S = (P_0, W)$.
Poiche' $\dim T = \dim S$, per la proposizione [1.23,pg.12], la giacitura di T deve essere proprio W. Allora, poiche' $P \in T$, si ha $T = (P, W)$.

□

Theorem 1.27. *Supponendo che $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $\dim S_1 \leq \dim S_2$ si ha:*

$$S_1 \parallel S_2 \Leftrightarrow \dim \overline{S_1 S_2} = \dim S_2 + 1$$

Proof:
⟨1⟩1. Dim ⇒

$$S_1 \parallel S_2 \Rightarrow W_1 \subseteq W_2 \;\; (1)$$
$$\dim \overline{S_1 S_2} \underbrace{=}_{[1.21,\text{pg.}11]} \dim(W_1 + W_2) + 1 \underbrace{=}_{(1)} \dim(W_2) + 1 = \dim S_2 + 1$$

⟨1⟩2. Dim ⇐

$$S_1 \cap S_2 = \emptyset \underbrace{\Rightarrow}_{[1.21,\text{pg.}11]} \dim \overline{S_1 S_2} \dim(W_1 + W_2) + 1 \quad (2)$$

$$\text{Hp} \Rightarrow \dim \overline{S_1 S_2} - 1 = \dim S_2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{(2)} \dim(W_1 + W_2) = \dim S_2 = \dim W_2 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{thm [AL,5.4,pg.32]}} \quad \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2 = \dim W_2 \Leftrightarrow \dim W_1 = \dim W_1 \cap W_2$$

$$\Rightarrow W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow S_1 \parallel S_2$$

□

Proposition 1.28. *Dati* $S_1 = (P_1, W),\ S_2 = (P_2, W)$ *si ha*

$$S_1 = S_2 \vee S_1 \cap S_2 = \emptyset$$

ovvero, sottospazi aventi la stessa giacitura coincidono o sono disgiunti.

Proof:

$$\dim S_1 = \dim W = \dim S_2$$
$$W = W \Rightarrow S_1 \parallel S_2$$
$$\text{Se } S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \underbrace{\Rightarrow}_{[1.25,\text{pg.}13]} S_1 = S_2$$
$$\text{altrimenti } S_1 \cap S_2 = \emptyset$$

□

Definition 1.29. Dati $S_1, S_2 \leq \mathcal{A}$,

$$S_1, S_2 \text{ si dicono sghembi } \Leftrightarrow S_1 \nparallel S_2,\ \ S_1 \cap S_2 = \emptyset$$
$$S_1, S_2 \text{ si dicono incidenti } \Leftrightarrow S_1 \nparallel S_2,\ \ S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$$

1.6 Proiezione

Siano $S, T \leq \mathcal{A}$ con $\dim \mathcal{A} = n,\ \dim S = s,\ \dim T = t$.

Lemma 1.30.

$$S \cap T \neq \emptyset \Rightarrow \dim S + \dim T - \dim \mathcal{A} \leq \dim(S \cap T) \leq \min\{\dim S, \dim T\}$$

Proof:
Intanto,

$$S \cap T \neq \emptyset \underbrace{\Rightarrow}_{[1.11,\text{pg.}4]} S \cap T \leq \mathcal{A}$$

Per il thm [1.3.1,pg.4], il sistema cartesiano di S ha $n - s$ equazioni, quello di T ne ha $n - t$. Il sistema cartesiano di $S \cap T$ comprende semplicemente le equazioni del sistema di S e di T, infatti,

$$P \in S \cap T \Leftrightarrow P \in S \ \wedge \ P \in T \ \Leftrightarrow\ [P] \text{ soddisfano il sistema di S e il sistema di T}$$

Ovviamente non tutte le $(n - s) + (n - t)$ equazioni del sistema di $S \cap T$ sono l.i. Percio' possiamo solo affermare che il rango r della matrice dei coefficienti e' t.c.:

$$r \leq (n - s) + (n - t) = 2n - (s + t) \quad (1)$$

Sappiamo che $\dim S\cap T = n-r$, quindi per la (1)

$$\dim S\cap T = n-r \geq n-(2n-(s+t)) = s+t-n = \dim S + \dim T - \dim \mathcal{A}$$

Infine,

$$S\cap T \subseteq S,\ \ S\cap T\subseteq T \Rightarrow \dim S\cap T \leq \dim S,\ \ \dim S\cap T \leq \dim T$$

In conclusione:

$$\dim S + \dim T - \dim \mathcal{A} \leq \dim(S\cap T) \leq \min\{\dim S, \dim T\}$$

□

Theorem 1.31. *Dati $S,T \leq \mathcal{A}$ di giacitura U,W, si ha*

$$S\cap T \neq \emptyset,\ \dim(S\cap T) = \dim S + \dim T - \dim \mathcal{A} \ \Leftrightarrow\ \mathbf{V} = U+W$$

Proof:

⟨1⟩1. Dim $\Rightarrow$

$$S\cap T \neq \emptyset \underbrace{\Rightarrow}_{[1.11,\text{pg.}4]} \dim S\cap T = \dim U\cap W \quad (1)$$

$$\dim \mathcal{A} = \dim \mathbf{V},\ \dim S = \dim U,\ \dim T = \dim W \quad (2)$$

$$\dim(S\cap T) = \dim S + \dim T - \dim \mathcal{A} \Leftrightarrow \dim S + \dim T - \dim(S\cap T) = \dim \mathcal{A} \underbrace{\Leftrightarrow}_{(1),(2)}$$

$$\Leftrightarrow \dim U + \dim W - \dim(U\cap W) = \dim \mathbf{V}$$

$$\Leftrightarrow \dim \mathbf{V} = \dim U + \dim W - \dim(U\cap W) \underbrace{=}_{\text{Grassman [AL,5.4,pg.32]}} \dim(U+W)$$

$$\Leftrightarrow \dim \mathbf{V} = \dim(U+W) \quad (3)$$

$$U+W\subseteq \mathbf{V},\ (3) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{prop. [AL,4.10.2,pg.26]}} \mathbf{V} = U+W$$

⟨1⟩2. Dim $\Leftarrow$

Se per assurdo $S\cap T = \emptyset$, allora

$$S\cap T = \emptyset \Rightarrow \dim \overline{ST} = \dim(U+W)+1 \underbrace{=}_{\text{Hp}} \dim \mathbf{V} + 1 = \dim \mathcal{A} + 1$$

$$\overline{ST} \leq \mathcal{A} \Rightarrow \dim \overline{ST} \leq \dim \mathcal{A}$$

assurdo.

Quindi $S\cap T \neq \emptyset$. A questo punto basta procedere a ritroso nel passo precedente.

□

Corollary 1.32.

$$\mathbf{V} = U\oplus W \Rightarrow \dim S\cap T = 0$$

ovvero $S\cap T$ e' un punto. In altre parole, se S,T non sono paralleli, e la somma delle loro giaciture e' una somma diretta che da' tutto $\mathbf{V}$, allora S,T si incontreranno in un punto.

Proof:

$$\mathbf{V} = U\oplus W \underbrace{\Rightarrow}_{\text{prop [AL,3.7.1,pg.19]}} \mathbf{V} = U+W \ \wedge\ U\cap W = \{\emptyset\}$$

$$\mathbf{V} = U+W \underbrace{\Rightarrow}_{[1.31,\text{pg.}15]} S\cap T \neq 0 \underbrace{\Rightarrow}_{[1.11,\text{pg.}4]} \dim S\cap T = \dim U\cap W \underbrace{=}_{U\cap W = \underline{0}} 0$$

□

Example 1.33. Dal precedente teorema segue che due rette non parallele in un piano si incontrano in un unico punto.

Definition 1.34. Siano $S = (P_0, U), T = (P_1, W) \leq \mathcal{A}$, t.c. $V = U \oplus W$. Definiamo la seguente applicazione:

$$p_{S,T} : \mathcal{A} \longrightarrow S$$
$$p_{S,T}(P) = Q, \quad \text{dove } \{Q\} = (P, W) \cap S$$

la proposizione [1.26,pg.13] assicura che $(P, W) \leq \mathcal{A}$ e' unico, inoltre il cor [1.32,pg.15] assicura che $(P, W) \cap S = \{Q\}$.
In poche parole, stiamo prendendo il punto P e lo stiamo proiettando nel sottospazio affine S parallelamente al sottospazio T.

Example 1.35. In $\mathcal{A}^3$ consideriamo

$$S = (P_0, \mathcal{L}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})),\ T = (P_1, \mathcal{L}(\overrightarrow{u})),\ \text{t.c. } \mathcal{A}^3 = \mathbf{V} = S \oplus T$$

Ovvero, S e' un piano, T una retta e non sono paralleli tra loro.
$p_{S,T}(P)$ e', in questo caso, il punto d'intersezione con S della retta parallela a T e passante per P.

1.7 Teoremi classici

Lemma 1.36. *In un qualsiasi spazio affine $\mathcal{A}$ di dimensione 2, date le tre rette r_1, r_2, s, t tali che*

$$r_1 \neq r_2 \qquad\qquad s \nparallel r_1,\ \ s \nparallel r_2$$
$$P \in s \cap r_1 \cap r_2$$
$$t \parallel s,\ t \neq s$$

si ha

$$t \cap r_1 \neq t \cap r_2$$

Proof:
Intanto, se W_1, W_2 sono rispettivamente la giacitura di r_1, r_2, si ha

$$\dim W_1 = \dim W_2 = 1$$
$$P \in r_1 \Rightarrow r_1 = (P, W_1)$$
$$P \in r_2 \Rightarrow r_2 = (P, W_2)$$

Supponiamo per assurdo $t \cap r_1 = t \cap r_2$, allora

$$t \cap r_1 = t \cap r_2 \Rightarrow r_1 = r_2 \vee t = s \vee \exists Q \in t \cap r_1 \cap r_2$$

Ser per assurdo $P = Q$, allora

$$P \in s \Rightarrow s = (P, W_3)$$
$$\begin{cases} P = Q \in t \\ t \parallel s \end{cases} \Rightarrow t = (P, W_3)$$
$$t = s$$

assurdo. Quindi $P \neq Q$.
Si ha

$$\exists Q \in t \cap r_1 \cap r_2$$

$$Q \in r_1,\ P \in r_1 \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \in W_1 \underbrace{\Rightarrow}_{\dim W_1 = 1,\ P \neq Q} W_1 = \mathcal{L}\left(\overrightarrow{PQ}\right)$$

$$P \in r_1 \Rightarrow r_1 = (P, W_1) = \left(P, \mathcal{L}\left(\overrightarrow{PQ}\right)\right) \underbrace{=}_{[1.17,\text{pg.}10]} \overline{PQ}$$

$$r_1 = \overline{PQ}$$

analogamente

$$Q \in r_2,\ P \in r_2 \Rightarrow \overline{PQ} = r_2$$

Ma allora $r_2 = r_1$, il che' e' assurdo contro Hp.

□

1.7.1 Teorema di Talete

Theorem 1.37. *In un qualsiasi spazio affine $\mathcal{A}$ di dimensione 2, date tre rette $s_i,\ \ i = 1, 2, 3$ distinte e parallele, e due rette $r_i,\ i = 1, 2$, non parallele a s_i, siano dati i seguenti punti:*

$$P_{ij} = r_i \cap s_j,\ i = 1, 2,\ j = 1, 2, 3$$

se

$$\overrightarrow{P_{11}P_{13}} = k\overrightarrow{P_{11}P_{12}}$$

allora

$$\overrightarrow{P_{21}P_{23}} = k\overrightarrow{P_{21}P_{22}}$$

Proof:
Se $r_1 = r_2$ allora il teorema e' vero. Supponiamo quindi $r_1 \neq r_2$
Se $P_{11} = P_{21}$, allora per il lemma [1.36,pg.16], basta scambiare s_1 con s_2 o s_3, e avremo $P_{11} \neq P_{21}$.
Quindi, possiamo supporre $P_{11} \neq P_{21}$. Procediamo,

$$\begin{cases} P_{11}, P_{21} \in s_1 \\ P_{12}, P_{22} \in s_2 \\ s_1 \parallel s_2 \end{cases} \Rightarrow \exists \lambda' \neq 0 :\ \overrightarrow{P_{12}P_{22}} = \lambda' \overrightarrow{P_{11}P_{21}} = \lambda \overrightarrow{P_{11}P_{21}} + \overrightarrow{P_{11}P_{21}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{P_{12}P_{22}} - \overrightarrow{P_{11}P_{21}} = \lambda \overrightarrow{P_{11}P_{21}}, \quad (1)$$

$$\overrightarrow{P_{21}P_{22}} = \overrightarrow{P_{21}P_{12}} + \overrightarrow{P_{12}P_{22}} = \overrightarrow{P_{21}P_{11}} + \overrightarrow{P_{11}P_{12}} + \overrightarrow{P_{12}P_{22}}$$

$$\overrightarrow{P_{21}P_{22}} - \overrightarrow{P_{11}P_{12}} = \overrightarrow{P_{12}P_{22}} - \overrightarrow{P_{11}P_{21}} \underbrace{=}_{(1)} \lambda \overrightarrow{P_{11}P_{21}}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_{21}P_{22}} - \overrightarrow{P_{11}P_{12}} = \lambda \overrightarrow{P_{11}P_{21}} \\ \overrightarrow{P_{12}P_{22}} - \overrightarrow{P_{11}P_{21}} = \lambda \overrightarrow{P_{11}P_{21}} \end{cases} \quad (2)$$

Analogamente si vede che

$$\overrightarrow{P_{21}P_{23}} - \overrightarrow{P_{11}P_{13}} = \overrightarrow{P_{13}P_{23}} - \overrightarrow{P_{11}P_{21}} = \mu \overrightarrow{P_{11}P_{21}} \quad (3)$$

Case: $\lambda = 0$

$$\lambda = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{(2)} \begin{cases} \overrightarrow{P_{21}P_{22}} = \overrightarrow{P_{11}P_{12}} \\ \overrightarrow{P_{12}P_{22}} = \overrightarrow{P_{11}P_{21}} \end{cases} \quad (4)$$

$$\overrightarrow{P_{12}P_{11}} = \overrightarrow{P_{22}P_{21}} \Rightarrow r_1 \parallel r_2$$

Se per assurdo $\mu \neq 0$ si avrebbe per la (3):

$$\begin{cases} r_1 \parallel r_2 \Rightarrow \overrightarrow{P_{21}P_{23}} = h\overrightarrow{P_{11}P_{13}} \\ s_1 \parallel s_2 \Rightarrow \overrightarrow{P_{13}P_{23}} = k\overrightarrow{P_{11}P_{21}} \end{cases}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{(3)}(h-1)\overrightarrow{P_{11}P_{13}} = (k-1)\overrightarrow{P_{11}P_{21}} = \mu\overrightarrow{P_{11}P_{21}} \Leftrightarrow \frac{h-1}{\mu}\overrightarrow{P_{11}P_{13}} = \overrightarrow{P_{11}P_{21}} \Rightarrow r_1 \parallel s_1$$

assurdo contro l'Hp $r_1 \nparallel s_1$. Quindi deve essere $\mu = 0$, allora per la (3)

$$\overrightarrow{P_{21}P_{23}} = \overrightarrow{P_{11}P_{13}}, \quad \overrightarrow{P_{13}P_{23}} = \overrightarrow{P_{11}P_{21}}$$

$$\overrightarrow{P_{21}P_{23}} = \overrightarrow{P_{11}P_{13}} \underbrace{=}_{\text{Hp}} k\overrightarrow{P_{11}P_{12}} \underbrace{=}_{(4)} k\overrightarrow{P_{21}P_{22}}$$

che e' la tesi.

Case: $\lambda \neq 0$

In questo caso $r_1 \nparallel r_2$. Infatti, se per assurdo lo fossero, si avrebbe

$$\exists t \neq 0 : \ \overrightarrow{P_{21}P_{22}} = t\overrightarrow{P_{11}P_{12}} \underbrace{\Rightarrow}_{(2)} (t-1)\overrightarrow{P_{11}P_{12}} = \lambda\overrightarrow{P_{11}P_{21}} \Rightarrow \frac{t-1}{\lambda}\overrightarrow{P_{11}P_{12}} = \overrightarrow{P_{11}P_{21}} \Rightarrow r_1 \parallel s_1$$

assurdo. Percio', $r_1 \nparallel r_2$.

Dalle (2), (3),

$$\overrightarrow{P_{21}P_{23}} - \overrightarrow{P_{11}P_{13}} = \mu\lambda^{-1}(\overrightarrow{P_{21}P_{22}} - \overrightarrow{P_{11}P_{12}}) \quad (5)$$

Inoltre,

$$\overrightarrow{P_{11}P_{13}} = k\overrightarrow{P_{11}P_{12}} \quad [\text{per Hp}]$$

$$P_{21}, P_{22}, P_{23} \in r_2 \Rightarrow \overrightarrow{P_{21}P_{23}} = k'\overrightarrow{P_{21}P_{22}} \quad (T)$$

e quindi

$$\overrightarrow{P_{21}P_{23}} - \overrightarrow{P_{11}P_{13}} = k'\overrightarrow{P_{21}P_{22}} - k\overrightarrow{P_{11}P_{12}} \quad (6)$$

sottraendo membro a membro dalla (5) la (6) abbiamo

$$\underline{0} = (\mu\lambda^{-1} - k')\overrightarrow{P_{21}P_{22}} + (k - \mu\lambda^{-1})\overrightarrow{P_{11}P_{12}} \quad (7)$$

e poiche' $r_1 \nparallel r_2$, $\overrightarrow{P_{21}P_{22}}, \overrightarrow{P_{11}P_{12}}$ sono l.i, ovvero

$$(7) \Leftrightarrow \begin{cases} \mu\lambda^{-1} - k' = 0 \\ k - \mu\lambda^{-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k' = \mu\lambda^{-1} = k \Rightarrow k = k'$$

Quindi, dalla (T) si ha la tesi:

$$\overrightarrow{P_{21}P_{23}} = k\overrightarrow{P_{21}P_{22}}$$

□

1.7.2 Teorema di Pappo

Lemma 1.38. *Hp:*

$$\begin{aligned}&\dim \mathcal{A} = 2,\ r_i, s_i \text{ rette } i = 1,2\\ &r_1 \parallel r_2\\ &s_1 \nparallel r_1\\ &s_2 \parallel s_1\\ &P_{ij} = r_i \cap s_j \ \ i = 1,2\end{aligned}$$

Ts:

$$\overrightarrow{P_{11}P_{21}} = \overrightarrow{P_{12}P_{22}}$$

Proof:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{P_{11}P_{21}} = \overrightarrow{P_{11}P_{22}} + \overrightarrow{P_{22}P_{21}} = \overrightarrow{P_{11}P_{12}} + \overrightarrow{P_{12}P_{22}} + \overrightarrow{P_{22}P_{21}}\\ &\overrightarrow{P_{11}P_{21}} - \overrightarrow{P_{12}P_{22}} = \overrightarrow{P_{11}P_{12}} - \overrightarrow{P_{21}P_{22}}\\ &r_1 \parallel r_2 \Rightarrow \overrightarrow{P_{11}P_{21}} = \lambda \overrightarrow{P_{12}P_{22}}\\ &s_1 \parallel s_2 \Rightarrow \overrightarrow{P_{11}P_{12}} = \mu \overrightarrow{P_{21}P_{22}}\end{aligned}$$

dalle ultime tre segue

$$(\lambda - 1)\overrightarrow{P_{12}P_{22}} = (\mu - 1)\overrightarrow{P_{21}P_{22}} \Leftrightarrow k\overrightarrow{P_{12}P_{22}} = \overrightarrow{P_{21}P_{22}} \ \ (1)$$

$$\begin{cases} r_2 \nparallel s_2 \\ (1) \end{cases} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \overrightarrow{P_{11}P_{21}} = \overrightarrow{P_{12}P_{22}}$$

Nota[3]

□

Theorem 1.39. *In un qualsiasi spazio affine $\mathcal{A}$ di dimensione 2, date due rette r_1, r_2, e i punti $P_{ji} \in r_j,\ i = 1,2,3,\ j = 1,2$, distinti fra loro e tutti diversi da $O = r_1 \cap r_2$ (se esiste), tali che:*

$$\overline{P_{11}P_{22}} \parallel \overline{P_{12}P_{23}} \ \ (Hp1)$$
$$\overline{P_{21}P_{12}} \parallel \overline{P_{22}P_{13}} \ \ (Hp2)$$

si ha che

$$s_1 = \overline{P_{11}P_{21}} \parallel \overline{P_{13}P_{23}} = s_2$$

Proof:

Case: $r_1 \nparallel r_2$

[3] nella (1) abbiamo diviso per $\mu - 1$. Se $\mu - 1 = 0$ la divisione non sarebbe stata necessaria, poiche' per la prop. del parallelogramma avremmo ottenuto la tesi.

$$P_{21}, P_{22} \in r_2 \Rightarrow \overrightarrow{OP_{21}} = k\overrightarrow{OP_{22}} \quad (1)$$
$$\begin{cases} \overrightarrow{OP_{21}} = k\overrightarrow{OP_{22}} \\ Hp2 \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{Talete[1.37,\text{pg.}17]} \overrightarrow{OP_{12}} = k\overrightarrow{OP_{13}} \quad (2)$$

$$P_{11}, P_{12} \in r_1 \Rightarrow \overrightarrow{OP_{11}} = h\overrightarrow{OP_{12}} \quad (3)$$
$$\begin{cases} \overrightarrow{OP_{11}} = h\overrightarrow{OP_{12}} \\ Hp1 \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{Talete[1.37,\text{pg.}17]} \overrightarrow{OP_{22}} = h\overrightarrow{OP_{23}} \quad (4)$$

Consideriamo due vettori di s_1 e s_2:

$$\overrightarrow{P_{11}P_{21}} = -\overrightarrow{P_{21}P_{11}} = -(\overrightarrow{P_{21}O} + \overrightarrow{OP_{11}}) = \overrightarrow{OP_{21}} - \overrightarrow{OP_{11}} \underbrace{=}_{(1),(3)} k\overrightarrow{OP_{22}} - h\overrightarrow{OP_{12}} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{P_{13}P_{23}} = -\overrightarrow{P_{23}P_{13}} = -(\overrightarrow{P_{23}O} + \overrightarrow{OP_{13}}) = \overrightarrow{OP_{23}} - \overrightarrow{OP_{13}} \underbrace{=}_{(2),(4)} h^{-1}\overrightarrow{OP_{22}} - k^{-1}\overrightarrow{OP_{12}} \quad (6)$$

$(5), (6) \Rightarrow \overrightarrow{P_{11}P_{21}} = hk\overrightarrow{P_{13}P_{23}} \Rightarrow s_1 \parallel s_2$

Case: $r_1 \parallel r_2$

In questo caso, per il lemma [1.38,pg.19] abbiamo

$$\overrightarrow{P_{22}P_{23}} = \overrightarrow{P_{11}P_{12}}$$
$$\overrightarrow{P_{21}P_{22}} = \overrightarrow{P_{12}P_{13}}$$

sommando membro a membro:

$$\overrightarrow{P_{21}P_{23}} = \overrightarrow{P_{11}P_{13}} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{parallelogramma}} \overrightarrow{P_{21}P_{11}} = \overrightarrow{P_{23}P_{13}} \Rightarrow s_1 \parallel s_2$$

□

1.7.3 Teorema di Desargues

Theorem 1.40. *In un qualsiasi spazio affine $\mathcal{A}$ di dimensione 2, date due terne di punti non allineati: (P_{j1}, P_{j2}, P_{j3}), $j = 1, 2$, se*

$$\overline{P_{11}P_{12}} \parallel \overline{P_{21}P_{22}},\ \overline{P_{12}P_{13}} \parallel \overline{P_{22}P_{23}},\ \overline{P_{13}P_{11}} \parallel \overline{P_{23}P_{21}}$$

si ha che le rette

$$\overline{P_{1i}P_{2i}}, i = 1, 2, 3$$

sono parallele o incidenti in uno stesso punto.

Proof:

Supponiamo che $\overline{P_{1i}P_{2i}}, i = 1, 2, 3$ non siano parallele (altrimenti la tesi e' verificata). Allora possiamo porre $\{O\} = \overline{P_{11}P_{21}} \cap \overline{P_{12}P_{22}}$.

Per il thm di Talete ([1.37,pg.17]) applicato a $\overline{P_{11}P_{12}}$, $\overline{P_{21}P_{22}}$, abbiamo

$$O, P_{11}, P_{21} \in \overline{P_{11}P_{21}} \Rightarrow k\overrightarrow{OP_{11}} = \overrightarrow{OP_{21}}$$
$$\begin{cases} k\overrightarrow{OP_{11}} = \overrightarrow{OP_{21}} \\ \overline{P_{11}P_{12}} \parallel \overline{P_{21}P_{22}} \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Talete [1.37,pg.17]}} k\overrightarrow{OP_{12}} = \overrightarrow{OP_{22}} \quad (1)$$

Sia $\{C_2\} = \overline{OP_{13}} \cap \overline{P_{21}P_{23}}$.

$$\begin{cases} \overline{P_{11}P_{13}} \parallel \overline{P_{21}P_{23}} \\ k\overrightarrow{OP_{11}} = \overrightarrow{OP_{21}} \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Talete [1.37,pg.17]}} k\overrightarrow{OP_{13}} = \overrightarrow{OC_2} \quad (2)$$

Poniamo $\{C_3\} = \overline{OP_{13}} \cap \overline{P_{22}P_{23}}$,

$$\begin{cases} \overline{P_{12}P_{13}} \parallel \overline{P_{22}P_{23}} \\ k\overrightarrow{OP_{12}} = \overrightarrow{OP_{22}} \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Talete [1.37,pg.17]}} k\overrightarrow{OP_{13}} = \overrightarrow{OC_3} \quad (3)$$

Allora, dalla (2) e (3), $\overrightarrow{OC_3} = \overrightarrow{OC_2}$,

$\overrightarrow{OC_3} = \overrightarrow{OC_2} \Rightarrow C_2 = C_3 \Rightarrow \overline{OC_2} = \overline{OC_3} \underbrace{=}_{(3)} \overline{OP_{13}}$ (4)

$C_2 = C_3 \Leftrightarrow \overrightarrow{OP_{13}} \cap \overline{P_{21}P_{23}} = \overrightarrow{OP_{13}} \cap \overline{P_{22}P_{23}} \Leftrightarrow \overline{P_{21}P_{23}} = \overline{P_{22}P_{23}} \vee \exists! Q \in \overline{OP_{13}} \cap \overline{P_{21}P_{23}} \cap \overline{P_{22}P_{23}}$

la I possibilita' e' assurda contro ipotesi, quindi accettiamo la II

$P_{23} \in \overline{P_{21}P_{23}} \cap \overline{P_{22}P_{23}} \Rightarrow Q = P_{23}$

$C_2 = C_3 \in \overrightarrow{OP_{13}} \cap \overline{P_{21}P_{23}} \cap \overline{P_{22}P_{23}} \Rightarrow C_2 = C_3 = P_{23}$

In conclusione

$$\overline{OP_{23}} = \overline{OC_2} = \overline{OC_3} \underbrace{=}_{(4)} \overline{OP_{13}}$$

$$\overline{OP_{23}} = \overline{OP_{13}}$$

che e' la tesi.

□

1.8 Isomorfismi affini

Definition 1.41. Siano $(\mathcal{A}, \mathbf{V}, \rightarrow)$, $(\mathcal{A}', \mathbf{V}', \leftarrow)$ due spazi affini.
La funzione $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ si dice *isomorfismo affine* $\Leftrightarrow \exists \mathbf{f} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}'$ applicazione lineare (isomorfismo vettoriale) tale che

$$\forall P, Q \in \mathcal{A} \;\; \mathbf{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overleftarrow{f(P)f(Q)}$$

diremo che $\mathbf{f}$ e' l'isomorfismo vettoriale associato a f. Diremo inoltre che $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}'$ (leggasi $\mathcal{A}$ affinemente isomorfo a $\mathcal{A}'$).
Se $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, f verra' chiamato *affinita'*.

Nota generale sugli isomorfismi

Si suole dire che un isomorfismo da un insieme strutturato a un altro insieme strutturato, preserva tutte le proprieta' dell'uno e dell'altro. Spiegamo adesso il motivo.
Supponiamo di avere due insiemi strutturati: $(A, R), (A', R')$, dove R, R' sono le relazioni che definiscono rispettivamente la struttura di A, A'. Supponiamo per convenienza che R, R' siano relazioni binarie interne, cioe' $R \subseteq A \times A$, $R' \subseteq A', A'$. Allora, un isomorfismo $f : A \longrightarrow A'$ e' una funzione biettiva tale che $(a, b) \in R \Leftrightarrow (f(a), f(b)) \in R'$.
Se vale una proposizione per a, b, R varra' anche per $f(a), f(b), R'$. Ad esempio,

1. $a, b \in A,\ (a, b) \in R \ \Rightarrow \ a = b$
2. $a', b' \in A,\ (a', b') \in R' \ \Rightarrow \ a' = b'$

la 1. e 2. sono equivalenti, infatti, la 2. implica la 1.:

$$
\begin{aligned}
&(a,b) \in A, \text{f biuniv.} \Rightarrow \exists a', b' \in A' : \ (a,b) = (f(a'), f(b')) \\
&(a,b) \in R \Rightarrow (f(a), f(b)) \in R' \\
&2. \Rightarrow a' = b' \\
&a' = b' \Leftrightarrow f(a') = f(b') \Leftrightarrow a = b
\end{aligned}
$$

e la 1. implica la 2..
Ora torniamo agli isomorfismi affini. Quello che ci interessa e' trasportare la struttura di $(\mathcal{A}, \mathbf{V}, \rightarrow)$ in $(\mathcal{A}', \mathbf{V}', \leftarrow)$ e viceversa. Abbiamo percio' bisogno di isomorfismo tra insiemi per legare $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{A}'$, un isomorfismo vettoriale per legare $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}'$ e infine questi due isomorfismi devono conservare la relazione $\rightarrow : \mathcal{A}\times\mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{V}$ e $\leftarrow : \mathcal{A}'\times\mathcal{A}' \longrightarrow \mathbf{V}'$ (che essendo una funzione e' una particolare relazione binaria interna). Con R, R' indichiamo rispettivamente $\rightarrow$ ed $\leftarrow$, per evidenziare che e' una relazione (cioe', $R \subseteq (\mathcal{A}\times\mathcal{A})\times\mathbf{V}$, $R' \subseteq (\mathcal{A}'\times\mathcal{A}')\times\mathbf{V}'$). Quindi, i nostri due isomorfismi $f, \mathbf{f}$ devono essere tali che:

$$
\begin{aligned}
((a,b),v) \in R &\Leftrightarrow ((f(a), f(b)), \mathbf{f}(v)) \in R' \\
&\Leftrightarrow \rightarrow(a,b) = v \Leftrightarrow \leftarrow(f(a), f(b)) = \mathbf{f}(v) \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{ab} = v \Leftrightarrow \overleftarrow{f(a)f(b)} = \mathbf{f}(v) \\
&\Leftrightarrow \overleftarrow{f(a)f(b)} = \mathbf{f}(\overrightarrow{ab})
\end{aligned}
$$

che e' proprio la definizione data di isomorfismo affine.

Proposition 1.42.

1. *f e' biunivoca.*
2. *Data f, $\mathbf{f}$ e' univocamente determinata.*

Proof:
$\langle 1\rangle 1$. Dim 1.
$\langle 2\rangle 1$. Dim f iniettiva: $P, Q \in \mathcal{A} f(P) = f(Q) \Rightarrow P = Q$

$$
\begin{aligned}
&f(P) = f(Q) \Rightarrow \overleftarrow{f(P)f(Q)} = \underline{0} \\
&\overleftarrow{f(P)f(Q)} = \mathbf{f}(\overrightarrow{PQ}) \\
&\mathbf{f}(\overrightarrow{PQ}) = \underline{0} \underbrace{\Rightarrow}_{\mathbf{f} \text{ e' un'applicazione lineare}} \overrightarrow{PQ} = \underline{0} \Leftrightarrow P = Q
\end{aligned}
$$

$\langle 2\rangle 2$. Dim f surriettiva: $P' \in \mathcal{A}' \Rightarrow \exists P \in \mathcal{A} : \ f(P) = P'$
Sia $O \in \mathcal{A}$ e $O' = f(O)$.

$$
\begin{aligned}
&O', P' \in \mathcal{A}' \Rightarrow \overleftarrow{O'P'} = v' \in \mathbf{V}' \\
&O \in \mathcal{A}, \ \mathbf{f}^{-1}(v') = v \underbrace{\Rightarrow}_{\textbf{As. 1}} \exists! P \in \mathcal{A} : \ \overrightarrow{OP} = v \\
&\mathbf{f}(v) = v' \Leftrightarrow \mathbf{f}(\overrightarrow{OP}) = \overleftarrow{O'P'} \Leftrightarrow \overleftarrow{f(O)f(P)} = \overleftarrow{O'P'} \Leftrightarrow \overleftarrow{O'f(P)} = \overleftarrow{O'P'} \Leftrightarrow f(P) = P'
\end{aligned}
$$

$\langle 1\rangle 2$. Dim 2.

Supponiamo che esista un'altra $\varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}'$, isomorfismo vettoriale associata a f.

$$
\begin{aligned}
&v \in \mathbf{V} \underbrace{\Rightarrow}_{\textbf{As. 1}} \exists P, Q \in A : \overrightarrow{PQ} = v \\
&\forall P, Q \in \mathcal{A} \;\; \mathbf{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overleftarrow{f(P)f(Q)} \\
&P, Q \in \mathcal{A} \;\; \varphi(\overrightarrow{PQ}) = \overleftarrow{f(P)f(Q)} \\
&\forall v \in \mathbf{V} \;\; \mathbf{f}(v) = \varphi(v)
\end{aligned}
$$

□

Definition 1.43. Fissato un $v \in \mathbf{V}$, chiameremo *traslazione* la funzione t_v che soddisfa la seguente relazione:

$$
\begin{aligned}
&t_v : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \\
&\forall P \in \mathcal{A} \;\; \overrightarrow{Pt_v(P)} = v
\end{aligned}
$$

t_v e' una affinita', infatti, per l'**As. 1**, t_v e' una funzione ben definita ed e' anche biettiva. Inoltre, l'isomorfismo vettoriale ad essa associato e' l'identita'.

Proposition 1.44.

$$
\begin{aligned}
&t_v : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \textit{ e' una traslazione } \Rightarrow \mathbf{f} = \mathrm{id} \\
&f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \textit{ una affinita' t.c. } \mathbf{f} = \mathrm{id} \Rightarrow f \textit{ e' una traslazione}
\end{aligned}
$$

Proof:
⟨1⟩1. Dim $\Rightarrow$
Dimostriamo che $\mathbf{f} = \mathrm{id}$:

$$\overrightarrow{t_v(P)t_v(Q)} = \overrightarrow{t_v(P)P} + \overrightarrow{Pt_v(Q)} = \overrightarrow{t_v(P)P} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{Qt_v(Q)} = -v + \overrightarrow{PQ} + v = \overrightarrow{PQ}$$

$$\mathrm{id}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{t_v(P)t_v(Q)}$$

⟨1⟩2. Dim $\Leftarrow$
In sostanza, basta procedere a ritroso: siano $P, Q \in \mathcal{A}$, si ha:

$$\overrightarrow{f(P)P} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{Qf(Q)} = \overrightarrow{t_v(P)P} + \overrightarrow{Pt_v(Q)} = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \mathbf{f}(\overrightarrow{PQ}) \underbrace{=}_{\text{per Hp}} \overrightarrow{PQ}$$

$$\overrightarrow{f(P)P} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{Qf(Q)} = \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{Qf(Q)} = \overrightarrow{Pf(P)}$$

quindi, chiamando $v = \overrightarrow{Qf(Q)}$, abbiamo $\forall P \in \mathcal{A} \;\; \overrightarrow{Pf(P)} = v$. Percio' $f = t_v$.

□

Proposition 1.45. *Fissando un isomorfismo vettoriale* $\mathbf{f}$*, l'isomorfismo affine* f *non e' univocamente determinato.*

Proof: Infatti, dalla proposizione [1.44,pg.23] segue che per ogni $v \in V$ riusciamo a trovare un isomorfismo affine che ha la stesso isomorfismo vettoriale (l'identita').

Example 1.46. Sia $(\mathcal{A}, \mathbf{V}, \rightarrow)$, $\dim \mathcal{A} = n$, e sia $\Omega = (O, e_1, e_2, \ldots, e_n)$ un riferimento

$$
\begin{aligned}
&f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^n \\
&f(P) = [P]_\Omega
\end{aligned}
$$

e' un isomorfismo.

Proof:
Per la definizione di $[P]_\Omega$, f e' ben definita ed e' biunivoca [4]. Resta da trovare $\mathbf{f}$: sia $P, Q \in \mathcal{A}$

$$\overleftarrow{f(P)f(Q)} = f(Q) - f(P) = [Q]_\Omega - [P]_\Omega$$

quindi basta porre $\mathbf{f}(\overrightarrow{PQ}) = [Q]_\Omega - [P]_\Omega$

□

Proposition 1.47. *Dati due isomorfismi affini*

$$f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$$
$$g : \mathcal{A}' \longrightarrow A''$$

la loro composizione $h = g \circ f$ *e' un isomorfismo affine, e inoltre* $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$

Proof:
Troviamo $\mathbf{h}$ (nota[5]):

$$\overrightarrow{h(P)h(Q)} = \overrightarrow{g(f(P))g(f(Q))} = \mathbf{g}(\overrightarrow{f(P)f(Q)}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\overrightarrow{PQ})) = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}(\overrightarrow{PQ})$$

quindi, $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$

□

Proposition 1.48. *La relazione di isomorfismo affine e' una relazione d'equivalenza nella classe di tutti gli spazi affini.*

Proof:
⟨1⟩1. Riflessivita': $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}$
Basta una qualsiasi traslazione di $\mathcal{A}$.
⟨1⟩2. Simmetria: $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}' \Rightarrow \mathcal{A}' \simeq \mathcal{A}$
Siano f l'isomorfismo affine di $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$. Scegliamo $g = f^{-1}$ come isomorfismo affine inverso, calcoliamo il suo $\mathbf{g}$ per dimostrare che si tratta di un isomorfismo affine:

$$P', Q' \in \mathcal{A}' \Rightarrow \overrightarrow{g(P')g(Q')} = \mathbf{g}(\overleftarrow{P'Q'}) \quad (1)$$
$$\exists P, Q \in \mathcal{A} : \ f(P) = P', \ f(Q) = Q' \ \Leftrightarrow \ P = f^{-1}(P'), \ Q = f^{-1}(Q')$$
$$\overrightarrow{g(P')g(Q')} = \overrightarrow{PQ}$$
$$\mathbf{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overleftarrow{f(P)f(Q)} = \overleftarrow{P'Q'}$$
$$(1) \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\overrightarrow{PQ}))$$
$$\mathbf{g} := \mathbf{f}^{-1}$$

quindi $\mathbf{f}^{-1}$ e' l'isomorfismo vettoriale cercato.
⟨1⟩3. Transitivita': $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}' \simeq \mathcal{A}'' \Rightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{A}''$
Per la prop. [1.47,pg.24] segue la tesi.

□

Proposition 1.49. *Spazi di dimensione uguale sono isomorfi.*

Proof: Basta considerare l'esempio [1.46,pg.23]: dati due spazi $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ di ugual dimensione:

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}^n \simeq \mathcal{A}' \Rightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{A}'$$

[4] il vettore $\overrightarrow{OP}$ e' combinazione unica di $e_1, e_2, \ldots, e_n$
[5] Usiamo impropriamente il simbolo $\rightarrow$ per tutti e tre gli spazi $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$

Proposition 1.50. *Dati* $(\mathcal{A}, \mathbf{V}, \rightarrow)$, $(\mathcal{A}', \mathbf{V}', \leftarrow)$ *affinemente isomorfi mediante* $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$, *si ha*

1. $S = (P, W) \leq \mathcal{A} \Leftrightarrow f(S) = (f(P), \mathbf{f}(W)) \leq \mathcal{A}'$
2. $\dim S = k \Leftrightarrow \dim f(S) = k$
3. $S \parallel T \Leftrightarrow f(S) \parallel f(T)$
4. $f(\overline{P_1 P_2 \dots P_n}) = \overline{f(P_1) f(P_2) \dots f(P_n)}$
5. $f(\overline{ST}) = \overline{f(S) f(T)}$

Inoltre, dati $S \leq \mathcal{A}$, $T \leq \mathcal{A}'$

6. $\dim S = \dim T \Leftrightarrow \exists f : S \longrightarrow T$ *isom. affine*

Proof:

Le proposizioni 1., 2., 3. derivono direttamente dal fatto che f, essendo un isomorfismo affine, preserva le relazioni degli spazi affini (vedi **Nota generale sugli isomorfismi** [1.41,pg.21]). Infatti,

1. La relazione *essere un sottospazio* e' basata sulla relazione $\rightarrow$ e $\in$ che sono tutte e due preservate da $f, \mathbf{f}$. Quindi,
$$S = (P, W) = \left\{ Q \in \mathcal{A} : \ \overrightarrow{PQ} = w \in W \right\}$$
$$f(S) = \left\{ f(Q) \in f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}' : \ \overrightarrow{f(P) f(Q)} = \mathbf{f}(w) \in \mathbf{f}(W) \right\} = (f(P), \mathbf{f}(W)) \leq \mathcal{A}'$$
2. Poiche' $\mathbf{f}$ e' un isom. vett., si ha che $\dim W = \dim \mathbf{f}(W)$
3. La relazione $\parallel$ e' basata sulla relazione $\subseteq$, che e' preservata da qualunque isomorfismo tra insiemi, e in particolare da $\mathbf{f}$
4. La relazione di congiungente e' basata sulla relazione di $\subseteq$, di $\cap$ e di sottospazio: $\overline{ST}$ e' il piu' piccolo sottospazio contente S e T.

Dimostriamo la 6.

$$S \leq \mathcal{A} \underbrace{\Rightarrow}_{[1.6,\text{pg.}3]} S \text{ e' uno spazio affine}$$
$$T \leq \mathcal{A}' \Rightarrow T \text{ e' uno spazio affine}$$
$$\dim S = \dim T$$
$$\underbrace{\Rightarrow}_{[1.49,\text{pg.}24]} S \simeq T$$

il viceversa deriva dal fatto che $\mathbf{f}$ e' un isom. vett. e quindi le due giaciture di S, T hanno ugual dimensione.

□

Theorem 1.51. *Dati due spazi affini* $(\mathcal{A}, \mathbf{V}, \rightarrow), (\mathcal{A}', \mathbf{V}', \leftarrow)$, *un isomorfismo vettoriale* $\mathbf{f} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}'$, *due punti* $O \in \mathcal{A}$, $O' \in \mathcal{A}'$, *allora*

$$\exists! f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}' \textit{ isom. aff. tale che}$$
$$f(O) = O'$$
$$\mathbf{f} \textit{ e' l'isom. vett. associato a } f$$

Proof:

⟨1⟩1. Calcoliamo f

Sia $P \in \mathcal{A}$

$$\mathbf{f}(\overrightarrow{OP}) = \overleftarrow{f(O)f(P)} = \overleftarrow{O'f(P)}$$

allora come $f(P)$ prendiamo quell'unico punto, dato dall'**As.1**, tale che $\mathbf{f}(\overrightarrow{OP}) = \overleftarrow{O'f(P)}$
Cosi' f resta ben definita. E' ovviamente unica: se esistesse un'altra g si avrebbe,

$$\overleftarrow{O'g(P)} = \overleftarrow{g(O)g(P)} = \mathbf{f}(\overrightarrow{OP}) = \overleftarrow{f(O)f(P)} = \overleftarrow{O'f(P)}$$
$$\overleftarrow{O'g(P)} = \overleftarrow{O'f(P)} \Leftrightarrow g(P) = f(P)$$

□

Corollary 1.52. *Dati due spazi affini* $(\mathcal{A}, \mathbf{V}, \rightarrow), (\mathcal{A}', \mathbf{V}', \leftarrow)$, $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{A}' = n$, *e i punti* $P_i \in \mathcal{A}$, $Q_i \in \mathcal{A}'$ $i = 0, 1, \ldots, n$ *rispettivamente indipendenti, si ha*

$$\exists! f \text{ isom. aff. tale che}$$
$$f(P_i) = Q_i \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Proof:

$$P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A} \text{ l.i.} \underbrace{\Leftrightarrow}_{[1.18,\text{pg.}11]} \text{ i vettori } \overrightarrow{P_0P_i}, i = 1, \ldots, n \text{ sono l.i}$$
$$\left| \left\{ \overrightarrow{P_0P_i} \mid i = 1, \ldots, n \right\} \right| = n = \dim \mathbf{V} \Rightarrow \left\{ \overrightarrow{P_0P_i} \mid i = 1, \ldots, n \right\} \text{ e' una base di } \mathbf{V}$$
$$Q_0, Q_1, \ldots, Q_n \in \mathcal{A} \text{ l.i.} \Leftrightarrow \overrightarrow{Q_0Q_i} \; i = 1, 2, \ldots, n \text{ l.i}$$
$$\left\{ \overrightarrow{Q_0Q_i} \mid i = 1, \ldots, n \right\} \text{ e' una base di } \mathbf{V}'$$

Supponiamo che esista una f isom. aff. Allora $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, si ha

$$\begin{cases} \overleftarrow{f(P_0)f(P_i)} = \mathbf{f}(\overrightarrow{P_0P_i}) \\ f(P_0) = Q_0, \; f(P_i) = Q_i \Rightarrow \overleftarrow{f(P_0)f(P_i)} = \overleftarrow{Q_0Q_i} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{f}(\overrightarrow{P_0P_i}) = \overleftarrow{Q_0Q_i} \quad (1)$$

Ma di $\mathbf{f} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}'$ isom. vett. che soddisfa la (1), ne esiste una sola, perche' $\overrightarrow{P_0P_i}$ e $\overrightarrow{Q_0Q_i}$ sono i vettori della base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}'$ (vedi [AL,7.5,pg.39]).
A questo punto, poiche' $f(P_0) = Q_0$, e poiche' abbiamo trovato la $\mathbf{f}$, per il thm [1.51,pg.25],

$$\exists! g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}' \text{ isom. aff.} taleche$$
$$g(P_0) = Q_0$$
$$\mathbf{g} = \mathbf{f}$$

Dimostriamo che $g = f$: per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$ si ha:

$$\overleftarrow{g(P_0)g(P_i)} = \mathbf{g}(\overrightarrow{P_0P_i}) = \mathbf{f}(\overrightarrow{P_0P_i}) = \overleftarrow{f(P_0)f(P_i)} = \overleftarrow{Q_0Q_i}$$
$$\| \quad \overleftarrow{Q_0g(P_i)}$$
$$\overleftarrow{Q_0g(P_i)} = \overleftarrow{Q_0Q_i} \Leftrightarrow g(P_i) = Q_i$$

□

Corollary 1.53. *Nelle ipotesi del cor [1.52,pg.26], dati i punti* $P_i \in \mathcal{A}$, $Q_i \in \mathcal{A}'$ $i = 0, 1, \ldots, k$ *rispettivamente l.i., ma con* $k < n$, *si ha che l'isomorfismo affine* f *non e' unico.*

Proof:

Basta infatti completare i $k+1$ punti, ottenendo $n+1$. A questo punto, applicando il cor [1.52,pg.26], esistera' f. Questo f pero' varia al variare dei $n-k$ punti usati per compleatare i $k+1$ punti. Quindi, non e' unico.

□

Example 1.54. Sia

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{A}) = \{f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \mid f \text{ e' un'affinita'}\}$$

allora $(\mathrm{Aff}(\mathcal{A}), \circ)$ e' un gruppo.

Proof:

1. $\mathrm{Aff}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ dato che ci sono almeno le traslazioni.
2. Per la prop. [1.47,pg.24], l'operazione di composizione $\circ$ e' interna.
3. . e' associativa
4. L'elemento unita' e' l'identita' id:
$$\mathrm{id} \circ f = f \circ \mathrm{id} = f$$
5. L'inverso di f e' f^{-1} (dato che f e' biettiva):
$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id} = f^{-1} \circ f$$

□

Example 1.55. Fissato $O \in \mathcal{A}$, consideriamo il seguente sottoinsieme di $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$:

$$\mathrm{Aff}_O(\mathcal{A}) = \{f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{A}) \mid f(O) = O\}$$

, ovvero sono tutte le affinita' su $\mathcal{A}$ che lasciano invariato O.
$(\mathrm{Aff}_O(\mathcal{A}), \circ)$ e' un sottogruppo di $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$.
Inoltre vale il seguente isomorfismo tra gruppi:

$$\mathrm{Aff}_O(\mathcal{A}) \simeq GL(\mathbf{V})$$

Dove $GL(\mathbf{V})$ e'

$$GL(\mathbf{V}) = \{\mathbf{f} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V} \mid \mathbf{f} \text{ isom. vett. }\}$$

Questo insieme e' isomorfo a

$$GL_n(\mathbb{K}) = \left\{m \in M^{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \det m \neq 0\right\}$$

(dove $\mathbb{K}$ e' il campo di $\mathbf{V}$): vedi thm [AL,7.12,pg.44].)

Proof:

$\langle 1\rangle 1$. Dim $\mathrm{Aff}_O(\mathcal{A}) \leq \mathrm{Aff}(\mathcal{A})$

Usiamo la prima caratterizzazione dei sottogruppi:

$$\mathrm{id} = e \in \mathrm{Aff}(\mathcal{A}),\ \mathrm{id} \in \mathrm{Aff}_O(\mathcal{A})$$
$$f, g \in \mathrm{Aff}_O(\mathcal{A})$$
$$g(O) = O \Leftrightarrow g^{-1}O = O \Rightarrow g^{-1} \in \mathrm{Aff}_O(\mathcal{A})$$
$$f \circ g(O) = f(g(O)) = f(O) = O \Rightarrow f \circ g \in \mathrm{Aff}_O(\mathcal{A})$$

$\langle 1\rangle 2$. Dim $\mathrm{Aff}_O(\mathcal{A}) \simeq GL(\mathbf{V})$

Usiamo l'applicazione $\psi : \mathrm{Aff}_O(\mathcal{A}) \longrightarrow GL(\mathbf{V})$ che associa ad un $f \in \mathrm{Aff}_O(\mathcal{A})$ il suo $\mathbf{f}$ isom. vett.

Come abbiamo visto in prop.[1.42,pg.22], $\mathbf{f}$ e' univocamente determinata da f. Quindi ψ e' ben definita. Inoltre, ψ e' biunivoca perche', per il thm [1.51,pg.25], anche f e' univocamente

determinata da $\mathbf{f}$. Infine,

$$\psi(f \circ g) = \mathbf{f} \circ \mathbf{g} = \psi(f) \circ \psi(g)$$

per quanto visto in prop.[1.47,pg.24].

□

Example 1.56. Dato $(\mathcal{A}, \mathbf{V}, \rightarrow)$,

$$T(\mathcal{A}) := \{t_v : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \text{ traslazione } \mid v \in \mathbf{V}\}$$

1. $T(\mathcal{A}) \underbrace{\leq}_{\text{sottogruppo}} \text{Aff}(\mathcal{A})$
2. $T(\mathcal{A}) \underbrace{\simeq}_{\text{isom. di gruppi}} \mathbf{V}$

La proposizione 2. spiega perche' possiamo pensare ai vettori di uno spazio vettoriale come le "freccie" di traslazione.

Proof:

⟨1⟩1. Dim $T(\mathcal{A}) \leq \text{Aff}(\mathcal{A})$

Usiamo la prima caratterizzazione dei sottogruppi:

$\text{id} = e \in \text{Aff}(\mathcal{A}),\ \text{id} = t_{\underline{0}} \in T(\mathcal{A})$

$t_v, t_w \in T(\mathcal{A}),\ \ P \in \mathcal{A}$

$t_w(P) = Q$

$\overrightarrow{Pt_vt_w(P)} = \overrightarrow{Pt_w(P)} + \overrightarrow{t_w(P)t_vt_w(P)} = w + \overrightarrow{t_w(P)t_vt_w(P)} = w + \overrightarrow{Qt_v(Q)} = w + v \in \mathbf{V}$

$\Rightarrow t_vt_w = t_{v+w} \in T(\mathcal{A})$

$t_vt_{-v} = t_{v-v} = t_{\underline{0}} = id \Leftrightarrow {t_v}^{-1} = t_{-v} \in T(\mathcal{A})$

⟨1⟩2. Dim $T(\mathcal{A}) \simeq \mathbf{V}$

Usiamo l'applicazione $\psi : T(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{V}$ cosi' definita:

$$\psi(t_v) = v$$

ψ e' sicuramente biettiva. Inoltre,

$$\psi(t_vt_w) = \psi(t_{v+w}) = v + w = \psi(t_v) + \psi(t_w)$$

□

Theorem 1.57. *Data $f \in \text{Aff}(\mathcal{A})$, si ha*

$$\exists! g \in \text{Aff}_O(\mathcal{A}),\ \exists! v, w \in \mathbf{V} : \begin{cases} 1.\ \ f = g \circ t_v \\ 2.\ \ f = t_w \circ g \end{cases}$$

ovvero, ogni affinita' si puo' esprimere come composizione di una traslazione e di una rotazione o omotetia.

Proof:

Poniamo

$$v = -\overrightarrow{Of^{-1}(O)} \in \mathbf{V}$$
$$w = \overrightarrow{Of(O)} \in \mathbf{V}$$
$$g = f \circ {t^{-1}}_v = f \circ t_{-v} \in \text{Aff}(\mathcal{A})$$
$$g' = {t^{-1}}_w \circ f = t_{-w} \circ f \in \text{Aff}(\mathcal{A})$$

per costruzione g e g' soddisfano rispettivamente la 1. e 2.

$$\overrightarrow{Ot_{-v}(O)} \underbrace{=}_{t_{-v} \text{ e' una trasl.}} = -v = \overrightarrow{Of^{-1}(O)} \Rightarrow t_{-v}(O) = f^{-1}(O)$$

$$g(O) = f \circ t_{-v}(O) = f \circ f^{-1}(O) = O \Rightarrow g \in \mathrm{Aff}_O(\mathcal{A})$$

$$\overrightarrow{Ot_w(O)} = w = \overrightarrow{Of(O)} \Rightarrow f(O) = t_w(O)$$

$$g'(O) = t_{-w} \circ f(O) = t_{-w} \circ t_w(O) = \mathrm{id}(O) = O \Rightarrow g' \in \mathrm{Aff}_O(\mathcal{A})$$

Per la [1.47,pg.24], abbiamo:

$$\mathbf{g} = \mathbf{f}.\mathbf{t}_{-v} = \mathbf{f} \circ \mathrm{id} = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{g}' = \mathbf{t}_{-w} \circ \mathbf{f} = \mathrm{id} \circ \mathbf{f} = \mathbf{f}$$

$$\begin{cases} g, g' \in \mathrm{Aff}(\mathcal{A}) \\ g(O) = g'(O) = O \\ \mathbf{g} = \mathbf{g}' = \mathbf{f} \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{thm[1.51,\text{pg.}25]} g = g'$$

Quindi g e' unico.

$$f = g \circ t_v \Leftrightarrow g^{-1} \circ f = t_v$$

allora t_v e' determinato da g e da f. Ma g e' unicamente determinato da f. Quindi t_v e' unicamente determinato da f.
Poiche' per l'exp [1.56,pg.28] si ha $T(\mathcal{A}) \simeq \mathbf{V}$, abbiamo che v e' unicamente determinato da t_v e quindi da f.
Analogo ragionamento per w.

□

1.8.1 Omotetia

Definition 1.58. Sia $\psi : \mathrm{Aff}_O(\mathcal{A}) \longrightarrow GL(\mathbf{V})$ visto in [1.55,pg.27]. Sia inoltre $c \in \mathbb{K}$.
Sia $\mathbf{f} \in GL(\mathbf{V})$, definita da $\mathbf{f}(x) = cx$.
$f = \psi^{-1}(\mathbf{f}) \in \mathrm{Aff}_O(\mathcal{A})$ si dice *omotetia* di centro O e rapporto c.
Definiamo i seguenti insieme:

$$\Omega_O = \left\{ f \in \mathrm{Aff}_O(\mathcal{A}) \mid f = \psi^{-1}(\mathbf{f}),\ \ \mathbf{f}(x) = cx \in GL(\mathbf{V}),\ \ c \in \mathbb{K} \right\}$$

$$\Omega_{O,c} = \left\{ f \in \Omega_O \mid f = \psi^{-1}(\mathbf{f}),\ \ \mathbf{f}(x) = cx \in GL(\mathbf{V}) \right\}$$

ovvero, l'insieme di tutte le omotetie di centro O e l'insieme di tutte le omotetie di centro O e rapporto c.

Proposition 1.59. *Dato* $f \in \mathrm{Aff}_O(\mathcal{A})$,

$$f \in \Omega_{O,c} \Leftrightarrow \overrightarrow{Of(P)} = c\overrightarrow{OP}$$

Proof:
$\langle 1 \rangle 1$. Dim $\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{f(O)f(P)} & = & \overrightarrow{Of(P)} \\ \| & & \| \\ \mathbf{f}\left(\overrightarrow{OP}\right) & = & c\overrightarrow{OP} \end{array}$$

□

Proposition 1.60.

$$(\Omega_O, \circ) \underbrace{\leq}_{sottogruppo} (\mathrm{Aff}_O(\mathcal{A}), \circ)$$

Proof:
Di certo $\Omega_O \subseteq \mathrm{Aff}_O(\mathcal{A})$.
1. L'elemento neutro di $\mathrm{Aff}_O(\mathcal{A})$ e' id.

$$\overrightarrow{O\mathrm{id}(P)} = \overrightarrow{OP} \underbrace{\Rightarrow}_{prop[1.59,\text{pg.}29]} \mathrm{id} \in \Omega_{O,1} \subseteq \Omega_O$$

2. Siano $f \in \Omega_{O,c}, g \in \Omega_{O,d}$.

$$\overrightarrow{Ofg(P)} = \overrightarrow{Of(g(P))} = c\overrightarrow{Og(P)} = cd\overrightarrow{OP} \underbrace{\Rightarrow}_{prop[1.59,\text{pg.}29]} fg \in \Omega_{O,cd} \subseteq \Omega_O$$

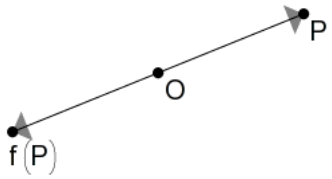
3. L'inverso di $f \in \mathrm{Aff}_O(\mathcal{A})$ e' f^{-1}. Dimostriamo che sta' in Ω_O.
Sia $g \in \Omega_{O,c^{-1}}$,

$$\overrightarrow{Og(P)} = \frac{1}{c}\overrightarrow{OP}$$
$$\overrightarrow{Ofg(P)} = c\overrightarrow{Og(P)} = cc^{-1}\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}$$
$$\overrightarrow{Ofg(P)} = \overrightarrow{OP} \Rightarrow fg(P) = P \Rightarrow fg = \mathrm{id} \underbrace{\Rightarrow}_{f,g \text{ biett.}} g = f^{-1}$$
$$f^{-1} = g \in \Omega_{O,c^{-1}}$$

□

Definition 1.61. $f \in \Omega_{O,-1}$ si chiama simmetria, e si indica con σ_O
$f(P)$ si dice simmetrico.
Dalla [1.59,pg.29] si ha:

$$\overrightarrow{Of(P)} = -\overrightarrow{OP}$$



Un insieme $X \subseteq \mathcal{A}$ si dice simmetrico di centro $O \Leftrightarrow \sigma_O : X \longrightarrow X$ e' biunivoca $\Leftrightarrow \forall x \in X \ \ \sigma_O(x) \in X$

Proposition 1.62.

$$S \leq \mathcal{A} \Rightarrow \forall O \in S \ \ S \textit{ e' simmetrico di centro } O$$

ovvero, S e' simmetrico rispetto a ogni suo punto.

Proof:

$$P \in S = (P, W)$$
$$\overrightarrow{O\sigma_O(P)} = -\overrightarrow{OP} \in W \Leftrightarrow \overrightarrow{O\sigma_O(P)} \in W \Rightarrow \sigma_O(P) \in S$$

□

1.8.2 Equazioni di un'isomorfismo

Proposition 1.63. *Sia dato $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ isomorfismo affine e siano stabiliti due riferimenti $\Omega = (O, B), \Omega' = (O', C)$ su $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$. Allora, preso $P \in \mathcal{A}$, si ha*

$$^t[f(P)]_{\Omega'} = M_{B,C}(\mathbf{f})\,^t[P]_{\Omega} + {}^t[f(O)]_{\Omega'}$$
$$M_{B,C}(\mathbf{f}) \text{ matrice associata all'isom.vett. } \mathbf{f}$$

Nota: se $f = \mathrm{id} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, allora otteniamo l'equazione del cambiamento di base vista in [1.3,pg.2]

Proof:
Sia

$$\overrightarrow{O'f(P)} = \overrightarrow{O'f(O)} + \overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{O'f(O)} + \mathbf{f}(\overrightarrow{OP})$$
$$[\overrightarrow{O'f(P)}]_C = [\overrightarrow{O'f(O)}]_C + [\mathbf{f}(\overrightarrow{OP})]_C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [f(P)]_{\Omega'} = [f(O)]_{\Omega'} + {}^t\left(M_{B,C}(\mathbf{f})\,^t[\overrightarrow{OP}]_B\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow {}^t[f(P)]_{\Omega'} = {}^t[f(O)]_{\Omega'} + M_{B,C}(\mathbf{f})\,^t[\overrightarrow{OP}]_B$$

⟨1⟩1. Dimostrazione alternativa
Indichiamo con $f(\Omega)$ il seguente riferimento: $(f(O), \mathbf{f}(B))$.
Poiche' f e' un'isomorfismo affine, esso preserva le relazioni definite in $\mathcal{A}$ nelle relazioni corrispondenti in $\mathcal{A}'$, quindi si ha:

$$[P]_{\Omega} = [\overrightarrow{OP}]_B \Rightarrow [f(P)]_{f(\Omega)} = [\mathbf{f}(\overrightarrow{OP})]_{\mathbf{f}(B)} = {}^t\left(M_{B,\mathbf{f}(B)}(\mathbf{f})\,^t[\overrightarrow{OP}]_B\right)$$

$$^t[f(P)]_{f(\Omega)} = M_{B,\mathbf{f}(B)}(\mathbf{f})\,^t[\overrightarrow{OP}]_B \quad (1)$$

A questo punto basta cambiare base in $\mathcal{A}'$: passiamo da $f(\Omega)$ ad Ω', usando la prop [1.3,pg.2]:

$$^t[f(P)]_{\Omega'} = {}^t[f(O)]_{\Omega'} + P_{\mathbf{f}(B)\to C}\,^t[f(P)]_{f(\Omega)} \quad (2)$$

Ricordandoci che $P_{\mathbf{f}(B)\to C} = M_{\mathbf{f}(B),C}(\mathrm{id})$, e utilizzando la (1) abbiamo:

$$(2) \Leftrightarrow {}^t[f(P)]_{\Omega'} = {}^t[f(O)]_{\Omega'} + M_{\mathbf{f}(B),C}(\mathrm{id})M_{B,\mathbf{f}(B)}(\mathbf{f})\,^t[\overrightarrow{OP}]_B \quad (1.1)$$

Per il thm [AL,7.9,pg.43] di Algebra Lineare,

$$M_{\mathbf{f}(B),C}(\mathrm{id})M_{B,\mathbf{f}(B)}(\mathbf{f}) = M_{B,C}(\mathbf{f}\circ\mathrm{id}) = M_{B,C}(\mathbf{f})$$

quindi

$$(1.1) \Leftrightarrow {}^t[f(P)]_{\Omega'} = {}^t[f(O)]_{\Omega'} + M_{B,C}(\mathbf{f})\,^t[\overrightarrow{OP}]_B$$

che e' la tesi.

□

Proposition 1.64. *Dati i due spazi affini $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ di dimensione n, e i due rispettivi riferimenti $\Omega = (O, B), \Omega' = (O', C)$ sia data la seguente equazione*

$$Y = MX + B \quad (1)$$
$$M \in K^{n,n}, \quad \det M \neq 0$$
$$Y, X, B \in K^{n,1}$$

dove X e' la coordinata di un punto di $\mathcal{A}$ e Y di $\mathcal{A}'$. La (1) definisce univocamente un isomorfismo affine $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$.

Proof:
Poiche' $\det M \neq 0$, $\rho(M) = n$, quindi a M possiamo associare per il thm [AL,7.8,pg.42], un unico isom. vett. $\mathbf{g} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$.
Per la (1) ricaviamo Y:

$$Y = M\,{}^t[O]_\Omega + B$$

a Y associamo quell'unico punto $P' \in \mathcal{A}'$ t.c. ${}^t[P']_{\Omega'} = Y$. P' esiste grazie all'isomorfismo visto in exp. [1.46,pg.23]. Ovvero, imponiamo che:

$$f(O) = P'$$

Allora per la [1.51,pg.25] f t.c. $f(O) = P'$ e $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ esiste ed e' unico.

□

2 Forme bilineari

Sia dato un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale $\mathbf{V}$ finitamente generato, ovvero di dimensione finita n.

Definition 2.1. Una forma bilineare e' una funzione

$$b : \mathbf{V}\times\mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$$

che rispetta le seguenti condizioni $\forall v, v', w, w' \in \mathbf{V}$ $\forall c \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} b(v + v', w) &= b(v, w) + b(v', w) \\ b(v, w + w') &= b(v, w) + b(v, w') \\ cb(v, w) &= b(cv, w) = b(v, cw) \end{aligned}$$

Se vale

$$b(v, w) = b(w, v)$$

allora b si dira' simmetrica.
Con $\mathrm{Bil}(\mathbf{V}, \mathbb{K})$ indichiamo l'insieme di tutte le forme bilineari del tipo $b : \mathbf{V}\times\mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$.

Proposition 2.2.

$$b(v, \underline{0}) = b(\underline{0}, w) = 0 \quad \forall v, w \in \mathbf{V}$$

Proof:

$$b(v, \underline{0}) = b(v, \underline{0} + \underline{0}) = b(v, \underline{0}) + b(v, \underline{0}) \Leftrightarrow b(v, \underline{0}) = 0$$

□

Proposition 2.3. *Sia $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base di $\mathbf{V}$.*
Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Allora,

$$b(v, w) := ([v]A\,{}^t[w])_{11} \quad \forall v, w \in \mathbf{V}$$
con $[v]$ vettore delle componenti di v rispetto a B

e' una forma lineare.
(Nota [6]).
Inoltre,

$$b(e_i, e_j) = A_{ij}$$

[6] $[v]A\,{}^t[w]$ e' una matrice 1×1. $([v]A\,{}^t[w])_{11}$ e' il suo elemento di posto $1, 1$

Proof:
⟨1⟩1. Dim che b e' bilineare
Usando le proprieta' delle matrici:

$$b(v+v',w) = ([v+v']A^t[w])_{11} = (([v]+[v'])A^t[w])_{11} = ([v]A^t[w]+[v']A^t[w])_{11} =$$
$$= ([v]A^t[w])_{11} + ([v']A^t[w])_{11} = b(v,w) + b(v',w)$$
$$b(v,w+w') = ([v]A^t[w+w'])_{11} = (([v])A^t([w]+[w']))_{11} = ([v]A^t[w]+[v]A^t[w'])_{11} =$$
$$= ([v]A^t[w])_{11} + ([v]A^t[w'])_{11} = b(v,w) + b(v,w')$$
$$cb(v,w) = c([v]A^t[w])_{11} = ([cv]A^t[w])_{11} = b(cv,w)$$
$$= ([v]A^t[cw])_{11} = b(v,cw)$$

⟨1⟩2. Dim $b(e_i,e_j) = A_{ij}$

$$[e_i] = (0,0,\dots,\underbrace{1}_{\text{posto } i\text{-esimo}},0,\dots,0) \Leftrightarrow ([e_i])_h = \begin{cases} 0 & i \neq h \\ 1 & i = h \end{cases}$$

$$[e_i]A^t[e_j] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \underbrace{1}_{\text{posto } i\text{-esimo}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \underbrace{1}_{\text{posto } j\text{-esimo}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{h=1}^n ([e_i])_h A_{hk}\right)([e_j])_k\right)}_{\text{matrice } 1\times 1} = \left(A_{ij}\right)$$

Allora, per definizione di b:

$$b(e_i,e_j) = ([e_i]A^t[e_j])_{11} = A_{ij}$$

□

Proposition 2.4. *Sia $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base di $\mathbf{V}$.*
Data $b : \mathbf{V}\times\mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$, forma bilineare, poniamo la seguente matrice $n\times n$:

$$A_{ij} = b(e_i,e_j) \;\; i,j \in \{1,2,\dots,n\}$$

allora si ha

$$b(v,w) = ([v]A^t[w])_{11} \;\; \forall v,w \in \mathbf{V}$$

Proof:
Scomponiamo v, w utilizzando la base B:

$$v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$$
$$w = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$$

allora

$$b(v,w) = b(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n, y_1e_1 + \cdots + y_ne_n) = \sum_{i,j\in\{1,2,\ldots,n\}} b(x_ie_i, y_je_j) =$$

$$= \sum_{i,j\in\{1,2,\ldots,n\}} x_i b(e_i,e_j) y_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i b(e_i,e_j) \right) y_j =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(e_1,e_1) & b(e_1,e_2) & \ldots & b(e_1,e_n) \\ \ldots & & & \\ b(e_n,e_1) & b(e_n,e_2) & \ldots & b(e_n,e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = [v]A^t[w]$$

Proposition 2.5.

$$[v] = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad [w] = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$b(v,w) = ([v]A^t[w])_{11} = \sum_{i,j\in\{1,2,\ldots,n\}} b(e_i,e_j)x_iy_j = \sum_{i,j\in\{1,2,\ldots,n\}} A_{ij}x_iy_j$$

Proof: La dimostrazione e' implicita nelle dimostrazioni delle prop [2.4,pg.33], [2.3,pg.32]

Proposition 2.6. *Definiamo le operazioni* $+, \cdot$ *su elementi di* $\mathrm{Bil}(\mathbf{V}, \mathbb{K})$*:*

$$(b_1 + b_2)(v,w) := b_1(v,w) + b_2(v,w)$$
$$(c \cdot b_2)(v,w) := c \cdot b_2(v,w)$$
$$\forall b_1, b_2 \in \mathrm{Bil}(\mathbf{V}, \mathbb{K}), \quad \forall v, w \in \mathbf{V}, \quad \forall c \in \mathbb{K}$$

$(\mathrm{Bil}(\mathbf{V}, \mathbb{K}), +, \mathbb{K}, \cdot)$ *e' uno spazio vettoriale.*

Proof:
⟨1⟩1. Dimostriamo che $(\mathrm{Bil}(\mathbf{V}, \mathbb{K}), +)$ e' un gruppo abeliano
⟨2⟩1. L'operazione + e' interna e ben definita
⟨2⟩2. + e' associativa

$(b_1 + (b_2 + b_3))(v,w) = b_1(v,w) + (b_2 + b_3)(v,w) =$
$= b_1(v,w) + b_2(v,w) + b_3(v,w) = (b_1(v,w) + b_2(v,w)) + b_3(v,w) = ((b_1 + b_2) + b_3)(v,w)$
In sostanza, + e' associativa perche' si basa sul + del campo $\mathbb{K}$.

⟨2⟩3. + e' commutativa
Come prima: + e' commutativa perche' si basa sul + del campo $\mathbb{K}$.
⟨2⟩4. La funzione nulla e' l'elemento neutro
⟨2⟩5. L'inverso di $b(v,w)$ e' $-b(v,w)$
⟨1⟩2. Poiche' $+, \cdot$ si basano sul $+, \cdot$ del campo $\mathbb{K}$, si verifica facilmente che valgono le proprieta' del prodotto esterno

□

Proposition 2.7. *Fissata una base* B *di* $\mathbf{V}$*, si ha*

$$(\mathrm{Bil}(\mathbf{V}, \mathbb{K}), +, \mathbb{K}, \circ) \simeq (\mathbb{K}^{n,n}, +, \mathbb{K}, \circ)$$

ovvero esiste un isomorfismo vettoriale tra $\mathrm{Bil}(\mathbf{V}, \mathbb{K})$ *e* $\mathbb{K}^{n,n}$*.*

Proof:

Sia $b \in \mathrm{Bil}(\mathbf{V}, \mathbb{K})$. Sia $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base di $\mathbf{V}$.

$$\Psi_B(b) = A$$
$$\text{con } A_{ij} = b(e_i, e_j)$$

e' l'isomorfismo cercato.

⟨2⟩1. Ψ_B e' iniettiva

Sia $\Psi_B(b) = \Psi_B(b')$, ovvero

$$b(e_i, e_j) = b'(e_i, e_j) \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Per la prop [2.4,pg.33],

$$b(v, w) = ([v]f(b)^t[w])_{11} = ([v]f(b')^t[w])_{11} = b'(v, w)$$
$$\forall v, w \in \mathbf{V}$$

⟨2⟩2. Ψ_B e' surriettiva

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Allora, per la prop [2.3,pg.32], possiamo prendere la forma bilineare definita come:

$$b(v, w) := [v]A^t[w] \quad \forall v, w \in \mathbf{V}$$

e sempre per la prop [2.3,pg.32],

$$b(e_i, e_j) = A_{ij}$$

Quindi $\Psi_B(b) = A$

⟨2⟩3. Ψ_B e' lineare

$$\Psi_B(b + b') = C$$
$$\text{con } C_{ij} = (b + b')(e_i, e_j) = b(e_i, e_j) + b'(e_i, e_j) = A_{ij} + A'_{ij}$$
$$\Rightarrow C = A + A'$$
$$\Psi_B(b + b') = C = A + A' = \Psi_B(b) + \Psi_B(b')$$

$$\Psi_B(cb) = C$$
$$\text{con } C_{ij} = (cb)(e_i, e_j) = c(b(e_i, e_j)) = cA_{ij}$$
$$\Rightarrow C = cA_{ij}$$
$$\Psi_B(cb) = C = cA_{ij} = c\Psi_B(b)$$

□

Proposition 2.8. *b e' una forma bilineare simmetrica $\Leftrightarrow \Psi_B(b)$ e' una matrice simmetrica*

Proof:

⟨1⟩1. Dim $\Rightarrow$

$$b \text{ simmetrica } \Leftrightarrow b(v, w) = b(w, v)$$
$$\Psi_B(b) = A, \quad \text{con } A_{ij} = b(e_i, e_j) = b(e_j, e_i) = A_{ji}$$
$$\Rightarrow A \text{ e' sym}$$

⟨1⟩2. Dim $\Leftarrow$

$$A \text{ sym } \Leftrightarrow A = {}^tA$$
$$b(v, w) = [v]A^t[w] \underbrace{=}_{\text{e' una matrice } 1\times 1} {}^t\left([v]A^t[w]\right) = [w]A^t[v] = b(w, v)$$

□

Proposition 2.9. *Dall'ultima proposizione segue che* $\mathrm{Bil}(\mathbf{V}, \mathbb{K})_s \simeq \mathrm{Sym}(n, \mathbb{K})$.
Dove $\mathrm{Bil}(\mathbf{V}, \mathbb{K})_s$ *e' l'insieme delle forme bilineari simmetriche e* $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{K})$ *e' l'insieme delle*

matrici $n\times n$ simmetriche.
Anzi, questo e' un isomorfismo tra sottospazi vettoriali.

Proposition 2.10. *Siano $B=\{e_1,\dots,e_n\}, B'=\{e'_1,\dots,e'_n\}$ due basi di $\mathbf{V}$.*
Siano

$$b,b' : \mathbf{V}\times\mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$$

due forme bilineari e infine sia,

$$A_{ij}=b(e_i,e_j),\quad A'_{ij}=b'(e'_i,e'_j)$$

allora

$$b=b' \Leftrightarrow A={}^tP_{B\to B'}A'P_{B\to B'}$$

dove $P_{B\to B'}$ e' la matrice di passaggio.

Proof:
⟨1⟩1. Dim $\Leftrightarrow$
Per la prop [2.4,pg.33] abbiamo
$b(v,w)=[v]_B A {}^t[w]_B$
$b'(v,w)=[v]_{B'} A' {}^t[w]_{B'}$
$b=b' \Rightarrow b(v,w)=b'(v,w) \Leftrightarrow [v]_B A {}^t[w]_B = [v]_{B'} A' {}^t[w]_{B'} =$
$\underbrace{=}_{{}^t[v]_{B'}={}^tP_{B\to B'}{}^t[v]_B}$ ${}^t(P_{B\to B'}{}^t[v]_B)A'(P_{B\to B'}{}^t[w]_B) = [v]_B({}^tP_{B\to B'}A'P_{B\to B'}){}^t[w]_B$
$\forall v,w\in\mathbf{V}\ \ [v]_B A {}^t[w]_B = [v]_B({}^tP_{B\to B'}A'P_{B\to B'}){}^t[w]_B \Leftrightarrow A={}^tP_{B\to B'}A'P_{B\to B'}$
□

Corollary 2.11. *Nelle ipotesi della prop [2.10,pg.36], si ha*

$$A={}^tMA'M,\ M\in\mathbb{K}^{n,n},\ \det M\neq 0 \Leftrightarrow b=b'$$

o equivalentemente:

$$A={}^tMA'M,\quad M\in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow b=b'$$

Proof:
⟨1⟩1. Dim $\Rightarrow$
Infatti, poiche' M e' invertibile, per la prop [AL,7.16,pg.47],
$$\exists! B \text{ base di } V:\quad M=P_{B\to B'}$$
allora
$$A={}^tP_{B\to B'}A'P_{B\to B'}$$
e quindi per la prop [2.10,pg.36] si ha $b=b'$
⟨1⟩2. Dim $\Leftarrow$
Dalla prop [2.10,pg.36] abbiamo
$$A={}^tP_{B\to B'}A'P_{B\to B'}$$
ma $P_{B\to B'}$ essendo matrice di passaggio e' invertibile, quindi la tesi.
□

2.1 Congruenza

Definition 2.12. Date $A, A' \in \mathbb{K}^{n,n}$

$$A \sim A' \Leftrightarrow \exists M \in GL_n(\mathbb{K}) : \quad A = {}^tMA'M$$

diremo che A e' congruente a A'

Proposition 2.13. *$\sim$ e' una relazione d'equivalenza*

Proof:
$\langle 1 \rangle 1$. $A \sim A$
Basta scegliere $M = I$, con I matrice identica.
$\langle 1 \rangle 2$. $A \sim A' \Rightarrow A' \sim A$

$$A \sim A' \Leftrightarrow A = {}^tMA'M \Leftrightarrow ({}^tM)^{-1}AM^{-1} = A' \underbrace{\Leftrightarrow}_{prop[\text{AL},1.35.1,\text{pg}.12]} {}^t(M^{-1})AM^{-1} = A'$$

$$\det M \neq 0 \Rightarrow \det M^{-1} = \frac{1}{\det M} \neq 0 \Rightarrow M^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$$

$A' \sim A$
$\langle 1 \rangle 3$. $A \sim A',\ A' \sim A'' \Rightarrow A \sim A''$

$$\begin{cases} A \sim A' \\ A' \sim A'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = {}^tM_1A'M_1 \\ A' = {}^tM_2A''M_2 \end{cases} \Rightarrow A = {}^tM_1{}^tM_2A''M_2M_1 = {}^t(M_2M_1)A''(M_2M_1)$$

$$\det M_2M_1 \underbrace{=}_{\text{thm Binet}} \underbrace{\det M_2}_{\neq 0}\underbrace{\det M_1}_{\neq 0} \neq 0$$

$A \sim A''$

□

Proposition 2.14. *Dal cor [2.11,pg.36] e dalla precedente proposizione, segue che*

$$A \sim A' \Leftrightarrow b = b'$$

ovvero, le matrici associate a una stessa forma bilineare sono congruenti, e viceversa, matrici congruenti definiscono una stessa forma bilineare.

Proposition 2.15.

$$A \sim A' \Rightarrow \rho(A) = \rho(A')$$

Proof:

$$A \sim A' \Leftrightarrow A = {}^tMA'M$$
$$\rho(A'M) \underbrace{=}_{prop.[\text{AL},7.13,\text{pg}.45]} \rho(A')$$
$$N := A'M$$
$$\begin{cases} M \in GL_n(\mathbb{K}) \\ A' \in \mathbb{K}^{n,n} \end{cases} \Rightarrow \det M = \det {}^tM \neq 0 \Rightarrow {}^tM \in GL_n(\mathbb{K})$$
$$\begin{cases} {}^tM \in GL_n(\mathbb{K}) \\ N \in \mathbb{K}^{n,n} \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{prop.[\text{AL},7.13,\text{pg}.45]} \rho({}^tMN) = \rho(N)$$
$$\rho({}^tMN) = \rho({}^tM(A'M)) = \rho(A'M) = \rho(A')$$
$$\rho(A) = \rho({}^tMA'M) = \rho(A')$$

□

Definition 2.16. Da quest'ultima proposizione [2.15,pg.37] e dalla prop [2.14,pg.37] si ha che le matrici associate a una stessa forma bilineare hanno tutte le stesso rango.
Ha allora senso definire il rango di una forma bilineare:

$$\rho(b) = \rho(A)$$

dove A e' una qualsiasi matrice associata a b

2.2 b degenere

Definition 2.17. Sia $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineare,

$$b \text{ e' degenere } \Leftrightarrow \rho(b) < \dim V$$
$$b \text{ non e' degenere } \Leftrightarrow \rho(b) = \dim V$$

Proposition 2.18.

$$b \textit{ non e' degenere } \Leftrightarrow \forall v \in V \setminus \{\underline{0}\} \ \exists w \in V : \ b(v,w) \neq 0 \Leftrightarrow \forall w \in V \setminus \{\underline{0}\} \ \exists v \in V : \ b(v,w) \neq 0$$

Proof:
⟨1⟩1. Dim ⇒
Sia A la matrice associata a b rispetto alla base B.
Dobbiamo dimostrare che preso $v \in V, \ v \neq \underline{0}$, esiste $w \in V$ t.c.

$$b(v,w) = [v]_B A {}^t[w]_B \neq 0$$

allora,

b non e' degenere $\Leftrightarrow \rho(b) = \rho(A) = \dim V = n$

$A \in K^{n,n}, \ \rho(A) = n \Rightarrow \det A \neq 0$

Sia $X \in \mathbb{K}^{1,n}$

$\det A \neq 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{per Cramer}}$ l'unica soluzione di $XA = (0,0,\ldots,0)$ e' $X = (0,0,\ldots,0)$

$v \neq \underline{0} \Rightarrow [v]_B \neq (0,0,\ldots,0) \Rightarrow [v]_B A \neq (0,0,\ldots,0)$

Sia $(u_1, u_2, \ldots, u_n) = [v]_B A$ e supponiamo che u_i sia il primo elemento non nullo. Allora, poniamo

$$Y = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{posto } i-\text{esimo}}, 0, 0 \ldots, 0, 0)$$

avremo allora

$$XAY = (XA)Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & u_i & u_{i+1} & \ldots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \underbrace{1}_{\text{posto } i-\text{esimo}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (u_i) \neq 0$$

$XAY \neq 0$

Quindi, se come vettore w scegliamo $w \in V : \ [w]_B = {}^tY$, avremo

$$b(v, w) = [v]_B A {}^t[w]_B = XAY \neq 0$$

$\langle 1 \rangle 2$. Dim $\Leftarrow$

Pensiamo in termini di componenti.

Se per assurdo presa una $X \in \mathbb{K}^{1,n} : \ X \neq (0, 0, \ldots, 0)$

$$XA = (0, 0, \ldots, 0)$$

allora $\forall Y \ \ XAY = 0$, questo e' assurdo, perche' per Hp

$$\exists Y \in \mathbb{K}^{n,1} : \ \ XAY \neq 0$$

Quindi,

$$\forall X \in \mathbb{K}^{1,n} : \ \ X \neq (0, 0, \ldots, 0) \ \ \ XA \neq (0, 0, \ldots, 0)$$

Quindi, l'unica soluzione di $XA = (0, 0, \ldots, 0)$ e' $X = (0, 0, \ldots, 0)$, e percio' per Cramer, $\det A \neq 0$.

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \rho(A) = n \Leftrightarrow b \text{ non degenere}$$

□

Definition 2.19. Sia $b : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineare.
Sia $U \subseteq \mathbf{V}$ sottospazio.
La forma bilineare:

$$b' : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$b'(v, w) := b(v, w)$$

si chiama *indotta di* b su U

Proposition 2.20. *Sia* $U \subseteq \mathbf{V}$ *sottospazio.*

$$b : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K} \text{ non degenere } \not\Rightarrow b' : U \times U \longrightarrow \mathbb{K} \text{ non degenere}$$

dove b' *e' l'indotta di* b *su* U*.*

Proof:

$\langle 1 \rangle 1$. Mostriamo un controesempio

Poniamoci in $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$.

$$
\begin{aligned}
&b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\
&b(v, w) = [v]_\varepsilon A {}^t[w]_\varepsilon \\
&A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\rho(A) = 2 \\
&U := \mathcal{L}(e_1) = \mathcal{L}((1, 0)) \\
&\overline{A} = \big(b(e_1, e_1)\big) = \big(0\big) \\
&\rho(\overline{A}) = 0
\end{aligned}
$$

quindi A e' non degenere, mentre $\overline{A}$, una matrice associata a b', lo e'.
A titolo dimostrativo, calcoliamo A', la matrice associata di b rispetto alla base $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$:

$$
\begin{aligned}
&P_{B \to \varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&A' = {}^t P_{B \to \varepsilon} A P_{B \to \varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

□

2.3 Ortogonalita'

Sia $b : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineare **simmetrica**.

Definition 2.21. Presi $v, w \in \mathbf{V}$, diremo che

$$v \perp_b w \Leftrightarrow b(v, w) = 0$$

Sia $S \subseteq \mathbf{V}$,

$$S^{\perp_b} = \{v \in \mathbf{V} \mid \forall w \in S \;\; v \perp_b w\}$$

Siano $U, W \subseteq \mathbf{V}$, diremo che

$$U \perp_b W \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} U \subseteq W^{\perp_b} \Leftrightarrow W \subseteq U^{\perp_b}$$

Proposition 2.22. *$S^{\perp_b}$ e' un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$*

Proof:

$$
\begin{aligned}
&v, w \in S^{\perp_b} \Leftrightarrow v \perp_b s, \; w \perp_b s \; \forall s \in S \;\; \Leftrightarrow b(v, s) = b(w, s) = 0 \;\; \forall s \in S \\
&b(v + w, s) = b(v, s) + b(w, s) = 0 \Leftrightarrow v + w \perp_b s \;\; \forall s \in S \;\; v + w \in S^{\perp_b}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&k \in \mathbb{K} \\
&b(kv, s) = kb(v, s) = 0 \;\; \forall s \in S \Leftrightarrow kv \perp_b s \;\; \forall s \in S \Leftrightarrow kv \in S^{\perp_b}
\end{aligned}
$$

□

Proposition 2.23. *Sia $U \subseteq \mathbf{V}$ sottospazio vettoriale, e sia $C = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ una sua base, allora preso un $v \in \mathbf{V}$,*

$$v \in U^{\perp_b} \Leftrightarrow v \perp_b u_i \;\; \forall i = 1, 2, \ldots, r$$

In sostanza, per verificare che v sta' in $U^{\perp_b}$, basta verificare che v sia ortogonale con i vettori della base di U.

Proof:
$\langle 1\rangle 1$. Dim $\Rightarrow$
Per la definizione di $U^{\perp_b}$ e perche' $u_i \in U$.
$\langle 1\rangle 2$. Dim $\Leftarrow$
Preso un qualsiasi $u \in U$, possiamo scomporlo usando la base C:

$$u = \sum_{i=1}^{r} a_i u_i$$

Quindi

$$b(v,u) = b(v, \sum_{i=1}^{r} a_i u_i) = \sum_{i=1}^{r} a_i \underbrace{b(v,u_i)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow v \perp_b u$$

per l'arbitrarieta' di u, v e' perpendicolare ad ogni U.

□

Definition 2.24. $\mathbf{V}^{\perp_b}$ si chiama *radicale di* $\mathbf{V}$ *rispetto a* b

Proposition 2.25. $b : \mathbf{V}\times\mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ *forma bilineare simmetrica,*

$$b \text{ e' non degenere } \Leftrightarrow \mathbf{V}^{\perp_b} = \{\underline{0}\}$$

Proof: Per la prop [2.18,pg.38]

$$b \text{ e' non degenere } \Leftrightarrow \forall v \in \mathbf{V} :\ v \neq \underline{0}\ \ \exists w \in \mathbf{V} :\ b(v,w) \neq 0$$

$$\exists w \in \mathbf{V} :\ \ b(v,w) \neq 0 \Leftrightarrow v \notin \mathbf{V}^{\perp_b}\ \ \forall v \in \mathbf{V} :\ v \neq \underline{0} \Leftrightarrow \mathbf{V}^{\perp_b} = \{\underline{0}\}$$

Proposition 2.26. *Data la forma bilineare simmetrica* $b : \mathbf{V}\times\mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$, *sia* b' *la sua indotta su* U, *si ha*

$$b' \text{ e' non degenere } \Leftrightarrow U^{\perp_b} \cap U = \{\underline{0}\}$$

Proof: Per la prop [2.25,pg.41], si ha

$$b' \text{ e' non degenere } \Leftrightarrow U^{\perp_{b'}} = \{\underline{0}\}$$

$U^{\perp_{b'}}$ sono tutti quei vettori di U ortogonali a tutti i vettori di U tramite b', cioe' $U^{\perp_{b'}}$ e' il radicale di U rispetto a b', quindi:

$$U^{\perp_{b'}} = \{v \in U \mid \forall u \in U\ \ v \perp_{b'} u\}$$

Poiche'

$$v \perp_{b'} u \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{b' \text{ e' l'indotta di } b} \quad v \perp_b u$$

abbiamo

$$U^{\perp_{b'}} = \{v \in U \mid \forall u \in U\ \ v \perp_b u\} = U^{\perp_b} \cap U$$

Proposition 2.27. *Data* $b : \mathbf{V}\times\mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$, *forma bilineare simmetrica,*

$$\begin{cases} b \textit{ non degenere} \\ U \subseteq \mathbf{V} \textit{ sottospazio} \end{cases} \Rightarrow \dim U + \dim U^{\perp_b} = \dim \mathbf{V}$$

Proof:
Sia $C = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ una base di U. Completiamola a una base di V:

$$B = C \cup \{u_{r+1}, \dots, u_n\}$$

$\langle 2 \rangle 1$. Sappiamo per la prop [2.22,pg.40] che $U^{\perp_b}$ e' uno spazio vettoriale. Calcoliamo le sue equazioni cartesiane.

Sia A la matrice associata a b secondo la base B, cioe' $A_{ij} = b(u_i, u_j)$.

Per la prop [2.23,pg.40],

$$v \in U^{\perp_b} \Leftrightarrow v \perp_b u_i \ \forall i = 1, 2, \dots, r \Leftrightarrow b(u_i, v) = 0 \ \forall i = 1, 2, \dots, r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [u_i]_B A^t [v]_B = 0 \ \forall i = 1, 2, \dots, r \quad (1)$$

Poiche'

$$[u_i]_B = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{i-\text{esimo posto}}, 0, 0, \dots,)$$

, si ha

$$[u_i]_B A^t [v]_B = 0 \Leftrightarrow {A_i}^t [v]_B = 0$$

dove A_i e' la riga i-esima di A.

Allora, il sistema (1) equivale a

$$A'^t [v]_B = \underline{0} \quad (2)$$

dove A' e' la matrice formata dalle prime r righe di A, e $\underline{0}$ in questo caso e' la colonna tutta di zeri.

$\langle 3 \rangle 1$. $\rho(A') = r$

Se per assurdo $\rho(A') < r$, allora ci sarebbe almeno una riga A'_c di A' dipendente dalle altre, ma le righe di A' sono le prime r di A, quindi $\rho(A) < n$. Questo e' assurdo perche' b e' non degenere.

Adesso conosciamo il rango della matrice dei coefficienti del sistema (2), che e' il sistema di $U^{\perp_b}$, quindi

$$\dim U^{\perp_b} = \dim \mathbf{V} - \rho(A') = \dim \mathbf{V} - r = \dim \dim \mathbf{V} - \dim U$$

che e' la tesi.

□

Proposition 2.28. *Data $b : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$, forma bilineare simmetrica, b' indotta di b su $U \subseteq \mathbf{V}$,*

$$\begin{cases} b' \text{ non degenere} \\ U \subseteq \mathbf{V} \text{ sottospazio} \end{cases} \Rightarrow \dim U + \dim U^{\perp_b} = \dim \mathbf{V}$$

Proof: Basta usare la dimostrazione della proposizione [2.27,pg.41]. L'unica differenza e' che non e' necessario calcolare $\rho(A')$:

Sia A'' la sua matrice associata di b'. Poiche' b' e' non degenere, $\rho(A'') = r = \dim U$

A'' e' un minore di A', quindi $\rho(A') \geq r$. Ma A' ha r righe, quindi $\rho(A') = r$.

□

Corollary 2.29. *Data $b : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ f.b. simmetrica, non degenere, e $U \subseteq \mathbf{V}$ sottospazio,*

$$\left(U^{\perp_b}\right)^{\perp_b} = U$$

Proof:

$\langle 1 \rangle 1$. $U \subseteq {U^{\perp_b}}^{\perp_b}$

$$U^{\perp_b} = \{v \in V \mid v \perp_b u \ \ \forall u \in U\}$$
$$u \in U,\ v \in U^{\perp_b} \Rightarrow u \perp_b v$$
$$\Rightarrow \forall v \in U^{\perp_b} \ \ u \perp_b v \Leftrightarrow u \in U^{\perp_b{}^{\perp_b}} = \left\{v \in V \mid \forall w \in U^{\perp_b} \ \ v \perp_b w\right\}$$
$$\dim\left(U^{\perp_b}\right)^{\perp_b} \underbrace{=}_{prop[2.27,\text{pg.}41]} \dim \mathbf{V} - \dim\left(U^{\perp_b}\right) = \dim \mathbf{V} - (\dim \mathbf{V} - \dim U) = \dim U$$
$$\begin{cases} \dim\left(U^{\perp_b}\right)^{\perp_b} = \dim U \\ U \subseteq U^{\perp_b{}^{\perp_b}} \end{cases} \Rightarrow U = U^{\perp_b{}^{\perp_b}}$$

□

Proposition 2.30. *Data $b : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ f.b. simmetrica, e $U \subseteq \mathbf{V}$ sottospazio, b' indotta di b su U*

$$b' \text{ e' non degenere } \Leftrightarrow U + U^{\perp_b} = U \oplus U^{\perp_b}$$

inoltre

$$b' \text{ e' non degenere } \Leftrightarrow \mathbf{V} = U \oplus U^{\perp_b}$$

Proof:
⟨1⟩1. Dim $\Rightarrow$

$$b' \text{ e' non degenere } \underbrace{\Leftrightarrow}_{prop[2.26,\text{pg.}41]} U^{\perp_b} \cap U = \{\underline{0}\} \underbrace{\Leftrightarrow}_{[\text{AL},3.7.1,\text{pg.}19]} U^{\perp_b} + U = U^{\perp_b} \oplus U$$
$$\dim U^{\perp_b} \oplus U \underbrace{=}_{\text{thm Grassman}} \dim U^{\perp_b} + \dim U \underbrace{=}_{prop[2.28,\text{pg.}42]} \dim \mathbf{V}$$
$$\begin{cases} U^{\perp_b} \oplus U \subseteq \mathbf{V} \\ \dim U^{\perp_b} \oplus U = \dim \mathbf{V} \end{cases} \Rightarrow U^{\perp_b} \oplus U = \mathbf{V}$$

⟨1⟩2. Dim $\Leftarrow$
Basta seguire a ritroso la prima riga del precedente passo.

□

2.3.1 Isotropo

Definition 2.31. Data $b : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ forma bilineare,

$v \in \mathbf{V}$ si dice *isotropo* rispetto a $b \Leftrightarrow b(v, v) = 0$

Proposition 2.32. *Tutti i vettori non isotropi sono diversi da $\underline{0}$.*

Proof: Infatti, se per assurdo $u = \underline{0}$, allora $b(u, u) = b(\underline{0}, \underline{0}) = 0$ assurdo.

□

Proposition 2.33.

$v \in \mathbf{V}$ non isotropo rispetto a $b : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ bilineare e simmetrica $\Leftrightarrow \mathbf{V} = \mathcal{L}(v) \oplus \mathcal{L}(v)^{\perp_b}$

Proof:

$v \in \mathbf{V}$ non isotropo rispetto a $b \Leftrightarrow b(v,v) \neq 0 \Rightarrow A = (b(v,v))$ e' non degenere $\Rightarrow$

$\Rightarrow b'$ indotta di b su $\mathcal{L}(v)$ e' non degenere $\underbrace{\Leftrightarrow}_{prop[2.30,\text{pg.}43]}$ $V = \mathcal{L}(v) \oplus \mathcal{L}(v)^{\perp_b}$

A e' la matrice associata a b', che in questo caso e' formata dal solo scalare $b(v,v)$.

□

Proposition 2.34.

$\forall v \in \mathbf{V}^*$ *v non isotropo rispetto a* $b : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ *bilineare e simmetrica* $\Rightarrow \mathbf{V}^{\perp_b} = \{\underline{0}\} \Leftrightarrow b$ *e' non deg.* $\not\Leftarrow$

Ovvero, se tutti i vettori di $\mathbf{V}$*, tranne lo* $\underline{0}$*, non sono isotropi, allora* b *e' non degenere. Non vale il viceversa.*

Proof:

Se per assurdo $\exists w \in \mathbf{V}^{\perp_b} : \ w \neq \underline{0}$, allora

$$w \perp_b w \Leftrightarrow b(w,w) = 0 \Leftrightarrow w \text{ e' isotropo}$$

assurdo.

$\langle 1 \rangle 1$. Dim $\not\Leftarrow$

Consideriamo il controesempio della prop [2.20,pg.39]: in $\mathbb{R}^2$, consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e sia b la forma bilineare associata ad A secondo la base $\{e_1, e_2\}$.

A e' non degenere, ma $b(e_1, e_1) = A_{11} = 0$.

□

Proposition 2.35. *La contronominale della precedente proposizione: data* $b : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow K$ *bil. e sym.*

$$b \text{ degenere } \Rightarrow \exists v \in \mathbf{V} \setminus \{\underline{0}\} : \ v \text{ e' isotropo rispetto ab}$$

Proposition 2.36. *Data* $b : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ *forma bilineare,*

$$\begin{cases} b \text{ non nulla } \Leftrightarrow \exists v, w \in \mathbb{K} : \ b(v,w) \neq 0 \\ b \text{ simmetrica} \end{cases} \Rightarrow \exists u \in V : \ u \text{ non isotropo}$$

Proof:

Siano $v, w \in \mathbb{K} : \ b(v,w) \neq 0$.

Se v o w e' non isotropo, allora $u = v$ o $u = w$.

Se v e w sono isotropi, allora $u = v + w$:

$v \neq w$, infatti, se per assurdo $v = w$ allora , $b(v,w) = b(v,v) = 0$ assurdo

$$b(v+w, v+w) = \underbrace{b(v,v)}_{=0} + \underbrace{b(w,w)}_{=0} + \underbrace{2b(v,w)}_{\text{b e' sym}} = 2b(v,w) \neq 0$$

□

2.4 Forma quadratica

Definition 2.37. Data $b : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$, forma bilineare, si definisce la seguente applicazione:

$$q : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$q(v) = b(v,v)$$

Proposition 2.38. *Se b e' una f.b simmetrica*

1. $q(kv) = k^2 q(v)$
2. $2b(v,w) = q(v+w) - q(v) - q(w)$

Dalla 2. *segue che ogni q determina univocamente la sua forma bilineare associata, che viene chiamata* forma bilineare polare *di q. In altre parole, non possono esistere due forme bilineari distinte che hanno la stessa q.*

Proof:
⟨1⟩1. Dim. la 1.

$$q(kv) = b(kv, kv) = kb(v, kv) = k^2 b(v, v)$$

⟨1⟩2. Dim la 2.

$$\begin{aligned} &q(v+w) - q(v) - q(w) = b(v+w, w+v) - b(v,v) - b(w,w) = \\ &= b(v, w+v) + b(w, w+v) - b(v,v) - b(w,w) = \\ &= b(v,w) + \underline{b(v,v)} + b(w,w) + b(w,v) - \underline{b(v,v)} - b(w,w) = b(v,w) + b(w,v) \underbrace{=}_{\text{b e' sym}} 2b(v,w) \end{aligned}$$

Proposition 2.39. *Sia data $b : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ e sia $B = \{e_i\}$ una base di $\mathbf{V}$.*
Sia $A = (A_{ij}) = (b(e_i, e_j))$ la matrice associata a b.
Allora, preso $v \in \mathbf{V}$ e posto $[v]_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$q(v) = b(v,v) = [v]_B A^t [v]_B \underbrace{=}_{prop[2.5,pg.34]} \sum_{i,j}^{n} A_{ij} x_i x_j \underbrace{=}_{A \text{ e' sym}} \sum_{i=1}^{n} A_{ii} x_i^2 + \sum_{j>i}^{n} 2A_{ij} x_i x_j =$$
$$= A_{11}x_1^2 + A_{22}x_2^2 + \cdots + A_{nn}x_n^2 \; + \; 2A_{12}x_1x_2 + 2A_{13}x_1x_3 + 2A_{23}x_2x_3 + \cdots + 2A_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

quindi tutti i monomi di $q(v)$ sono di secondo grado.

2.5 Diagonalizzazione di b simmetrica

Definition 2.40. Sia $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base di $\mathbf{V}$.

B e' diagonalizzante o ortogonale $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} b(v_i, v_j) = 0 \;\; \forall i \neq j \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ la matrice $A = (A_{ij}) = (b(v_i, v_j))$ e' diagonale

B e' ortonormale $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B$ e' diagonalizzante e $b(v_j, v_j) = 1 \;\; j = 1, 2, \ldots, n \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ la matrice $A = (A_{ij}) = (b(v_i, v_j))$ e' la matrice identica

Proposition 2.41. *Preso $v \in \mathbf{V}$ e posto $[v]_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,*

$$B \text{ diagonalizzabile } \Leftrightarrow q(v) = b(v,v) = \sum_{i}^{n} A_{ii} x_i^2 = A_{11}x_1^2 + A_{22}x_2^2 + \cdots + A_{nn}x_n^2$$

$$B \text{ ortonormale } \Leftrightarrow q(v) = b(v,v) = \sum_{i}^{n} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

ovvero, tutti monomi di sono di secondo grado e non ci sono termini misti.

Proof: Deriva direttamente dalla definizione [2.40,pg.45], e dalla prop [2.39,pg.45]. □

Theorem 2.42.

$$b : \mathbf{V}\times\mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K} \text{ bilineare e simmetrica } \Rightarrow \exists B' \text{ base di } \mathbf{V} \text{ diagonalizzante per } b$$

B' non e' unica perche', ad esempio, kB' e' un'altra base diagonalizzante.

Proof: Daremo due dimostrazioni. Ogni dimostrazione da' anche un metodo costruttivo per trovare la base B'.

⟨1⟩1. Dim I

Se $b(v,w) = 0 \ \forall v, w \in \mathbf{V}$, allora ogni base e' diagonalizzante per b. Supponiamo quindi che

$$\exists v, w \in \mathbf{V} : \ b(v,w) \neq 0 \quad (1)$$

Per la prop. [2.36,pg.44], $\exists u \in \mathbf{V}$ non isotropo.

Procediamo per induzione su $\dim V = n$.

⟨2⟩1. $n = 1$

In questo caso ogni base $B = \{e_1\}$ e' diagonalizzante.

⟨2⟩2. Dimostriamo $P(n-1) \Rightarrow P(n)$, dove $P()$ e' la tesi

Supponiamo che $P(n-1)$ sia vera.

Poiche' u e' non isotropo, per la prop [2.33,pg.43], si ha

$$\mathbf{V} = \mathcal{L}(u) \oplus \mathcal{L}(u)^{\perp_b} \quad (2)$$

$$\dim \mathcal{L}(u)^{\perp_b} = \dim \mathbf{V} - \dim \mathcal{L}(u) = n - 1 \quad (2.1)$$

Consideriamo l'indotta b' di b su $\mathcal{L}(u)^{\perp_b}$.

$$(2.1) \underbrace{\Rightarrow}_{P(n-1) \text{ vera}} \exists B'' = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\} \text{ base di } \mathcal{L}(u)^{\perp_b} \text{ diag. per } b' \quad (2.3)$$

Completiamo B'' con u ottendo $B' = B'' \cup \{u\}$.

Per la (2), B' e' una base di $\mathbf{V}$. Controlliamo che sia diagonalizzante:

$$(2.3) \Rightarrow b(e_i, e_j) = 0 \ \forall i \neq j$$

resta da controllare u:

$$B'' \subseteq \mathcal{L}(u)^{\perp_b} \Rightarrow e_i \in \mathcal{L}(u)^{\perp_b} \ \Rightarrow e_i \perp_b u \Leftrightarrow b(e_i, u) = 0$$

quindi B' e' una base diagonalizzante per b.

⟨2⟩3. Descriviamo il metodo costruttivo

1. Se non esistono vettori non isotropi di $\mathbf{V}$, ovvero se tutti i vettori sono isotropi, allora per la contronominale della prop. [2.36,pg.44] si ha
   $$\forall v, w \in \mathbf{V} \ \ b(v,w) = 0$$
   e quindi ogni base e' diagonalizzante.
2. Troviamo un vettore u non isotropo di $\mathbf{V}$.
   Se conosciamo due vettori v, w isotropi, tali che $b(v,w) \neq 0$, allora $u = v + w$.
3. Troviamo l'equazioni di $\mathcal{L}(u)^{\perp_b}$, usando il metodo visto nella dimostrazione della prop [2.27,pg.41], ovvero cerchiamo quel generico vettore $w \in \mathbf{V}$ tale che
   $$b(w,u) = 0$$
4. Adesso dobbiamo trovare una base B_1 diagonalizzante per b', ovvero, l'indotta di b su $\mathcal{L}(u)^{\perp_b}$.
   Se $\dim \mathcal{L}(u)^{\perp_b} = 1$, abbiamo finito: B_1 e' formata da un qualsiasi vettore di $\mathcal{L}(u)^{\perp_b}$, altrimenti, ricursivamente, ripartiamo dal passo 1 :
   a. sia $b' : \mathcal{L}(u)^{\perp_b} \longrightarrow \mathbb{K}$ l'indotta di b su $\mathcal{L}(u)^{\perp_b}$
   b. dobbiamo trovare un vettore $u_1 \in \mathcal{L}(u)^{\perp_b}$ non isotropo.
      Se non esistono vettori non isotropi, allora ogni base $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ di $\mathcal{L}(u)^{\perp_b}$ e' diagonalizzante per b' e possiamo evitare di andare oltre. Altrimenti, per trovare u_1,

imponiamo

$$\begin{cases} u_1 \in \mathcal{L}(u)^{\perp_b} \\ b(u_1, u_1) \neq 0 \end{cases}$$

c. Troviamo le equazioni di $\mathcal{L}(u_1)^{\perp_{b'}}$. Per far cio', dobbiamo trovare quel generico vettore w tale che

$$b'(w, u_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b(w, u_1) = 0 \\ w \in \mathcal{L}(u)^{\perp_b} \end{cases}$$

per imporre che $w \in \mathcal{L}(u)^{\perp_b}$ e' sufficiente usare le equazioni di $\mathcal{L}(u)^{\perp_b}$ che abbiamo gia' trovato prima.

d. Troviamo una base B_2 diagonalizzante per b indotta su $\mathcal{L}(u_1)^{\perp_{b'}}$.
Se $\dim \mathcal{L}(u_1)^{\perp_{b'}} = 1$, una qualsiasi base e' diagonalizzante,
altrimenti procediamo ricursivamente: troviamo un vettore $u_2 \in \mathcal{L}(u_1)^{\perp_{b'}}$ non isotropo,
...

5. La base diagonalizzante per b sara' $\{u, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}\}$

□

⟨2⟩4. Dim II

Se b e' nulla, ogni base e' diagonalizzante. Supponiamo che b non sia nulla, ovvero

$$\exists w, w' \in \mathbf{V} : \ b(w, w') \neq 0$$

allora per la prop [2.36,pg.44], $\exists u \in \mathbf{V}$ non isotropo.
Procediamo per induzione su $\dim V = n$. La tesi induttiva $P(n)$ e': $q(v)$ e' una forma qudratica diagonalizzabile e si puo' scrivere come:

$$\begin{aligned} q(v) = \alpha_1(x_1 + h_{12}x_2 + \cdots + h_{1n}x_n)^2 + \\ + \alpha_2(x_2 + h_{23}x_2 + \cdots + h_{2n}x_n)^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2 \\ \text{con } \alpha_i \neq 0, \ \ i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

⟨3⟩1. $n = 1$

In questo caso ogni base $B = \{e_1\}$ e' diagonalizzante e per la prop [2.41,pg.45], si ha

$$q(v) = x_1^2$$

con $[v]_B = (x_1)$.

⟨3⟩2. Dimostriamo $P(n-1) \Rightarrow P(n)$, dove $P()$ e' la tesi

Supponiamo che $P(n-1)$ sia vera.
Sia $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base di $\mathbf{V}$ in cui u_1 e' non isotropo. Possiamo sempre formare questa base: basta considerare u e completarlo con altri $n-1$ vettori l.i di $\mathbf{V}$.
Consideriamo $A = (A_{ij}) = (b(u_i, u_j))$, e sia $v \in \mathbf{V}$, $[v]_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, allora per la

prop [2.39,pg.45],

$$q(v) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}x_i^2 + \sum_{j>i}^{n} 2A_{ij}x_i x_j =$$

$$\underbrace{=}_{(*)} A_{11}x_1^2 + \sum_{j=2}^{n} 2A_{1j}x_1x_j + \underbrace{\sum_{i=2}^{n} A_{ii}x_i^2 + \sum_{j>i}^{n} 2A_{ij}x_ix_j}_{F} =$$

u_1 non isotropo $\Leftrightarrow b(u_1,u_1) \neq 0 \Leftrightarrow A_{11} \neq 0$

$$= A_{11}\left(x_1^2 + \sum_{j=2}^{n} 2A_{11}^{-1}A_{1j}x_1x_j\right) + F =$$

$$\underbrace{=}_{(**)} A_{11}\left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} A_{11}^{-1}A_{1j}x_j\right)^2 \underbrace{- A_{11}\left(\sum_{j=2}^{n}(A_{11}^{-1}A_{1j}x_j)^2 - (\text{i vari doppi prodotti})\right)}_{\overline{F}} + F =$$

$$= A_{11}\left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} A_{11}^{-1}A_{1j}x_j\right)^2 - \overline{F} \quad (1)$$

(*) In sostanza abbiamo preso tutti i termini con x_1 e li abbiamo esclusi dal resto.
(**) Metodo del completamento dei quadrati.
In $\overline{F}$ non ci sono monomi con la x_1, quindi $\overline{F}$ ha $n-1$ variabili.
Allora, $\overline{F}$ individua una forma quadratica $\overline{q} : W \times W \longrightarrow \mathbb{K}$ la cui matrice associata $\overline{A} \in \mathbb{K}^{n-1,n-1}$. Ovvero, $\dim W = n-1$. Allora, per l'ipotesi induttiva, $\overline{q}$ e' diagonalizzabile e possiamo scrivere $q(v) = \overline{F}$ come

$$q(v) = \overline{F} = \sum_{i=2}^{n} \overline{A}_{ii}y_i^2$$

dove

$$y_i = x_i + h_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots + h_{i,n}x_n \quad i = 2,3,\ldots,n-1$$
$$y_n = x_n$$

Allora se nella (1) poniamo

$$y_1 = x_1 + \sum_{j=2}^{n} A_{11}^{-1}A_{1j}x_j$$

avremo

$$q(v) = A_{11}y_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \overline{A}_{ii}y_i^2$$

Questo e' un polinomio omogeneo di secondo grado senza termini misti, quindi sempre per la [2.41,pg.45], q e' una forma quadratica diagonalizzante.
Dai coefficienti di $q(v)$ ricaviamo la sua nuova matrice diagonale associata A'.
A' sara' relativa a qualche base $B' = \{e_1', \ldots, e_n'\}$, che e' la base che cerchiamo. Si tratta adesso di capire chi e'.
Poiche' conosciamo gia' le relazioni tra le componenti del generico vettore v in B e quelle

in B', possiamo costruire la matrice di passaggio:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \sum_{j=2}^{n} A_{11}^{-1} A_{1j} x_j \\ y_2 = x_2 + h_{2,3}x_3 + \cdots + h_{2,n}x_n \\ \dots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

$$\underbrace{\longrightarrow}_{\text{ricaviamo le } x \text{ in funzione delle } y} \begin{cases} x_n = y_n \\ x_{n-1} = y_{n-1} - h_{n-1,n}x_n = y_{n-1} - h_{n-1,n}y_n \\ \dots \\ x_1 = y_1 - \sum_{j=2}^{n} \beta_j y_j \end{cases}$$

che espresso mediante matrici:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \dots & \beta_{n-1} & \beta_n \\ 0 & 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -h_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

la matrice P nel mezzo e' la nostra matrice $P_{B' \to B}$, infatti $\det P = 1 \neq 0$ (nota [7])

A questo punto, conoscendo $P_{B' \to B}$ possiamo ricavarci i vettori di B': per definizione di matrice di passaggio, si ha che $P^j = [e'_j]_B$, dove P^i e' la colonna j-esima di P. Allora

$$[e'_j]_B = P^j \ \ \forall i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow e'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} e_i$$

ecco che abbiamo trovato i vettori di B'.

⟨3⟩3. Il metodo costruttivo relativo a questa dimostrazione, consiste semplicemente nel seguire i passi della dimostrazione, con l'accortezza che quando bisogna usare l'ipotesi induttiva, si deve procedere ricursivamente.

Se poi ci troviamo in una situazione del tipo:

$$q(v) = x_1 x_2 \text{ rispetto alla base } B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

allora, si puo' effettuare una sostituzione del tipo

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \end{cases} \quad (1)$$

questa sostituzione e' lecita perche' il sistema (1) nelle incognite y_1, y_2 ammette un'unica soluzione, avendo determinante delle matrice dei coefficienti non nulla:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

otteniamo

$$q(v) = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = y_1^2 - y_2^2$$

La base diagonalizzante si puo' ricavare direttamente dalla (1):

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e' la matrice di passaggio

$B = \{e_1 + e_2, -e_1 + e_2\}$ e' la base diagonalizzante

□

[7] $\det P = 1$ perche' P e' diagonale, quindi il det e' il prodotto degli elementi della diagonale.

Corollary 2.43. *Nelle ipotesi del thm [2.42,pg.46], considerando le matrici A, A' associate a b rispettivamente alle basi B, B', dove B' e' la base diagonalizzante per b , si ha*

$$A = {}^tP_{B\to B'} A' P_{B\to B'}$$
$$A' \text{ e' diagonale}$$

Inoltre se b e' non degenere, ogni elemento della diagonale di A' e' non nullo.

Proof: Poiche' A, A' sono associate alla stessa forma bilineare b, per la prop [2.10,pg.36] si ha la tesi.

A' e' diagonale perche' associata a b rispetto alla base B'. B' e' la base diagonalizzante per b.

Se per assurdo ci fosse un elemento nullo nella diagonale di A',

$$\rho(A') < n \Rightarrow b \text{ degenere}$$

assurdo. □

Corollary 2.44.

$$A \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{K}) \Rightarrow \exists A' \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{K}) \text{ } \textit{diagonale t.c.} \text{ } A \sim A'$$

Proof: Per l'isomorfismo [2.9,pg.35], ogni $A \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{K})$, determina una $b : \mathbf{V}\times\mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ simmetrica. Per il thm [2.42,pg.46], esiste la base $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ diagonalizzante per b, che determinera' una $A' \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{K})$ diagonale, cioe'

$$A'_{ij} = b(e'_i, e'_j) \text{ e' diagonale}$$

Allora, poiche' A, A' sono associate alla stessa b, per la prop, [2.14,pg.37] si ha $A \sim A'$. □

Theorem 2.45. *Data $b : \mathbf{V}\times\mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$, forma bilineare simmetrica, con $\mathbb{K}$ campo algebricamente chiuso*[8] *, allora $\exists$ una base (non unica) $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ diagonalizzante per b e tale che considerando $A' = (b(e'_i, e'_j))$, si abbia*

$$A' = \begin{pmatrix} I_r & \underline{0}_1 \\ \underline{0}_2 & \underline{0}_3 \end{pmatrix}$$

dove $r = \rho(b)$, I_r e' la matrice identica di ordine r, e $\underline{0}_1 \in \mathbb{K}^{r,n-r}, \underline{0}_2 \in \mathbb{K}^{n-r,r}, \underline{0}_1 \in \mathbb{K}^{n-r,n-r}$. Ovvero,

$$A'_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \ \ i \le r \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

[8] Un campo $\mathbb{K}$ e' algebricamente chiuso se ogni polinomio diverso dal polinomio nullo ha una radice in $\mathbb{K}$. Ad esempio, $\mathcal{C}$ e' algebricamente chiuso perche' ogni polinomio in $\mathbb{C}$ ammette radici (teorema fondamentale dell'algebra).
$\mathbb{R}$ non e' algebricamente chiuso:

$$x^2 = -1$$

non ha soluzioni in $\mathbb{R}$.

o in altri termini, A' e' del tipo

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Proof:

Per il thm [2.42,pg.46], esiste una base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ diagonalizzante per b. Sia A la matrice associata a b relativa a B, cioe' $A = (b(e_i, e_j))$.

Possiamo riordinare i vettori di B, mettendo per primi i vettori non isotropi, otteniamo cosi' la base:

$$\{u_1, \dots, u_n\}$$

$\langle 2 \rangle 1$. I vettori non isotropi devono essere necessariamente r, ovvero $\{u_1, \dots, u_r\}$ sono isotropi, i rimanenti $n - r$ no.

Poiche' A e' diagonale, il suo rango $\rho(A)$ e' uguale al numero degli elementi non nulli della sua diagonale. Ma poiche'

$$A_{ii} = b(e_i, e_i) \neq 0 \Rightarrow e_i \text{ non isotropo}$$

abbiamo che gli elementi non nulli sono tanti quanti gli elementi non isotropi.

A questo punto, basta costruire la base

$$B' = \left\{ \underbrace{\frac{u_1}{\sqrt{b(u_1,u_1)}}}_{w_1}, \underbrace{\frac{u_2}{\sqrt{b(u_2,u_2)}}}_{w_2}, \dots, , \underbrace{\frac{u_r}{\sqrt{b(u_r,u_r)}}}_{w_r}, \underbrace{u_{r+1}}_{w_{r+1}}, \dots, \underbrace{u_n}_{w_n} \right\} =$$

$$= \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

E' lecito calcolare $\sqrt{b(u_r, u_r)}$, perche' $\mathbb{K}$ e' algebricamente chiuso.

La matrice $A' = (b(w_i, w_j))$, e' quella cercata, infatti, scelto $i \leq r$,

$$b(w_i, w_i) = b\left(\frac{u_i}{\sqrt{b(u_i,u_i)}}, \frac{u_i}{\sqrt{b(u_i,u_i)}} \right) \underbrace{=}_{\text{b e' bilineare}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{b(u_i,u_i)}} \right)^2 b(u_i, u_i) \underbrace{=}_{u_i \text{ e' non isotropo}} = 1$$

Scelto invece $i > r$:

$$b(w_i, w_i) = b(u_i, u_i) \underbrace{=}_{u_i \text{ e' isotropo}} 0$$

e infine, scelto $i \neq j$

$$b(w_i, w_j) \underbrace{=}_{\text{e' diagonale}} 0$$

Corollary 2.46. *Se $\mathbb{K}$ e' algebricamente chiuso, si ha*

$$A \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{K}) \Rightarrow A \sim A',$$

$$\textit{con } A'_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \ \ i \leq \rho(A) \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Proof: Per l'isomorfismo [2.9,pg.35], ogni $A \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{K})$, determina una $b : \mathbf{V}\times\mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ simmetrica. Per il thm [2.45,pg.50], esiste la base $B' = \{e'_i\}$ diagonalizzante per b tale che

$$A'_{ij} = b(e'_i, e'_j) = \begin{cases} 1 & i = j, \;\; i \leq \rho(b) = \rho(A) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora, poiche' A, A' sono associate alla stessa b, per la prop, [2.14,pg.37] si ha $A \sim A'$. □

Theorem 2.47. *Data $b : \mathbf{V}\times\mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$, forma bilineare simmetrica, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, allora $\exists$ una base $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ diagonalizzante per b e tale che considerando $A' = (b(e'_i, e'_j))$, si abbia*

$$A' = \begin{pmatrix} I_p & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & -I_{r-p} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}$$

dove $r = \rho(b)$ e $p \leq r$.
Ovvero,

$$A'_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \;\; i \leq p \\ -1 & i = j, \;\; p < i \leq r \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Inoltre, p dipende solo da b, ovvero, se esiste un'altra base B'' t.c.

$$A'' = (b(e''_i, e''_j)) = \begin{pmatrix} I_t & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & -I_{r-t} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}$$

allora $p = t$.

Proof:
⟨1⟩1. Dimostriamo la prima parte
La dimostrazione e' simile a quella del teorema [2.45,pg.50]. La differenza risiede in $\mathbb{K}$: poiche' $\sqrt{-k}$, con $k > 0$ non ha senso in $\mathbb{R}$, al posto di

$$w_i = \frac{u_i}{\sqrt{b(u_i, u_i)}}$$

bisogna porre

$$w_i = \frac{u_i}{\sqrt{|b(u_i, u_i)|}}$$

e quindi avremo $b(w_i, w_i) = \pm 1$.
A questo punto si tratta di riordinare B', mettendo per primi i vettori w_i tali che $b(w_i, w_i) = 1$, e dopo i vettori t.c. $b(w_i, w_i) = -1$.
⟨1⟩2. Dimostriamo che p e' indipendente da b
Supponiamo per assurdo che $t \neq p$. Supponiamo inoltre $p > t$.
Siano dati i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \mathcal{L}\left(e'_1, e'_2, \ldots, e'_p\right)$$
$$W = \mathcal{L}\left(e''_{t+1}, \ldots, e''_n\right)$$

allora

$$\dim U + W \underbrace{=}_{\text{Grassman}} \dim U + \dim W - \dim U \cap W = p + (n - t) - \dim U \cap W$$

$$U + W \subseteq \mathbf{V} \Rightarrow \dim U + W \leq \dim \mathbf{V} = n \Leftrightarrow p + (n - t) - \dim U \cap W \leq n \Leftrightarrow p - t - \dim U \cap W \leq 0$$

ma poiche' $\dim U + W$ non puo' essere negativa, si deve avere

$$\dim U + W = 0 \Leftrightarrow \dim U \cap W = p - t \underbrace{>}_{p>t} 0$$

$$\dim U \cap W > 0 \Rightarrow \exists u \in U \cap W : \ u \neq \underline{0}$$

$$u \in U \Rightarrow u = a_1 e'_1 + a_2 e'_2 + \cdots + a_p e'_p + 0e'_{p+1} + \cdots + 0e'_n$$

$$\Leftrightarrow [u]_{B'} = (a_1, a_2, \ldots, a_p, 0, 0, \ldots, 0)$$

$$u \neq \underline{0} \Rightarrow \exists j \leq p : \ a_j \neq 0 \quad (2.1)$$

$$u \in W \Rightarrow u = 0e''_1 + \cdots + 0e'_t + b_{t+1}e''_{t+1} + b_{t+2}e''_{t+2} + \cdots + b_n e''_n$$

$$\Leftrightarrow [u]_{B''} = (0, 0, \ldots, 0, b_{t+1}, b_{t+2}, \ldots, b_n)$$

$$u \neq \underline{0} \Rightarrow \exists j \geq t+1 : \ b_j \neq 0 \quad (2.2)$$

Consideriamo

$$[v]_{B'} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$[v]_{B''} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Poiche' B' e' diagonalizzante, per la prop [2.41,pg.45] si ha

$$q(v) = [v]_{B'} A'^{t} [v]_{B'} = \sum_{i=1}^{n} A'_{ii} x_i^2 \underbrace{=}_{\text{def. di } A'} \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{r} x_i^2$$

quindi

$$q(u) = \sum_{i=1}^{p} a_i^2 - \sum_{i=p+1}^{r} 0 = \sum_{i=1}^{p} a_i^2 \underbrace{>}_{(2.1)} 0$$

Lo stesso vale per B'':

$$q(v) = \sum_{i=1}^{t} x_i^2 - \sum_{i=t+1}^{r} x_i^2$$

$$q(u) = \sum_{i=1}^{t} 0 - \sum_{i=t+1}^{r} b_i^2 = - \sum_{i=t+1}^{r} b_i^2 \underbrace{<}_{(2.2)} 0$$

Ma allora,

$$\begin{cases} q(u) > 0 \\ q(u) < 0 \end{cases} \quad \text{assurdo}$$

□

Corollary 2.48. *Si ha*

$$A \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) \Rightarrow A \sim A',$$

$$\textit{con } A'_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \ \ i \leq p \\ -1 & i = j, \ \ p < i \leq r \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

dove $r = \rho(A)$, e p dipendente solo da A.

Proof: La dimostrazione e' analoga a quella del cor [2.46,pg.51] □

Proposition 2.49. *Per ogni classe di congruenza di matrici simmetriche esiste una ed una sola matrice A' del tipo*

$$A'_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \ \ i \leq p \\ -1 & i = j, \ \ p < i \leq r \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

se siamo in $\mathbb{R}$, altrimenti del tipo

$$A'_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \ \ i \leq r \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

se siamo in $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso.

Proof:
Per la prop [2.14,pg.37], ad ogni classe di congruenza di matrici simmetriche, corrisponde una ed una sola forma bilineare b simmetrica.
Per il thm [2.47,pg.52], a b corrisponde una matrice del tipo

$$A'_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \ \ i \leq p \\ -1 & i = j, \ \ p < i \leq r \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(se siamo in $\mathbb{R}$). Ma p, r dipendono unicamente da b. Quindi A' e' univocamente determinata da b e di conseguenza dalla classe di congruenza. □

Proposition 2.50. *Le classi di congruenza di matrici simmetriche di ordine n sono in numero*

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Proof:
Per la prop [2.49,pg.53], sappiamo che ad ogni classe corrisponde una A' con segnatura $(p, r-p)$, e viceversa. Basta allora contare tutte le segnatura. I vincoli che abbiamo sono:

$$p, r \in \mathbb{N}, \ \ p \leq r$$
$$r \leq n$$

r puo' variare tra 0 ed n.
Fissato un r, p puo' variare tra 0 e r. Quindi ci sono $r+1$ possibili p.
Sommando tutto abbiamo il totale:

$$\sum_{r=0}^{n} r + 1 = \sum_{r=1}^{n+1} r \underbrace{=}_{\text{somma dei primi } n+1 \text{ naturali}} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Example 2.51. I rappresentanti delle classi di congruenza di matrici simmetriche di ordine 3

sono

$$\text{r=3} \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\text{r=2} \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\text{r=1} \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\text{r=0} \quad \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

e sono infatti 10

Definition 2.52. Data la forma quadratica q, e $[v]_{B'} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dove B' e' la base del teorema [2.47,pg.52]

$$q(v) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{r} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \cdots - x_r^2$$

si chiama *forma canonica* di q.
p si chiama indice di positivita', e $r-p$ indice di negativita'.
La coppia $(p, r-p)$ si chiama segnatura di q.

Definition 2.53. Data q forma quadratica
q si dira' definita positivamente sse $q(v) > 0 \ \ \forall v \in \mathbf{V} : \ v \neq \underline{0}$
q si dira' definita negativamente sse $q(v) < 0 \ \ \forall v \in \mathbf{V} : \ v \neq \underline{0}$
q si dira' semidefinita positivamente sse $q(v) \geq 0 \ \ \forall v \in \mathbf{V} : \ v \neq \underline{0}$
q si dira' semidefinita negativamente sse $q(v) \leq 0 \ \ \forall v \in \mathbf{V} : \ v \neq \underline{0}$

La matrice A si dira' definita positivamente sse la forma quadratica $q(v)$ che essa induce e' definita positivamente.
Analogamente per gli altri casi.

Nota: queste definizioni hanno senso solo per campi $\mathbb{K}$ che sono dei POSET. Ad esempio, in $\mathbb{C}$ non ha' senso dire $q(v) > 0$. Per questo motivo, possiamo restringerci in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Proposition 2.54. *Se q e' definita positivamente o negativamente $\Rightarrow$ q e' non degenere.*

Proof: Consideriamo la matrice A che diagonalizza q. Poiche' q e' definita positivamente, $q(e_i) > 0$ e quindi $A_{ii} > 0$. Poiche' non esiste alcun elemento nullo nella diagonale principale, e poiche' A e' diagonale, A ha rango massimo. □

Proposition 2.55. *Data $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base **diagonalizzante** per q, si ha*

$$q(e_i) > 0 \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, n \Leftrightarrow q \text{ e' definita positivamente}$$
$$q(e_i) < 0 \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, n \Leftrightarrow q \text{ e' definita negativamente}$$

Proof:
⟨1⟩1. Dim $\Leftarrow$

q e' definita positivamente $\Leftrightarrow q(v) > 0 \ \forall v \in \mathbf{V} : \ v \neq \underline{0} \Rightarrow q(e_i) > 0 \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$

⟨1⟩2. Dim $\Rightarrow$

Data $A = (b(e_i, e_j))$, per la prop [2.41,pg.45], preso $v \neq \underline{0}$ si ha

$$q(v) \underbrace{=}_{B \text{ e' diagonalizzante}} \sum_{i=1}^{n} A_{ii} x_i^2$$

$$q(e_i) > 0 \Leftrightarrow b(e_i, e_i) > 0 \Leftrightarrow A_{ii} > 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} A_{ii} x_i^2 > 0$$

□

Proposition 2.56.
Una matrice $A \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ e' definita positivamente $\Leftrightarrow D_1, D_2, \ldots, D_n > 0$.
A e' definita negativamente $\Leftrightarrow D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0, \ldots, ,$

Dove D_i e' il minore principale di A di ordine i (nota [9])

3 Spazio vettoriale euclideo

Definition 3.1. Sia dato $\mathbf{V}$ spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, dove $\mathbb{K}$ e' un campo POSET (ad esempio, $\mathbb{R}$).

b e' un prodotto scalare $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} b : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ e' una forma bilineare simmetrica definita positiva

Useremo la seguente notazione:

$$b(v, w) = v \cdot w$$

Per la proposizione [2.54,pg.55], b e' non degenere

Proposition 3.2.

$$v \cdot v \geq 0$$
$$v \cdot v = 0 \Leftrightarrow v = \underline{0}$$

Proof:
Per definizione $v \cdot v = b(v, v) = q(v)$.
Per quanto visto in [2.52,pg.55] possiamo scrivere q in forma canonica:

$$q(v) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{r} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \cdots - x_r^2$$

e poiche' $\cdot$ e' definita positiva, la sua segnatura sara' $(n, 0)$, ovvero

$$q(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

quindi $q(v) \geq 0$.
Infine,

$$q(v) = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \ \forall i = 1, 2, \ldots, n \Leftrightarrow [v] = \underline{0} \Leftrightarrow v = \underline{0}$$

[9] Per la definizione di minore principale vedi [AL,1.27,pg.9]

□

Proposition 3.3. *Disuguaglianza di Schwartz*

$$(v\cdot w)^2 \leq (v\cdot v)(w\cdot w)$$

l'uguaglianza vale $\Leftrightarrow v \parallel w$

Proof:

$$(v\cdot w)^2 \leq (v\cdot v)(w\cdot w) \Leftrightarrow (v\cdot w)^2 - (v\cdot v)(w\cdot w) \leq 0$$

Interpretiamo $(v\cdot w)^2 - (v\cdot v)(w\cdot w)$ come il determinante $\frac{\Delta}{4}$ di un trinomio:

$$\frac{b^2}{4} = (v\cdot w)^2 \Rightarrow b = 2v\cdot w$$
$$ac = (v\cdot v)(w\cdot w) \Rightarrow a = v\cdot v, \quad c = w\cdot w$$
$$(v\cdot v)x^2 + 2(v\cdot w)x + w\cdot w$$

ma questo trinomio non e' altro che

$$(v\cdot v)x^2 + 2(v\cdot w)x + w\cdot w = (xv)\cdot(xv) + (xv\cdot w) + (xv\cdot w) + w\cdot w = (xv+w)\cdot(xv+w)$$

e per la prop [3.2,pg.56], $(xv+w)\cdot(xv+w) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$, allora

$$(v\cdot v)x^2 + 2(v\cdot w)x + w\cdot w \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

e quindi e' vero che $\frac{\Delta}{4} \leq 0$, ovvero la tesi e' vera.

Inoltre,

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \Leftrightarrow \text{il trinomio } = (xv+w)\cdot(xv+w) = 0 \Leftrightarrow xv + w = \underline{0} \Leftrightarrow xv = -w \Leftrightarrow v \parallel w$$

□

Definition 3.4. Uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ dotato di prodotto scalare viene detto *spazio vettoriale euclideo.*

Definition 3.5. Una norma f e' una funzione $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ tale che $\forall v, w \in \mathbf{V}, \ \ \forall k \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(v) \geq 0$$
$$f(v) = 0 \Leftrightarrow v = \underline{0}$$
$$f(kv) = |k| f(v)$$
$$f(v+w) \leq f(v) + f(w)$$

Proposition 3.6. *In uno spazio euclideo* $\mathbf{V}$*, consideriamo la funzione*

$$\| - \| : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$\|v\| = \sqrt{v\cdot v}$$

Questa funzione e' una norma, ovvero

$$\|v\| \geq 0$$
$$\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \underline{0}$$
$$\|kv\| = |k|\|v\|$$
$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \ \textit{Inoltre, l'uguaglianza vale} \ \Leftrightarrow v \parallel w$$

Proof:

⟨1⟩1. $\|v\| \geq 0$

$$\|v\| = \sqrt{\underbrace{v \cdot v}_{\geq 0 \text{ prop [3.2,pg.56]}}} \geq 0$$

⟨1⟩2. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \underline{0}$

$$\|v\| = 0 \Leftrightarrow v \cdot v = 0 \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{prop [3.2,pg.56]}} \quad v = \underline{0}$$

⟨1⟩3. $\|kv\| = |k|\|v\|$

$$\|kv\| = \sqrt{kv \cdot kv} = \sqrt{q(kv)} = \sqrt{k^2 q(v)} = |k|\sqrt{q(v)} = |k|\sqrt{v \cdot v} = |k|\|v\|$$

⟨1⟩4. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

$$\begin{aligned}
&\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \Leftrightarrow (\|v + w\|)^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2 \\
&\Leftrightarrow (v + w) \cdot (v + w) \leq v \cdot v + w \cdot w + 2\|v\|\|w\| \\
&\Leftrightarrow v \cdot v + w \cdot w + 2v \cdot w \leq v \cdot v + w \cdot w + 2\|v\|\|w\| \\
&\Leftrightarrow v \cdot w \leq \|v\|\|w\| = \sqrt{v \cdot v}\sqrt{w \cdot w} \\
&\Leftrightarrow v \cdot w \leq \sqrt{v \cdot v}\sqrt{w \cdot w} \\
&\Leftrightarrow v \cdot w \leq |v \cdot w| \leq \sqrt{v \cdot v}\sqrt{w \cdot w} \text{ vera per la prop. [3.3,pg.57]}
\end{aligned}$$

Proposition 3.7. *Usando la norma, la disuguaglianza di Schwartz diventa:*

$$|v \cdot w| \leq \|v\|\|w\|$$

se inoltre $v, w \neq \underline{0}$ *abbiamo:*

$$\frac{|v \cdot w|}{\|v\|\|w\|} \leq 1$$

Definition 3.8. Dati i vettori $v, w \neq \underline{0}$,

$$\exists! \alpha \in [0, \pi] : \quad \cos \alpha = \frac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|}$$

$$\alpha = \arccos \frac{|v \cdot w|}{\|v\|\|w\|}$$

α viene chiamato *l'angolo convesso* compreso tra v, w.
Questa definizione ha senso grazie alle proprieta' della norma e alla prop. [3.7,pg.58]:

$$\|v\|, \|w\| \geq 0; \quad \frac{|v \cdot w|}{\|v\|\|w\|} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|} \leq 1$$

Osserviamo anche che se $v \perp w$ allora

$$v \perp w \Leftrightarrow b(v, w) = 0 \Leftrightarrow v \cdot w = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{|v \cdot w|}{\|v\|\|w\|} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Infine, abbiamo che:

$$v \cdot w = \|v\|\|w\| \cos \alpha$$

Definition 3.9. $U \subseteq \mathbf{V}$ finito e' ortogonale $\Leftrightarrow \underline{0} \notin U$ e $\forall v, w \in U: \ v \neq w \quad v \perp w$, ovvero se i vettori di U sono a due a due ortogonali.

Proposition 3.10. *U ortogonale, $|U| = \dim \mathbf{V} \Rightarrow U$ e' una base di $\mathbf{V}$*

Proof:
$\langle 1 \rangle 1$. Dimostriamo che i vettori di U sono l.i
Consideriamo una c.l. dei vettori di U:

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = \underline{0}$$

Ricordandoci che $v_i \cdot v_j = 0 \ \ \forall i \neq j$, abbiamo

$$v_1 \cdot (a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 v_1 \cdot v_1 + a_2 \underbrace{v_2 \cdot v_1}_{=0} + 0 + \cdots + 0 = a_1 v_1 \cdot v_1$$

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = \underline{0} \Rightarrow v_1 \cdot (a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = 0 \Leftrightarrow a_1 v_1 \cdot v_1 = 0$$

$$v_1 \in U \Rightarrow v_1 \neq \underline{0} \Rightarrow v_1 \cdot v_1 > 0$$

$$a_1 \underbrace{v_1 \cdot v_1}_{>0} = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

Cosi' procedendo per gli altri coefficienti abbiamo

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

quindi $v_1, \ldots, v_n$ sono l.i

□

Definition 3.11. Si dice versore un vettore di norma unitaria, ovvero

$$v \text{ e' un versore } \Leftrightarrow \|v\| = 1 \Leftrightarrow v \cdot v = 1$$

Il normalizzato di un vettore w e' il suo versore:

$$\frac{w}{\|w\|}$$

infatti, dalle proprieta' [3.6,pg.57],

$$\left\| \frac{w}{\|w\|} \right\| = \left| \frac{1}{\|w\|} \right| \|w\| \underbrace{=}_{\text{la norma e' non neg.}} 1$$

$U \subseteq \mathbf{V}$ finito e' ortonormale $\Leftrightarrow$ U e' ortogonale e inoltre $\forall v \in U$ v e' un versore, o in altri termini:

$$v \cdot w = \begin{cases} 1 & v = w \\ 0 & v \neq w \end{cases}$$

Proposition 3.12. *E' chiaro che da ogni insieme ortogonale e' possibile formare un insieme ortonormale:*

$$U = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \longrightarrow \left\{ \frac{v_1}{\|v\|_1}, \ldots, \frac{v_n}{\|v\|_n} \right\}$$

Se $|U| = \dim \mathbf{V}$, per la prop. [3.10,pg.59], U e' una base di $\mathbf{V}$

Proposition 3.13. *Sia B una base ortonormale, allora*

$$v \cdot w = [v]_B {}^t[w]_B$$

Proof:
Essendo $B = \{v_i\}$ ortonormale, la matrice $A = (b(v_i, v_j))$ e' la matrice identica: $A = I$, e quindi

$$v \cdot w = b(v, w) = [v]_B I {}^t[w]_B = [v]_B {}^t[w]_B$$

□

Proposition 3.14. *Data B base ortonormale, e C base, si ha*

$$C \text{ e' ortonormale } \Leftrightarrow M = P_{C\to B} \text{ e' ortogonale, ovvero } {}^tMM = I$$

Proof:
⟨1⟩1. Dim $\Rightarrow$
Sia $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ e $B = \{v_1, \dots, v_n\}$.
La matrice di passaggio e'

$$M = P_{C\to B} = \begin{pmatrix} {}^t[w_1]_B & {}^t[w_2]_B & \dots & {}^t[w_n]_B \end{pmatrix}$$

dove con questa simbolismo abbiamo indicato le colonne di M.
Allora

$${}^tM = \begin{pmatrix} [w_1]_B \\ [w_2]_B \\ \dots \\ [w_n]_B \end{pmatrix}$$

${}^tMM$ e' la seguente matrice $n \times n$:

$${}^tMM = \begin{pmatrix} [w_1]_B {}^t[w_1]_B & [w_1]_B {}^t[w_2]_B & \dots & [w_1]_B {}^t[w_n]_B \\ [w_2]_B {}^t[w_2]_B & [w_2]_B {}^t[w_2]_B & \dots & [w_2]_B {}^t[w_n]_B \\ \dots & & & \\ [w_n]_B {}^t[w_n]_B & [w_n]_B {}^t[w_2]_B & \dots & [w_n]_B {}^t[w_n]_B \end{pmatrix}$$

Poiche' B e' ortogonale, per la prop [3.13,pg.59], abbiamo

$$w_i \cdot w_j = [w_i]_B {}^t[w_j]_B$$

ma B e' ortonormale, percio'

$$w_i \cdot w_j = \begin{cases} 1 & 1 = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ecco che ${}^tMM = I$
⟨1⟩2. Dim $\Leftarrow$
Basta procedere a ritroso.

Corollary 3.15. *B, C basi ortonormali $\Rightarrow$ la matrice di passaggio $M = P_{C\to B}$ e' ortogonale, ovvero ${}^tMM = I$.*

Proof: Conseguenza della [3.14,pg.60].

Proposition 3.16. *Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.*
Data una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ la base $C = \{w_1, \dots, w_n\}$, dove

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 - \frac{w_1 \cdot v_2}{w_1 \cdot w_1} w_1 \\ w_3 &= v_3 - \frac{w_1 \cdot v_3}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{w_2 \cdot v_3}{w_2 \cdot w_2} w_2 \\ &\dots \\ w_n &= v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{w_i \cdot v_n}{w_i \cdot w_i} w_i \end{aligned}$$

e' ortogonale.

Proof:
Poniamo

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= x_2 w_1 + v_2 = x_2 v_1 + v_2 \\ w_3 &= x_{31} w_1 + x_{32} w_2 + v_3 \\ &\dots \\ w_n &= x_{n1} w_1 + \dots + x_{n,n-1} w_{n-1} + v_n \end{aligned}$$

Dimostriamo che $w_1, w_2, \dots, w_n$ sono l.i. Per far cio' consideriamo la matrice delle componenti rispetto alla base B:

$$\begin{pmatrix} {}^t[w_1]_B & {}^t[w_2]_B & \dots & {}^t[w_n]_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_2 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & * \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

essendo triangolare superiore, il suo determinante e' uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale, percio' e' 1.
Adesso ricaviamo le varie x, imponendo l'ortogonalita' tra i vettori:

$$w_1 \perp w_2 \Leftrightarrow w_1 \cdot w_2 = 0 \Leftrightarrow w_1 \cdot (x_2 w_1 + v_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 w_1 \cdot w_1 + w_1 \cdot v_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{w_1 \cdot v_2}{w_1 \cdot w_1}$$

nota: e' lecito dividere per $w_1 \cdot w_1$ perche' $w_1 \neq 0 \underbrace{\Rightarrow}_{[3.2,\text{pg.}56]} w_1 \cdot w_1 > 0$.

Cosi' procedendo ci ricaviamo le altre x.

□

3.1 Endomorfismo unitario

Definition 3.17. Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale euclideo e sia $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ un endomorfismo, allora

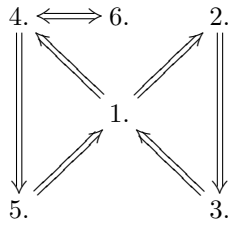
$$T \text{ e' unitario } \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} v \cdot w = T(v) \cdot T(w) \ \ \forall v, w \in \mathbf{V}$$

ovvero, T preserva il prodotto scalare.

Theorem 3.18. *Le seguenti condizioni sono equivalenti*

1. $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ *endomorfismo unitario*
2. $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ *endomorfismo t.c.* $\|v\| = \|T(v)\|$
3. $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ *funzione t.c.* $\begin{cases} T(\underline{0}) = \underline{0} \\ \|T(v) - T(w)\| = \|v - w\| \end{cases}$
4. $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ *endomorfismo t.c.* $\forall B$ *base ortonormale* $\quad T(B)$ *e' una base ortonormale*
5. $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ *endomorfismo t.c.* $\exists B$ *base ortonormale* $:\ T(B)$ *e' una base ortonormale*
6. $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ *endomorfismo t.c.* $\forall B$ *base ortonormale* $\quad M_{B,B}(T)$ *e' ortogonale*

Proof: Per dimostrare tutte le equivalenze, dimostreremo le seguenti implicazioni:



$\langle 1\rangle 1$. Dim 1. $\Rightarrow$ 2.

Poiche' la norma e' definita sul prodotto scalare, e poiche' T preserva il prodotto scalare, si ha la tesi.

$\langle 1\rangle 2$. Dim 2. $\Rightarrow$ 3.

$$T \text{ endomorfismo } \Rightarrow T(\underline{0}) = \underline{0}$$
$$\|v - w\| \underbrace{=}_{2.} \|T(v - w)\| \underbrace{=}_{T \text{ endomorfismo}} \|T(v) - T(w)\|$$

$\langle 1\rangle 3$. Dim 3. $\Rightarrow$ 1.

$\langle 2\rangle 1$. T preserva il prodotto scalare

Per la 3. abbiamo:

$\|v\| = \|v - \underline{0}\| = \|T(v) - T(\underline{0})\| = \|T(v) - \underline{0}\| = \|T(v)\| \Leftrightarrow v \cdot v = T(v) \cdot T(v)$

$T(v) \cdot T(v) = v \cdot v \forall v \in \mathbf{V}$ (1)

$\|T(v) - T(w)\| = \|v - w\| \Leftrightarrow (T(v) - T(w)) \cdot (T(v) - T(w)) = (v - w) \cdot (v - w) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow T(v) \cdot T(v) + T(w) \cdot T(w) - 2T(v)T(w) = v \cdot v + w \cdot w - 2v \cdot w \underbrace{\Leftrightarrow}_{(1)} -2T(v)T(w) = -2v \cdot w \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v \cdot w = T(v)T(w)$ (2)

$\langle 2\rangle 2$. T e' un endomorfismo

Sia $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormale, $T(B)$ e' una base ortonormale, infatti,

$\|T(e_i)\| \underbrace{=}_{(1)} \|e_i\|$

$T(e_i) = \underline{0} \Leftrightarrow \|T(e_i)\| = 0 \Leftrightarrow \|e_i\| = 0 \Leftrightarrow e_i = \underline{0}$ assurdo perche' B e' una base

quindi $T(e_i) \neq \underline{0} \;\; i = 1, \ldots, n$

$$T(e_i) \cdot T(e_j) \underbrace{=}_{(2)} e_i \cdot e_j \underbrace{=}_{B \text{ ortonormale}} \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \Rightarrow T(B) \text{ e' un insieme ortornormale}$$

$$\begin{cases} \underline{0} \notin T(B) \\ T(B) \text{ e' un insieme ortornormale} \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{[3.12,\text{pg.}59]} T(B) \text{ e' una base}$$

allora, preso $v \in V$,

$[v]_B = (x_1, \ldots, x_n)$

$[e_i]_B = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{i-\text{esimo posto}}, 0, 0, \ldots, 0)$

$v \cdot e_i \underbrace{=}_{\text{prod scal. su } B, \text{ che e' una base ortonormale}} x_i$

$[T(v)]_{T(B)} = (y_1, \ldots, y_n)$

$[T(e_i)]_{T(B)} = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{i-\text{esimo posto}}, 0, 0, \ldots, 0)$

$T(v) \cdot T(e_i) \underbrace{=}_{\text{prod scal. su } T(B), \text{ che e' una base ortonormale}} y_i$

$$T(v) \underbrace{=}_{\text{scomposto secondo } T(B)} \sum_{i=1}^{n} (T(v) \cdot T(e_i)) T(e_i) \underbrace{=}_{(2)} \sum_{i=1}^{n} (v \cdot e_i) T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i)$$

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i)$$

A questo punto e' facile vedere che T e' lineare:

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i)$$

$$T(w) = T\left(\sum_{i=1}^{n} z_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} z_i T(e_i)$$

$$T(v+w) = T\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + z_i) e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + z_i) T(e_i) = T(v) + T(w)$$

$$T(\lambda v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i T(e_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i) = \lambda T(v)$$

⟨2⟩3. Dim 1. $\Rightarrow$ 4.

Presa B ortonormale, allora $T(B)$ e' ortonormale: l'abbiamo dimostrato nel passo precedente.

⟨2⟩4. 4. $\Rightarrow$ 5.

Per il thm [2.45,pg.50], e poiche' $\cdot$ e' una forma bilineare definita positiva, esiste una base B ortonormale.

Quindi, B ortonormale $\underbrace{\Rightarrow}_{4.} T(B)$ ortonormale

⟨2⟩5. 5. $\Rightarrow$ 1.

Per Hp $B, T(B)$ sono basi ortonormali.

Consideriamo $v, w \in V$,

$[v]_B = (x_1, \dots, x_n)$

$T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \underbrace{=}_{T \text{ endomorfismo}} \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i) \Leftrightarrow [T(v)]_{T(B)} = [v]_B$

$[w]_B = (y_1, \dots, y_n)$

Lo stesso per w: $[T(w)]_{T(B)} = [w]_B$

$T(v) \cdot T(w) \underbrace{=}_{T(B) \text{ e' ortonormale}} [T(v)]_{T(B)} {}^t[T(w)]_{T(B)} = [v]_B {}^t[w]_B \underbrace{=}_{B \text{ e' ortonormale}} v \cdot w$

$\langle 1 \rangle 4$. 4. $\Rightarrow$ 6.

Sia $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale.

Per la 4.,

T e' unitario $\underbrace{\Rightarrow}_{prop[3.20,\text{pg.}64]}$ T^{-1} e' unitario , T e' un isomorfismo

B e' ortonormale $\underbrace{\Rightarrow}_{4.} T^{-1}(B)$ e' una base ortonormale

$e_i = x_1 T^{-1}(e_1) + \dots + x_n T^{-1}(e_n) = T^{-1}(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) \Leftrightarrow T(e_i) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$[T(e_i)]_B = [e_i]_{T^{-1}(B)}$

$M_{B,B}(T) = \left({}^t[T(e_1)]_B \quad {}^t[T(e_2)]_B \quad \dots \quad {}^t[T(e_n)]_B\right) = \left({}^t[e_1]_{T^{-1}(B)} \quad {}^t[e_2]_{T^{-1}(B)} \quad \dots \quad [e_n]_{T^{-1}(B)}\right) =$

$= M_{B,T^{-1}(B)}(\mathrm{id}) = P_{B \to T^{-1}(B)}$

$B, T^{-1}(B)$ ortonormali $\underbrace{\Rightarrow}_{cor[3.14,\text{pg.}60]}$ $P_{B \to T^{-1}(B)}$ e' ortogonale

$\langle 1 \rangle 5$. 6. $\Rightarrow$ 4.

Sia $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale.

$M = M_{B,B}(T)$

M ortogonale $\Leftrightarrow M {}^t M = I \Leftrightarrow {}^t M M = I$

$T(e_i) \cdot T(e_j) \underbrace{=}_{B \text{ ortonormale}} [T(e_i)]_B {}^t[T(e_j)]_B = \left({}^t M\right)_i M^j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$\Rightarrow T(B)$ e' un insieme ortonormale

come abbiamo visto altre volte: $T(e_i) = \underline{0} \Leftrightarrow e_i = \underline{0}$, e quindi $\underline{0} \notin T(B)$

$\underbrace{\Rightarrow}_{prop.[3.12,\text{pg.}59]}$ $T(B)$ e' una base ortonormale

□

Proposition 3.19.

$$T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V} \textit{ unitario } \Rightarrow T \textit{ e' un isomorfismo vettoriale}$$

Proof:

Sia B base ortonormale. La 4. del thm [3.18,pg.61] ci assicura che $B' = T(B)$ e' ancora una base. Allora per la prop [AL,7.5,pg.39], si ha la tesi.

□

Proposition 3.20.

$$O(\mathbf{V}) := \{T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V} \mid T \text{ e' unitario } \}$$
$$(O(\mathbf{V}), \circ) \underbrace{\leq}_{sottogruppo} (GL(\mathbf{V}), \circ)$$

$O(\mathbf{V})$ *si chiama* gruppo ortogonale *a causa della* 6. *del thm [3.18,pg.61].*
Fissata la base B *ortonormale, si ha anche:*

$$SO(\mathbf{V}) \leq O(\mathbf{V})$$
$$SO(\mathbf{V}) = \{T \in O(\mathbf{V}) \mid \det M_{B,B}(T) = 1\}$$

Proof:
⟨1⟩1. $O(\mathbf{V}) \subseteq GL(\mathbf{V})$
Per la prop [3.19,pg.64].
⟨1⟩2. $\mathrm{id} \in O(\mathbf{V})$

⟨1⟩3. $T^{-1} \in O(\mathbf{V})$

$$v' = T(v), \quad w' = T(w)$$
$$T^{-1}(v') \cdot T^{-1}(w') = v \cdot w = T(v) \cdot T(w) = v' \cdot w'$$

⟨1⟩4. $T \circ T' \in O(\mathbf{V})$

$$T \circ T'(v) \cdot T \circ T'(w) = T(v) \cdot T(w) = v \cdot w$$

⟨1⟩5. $SO(\mathbf{V}) \leq O(\mathbf{V})$
Si vede facilmente che $SO(\mathbf{V}) \leq O(\mathbf{V})$ utilizzando la formula di Binet e $\det M^{-1} = \frac{1}{\det M}$.
E' da notare che

$$T \in O(\mathbf{V}) \Rightarrow \det M_{B,B}(T) = \pm 1$$

infatti,

$$\begin{cases} T \in O(\mathbf{V}) \\ B \text{ base ortonormale} \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{6. del thm [3.18,pg.61]}} M_{B,B}(T) \text{ ortogonale} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[AL,7.13.1,pg.49]}} det M_{B,B}(T) = \pm 1$$

□

Proposition 3.21.

$$(O(\mathbf{V}), \circ) \simeq (O_n(\mathbb{K}), \cdot)$$
$$O_n(\mathbb{K}) = \left\{M \in \mathbb{K}^{n,n} \mid M \text{ e' ortogonale } \Leftrightarrow M^{-1} = {}^tM\right\}$$

Proof: Fissiamo una base B ortonormale.
Restringiamo l'isomorfismo $\Phi_{B,B}$ (vedi [AL,7.12,pg.44]) a $O(\mathbf{V})$. Per la 6. del thm [3.18,pg.61], poiche' B e' ortonormale, abbiamo che ogni $\Phi_{B,B}(T) = M_{B,B}(T)$ e' una matrice ortogonale, e quindi $\operatorname{Im} \Phi_{B,B}/_{O(\mathbf{V})} = O_n(\mathbb{K})$.
$\Phi_{B,B}$ e' iniettiva, e quindi anche la sua restrizione lo e'. Allora,

$$\Phi_{B,B}/_{O(\mathbf{V})} : O(\mathbf{V}) \longrightarrow O_n(\mathbb{K})$$

e' un isomorfismo.
E' anche un isomorfismo tra gruppi, perche' Φ e' un isomorfismo vettoriale e quindi preserva il $+$, e inoltre $O(\mathbf{V})$ e $O_n(\mathbb{K})$ sono dei gruppi.

Proposition 3.22. *Dato* $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ *endomorfismo unitario, e* $\lambda \in \mathbb{K}$, *allora*

$$\lambda \text{ e' un autovalore di } T \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

Proof:
⟨1⟩1. Dim $\Leftrightarrow$

$$\lambda \text{ autovalore } \Leftrightarrow \exists v \in \mathbf{V} : \ v \neq \underline{0}, \ \ T(v) = \lambda v$$
$$T \text{ unitario } \underbrace{\Rightarrow}_{thm[3.18,\text{pg.}61]} \|T(v)\| = \|v\|$$
$$T(v) = \lambda v \Rightarrow \|T(v)\| = \|\lambda v\|$$
$$\|v\| = \|\lambda v\| \underbrace{=}_{\text{prop. norma } [3.6,\text{pg.}57]} |\lambda|\|v\| \underbrace{\Leftrightarrow}_{v\neq\underline{0} \Leftrightarrow \|v\|>0} |\lambda| = 1$$

□

Proposition 3.23.

$$f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V} \textit{ endomorfismo } \Rightarrow \exists! g : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V} \textit{ endomorfismo t.c. } \ \forall v, w \in V \ \ f(v)\cdot w = v\cdot g(w)$$

g viene chiamato endormofismo trasposto di *f e si indica con ${}^t f$.*
Se $M_{B,B}(f)$ e' la matrice associata a f, dove B e' una base ortonormale rispetto al prodotto scalare, allora quella associata a ${}^t f$ sara' ${}^t M_{B,B}(g)$, ovvero

$$M_{B,B}({}^t f) = {}^t M_{B,B}(f)$$

Proof:
⟨1⟩1. Dimostriamo che g esiste
Fissiamo B base ortonormale, e consideriamo $M = M_{B,B}(f)$. Sia inoltre g quell'endomorfismo associato a ${}^t M$ (la sua esistenza e' garantita dall'isomorfismo [AL,7.12,pg.44]). Si ha[10]

$$[f(v)] = M[v] \Leftrightarrow [f(v)] = [v]{}^t M \ \ (1)$$
$$[g(w)] = {}^t M[w] \ \ (2)$$

$$f(v)\cdot w \underbrace{=}_{B \text{ e' ortonormale}} [f(v)][w] \underbrace{=}_{(1)} [v]{}^t M[w] \underbrace{=}_{(2)} [v][g(w)] = v\cdot g(w)$$

⟨1⟩2. Dimostriamo che g e' unico
Supponiamo che

$$\exists h : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V} \text{ endomorfismo t.c. } \ \forall v, w \in V \ \ f(v)\cdot w = v\cdot h(w)$$

e sia $M' = M_{B,B}(h)$, allora

$$v\cdot g(w) = f(v)\cdot w = v\cdot h(w) \Rightarrow v\cdot g(w) = v\cdot h(w) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [v][g(w)] = [v][h(w)] \Leftrightarrow [v]{}^t M[w] = [v]{}^t M'[w] \ \ (3)$$

Poiche' la (3) vale per ogni v, w, possiamo scegliere v, w in modo tale da avere: per ogni scelta:

$$[v] = (1, 0, 0, \dots,) = e_1, \ \ [w] = e_1 \ \ \Rightarrow ({}^t M)_{11} = M'_{11}$$
$$[v] = e_1, \ \ [w] = e_2 \ \ \Rightarrow ({}^t M)_{12} = M'_{12}$$
$$\dots$$
$$[v] = e_i, \ \ [w] = e_j \ \ \Rightarrow ({}^t M)_{ij} = M'_{ij}$$

Percio' ${}^t M = M'$ e quindi $h = g$.

□

Proposition 3.24. *Dato $T : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ endomorfismo,*

$$T \textit{ e' unitario } \Leftrightarrow T \circ {}^t T = \mathrm{id} \Leftrightarrow {}^t T = T^{-1}$$

[10] Per brevita' stiamo usando la notazione $[v]$ al posto di $[v]_B$.

Proof:
⟨1⟩1. $\Leftrightarrow$
Sia B una base ortonormale, e sia $M = M_{B,B}(T)$
${}^tM = M_{B,B}({}^tT)$ [vedi [3.23,pg.66]] (1)

$$T \text{ unitario} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{6.di thm [3.18,pg.61]}} M \text{ ortogonale} \Leftrightarrow M\,{}^tM = I$$

$$M\,{}^tM \underbrace{=}_{(1)} M_{B,B}(T)M_{B,B}({}^tT) \underbrace{=}_{\text{[AL,7.9,pg.43]}} M_{B,B}(T\circ {}^tT) = I \underbrace{\Leftrightarrow}_{thm\text{[AL,7.12,pg.44]}} T\circ {}^tT = \mathrm{id}$$

□

Definition 3.25. Dato $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ endormofismo,

$$f \text{ si dice } simmetrico \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} {}^tf = f \Leftrightarrow M_{B,B}(f) = {}^tM_{B,B}(f)$$

dove B e' una base ortonormale rispetto al prodotto scalare.

Proposition 3.26. *Dato un endomorfismo simmetrico f, su $\mathbf{V}$ spazio vett. euclideo*

$$\begin{cases} f(v) = \lambda v \\ f(w) = \mu w \\ \lambda \neq \mu \end{cases} \Rightarrow v\cdot w = 0 \Leftrightarrow v \perp . \ w$$

ovvero, gli autovettori di f associati ad autovalori distinti sono ortogonali.

Proof:

$$f(v)\cdot w \underbrace{=}_{f \text{ e' sym}} v\cdot f(w) = \mu v\cdot w$$
$$f(v)\cdot w = \lambda v\cdot w$$
$$\lambda v\cdot w = \mu v\cdot w \Leftrightarrow (\lambda-\mu)v\cdot w = \underline{0} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\lambda-\mu>0} v\cdot w = \underline{0}$$

4 Spazio affine euclideo

Definition 4.1. Uno spazio affine $\mathcal{A}$ euclideo e' uno spazio affine su $\mathbf{V}$, dove $\mathbf{V}$ e' uno spazio vettoriale euclideo e si indica con $\mathbf{E}$.
$\mathcal{A}^n(\mathbb{R})$ euclideo si indica con $\mathbf{E}^n$.

Definition 4.2. Un sistema di riferimento $\Omega = (O, B)$ si dira' *cartesiano* $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B$ e' una base ortonormale.

Proposition 4.3. *Sia $n = \dim E$.*
La funzione

$$d : \mathbf{E}\times\mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$$

e' una metrica.

Proof:
⟨1⟩1. $d(P,P) = 0$

$$d(P,P) = \|\overrightarrow{PP}\| = \|\underline{0}\| \underbrace{=}_{prop[3.6,pg.57]} 0$$

⟨1⟩2. $d(P,Q) = d(Q,P)$

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$$
$$d(Q,P) = \|\overrightarrow{QP}\| = \|-\overrightarrow{PQ}\| = |-1|\|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = d(P,Q)$$

⟨1⟩3. $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}\| \underbrace{\leq}_{prop[3.6,pg.57]} \|\overrightarrow{PR}\| + \|\overrightarrow{RQ}\| = d(P,R) + d(R,Q)$$

□

Proposition 4.4. *Dato il sistema di riferimento cartesiano $\Omega = (O,B)$, i punti P,Q e*

$$[P]_\Omega = (x_1, \ldots, x_n)$$
$$[Q]_\Omega = (y_1, \ldots, y_n)$$

allora

$$d(P,Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$$

Proposition 4.5.

$$[\overrightarrow{PQ}]_B = [Q]_\Omega - [P]_\Omega = (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$$
$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ}} \underbrace{=}_{B\ e'\ ortonormale} \sqrt{(y_1-x_1)(y_1-x_1) + \cdots + (y_n-x_n)(y_n-x_n)}$$

□

Definition 4.6. Siano $r = (P, \mathcal{L}(v))$, $s = (Q, \mathcal{L}(w))$ due rette.
Definiamo il loro angolo come l'angolo piu' piccolo tra i vettori $\lambda v, \mu w$.
Precisiamo "piu' piccolo" perche', ad esempio, con $k > 0$ e $\overline{v} = -kv$ si ha

$$\hat{\overline{v}w} = \pi - \hat{vw}$$

come e' facile verificare usando la def. [3.8,pg.58].

4.1 Isometria

Definition 4.7. Data $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ affinita',

$$f \text{ e' una isometria } \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathbf{f} \text{ e' un endomorfismo unitario}$$

Proposition 4.8. *Sia $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ una qualsiasi applicazione, allora*

$$f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E} \text{ e' una isometria } \Leftrightarrow \forall P, Q \in \mathbf{E}\ \ d(P,Q) = d(f(P), f(Q))$$

Proof:
$\langle 1\rangle 1$. Dim $\Rightarrow$

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| \underbrace{=}_{\mathbf{f}\text{ e' unitario}} \|\mathbf{f}(\overrightarrow{PQ})\| = \|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\| = d(f(P), f(Q))$$

$\langle 1\rangle 2$. Dim $\Leftarrow$

Fissiamo $O \in \mathbf{E}$.

Definiamo $\mathbf{f}$: preso $v \in \mathbf{V}$, per l'**As.1** $\exists! P \in \mathbf{E} : \overrightarrow{OP} = v$, allora poniamo $\mathbf{f}(v) = \overrightarrow{f(O)f(P)}$.

$\langle 2\rangle 1$. $\mathbf{f}$ e' un endomorfismo unitario

Usiamo la 3. del thm [3.18,pg.61],

$$\mathbf{f}(\underline{0}) = \mathbf{f}(\overrightarrow{OO}) = \overrightarrow{f(O)f(O)} = \underline{0} \quad (1)$$

$$v, w \in \mathbf{V} \underbrace{\Rightarrow}_{\mathbf{As.1}} v = \overrightarrow{OP},\ w = \overrightarrow{OQ}$$

$$\mathbf{f}(v) - \mathbf{f}(w) = \mathbf{f}(\overrightarrow{OP}) - \mathbf{f}(\overrightarrow{OQ}) = \overrightarrow{f(O)f(P)} - \overrightarrow{f(O)f(Q)} = \overrightarrow{f(Q)f(P)}$$

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP} = v - w$$

$$\|\mathbf{f}(v) - \mathbf{f}(w)\| = \|\overrightarrow{f(Q)f(P)}\| = d(f(Q), f(P)) \underbrace{=}_{\text{Hp}} d(Q,P) = \|\overrightarrow{QP}\| = \|v - w\|$$

$$\|\mathbf{f}(v) - \mathbf{f}(w)\| = \|v - w\| \quad (2)$$

$$(1), (2) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{3. del thm [3.18,pg.61]}} \mathbf{f} \text{ end. unit.}$$

$\langle 2\rangle 2$. f e' una affinita'

Basta dimostrare che

$$\forall P, Q \quad \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \mathbf{f}(\overrightarrow{PQ})$$

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{f(P)f(O)} + \overrightarrow{f(O)f(Q)}$$

$$\mathbf{f}(\overrightarrow{PQ}) = \mathbf{f}(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}) \underbrace{=}_{\mathbf{f}\text{ endomorf.}} \mathbf{f}(\overrightarrow{PO}) + \mathbf{f}(\overrightarrow{OQ}) \underbrace{=}_{\text{def. di } \mathbf{f}} \overrightarrow{f(P)f(O)} + \overrightarrow{f(O)f(Q)}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \mathbf{f}(\overrightarrow{PQ})$$

Nota: questo dimostra anche che $\mathbf{f}$ non e' dipendente dal punto O che abbiamo scelto per la sua definizione (vedi [1.42,pg.22]).

□

Proposition 4.9.

$$\text{Isom}(\mathbf{E}) = \{f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}\ \textit{isometria}\}$$
$$(\text{Isom}(\mathbf{E}), \circ) \leq (\text{Aff}(\mathbf{E}), \circ)$$

Proof: id $\in$ Isom($\mathbf{E}$) perche' $\mathbf{f} = \mathrm{id}$ e' un endomorfismo unitario,
Siano $f, g \in$ Isom($\mathbf{E}$),

$$\begin{cases} \text{l'isomorfismo vettoriale associato a } f^{-1} \text{ e' } \mathbf{f}^{-1} \\ \mathbf{f} \in O(\mathbf{V}) \underbrace{\Rightarrow}_{O(\mathbf{V}) \text{ e' un gruppo}} \mathbf{f}^{-1} \in O(\mathbf{V}) \end{cases} \Rightarrow f^{-1} \in \text{Isom}(\mathbf{E})$$

$$\begin{cases} \text{l'isomorfismo vettoriale associato a } f \circ g \text{ e' } \mathbf{f} \circ \mathbf{g} \\ \mathbf{f}, \mathbf{g} \in O(\mathbf{V}) \underbrace{\Rightarrow}_{O(\mathbf{V}) \text{ e' un gruppo}} \mathbf{f} \circ \mathbf{g} \in O(\mathbf{V}) \end{cases} \Rightarrow f \circ g \in \text{Isom}(\mathbf{E})$$

□

Proposition 4.10. ***Osservazione:*** *Se consideriamo riferimenti cartesiani, ovvero riferimenti con basi ortonormali, allora la matrice quadrata M che compare nelle equazioni dell'isometria (vedi [1.63,pg.31] e [1.64,pg.31]) sara' ortogonale.*
Questo e' vero per la 6. *del thm [3.18,pg.61].*

4.1.1 Teorema spettrale

Lemma 4.11.

$$A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \textit{gli autovalori di } A \textit{ sono tutti in } \mathbb{R}$$

Nota[11]

Proof:
Essendo λ autovalore di A si ha almeno che $\lambda \in \mathbb{C}$. Noi vogliamo dimostrare che $\lambda \in \mathbb{R}$.
Consideriamo l'endomorfismo su $\mathbb{C}^n$ associato ad A, ovvero

$$f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \text{ endomorfismo t.c. } M_{B,B}(f) = A$$

dove come base B scegliamo la base canonica, cosi' che' $[v]_B = v$. Come prodotto scalare su $\mathbb{C}^n$ consideriamo quello standard, avendo cosi' B ortonormale.
Per definizione di autovalore,

$$\exists v \in \mathbb{C} \setminus \{\underline{0}\} : \ f(v) = \lambda v \Leftrightarrow {}^t[f(v)]_B = \lambda {}^t[v]_B \Leftrightarrow M_{B,B}(f)^t v = \lambda^t v \Leftrightarrow A^t v = \lambda^t v \quad (1)$$

Per la definizione di endomorfismo simmetrico [3.25,pg.67], abbiamo:
$M_{B,B}(f) = A$ e' simmetrica $\Rightarrow f$ e' un endomorfismo simmetrico $\Rightarrow f(\overline{v}) \cdot v = \overline{v} \cdot f(v)$ (2)
Con $\overline{v}$ indichiamo il complesso coniugato degli elementi di v. Calcoliamo $f(\overline{v})$:

$${}^t f(\overline{v}) = A^t \overline{v} \underbrace{=}_{A \text{ e' reale}} \overline{A}^t \overline{v} = \overline{A^t v} \underbrace{=}_{(1)} \overline{\lambda^t v} = \overline{\lambda}^t \overline{v}$$

$$f(\overline{v}) = \overline{\lambda}^t \overline{v}$$

Quindi ritornando alla (2):

$$(2) \Leftrightarrow \overline{\lambda}\overline{v} \cdot v = \lambda \overline{v} \cdot v \Leftrightarrow$$

$$\overline{v} \cdot v = \overline{v}^t v \in \mathbb{R}_+ \text{ per le prop del coniugato}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\overline{v}^t v > 0} \overline{\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

□

[11] Gli autovalori di una matrice quadrata $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ sono gli autovalori dell'endomorfismo $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ t.c. $M_{B,B}(f) = A$, dove B e' una qualsiasi base di $\mathbb{K}^n$ (gli autovalori sono indipendenti dalla base: vedi [AL,8.5,pg.51])

Theorem 4.12. *spettrale.*
Sia V uno spazio vettoriale euclideo (quindi $\mathbb{K}=\mathbb{R}$), e sia $\dim V = n$,

$f: V \longrightarrow V$ endomorfismo simmetrico $\Rightarrow \exists B$ base ortonormale formata solo da autovettori di f

Nella dimostrazione daremo anche un metodo per costruire B.

Proof:
$\langle 1\rangle 1$. Dim. del teorema

$$f: V \longrightarrow V \text{ endomorfismo simmetrico } \underbrace{\Leftrightarrow}_{[3.25,\text{pg.}67]} f = {}^t f \Leftrightarrow f(v)\cdot w = v\cdot f(w) \ \ \forall v,w \in V \ \ (0)$$

Lavoriamo per induzione su $\dim V = n$
$\langle 2\rangle 1$. $n=1$

$$\dim V = 1 \Rightarrow V = \mathcal{L}(v),\ v \neq \underline{0}$$
$$f(v) = w \in V = \mathcal{L}(v) \Rightarrow w = \lambda v \Rightarrow f(v) = \lambda v \Rightarrow v \text{ autovettore di } f$$
$$\Rightarrow \{v\} \text{ e' una base ortonormale formata solo da autovettori di } T$$

$\langle 2\rangle 2$. $P(n-1) \Rightarrow P(n)$
Sia B una base ortonormale di V, che esiste per il thm [2.42,pg.46].

$$f \text{ simmetrico } \Rightarrow M_{B,B}(f) \text{ e' simmetrica (e reale) } \underbrace{\Rightarrow}_{\text{lemma } [4.11,\text{pg.}70]} \forall \lambda \text{ autovalore di } f \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Fissiamo λ autovalore di f. Sia $e_1 \in \mathbf{V}$ un suo autovettore, che esiste perche' $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora,

$$e_1 \neq \underline{0},\ f(e_1) = \lambda e_1 \ \ (1)$$

supponiamo che e_1 sia un versore (se non lo e' possiamo normalizzarlo).
Per le proprieta' del prod. scalare:

$$e_1 \neq \underline{0} \Leftrightarrow e_1 \cdot e_1 > 0 \Rightarrow e_1 \text{ e' non isotropo rispetto } \cdot \ \underbrace{\Rightarrow}_{prop[2.33,\text{pg.}43]} \ V = \mathcal{L}(e_1) \oplus \underbrace{\mathcal{L}(e_1)^{\perp_\cdot}}_{U}$$

$f' = f_{/U} : U \longrightarrow V$ restrizione di T ad U
$\langle 3\rangle 1$. f' e' un endomorfismo su U, ovvero dimostriamo che $\operatorname{Im} f' \subseteq U$, cioe' che e' corretto scrivere:

$$f' : U \longrightarrow U$$

f' conserva le operazioni vettoriali su U perche' restrizione dell'endomorfismo f su $V \supseteq U$.
Quindi basta dimostrare che $\operatorname{Im} f' \subseteq U$ per poter affermare che f' e' un endomorfismo su U.

$$u \in U, \quad f'(u) \in \operatorname{Im} f'$$
$$u \in U = \mathcal{L}(e_1)^{\perp_\cdot} \Leftrightarrow u \perp . e_1 \Leftrightarrow u \cdot e_1 = 0 \ \ (*)$$
$$f'(u) = f(u) \in U = \mathcal{L}(e_1)^{\perp_\cdot} \Leftrightarrow f(u) \perp . e_1 \Leftrightarrow f(u)\cdot e_1 = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{(0)} u \cdot f(e_1) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{(1)} \lambda u \cdot e_1 = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{(*)} 0 = 0$$

$\langle 3\rangle 2$. f' e' simmetrico

$$f \text{ simmetrico } \Leftrightarrow \forall v,w \in V \ \ f(v)\cdot w = v \cdot f(w) \underbrace{\Rightarrow}_{U \subseteq V} \forall v,w \in U \ \ f'(v)\cdot w = v \cdot f'(w) \Leftrightarrow f' \text{ e' simmetrico}$$

Quindi f' e' un endomorfismo simmetrico su U, e poiche' $\dim U = n-1$, possiamo applicare l'ipotesi induttiva: $\exists \{e_2, \ldots, e_n\}$ base ortonormale rispetto al prodotto scalare indotto su U e formata da autovettori di f', ovvero da autovettori di f.

La base cercata e' allora:

$$\{e_1, \ldots, e_n\}$$

infatti, ogni e_i e' un versore, $e_2, \ldots, e_n$ sono ortogonali tra loro per ipotesi induttiva, e_1 e' ortogonale a $e_2, \ldots, e_n$ perche' $e_2, \ldots, e_n \in U = \mathcal{L}(e_1)^{\perp}$, e infine sono tutti autovettori di f.

□

⟨1⟩2. Metodo per la costruzione di B

1. Sia $A = M_{B,B}(f)$, dove B e' una base ortonormale (ad esempio, la base canonica)
2. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ gli autovalori distinti di f. Li possiamo facilmente calcolare con il polinomio caratteristico ([AL,8.5,pg.51]).
3. Per il thm appena dimostrato f e' semplice e quindi per la prop [AL,8.7,pg.55] si ha
$$\mathbf{V} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r}$$
Calcoliamo allora l'equazioni E_i dell'autospazio V_{λ_i}, per $i = 1, \ldots, r$.
4. Per ogni λ_i adoperiamo questa procedura:
   a. dalle equazioni E_i ricaviamo un autovettore v_i ([AL,8.9,pg.55])
   b. Troviamo la base B_i di V_{λ_i} ortogonale secondo il prodotto scalare indotto su V_{λ_i}.
   Per far cio' basta considerare che v_i e' non isotropo[12] , e usare il metodo noto ([2.42,pg.46]) per l'ortogonalizzazione, tenendo presente che dobbiamo soddisfare le equazioni E_i perche' dobbiamo rimanere in V_{λ_i}.
   c.
$$B = B_1' \cup B_2' \cup \ldots \cup B_r'$$
dove con B_i' si intende la base B_i normalizzata.
B e' la base cercata, perche' ogni B_i' e' ortonormale e formata da autovettori di f, e per la prop [3.26,pg.67] i vettori delle varie B_i', B_j' sono ortogonali tra loro.

□

Corollary 4.13.

$$A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists M \in O(n) : \ M^{-1}AM \ \textit{e' diagonale}$$

In particolare, scegliendo $M = P_{B' \to B}$, dove B' e' una base ortonormale formata dagli autovettori di A, ad esempio, quella data dal thm [4.12,pg.71], e dove dove B e' una qualunque base ortonormale (ad esempio la base canonica).
Questo corollario da' quindi un metodo costruttivo per diagonalizzare una matrice simmetrica.

Proof:

Scelta B base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'endomorfismo tale che $M_{B,B}(f) = A$.

$$A = M_{B,B}(f) \text{ e' simmetrica } \Rightarrow f \text{ e' simmetrico } \underbrace{\Rightarrow}_{thm[4.12,pg.71]} \exists B' \text{ ortonormale formata da autovettori di } f$$

$$\Rightarrow \underbrace{\Rightarrow}_{prop[AL,8.6,pg.54]} M_{B',B'}(f) \text{ e' diagonale}$$

E usando la matrice di passaggio si ha la tesi:

$$A = M_{B,B}(f) = {P_{B \to B'}}^{-1} M_{B',B'}(f) P_{B \to B'} \Leftrightarrow P_{B \to B'} A {P_{B \to B'}}^{-1} = M_{B',B'}(f) \text{ diagonale}$$

$P_{B,B'}$ e' ortogonale, infatti,

$$B, B' \text{ basi ortonormali } \underbrace{\Rightarrow}_{prop[3.14,pg.60]} P_{B,B'} \text{ ortogonale}$$

□

[12] infatti, per le prop del prod scalare $v_i \neq \underline{0} \Leftrightarrow v_i \cdot v_i > 0$

Corollary 4.14. *Dato* $\mathbf{V}$ *spazio vettoriale euclideo, e* $q : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ *forma quadratica simmetrica, allora*

$$\exists B' \text{ base ortonormale rispetto al prodotto scalare, e diagonalizzante per } q$$

In particolare, una tale B' *e' una base ortonormale formata dagli autovettori di* A*, ad esempio, quella data dal thm [4.12,pg.71]. A e' la matrice simmetrica associata a* q*.*

Proof: Sia A la matrice simmetrica associata a q rispetto ad una base B ortonormale di $\mathbf{V}$.
Per il cor [4.13,pg.72], scegliendo $M = P_{B' \to B}$, dove B' e' una base ortonormale formata dagli autovettori di A, si ha
$M \in O(n)$, $M^{-1}AM = M'$ e' diagonale

$$M' = M^{-1}AM \underbrace{=}_{M \in O(n)} {}^tMAM \Rightarrow M' \text{ congrua ad } A \Rightarrow M' \text{ e' associata a } q \text{ rispetto a una certa base } B'$$

$$\Rightarrow B' \text{ diagonalizza } q$$

Quindi B' e' una base ortonormale che diagonalizza q

□

5 Spazio proiettivo

Definition 5.1. Sia $\mathbf{V}$ un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale di dimensione $\dim \mathbf{V} = n + 1$.

$$\mathbb{P}(V) = \{U \leq V \mid \dim U = 1\}$$

e' lo *spazio proiettivo di* $\mathbf{V}$ (nota [13])
Per definizione si pone:

$$\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = \dim \mathbf{V} - 1$$

Quando non ci sara' possibilita' d'equivoco utilizzeremo il simbolo $\mathbb{P}$ al posto di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, e

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$$

Se $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = 1$, $\mathbb{P}$ si dira' retta proiettiva,
se $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = 2$, $\mathbb{P}$ si dira' piano improprio.
Un elemento $P \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ lo chiameremo *punto*.

Proposition 5.2. *I punti di* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ *sono sottospazi di dimensione* 1*, e sono quindi generati da un singolo vettore di* $\mathbf{V}$*. Allora, a meno di fattori non nulli, ad ogni punto* P *possiamo associare un vettore* v*, e viceversa. Piu' precisamente: stabiliamo la seguente relazione d'equivalenza in* $\mathbf{V}^*$ *(nota[14]):*

$$v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} : \quad v = \lambda w$$

allora[15], se con $\langle v \rangle$ *indichiamo la classe d'equivalenza di* v*, abbiamo*

$$\mathcal{L}(v) \setminus \{\underline{0}\} = \langle v \rangle$$

[13] da ora in poi con $U \leq V$ indicheremo un sottospazio vettoriale di V
[14] $\mathbf{V}^* = \mathbf{V} \{\underline{0}\}$
[15] λ non puo' mai essere $= 0$, altrimenti $v = \underline{0}$, ma $v \in V^*$

e quindi

$$\mathbb{P}(\mathbf{V}) \underbrace{\simeq}_{\substack{isom.\ tra\ insiemi}} \mathbf{V}^*/_\sim$$

Possiamo percio' dire che presi due punti $P = \mathcal{L}(v), Q = \mathcal{L}(w)$*, si ha*

$$P = Q \Leftrightarrow v \in \langle w \rangle \Leftrightarrow w \in \langle v \rangle$$

Da ora in poi, useremo l'isomorfismo $\mathbb{P}(\mathbf{V}) \simeq \mathbf{V}^*/_\sim$ *liberamente, senza preoccuparci di richiamarlo. Ad esempio, diremo* $P = \langle v \rangle$*.*

Proposition 5.3.

$$\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = -1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}) = \emptyset$$

Proof:

$$\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = -1 \Leftrightarrow \dim \mathbf{V} = 0 \Leftrightarrow \nexists U \leq \mathbf{V} : \dim U = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}) = \emptyset$$

□

5.1 Sottospazio proiettivo

Definition 5.4.

$\mathbb{P}(W)$ sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(\mathbf{V}) \Leftrightarrow \mathbb{P}(W) \leq \mathbb{P}(\mathbf{V}) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} W \leq \mathbf{V}$ sottospazio vettoriale

Si ha:

$$\mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(\mathbf{V})$$

Per la definizione data di dimensione, si ha

$$\dim \mathbb{P}(W) \leq \dim \mathbb{P}(\mathbf{V})$$

Se $\dim \mathbb{P}(W) = \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) - 1$, allora $\mathbb{P}(W)$ si dira' iperpiano
se $\dim \mathbb{P}(W) = 1$, allora $\mathbb{P}(W)$ si dira' retta
se $\dim \mathbb{P}(W) = 2$, allora $\mathbb{P}(W)$ si dira' piano.

Proposition 5.5. *Sia* $W \leq \mathbf{V}$*,*

$$w \in W^* \Leftrightarrow P = \langle w \rangle \in \mathbb{P}(W)$$

Proof:

$$w \in W^* \Rightarrow \langle w \rangle \in W^*/_\sim \underbrace{=}_{\substack{prop.[5.2,\text{pg.}73]}} \mathbb{P}(W)$$

Viceversa:

$$\langle w \rangle \in \mathbb{P}(W) \Rightarrow \langle w \rangle \leq W \Rightarrow \forall \lambda \ \ \lambda w \in W \underbrace{\Rightarrow}_{\lambda = 1} w \in W$$

□

Proposition 5.6.

$$\begin{aligned}
&1.\ \mathbb{P}(W)\subseteq\mathbb{P}(\mathbf{V}) \Leftrightarrow W\subseteq\mathbf{V}\\
&1.1\ \mathbb{P}(W)=\mathbb{P}(\mathbf{V}) \Leftrightarrow W=\mathbf{V}\\
&2.\ \mathbb{P}(W_1)\cup\mathbb{P}(W_2)\subseteq\mathbb{P}(\mathbf{V}) \Leftrightarrow W_1\cup W_2\subseteq\mathbf{V}
\end{aligned}$$

Proof:
⟨1⟩1. Dim 1.
Dim. ⇒

$$w\in W \Rightarrow \langle w\rangle\in\mathbb{P}(W)\subseteq\mathbb{P}(\mathbf{V}) \Rightarrow \langle w\rangle\in\mathbb{P}(\mathbf{V}) \Leftrightarrow w\in\mathbf{V}$$

Dim ⇐

$$\langle w\rangle\in\mathbb{P}(W) \Rightarrow w\in W\subseteq\mathbf{V} \Rightarrow w\in\mathbf{V} \Rightarrow \langle w\rangle\in\mathbb{P}(\mathbf{V})$$

⟨1⟩2. Dim 2.
Dim ⇒

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(W_1)\subseteq\mathbb{P}(W_1)\cup\mathbb{P}(W_2)\subseteq\mathbb{P}(\mathbf{V}) \Rightarrow \mathbb{P}(W_1)\subseteq\mathbb{P}(\mathbf{V}) \Leftrightarrow W_1\subseteq\mathbf{V}\\
&\mathbb{P}(W_2)\subseteq\mathbb{P}(W_1)\cup\mathbb{P}(W_2)\subseteq\mathbb{P}(\mathbf{V}) \Rightarrow \mathbb{P}(W_2)\subseteq\mathbb{P}(\mathbf{V}) \Leftrightarrow W_2\subseteq\mathbf{V}\\
&W_1\cup W_2\subseteq\mathbf{V}
\end{aligned}$$

Dim ⇐

$$\begin{cases} W_1\subseteq\mathbf{V} \Leftrightarrow \mathbb{P}(W_1)\subseteq\mathbb{P}(\mathbf{V}) \\ W_2\subseteq\mathbf{V} \Leftrightarrow \mathbb{P}(W_2)\subseteq\mathbb{P}(\mathbf{V}) \end{cases} \Rightarrow \mathbb{P}(W_1)\cup\mathbb{P}(W_2)\subseteq\mathbb{P}(\mathbf{V})$$

□

Proposition 5.7. *Dati $W_1, W_2\subseteq\mathbf{V}$ sottospazi, si ha*

$$\mathbb{P}(W_1)\cap\mathbb{P}(W_2)=\mathbb{P}(W_1\cap W_2)$$

e piu' in generale, dato un insieme S qualsiasi di sottospazi di $\mathbf{V}$ si ha

$$\bigcap_{W\in S}\mathbb{P}(W)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{W\in S}W\right)$$

Proof:
⟨1⟩1. Dim ⊆

$$P\in\mathbb{P}(W_1)\cap\mathbb{P}(W_2) \Leftrightarrow \begin{cases} P=\langle w_1\rangle, & w_1\in W_1 \\ P=\langle w_2\rangle, & w_2\in W_2 \end{cases} \Leftrightarrow P=\langle w_1\rangle=\langle w_2\rangle \Rightarrow w_1=\lambda w_2 \Leftrightarrow w_1\in W_2$$

$w_1\in W_1\cap W_2 \Rightarrow P=\langle w_1\rangle\in\mathbb{P}(W_1\cap W_2)$
⟨1⟩2. Dim ⊇

$$P\in\mathbb{P}(W_1\cap W_2) \Leftrightarrow P=\langle w\rangle,\ w\in W_1\cap W_2 \Rightarrow \begin{cases} P=\langle w\rangle,\ w\in W_1 \Rightarrow P\in\mathbb{P}(W_1) \\ P=\langle w\rangle,\ w\in W_2 \Rightarrow P\in\mathbb{P}(W_2) \end{cases} \Rightarrow P\in\mathbb{P}(W_1)\cap\mathbb{P}(W_2)$$

□

Definition 5.8. Dato $W_1, W_2\leq\mathbf{V}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(W_1),\mathbb{P}(W_2) \text{ sono sghembi } \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathbb{P}(W_1)\cap\mathbb{P}(W_2)=\emptyset\\
&\mathbb{P}(W_1),\mathbb{P}(W_2) \text{ sono incidenti } \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathbb{P}(W_1)\cap\mathbb{P}(W_2)\neq\emptyset
\end{aligned}$$

Proposition 5.9.

$$\dim \mathbb{P}(W_1) \geq \dim \mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2)$$

Infatti,

$$\dim \mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \dim \mathbb{P}(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 \cap W_2 - 1$$
$$W_1 \supseteq W_1 \cap W_2 \Rightarrow \dim W_1 \geq \dim W_1 \cap W_2 \Leftrightarrow \dim W_1 - 1 \geq \dim W_1 \cap W_2 - 1$$

□

Proposition 5.10.

$$\begin{cases} \dim \mathbb{P}(W_1) = \dim \mathbb{P}(W_2) \\ \mathbb{P}(W_1) \subseteq \mathbb{P}(W_2) \end{cases} \Rightarrow \mathbb{P}(W_1) = \mathbb{P}(W_2)$$

Infatti,

$$\begin{cases} \dim \mathbb{P}(W_1) = \dim \mathbb{P}(W_2) \Leftrightarrow \dim W_1 = \dim W_2 \\ \mathbb{P}(W_1) \subseteq \mathbb{P}(W_2) \Leftrightarrow W_1 \subseteq W_2 \end{cases} \Rightarrow W_1 = W_2 \Leftrightarrow \mathbb{P}(W_1) = \mathbb{P}(W_2)$$

Proposition 5.11. *Sia dato* $S \leq \mathbb{P}(\mathbf{V})$*, con* $\dim S = r$*,* $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = n$*. Allora,*

$$S = \bigcap_{i=1}^{n-r} H_i$$

H_i *iperpiano,* $S \subseteq H_i \;\; i = 1, 2, \ldots, n-r$

$\forall i = 1, 2, \ldots, n-r$ *equazione di* H_i *linearmente indipendente dalle equazioni degli iperpiani* $\{H_j \mid j \neq i\}$

Proof: Sia $S = \mathbb{P}(W)$. Intanto di iperpiani che contengono S ne esistono infiniti , infatti, se $B = \{w_1, \ldots, w_{r+1}\}$ e' una base di W, completandola con altri $n-r-1$ vettori, otteniamo la base di un $U \leq \mathbf{V}$, tale che

$$\dim U = n \Rightarrow \dim \mathbb{P}(U) = n - 1$$
$$W \leq U \Rightarrow \mathbb{P}(W) \leq \mathbb{P}(U)$$

Detto questo, consideriamone $n-r$ distinti e che abbiano equazioni l.i.: $H_1 = \mathbb{P}(W_1), \ldots, H_{n-r} = \mathbb{P}(W_{n-r})$. Per la [5.9,pg.76] abbiamo:

$$\dim H_1 \cap H_2 \leq \dim H_1$$

se per assurdo si avesse l'ugualianza allora

$$\begin{cases} \dim H_1 \cap H_2 = \dim H_1 \\ H_1 \subseteq H_1 \cap H_2 \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{[5.10,\text{pg.}76]} H_1 = H_2 \text{ assurdo contro l'Hp di lineare indipendenza}$$

Quindi,

$$\dim H_1 > \dim H_1 \cap H_2 \Leftrightarrow n - 1 > \dim H_1 \cap H_2 \;\; (1)$$

Inoltre, dalla formula di Grassmann proiettiva (vedi [5.27,pg.83]), si ha:

$\dim L(H_1, H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim H_1 \cap H_2 \leq \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = n \Leftrightarrow (n-1) + (n-1) - \dim H_1 \cap H_2 \leq n \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \dim H_1 \cap H_2 \geq n - 2$$

$$n - 1 \underbrace{>}_{(1)} \dim H_1 \cap H_2 \geq n - 2 \Rightarrow \dim H_1 \cap H_2 = n - 2$$

$$\bigcap_{i=1}^{2} H_i = n - 2$$

Cosi' procedendo, si arriva a:

$$\dim \bigcap_{i=1}^{n-r} H_i = n - (n-r) = r = \dim S \quad (2)$$

allora

$$S \leq H_i \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, n-r \Rightarrow S \leq \bigcap_{i=1}^{n-r} H_i$$

$$\begin{cases} S \subseteq \bigcap_{i=1}^{n-r} H_i \\ (2) \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{[5.10,\text{pg.}76]} S = \bigcap_{i=1}^{n-r} H_i$$

□

5.2 Riferimento

Definition 5.12. Sia dato $\mathbf{V}$ di dimensione $n+1$, e sia $\mathbb{K}$ il campo di $\mathbf{V}$.
Sia $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ una base ordinata[16] di $\mathbf{V}$, e sia $P = \langle v \rangle \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$. Con $[P]_B$ indicheremo le *coordinate omogenee* di P rispetto a B, che sono cosi' definite:

$$[P]_B = [\langle v \rangle]_B \stackrel{\text{def}}{=} \langle [w]_B \rangle$$
$$\text{dove } w \text{ e' qualsiasi vettore di } \langle v \rangle$$

E' facile vedere che questa definizione e' indipendente dalla scelta di $w \in \langle v \rangle$

Per chiarire: sia $\mathbf{k} = [w]_B$. $\mathbf{k}$ e' il vettore delle componenti di w secondo B, percio' $\mathbf{k} \in \mathbb{K}^{n+1}$. Poiche' $\mathbb{K}^{n+1}$ e' uno spazio vettoriale, possiamo considerare $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$. Allora, $\langle \mathbf{k} \rangle \in \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$, dove $\langle \mathbf{k} \rangle$ e' la classe d'equivalenza della relazione definita in [5.2,pg.73]. E quindi, per definizione $\langle \mathbf{k} \rangle = [P]_B \in \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$.

Proposition 5.13. *Dato $P \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$, si ha*

$$[P]_B = \{[u]_B \mid u \in P\}$$

Proof:

$$P \in \mathbb{P}(\mathbf{V}) \Leftrightarrow \exists v \in \mathbf{V}^* : \ P = \langle v \rangle$$
$$[P]_B = [\langle v \rangle]_B \stackrel{\text{def}}{=} \langle [v]_B \rangle = \{\lambda [v]_B \mid \lambda \neq 0\} = \{[\lambda v]_B \mid \lambda \neq 0\} = \{[u]_B \mid u \in \langle v \rangle\}$$

□

Proposition 5.14. *Siano B, B' due basi di $\mathbf{V}$ e sia $P \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$*

$$B' = kB, \ \ k \neq 0 \Rightarrow [P]_B = [P]_{B'}$$

dove

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}\}$$
$$kB \stackrel{def}{=} \{kv_1, kv_2, \ldots, kv_{n+1}\}$$

Proof:

[16] la base deve essere ordinata affinche' sia possibile parlare di riferimento. Nel seguito assumeremo implicitamente che la base sia ordinata o meno

Sia $P = \langle v \rangle \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$. Chiaramente $k\langle v \rangle = \langle v \rangle$, quindi

$$[P]_{B'} = [P]_{kB} = [\langle v \rangle]_{kB} \underbrace{=}_{\text{def}} [w]_{kB} = [kw]_B = [k\langle v \rangle]_B = [\langle v \rangle]_B = [P]_B$$

dove w e' un qualsiasi vettore di $\langle v \rangle$

□

Definition 5.15. Una base ordinata B di $\mathbf{V}$ e' un elemento dello spazio vettoriale $\mathbf{V}^{n+1}$. Diamo la seguente definizione:

$\mathcal{B} = \langle B \rangle \in \mathbb{P}(\mathbf{V}^{n+1})$ e' un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(\mathbf{V}) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B'$ e' una base di $\mathbf{V}^{n+1}$
dove $\langle B \rangle$ e' la classe d'equivalenza secondo la relazione definita in [5.2,pg.73]
B' e' un qualsiasi $B' \in \langle B \rangle$

Questa definizione e' indipendente dalla scelta di $B' \in \langle B \rangle$, perche' se B' e' una base, anche kB', con $k \neq 0$, lo e'.

$\langle B \rangle$ si dira' riferimento proiettivo standard di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ se $B' \in \langle B \rangle$, dove B' e' la base canonica di $\mathbf{V}$.

Con $[P]_{\mathcal{B}}$ indicheremo le *coordinate omogenee* di P rispetto al riferimento proiettivo $\mathcal{B}$, che sono cosi' definite:

$$[P]_{\mathcal{B}} \overset{\text{def}}{=} [P]_{B'}$$
dove B' e' una qualsiasi base $B' \in \langle B \rangle$

questa definizione e' indipendente dalla scelta di B', grazie alla prop. [5.14,pg.77].

Proposition 5.16. *Siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ due riferimenti proiettivi distinti, e sia $P = \langle v \rangle \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$, allora*

$${}^t[P]_{\mathcal{B}'} = \langle P_{B,B'} \rangle {}^t[P]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} {}^t[P]_{\mathcal{B}}$$

dove

$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \overset{def}{=} \langle P_{B,B'} \rangle$
B, B' *due qualsiasi basi in* $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$
${}^t[P]_{\mathcal{B}} = {}^t[P]_B = {}^t[\langle v \rangle]_B = {}^t\langle [v]_B \rangle \overset{def}{=} \langle {}^t[v]_B \rangle$
$\langle P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \rangle$ *e' una classe d'equiv. dello spazio quoziente* $\mathbb{K}^{n+1,n+1^*}/_{\sim}$, *dove,* $\sim$ *e' la relazione [5.2,pg.73]*

Proof:
⟨1⟩1. Dim. che $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \overset{\text{def}}{=} \langle P_{B,B'} \rangle$ e' ben posta
Dobbiamo dimostrare che prendendo $\overline{B} \in \mathcal{B}$ si ha

$$\langle P_{B,B'} \rangle = \left\langle P_{\overline{B},B'} \right\rangle$$

$$\overline{B} \in \mathcal{B} = \langle B \rangle \Rightarrow \overline{B} = kB, \quad k \neq 0$$
$$v \in B \Leftrightarrow kv \in kB \Rightarrow [kv]_{B'} = k[v]_{B'}$$
$$\Rightarrow P_{kB,B'} = kP_{B,B'} \Rightarrow \langle P_{kB,B'} \rangle = \langle P_{B,B'} \rangle$$

Analogamente, scelto $kB' \in \mathcal{B}'$, si ha

$$[v]_{kB'} = k[v]_{B'} \Rightarrow P_{B,kB'} = kP_{B,B'}$$

⟨1⟩2.

$${}^t[P]_{\mathcal{B}} = \langle {}^t[v]_B \rangle$$
$${}^t[P]_{\mathcal{B}'} = \langle {}^t[v]_{B'} \rangle = \langle P_{B\to B'} {}^t[v]_B \rangle \underbrace{=}_{(*)} \langle P_{B\to B'} \rangle \langle {}^t[v]_B \rangle = \langle P_{B\to B'} \rangle {}^t[P]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} {}^t[P]_{\mathcal{B}}$$

(*) Dove, se H, J sono due insiemi, con HJ indichiamo il loro "prodotto", ovvero $HJ = \{hj \mid h \in H,\ j \in J\}$.

□

5.3 Equazioni cartesiane proiettive

Proposition 5.17. *Sia $W \subseteq \mathbf{V}$, e siano $AX = \underline{0}$ le equazioni cartesiane di W rispetto alla base B. Allora,*

1. $\langle w \rangle \in \mathbb{P}(W) \Leftrightarrow A\,{}^t[w]_B = \underline{0},\ \ w \in \mathbf{V}^*$
2. $P \in \mathbb{P}(W) \Leftrightarrow$
   $P \in \mathbb{P}(\mathbf{V}),\ \ \exists X \in {}^t[P]_B :\ AX = \underline{0} \Leftrightarrow$
   $P \in \mathbb{P}(\mathbf{V}),\ \ \forall X \in {}^t[P]_B :\ AX = \underline{0}$

In altre parole, la 1. *dice che $AX = \underline{0}$ e' il sistema di tutti i vettori di tutti i punti di $\mathbb{P}(W)$. La* 2. *dice che tutte le coordinate di P soddisfano l'equazione, e che appena una coordinata di P soddisfa l'equazione, allora $P \in \mathbb{P}(W)$ (d'altronde le coordinate di P sono tutte proporzionali tra loro).*

Proof:
⟨1⟩1. Dim 1.

$$\langle w \rangle \in \mathbb{P}(W) = W^*/_\sim \Leftrightarrow w \in W^* \Leftrightarrow A\,{}^t[w]_B = \underline{0},\ \ w \neq \underline{0}$$

⟨1⟩2. Dim 2.

$$X \in {}^t[P]_B \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{[5.13,pg.77]}} \exists w \in P :\ X = {}^t[w]_B \ \ (1)$$

$$\exists X \in {}^t[P]_B :\ AX = \underline{0} \underbrace{\Leftrightarrow}_{(1)} \exists w \in P :\ A\,{}^t[w]_B = 0 \Leftrightarrow w \in \mathbf{V}^*,\ A\,{}^t[w]_B = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{passo } \langle 1\rangle 1} \langle w \rangle \in \mathbb{P}(W) \Leftrightarrow P \in \mathbb{P}(W)$$

Infine,

$$X' \in {}^t[P]_B \Leftrightarrow X' = \lambda X,\ \ \lambda \neq 0$$
$$AX' = \underline{0} \Leftrightarrow A\lambda X = \underline{0} \Leftrightarrow AX = \underline{0}$$

Quindi

$$\forall X' \in {}^t[P]_B :\ AX' = \underline{0}$$

□

Proposition 5.18. *Sia $W \subseteq \mathbf{V}$, sia $C = \{w_1, \ldots, w_k\}$ una base di W, e $B = \{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ una base di $\mathbf{V}$, con $\dim W = k$, $\dim \mathbf{V} = n+1$.*
L'equazione parametrica di W, nei parametri $t_1, t_2, \ldots, t_k$, rispetto alla base B, e':

$${}^tX = \sum_{i=1}^{k} t_i\, {}^t[w_i]_B \ \ (1)$$

al variare dei parametri $t_1, t_2, \ldots, t_k$.
Si ha

1. $P \in \mathbb{P}(W) \Leftrightarrow \exists X \in [P]_B :$ *X soddisfa la* (1)
2. $\langle w \rangle \in \mathbb{P}(W) \Leftrightarrow X = [w]_B$ *soddisfa la* (1)

In altre parole, la (1) *e' l'equazione di tutti i vettori di tutti i punti di* $\mathbb{P}(W)$.

Proof:
$\langle 1 \rangle$1. Dim la (1)

$$w \in W \Leftrightarrow w = t_1 w_1 + \cdots + t_k w_k \Leftrightarrow [w]_B = t_1 [w_1]_B + \cdots + t_k [w_k]_B$$

che e' la (1).
$\langle 1 \rangle$2. Dim la 2.

$$\langle w \rangle \in \mathbb{P}(W) \Leftrightarrow w \in W \Leftrightarrow X = [w]_B \text{ soddisfa la (1)}$$

$\langle 1 \rangle$3. Dim la 1.

$$\exists X \in [P]_B :\ X \text{ soddisfa (1)} \Leftrightarrow \exists w \in P :\ X = [w]_B \text{ soddisfa (1)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists w \in P :\ w \in W \Leftrightarrow P = \langle w \rangle,\ w \in W \Leftrightarrow P \in \mathbb{P}(W)$$

□

5.4 Sottospazio generato

Definition 5.19. Sia $J \subseteq \mathbb{P}(\mathbf{V})$ non vuoto, allora poniamo

$$L(J) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\mathbb{P}(W) \leq \mathbb{P}(\mathbf{V}):\ J \subseteq \mathbb{P}(W)} \mathbb{P}(W)$$

In virtu' della proposizione [5.7,pg.75], $L(J)$ e' quindi il piu' piccolo sottospazio proiettivo che contiene J. $L(J)$ si chiama *sottospazio proiettivo generato da* J
Se $J = \{P_1, \ldots, P_t\}$, scriveremo

$$L(P_1, \ldots, P_t) \stackrel{\text{def}}{=} L(\{P_1, \ldots, P_t\})$$

Se $J = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_t$, scriveremo

$$L(J_1, J_2, \ldots, J_t) \stackrel{\text{def}}{=} L(J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_t)$$

Proposition 5.20. *Sia* $P_1 = \langle v_1 \rangle, P_2 = \langle v_2 \rangle, \ldots, P_t = \langle v_t \rangle \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ *non vuoto. Si ha*

$$L(P_1, P_2, \ldots, P_t) = \mathbb{P}\left(\mathcal{L}\left(v_1, \ldots, v_t\right)\right)$$

Proof:
Sia $J = \{P_1, \ldots, P_t\}$.
$\mathbb{P}(W) \leq \mathbb{P}(\mathbf{V}) \Leftrightarrow W \leq \mathbf{V}$
$J \subseteq \mathbb{P}(W) \Leftrightarrow P_i = \langle v_i \rangle \in \mathbb{P}(W)\ \ \forall i = 1, \ldots, t \Leftrightarrow v_i \in W\ \forall i = 1, \ldots, t \Leftrightarrow \mathcal{L}\left(v_1, \ldots, v_t\right) \subseteq W$
$J \subseteq \mathbb{P}(W) \Leftrightarrow \mathcal{L}\left(v_1, \ldots, v_t\right) \subseteq W\ \ (*)$

$$L(J) = \bigcap_{\mathbb{P}(W) \leq \mathbb{P}(\mathbf{V}):\ J \subseteq \mathbb{P}(W)} \mathbb{P}(W) \underbrace{=}_{(*)} \bigcap_{W \leq \mathbf{V}:\ \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_t) \subseteq W} \mathbb{P}(W) \underbrace{=}_{\text{[5.7,pg.75]}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{W \leq \mathbf{V}:\ \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_t) \subseteq W} W\right) =$$
$$\underbrace{=}_{\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_t) \leq \mathbf{V}} \mathbb{P}\left(\mathcal{L}\left(v_1, \ldots, v_t\right)\right)$$

□

Definition 5.21.

$P_1, \dots, P_t \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ sono linearmente indipendenti $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \dim L(P_1, P_2, \dots, P_t) = t - 1$

Ad esempio,

P_1, P_2 sono l.i quando $L(P_1, P_2)$ e' una retta

P_1, P_2, P_3 sono l.i quando $L(P_1, P_2, P_3)$ e' un piano

$P_1, P_2, \dots, P_t$ sono allineati $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} L(P_1, P_2, \dots, P_t) \leq 1$

$P_1, P_2, \dots, P_t$ sono complanari $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} L(P_1, P_2, \dots, P_t) \leq 2$

Proposition 5.22. *Dati $P_i = \langle v_i \rangle \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$, $i = 1, \dots, t$, si ha*

$$P_1, \dots, P_t \text{ sono l.i} \Leftrightarrow v_1, \dots, v_t \text{ sono l.i.}$$

Segue allora che il massimo numero di punti l.i. in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e' $n+1$, dove $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = \dim \mathbf{V} - 1 = n$.

Proof:

Per la prop [5.20,pg.80], abbiamo

$L(P_1, \dots, P_t) = \mathbb{P}(\mathcal{L}(v_1, \dots, v_t))$

$\dim L(P_1, \dots, P_t) = \dim \mathbb{P}(\mathcal{L}(v_1, \dots, v_t)) = \dim \mathcal{L}(v_1, \dots, v_t) - 1$

$\dim L(P_1, P_2, \dots, P_t) = t - 1 \Leftrightarrow \dim \mathcal{L}(v_1, \dots, v_t) - 1 = t - 1 \Leftrightarrow v_1, \dots, v_t$ sono l.i.

□

Definition 5.23. Sia $P_1, \dots, P_t \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$, con $t > n + 1$.
Dalla proposizione [5.22,pg.81], segue che $P_1, \dots, P_t$ sono certamente l.d. Diamo allora questa definizione: sia $J = \{P_1, \dots, P_t\}$

$P_1, \dots, P_t$ si dicono in posizione generale $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall K \subseteq J : |K| = n + 1 \quad K$ e' un insieme di pt. l.i.

ovvero, comunque scelti $n + 1$ punti, essi sono l.i.

Definition 5.24. Sia $\mathcal{B}$ un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e sia $B = \{v_1, \dots, v_{n+1}\} \in \mathcal{B}$ una qualsiasi base in $\mathcal{B}$. I punti

$$P_1 = \langle v_1 \rangle, \quad P_2 = \langle v_2 \rangle, \quad \dots, P_{n+1} = \langle v_{n+1} \rangle$$

si dicono *punti fondamentali* rispetto a B oppure a $\mathcal{B}$. Il punto

$$P = \langle v_1 + \dots + v_{n+1} \rangle$$

si chiama *punto unita'* rispetto a B oppure a $\mathcal{B}$.

Proposition 5.25. *Sia $B = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ una base di $\mathbf{V}$, $P_1 = \langle v_1 \rangle, \dots, P_{n+1} = \langle v_{n+1} \rangle$ i rispettivi pt. fondamentali, e P il punto unita', allora i punti*

$$P_1, \dots, P_{n+1}, P$$

sono in posizione generale.

Proof:
$J = \{P_1, \dots, P_{n+1}, P\}$.
Escludendo P da J, controlliamo che i pt. di $J \setminus \{P\}$ siano l.i:

$$P_1 = \langle v_1 \rangle, \dots, P_{n+1} = \langle v_{n+1} \rangle \text{ sono l.i} \underbrace{\Leftrightarrow}_{[5.22,\text{pg.}81]} v_1, \dots, v_{n+1} \text{ l.i.}$$

e questo e' vero perche' sono vettori di una base.
Ora escludiamo un generico P_i,
$P_1 = \langle v_1 \rangle, \dots, P_{i-1} = \langle v_{i-1} \rangle, P_{i+1} = \langle v_{i+1} \rangle, \dots, P_{n+1} = \langle v_{n+1} \rangle, P = \langle v_1 + \dots + v_{n+1} \rangle$ sono l.i.

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{[5.22,\text{pg.}81]} v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1}, v_1 + \dots + v_{n+1} \text{ sono l.i. } (*)$$

Applichiamo il criterio degli scarti successivi (vedi [AL,4.4,pg.23]): un qualsiasi v_i, con $1 \leq i \leq n+1$ non lo possiamo scartare, perche' $v_1, \dots, v_{n+1}$ sono l.i. Se per assurdo $v_1 + \dots + v_{n+1}$ fosse l.d. dagli altri, allora

$$v_1 + \dots + v_i + \dots + v_{n+1} = a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_{n+1} v_{n+1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_i = (a_1 - 1) v_1 + \dots + (a_{i-1} - 1) v_{i-1} + (a_{i+1} - 1) v_{i+1} + \dots + (a_{n+1} - 1) v_{n+1}$$

e quindi v_i sarebbe o l.d. dai vettori di B, oppure sarebbe nullo. In entrambi i casi cio' e' assurdo, perche' $v_i \in B$.
Quindi, non possiamo scartare neanche $v_1 + \dots + v_{n+1}$. Allora, per il criterio degli scarti successivi, la $(*)$ e' vera.

Abbiamo percio' visto che i punti di un qualsiasi sottoinsieme di J di cardinalita' $n+1$ sono l.i.

□

Proposition 5.26. *Sia* $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = n$, *allora*

$P_1, \dots, P_{n+2}$ *sono in posizione generale* $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists! \mathcal{B}$ *riferimento proiettivo di* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ *tale che*
$\{P_1, \dots, P_{n+1}\}$ *sono pt. fondamentali e* $P = P_{n+2}$ *e' il pt. unita' rispetto a* $\mathcal{B}$

Proof:
Poiche' gli $n+2$ pt. sono in posizione generale, gli $n+1$ pt. sono l.i.
Consideriamo allora la base $B' = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$, dove $P_i = \langle v_i \rangle$, $i = 1, \dots, n+1$.
Poniamo $v = v_{n+2}$. Si ha:

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_{n+1} v_{n+1}$$

Se per assurdo $a_i = 0$, allora $\{v, v_1, \dots, v_{n+1}\}$ sono $n+1$ vettori l.d., questo e' assurdo contro l'Hp della posizione generale.
Se come nuova base scegliamo

$$B = \{a_1 v_1, \dots, a_{n+1} v_{n+1}\}$$

e poniamo $\overline{v}_i = a_i v_i$, avremo che

$$P_i = \langle v_i \rangle = \langle a_i v_i \rangle = \langle \overline{v}_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n+1$$
$$v = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \dots + \overline{v}_{n+1}$$
$$P = P_{n+2} = \langle v_{n+2} \rangle = \langle v \rangle = \langle \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \dots + \overline{v}_{n+1} \rangle$$

e quindi la tesi: P_i sono pt. fondamentali, e P e' il punto unita', il tutto rispetto alla base B.
Allora, $\mathcal{B} = \langle B \rangle$ e' il riferimento proiettivo cercato.
⟨1⟩1. Dim. l'unicita'

Supponiamo che esista un altro riferimento $\mathcal{B}' = \langle B \rangle'$ per cui

$$B' = \{w_1, \dots, w_{n+1}\}$$
$$P_i = \langle w_i \rangle,\ i = 1, \dots, w_{n+1}$$
$$P = \langle w_1 + w_2 + \cdots + w_{n+1} \rangle$$

allora, considerando il riferimento $\mathcal{B}$ di prima, abbiamo
$P_i = \langle w \rangle_i = \langle \overline{v}_i \rangle \Rightarrow w_i = \lambda_i \overline{v}_i,\ \ \lambda_i \neq 0 \quad (*)$

$$P = \langle w_1 + \cdots + w_{n+1} \rangle = \langle \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \cdots + \overline{v}_n \rangle \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} w_i = \underbrace{\lambda}_{\neq 0} \sum_{i=1}^{n+1} \overline{v}_i \underbrace{\Leftrightarrow}_{(*)} \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \overline{v}_i = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda \overline{v}_i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - \lambda_1)\overline{v}_1 + (\lambda - \lambda_2)\overline{v}_2 + \cdots + (\lambda - \lambda_{n+1})\overline{v_{n+1}} = 0$$

e poiche' $\{\overline{v}_i\}$ sono l.i., l'unica combinazione lineare nulla e' quella che ha i coefficienti tutti nulli, da cui

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n+1}$$

In definitiva

$$w_i = \lambda v_i \ \ i = 1, \dots, n+1$$

quindi

$$B' = \lambda B \Rightarrow B' \in \langle B \rangle \Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{B}'$$

□

5.4.1 Formula di Grassman proiettiva

Proposition 5.27. *Dati due sottospazi proiettivi, $S_1, S_2 \leq \mathbb{P}(\mathbf{V})$, $S_i = \mathbb{P}(W_i)$, si ha*

1. $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$
1.1 $L(S_1, S_2, \dots, S_n) = \mathbb{P}(W_1 + W_2 + \cdots + W_n),\ \ n \geq 2$
2. $\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2$

Poiche' $\dim L(S_1, S_2) \leq \dim \mathbb{P}(\mathbf{V})$, *dalla* 2. *si ha*

3. $\dim S_1 \cap S_2 \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P}(\mathbf{V})$

Proof:
⟨1⟩1. Dim 1.

$$\begin{cases} \mathbb{P}(W) \leq \mathbb{P}(\mathbf{V}) \\ \mathbb{P}(W_1) \cup \mathbb{P}(W_2) \subseteq \mathbb{P}(W) \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{[5.6,\text{pg.}75]} \begin{cases} W \leq \mathbf{V} \\ W_1 \cup W_2 \subseteq W \end{cases} \quad (*)$$

$$L(S_1, S_2) = L(S_1 \cup S_2) = \bigcap_{\mathbb{P}(W) \leq \mathbb{P}(\mathbf{V}):\ S_1 \cup S_2 \subseteq \mathbb{P}(W)} \mathbb{P}(W) \underbrace{=}_{(*)} \bigcap_{W \leq \mathbf{V}:\ W_1 \cup W_2 \subseteq W} \mathbb{P}(W) =$$

$$\underbrace{=}_{[5.7,\text{pg.}75]} \mathbb{P}\left(\bigcap_{W \leq \mathbf{V}:\ W_1 \cup W_2 \subseteq W} W \right) \underbrace{=}_{(**)} \mathbb{P}(W_1 + W_2)$$

(**) Il piu' piccolo sottospazio che contiene $W_1 \cup W_2$ e' $W_1 + W_2$.
⟨1⟩2. Dim 1.
Procediamo per induzione su n. La base e' stata gia' provata nel passo precedente.
Supponiamo la tesi vera per $n - 1$.

Sia $L(S_1,\dots,S_n)=\mathbb{P}(W)$.
$L(S_1,\dots,S_{n-1}) \underbrace{=}_{\text{Hp induttiva}} \mathbb{P}(W_1+\cdots+W_{n-1})$

$L(S_1,\dots,S_{n-1}) \underbrace{\subseteq}_{\text{per def. di } L(X)} L(S_1,\dots,S_n) \Leftrightarrow \mathbb{P}(W_1+\cdots+W_{n-1})\subseteq\mathbb{P}(W) \Leftrightarrow$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{[5.6,pg.75]}} W_1+\cdots+W_{n-1}\subseteq W \quad (1)$

$S_n\subseteq L(S_1,\dots,S_n) \Leftrightarrow \mathbb{P}(W_n)\subseteq\mathbb{P}(W) \Leftrightarrow \ W_n\subseteq W \quad (2)$

$(1),(2) \Rightarrow (W_1+\cdots+W_{n-1})+W_n\subseteq W \Leftrightarrow \mathbb{P}((W_1+\cdots+W_{n-1})+W_n)\subseteq\mathbb{P}(W)=L(S_1,\dots,S_n) \quad (3)$

$W_1,W_2,\dots,W_n\subseteq W_1+W_2+\cdots+W_n \Rightarrow \mathbb{P}(W_1),\mathbb{P}(W_2),\dots,\mathbb{P}(W_n)\subseteq\mathbb{P}(W_1+W_2+\cdots+W_n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_1,\dots,S_n\subseteq\mathbb{P}(W_1+\cdots+W_{n-1}+W_n) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{per def. di } L(X)} L(S_1,\dots,S_n)\subseteq\mathbb{P}(W_1+W_2+\cdots+W_n) \quad (4)$

$(3),(4) \Rightarrow L(S_1,\dots,S_n)=\mathbb{P}(W_1+W_2+\cdots+W_n)$

⟨1⟩3. Dim 2.

$$\begin{cases} \dim W_1=\dim\mathbb{P}(W_1)+1 \\ \dim W_2=\dim\mathbb{P}(W_2)+1 \\ \dim W_1\cap W_2=\dim\mathbb{P}(W_1\cap W_2)+1 \underbrace{=}_{\text{[5.7,pg.75]}} \dim\mathbb{P}(W_1)\cap\mathbb{P}(W_2)+1 \end{cases} \qquad (***)$$

$\dim L(S_1,S_2)=\dim\mathbb{P}(W_1+W_2)=\dim(W_1+W_2)-1=\dim W_1+\dim W_2-\dim W_1\cap W_2-1=$

$\underbrace{=}_{(***)}\dim\mathbb{P}(W_1)+1+\dim\mathbb{P}(W_2)+1-(\dim\mathbb{P}(W_1)\cap\mathbb{P}(W_2)+1)-1=$

$=\dim\mathbb{P}(W_1)+\dim\mathbb{P}(W_2)-\dim\mathbb{P}(W_1)\cap\mathbb{P}(W_2)$

□

Proposition 5.28. *Dati $S_i=\mathbb{P}(W_i),\ i=1,2,\dots,n$, allora*

1. $L(S_1)=S_1$
2. $L(L(S_1,S_2,\dots,S_{n-1}),S_n)=L(S_1,S_2,\dots,S_n), \quad n\geq 2$
3. $S_1\subseteq S_2 \Rightarrow L(S_1,S_2)=L(S_2)=S_2$

3.1 $S_1\subseteq L(S_2,S_3,\dots,S_n) \Rightarrow L(S_1,S_2,\dots,S_n)=L(S_2,\dots,S_n)$

4. $P,Q\in S_1 \Rightarrow L(P,Q)\subseteq S_1$

queste sono le proprieta' analoghe a quelle della congiungente (vedi [1.16,pg.9]).

Proof:
⟨1⟩1. Dim 1.

$$S_1\subseteq S_1 \underbrace{\Rightarrow}_{(*)} L(S_1)\subseteq S_1$$

Per definizione: $S_1\subseteq L(S_1)$

$S_1=L(S_1)$

$L(S_1)$ e' il piu' piccolo sottospazio che contiene S_1.

⟨1⟩2. Dim 2.

Procediamo per induzione su n.

Base: $n = 2$

$$L(L(S_1), S_2)) \underbrace{=}_{1.} L(S_1, S_2)$$

Supponiamo che sia vero per $n-1$.

$$L(S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}) \underbrace{=}_{[5.27,\text{pg.}83]} \mathbb{P}(W_1 + W_2 + \cdots + W_{n-1})$$

$$L(L(S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}), S_n) = \mathbb{P}((W_1 + W_2 + \cdots + W_{n-1}) + W_n) \underbrace{=}_{[5.27,\text{pg.}83]} L(S_1, S_2, \ldots, S_n)$$

⟨1⟩3. Dim 3.

$$S_1 \subseteq S_2 \Leftrightarrow W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_1 + W_2 = W_2$$
$$L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2) = \mathbb{P}(W_2) = L(S_2)$$

⟨1⟩4. Dim 3.1

$$S_1 \subseteq L(S_2, \ldots, S_n) \underbrace{\Rightarrow}_{3.} L(S_1, L(S_2, \ldots, S_n)) = L(L(S_2, \ldots, S_n)) \underbrace{=}_{1.} L(S_2, \ldots, S_n) \quad (1)$$

$$L(S_1, L(S_2, \ldots, S_n)) \underbrace{=}_{2.} L(S_1, S_2, \ldots, S_n) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow L(S_2, \ldots, S_n) = L(S_1, S_2, \ldots, S_n)$$

⟨1⟩5. Dim 4.

$$P = \langle v \rangle,\ Q = \langle u \rangle,\ \ S_1 = \mathbb{P}(W)$$
$$P, Q \in S_1 \underbrace{\Rightarrow}_{[5.5,\text{pg.}74]} v, u \in W \Rightarrow \mathcal{L}(v, u) \subseteq W \underbrace{\Rightarrow}_{[5.6,\text{pg.}75]} \mathbb{P}(\mathcal{L}(v, u)) \subseteq \mathbb{P}(W) \Leftrightarrow L(\langle v \rangle, \langle u \rangle) = L(P, Q) \subseteq S$$

□

Definition 5.29. Dati $S_1, S_2 \leq \mathbb{P}(\mathbf{V})$,

$$S_1, S_2 \text{ sono in posizione generale } \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \dim S_1 \cap S_2 = \max\{-1, \dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P}(\mathbf{V})\}$$

Example 5.30. Un iperpiano e una retta hanno almeno un punto in comune.
Sia α l'iperpiano, ovvero $\dim \alpha = \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) - 1$.
Sia r la retta, ovvero $\dim r = 1$.

$$\dim L(r, \alpha) \leq n \underbrace{\Leftrightarrow}_{[5.27,\text{pg.}83]} \dim r + \dim \alpha - \dim \alpha \cap r \leq n \Leftrightarrow 1 + n - 1 - \dim \alpha \cap r \leq n \Leftrightarrow \dim \alpha \cap r \geq 0$$

In particolare, in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ con $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = 2$, due rette si incontrano in un punto, oppure sono coincidenti.

5.5 Proiezione (spazi proiettivi)

Definition 5.31. Sia $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = n$, e $H \leq \mathbb{P}(\mathbf{V})$ un iperpiano, ovvero $\dim H = n-1$. Sia $P \notin H$ e sia definita la seguente mappa:

$$\pi_{P,H} : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \setminus \{P\} \longrightarrow H$$
$$\pi_{P,H}(Q) \in L(P,Q) \cap H = \{R\}$$

π si chiama *proiezione* di centro P, sull'iperpiano H.
Questa definizione e' ben posta perche' $|L(P,Q)\cap H| = 1 \ \ \forall Q \in \mathbb{P}(\mathbf{V})\setminus\{P\}$

Proof:
$\langle 1\rangle 1$. Dimostriamo che $L(P,Q)\cap H$ e' formato da un solo punto
Sia $Q \in \mathbb{P}(\mathbf{V})\setminus\{P\}$.
$L(P,Q)$ e' una retta, infatti,

$$Q \neq P \Rightarrow P \cap Q = \{\underline{0}\} \ \Rightarrow \ \dim P \cap Q = 0 - 1 = -1$$
$$\dim L(P,Q) = \dim P + \dim Q - \dim P \cap Q = 0 + 0 - (-1) = 1$$

Un iperpiano e una retta hanno sempre un punto in comune (vedi [5.30,pg.85]), quindi

$$\dim L(P,Q) \underbrace{\geq}_{[5.9,\text{pg.}76]} \dim L(P,Q)\cap H \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \dim L(P,Q)\cap H \leq 1$$

Se per assurdo $\dim L(P,Q)\cap H = 1$, allora

$$\begin{cases} \dim L(P,Q)\cap H = 1 = \dim L(P,Q) \\ L(P,Q)\cap H \subseteq L(P,Q) \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{[5.10,\text{pg.}76]} L(P,Q)\cap H = L(P,Q) \Leftrightarrow L(P,Q)\subseteq H$$

assurdo perche' $P \notin H$.
Quindi, $\dim L(P,Q)\cap H = 0$.

□

Proposition 5.32. *Sia* $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = n$, *e* $H \leq \mathbb{P}(\mathbf{V})$ *un iperpiano, ovvero* $\dim H = n-1$. *Sia* $Q \in \mathbb{P}(\mathbf{V})\setminus H$ *e sia* π *la proiezione di centro* Q *sull'iperpiano* H. *Si ha*

$$S \leq \mathbb{P}(\mathbf{V}), \ \ Q \notin S \Rightarrow \begin{cases} \pi(S) = L(S,Q)\cap H \\ \dim \pi(S) = \dim S \end{cases}$$

Nota: $\pi(S)$ *e' l'immagine di tutto* S.

Proof:
$\langle 1\rangle 1$. Dim 1.
Dobbiamo dimostrare che $\{\pi(S)\} = L(S,Q)\cap H$.
$\langle 2\rangle 1$. Dim $\subseteq$
Sia $\pi(P) \in \pi(S)$,
π proiezione $\Rightarrow \{\pi(P)\} = L(P,Q)\cap H$ (1)
$P, Q \in L(S,Q) \underbrace{\Rightarrow}_{[5.28,\text{pg.}84]} L(P,Q)\subseteq L(S,Q) \Rightarrow L(P,Q)\cap H \subseteq L(S,Q)\cap H \underbrace{\Rightarrow}_{(1)} \{\pi(P)\} \subseteq L(S,Q)\cap H$
$\pi(P) \in L(S,Q)\cap H$
$\langle 2\rangle 2$. Dim $\supseteq$
Sia $P \in L(S,Q)\cap H$.
$\langle 3\rangle 1$. Dim che $\dim L(P,Q)\cap S = 0$, ovvero che $L(P,Q)\cap S$ e' un punto

$P \in H, Q \notin H \Rightarrow P \neq Q \Rightarrow \dim L(P,Q) = 1 \quad (2')$

$L(L(P,Q),S) \underbrace{=}_{\text{[5.28,pg.84]}} L(P,Q,S) \quad (2)$

$P \in L(S,Q) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[5.28,pg.84]}} L(P,S,Q) = L(S,Q) \quad (2.1)$

$Q \notin S \Rightarrow S \cap Q = \emptyset \Rightarrow \dim S \cap Q = -1$

$\dim L(P,S,Q) \underbrace{=}_{(2.1)} \dim L(S,Q) = \dim S + \underbrace{\dim Q}_{=0} - \dim S \cap Q = \dim S + 1 \quad (3)$

$\dim L(L(P,Q),S) = \dim L(P,Q) + \dim S - \dim L(P,Q) \cap S \quad (4)$

$(2) \Rightarrow \dim L(P,Q,S) = \dim L(L(P,Q),S) \underbrace{\Leftrightarrow}_{(4)} \dim S + 1 = \dim L(P,Q) + \dim S - \dim L(P,Q) \cap S \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dim L(P,Q) \cap S = \dim L(P,Q) - 1 \underbrace{=}_{(2')} 0$

$\langle 3 \rangle 2$. Dim. che $\pi(R) = P$, dove $\{R\} = L(P,Q) \cap S$

$$\{R\} = L(P,Q) \cap S \Rightarrow \begin{cases} R \in L(P,Q) \\ R \in S \underbrace{\Rightarrow}_{Q \notin S} R \neq Q \end{cases} \Rightarrow L(P,Q) = L(R,Q) \quad (5)$$

$\{\pi(R)\} = L(R,Q) \cap H \underbrace{=}_{(5)} L(P,Q) \cap H \quad (6)$

$$\begin{cases} P \in H \\ P \in L(P,Q) \end{cases} \Rightarrow P \in L(P,Q) \cap H = \{\pi(R)\} \Rightarrow P = \pi(R) \Rightarrow P \in \pi(S)$$

Abbiamo cosi' dimostrato che preso $P \in L(S,Q) \cap H$, si ha $P \in \pi(S)$, ovvero

$$L(S,Q) \cap H \subseteq \pi(S)$$

Dalle due doppie inclusioni di sopra, segue la tesi.

$\langle 1 \rangle 2$. Dim $\dim \pi(S) = \dim S$

$L(S,Q) \cap H \subseteq L(S,Q) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[5.9,pg.76]}} \dim L(S,Q) \cap H \leq \dim L(S,Q) \underbrace{=}_{\text{vedi passo precedente}} \dim S + 1 \quad (7)$

$\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) \geq \dim L(S,Q,H) = \dim L(L(S,Q),H) =$

$= \dim L(S,Q) + \underbrace{\dim H}_{=\dim \mathbb{P}(\mathbf{V})-1} - \dim L(S,Q) \cap H = \dim S + 1 + \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) - 1 - \dim L(S,Q) \cap H \quad (7.1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dim L(S,Q) \cap H \geq \dim L(S,Q) - 1 = \dim S \quad (8.)$

$(7), (8) \Rightarrow \dim S + 1 \geq \dim L(S,Q) \cap H \geq \dim S \quad (8.1)$

Se per assurdo, $\dim S + 1 = \dim L(S,Q) \cap H$, allora

$$\dim S + 1 = \dim L(S,Q) \cap H \underbrace{\Rightarrow}_{(7.1)} \dim L(S,Q,H) = \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) - 1 = \dim H$$

$$\begin{cases} \dim L(S,Q,H) = \dim H \\ H \subseteq L(S,Q,H) \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[5.10,pg.76]}} L(S,Q,H) = H$$

$Q \in L(S,Q,H) = H \Rightarrow Q \in H$

assurdo. Quindi, $\dim S + 1 \neq \dim L(S,Q) \cap H$, e allora dalla (8.1) si ha

$$\dim S + 1 > \dim L(S,Q) \cap H \geq \dim S \Leftrightarrow \dim L(S,Q) \cap H = \dim S$$

e per il passo precedente:

$$\dim S = \dim L(S,Q) \cap H = \dim \pi(S)$$

□

5.6 Isomorfismo proiettivo

Definition 5.33. Considerando $\mathbb{P}(\mathbf{V}), \mathbb{P}(\mathbf{V}')$,

$$f : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}')$$

$$f \text{ isomorfismo proiettivo } \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \mathbf{f} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}' \text{ isom. vett. tale che } f(\langle v \rangle) = \langle \mathbf{f}(v) \rangle$$

Se $\mathbb{P}(\mathbf{V}) = \mathbb{P}(\mathbf{V}')$, allora f si dira' *proiettivita'*.

Proposition 5.34. *Sia* $\boldsymbol{f} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}'$ *isom. vett., allora*

$$f : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}')$$
$$f(\langle v \rangle) = \langle \boldsymbol{f}(v) \rangle$$

*f e' un isomorfismo proiettivo e si dira' l'*isomorfismo indotto da $\boldsymbol{f}$.

Proposition 5.35. *f e' biettiva.*

Proof: E' iniettiva:

$$f(\langle v \rangle) = f(\langle w \rangle) \Rightarrow \langle \mathbf{f}(v) \rangle = \langle \mathbf{f}(w) \rangle \Rightarrow \mathbf{f}(w) = \lambda \mathbf{f}(v) = \mathbf{f}(\lambda v) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\mathbf{f} \text{ isomorf.}} w = \lambda v \Leftrightarrow \langle w \rangle = \langle v \rangle$$

E' surriettiva:

$$\langle v' \rangle \in \mathbb{P}(\mathbf{V}') \Rightarrow v' \in \mathbf{V}' \Rightarrow \exists v \in \mathbf{V} : \ \mathbf{f}(v) = v'$$
$$\langle v' \rangle = \langle \mathbf{f}(v) \rangle = f(\langle v \rangle)$$

□

Proposition 5.36. *Dati due isomorfismi proiettivi f, g,*

$$f = g \Leftrightarrow \boldsymbol{f} = \lambda \mathbf{g}, \ \ \lambda \neq 0$$

dove $\lambda \mathbf{g}$ e' l'isomorfismo vettoriale definito da

$$(\lambda \mathbf{g})(v) = \lambda \mathbf{g}(v)$$

Proof:

$\langle 1 \rangle 1$. Dim $\Leftarrow$

$$f(\langle v \rangle) = \langle \mathbf{f}(v) \rangle = \langle \lambda \mathbf{g}(v) \rangle = \langle \mathbf{g}(v) \rangle = g(\langle v \rangle)$$

$\langle 1 \rangle 2$. Dim $\Rightarrow$

E' chiaro che se $v = \underline{0}$, allora

$$\mathbf{f}(v) = \mathbf{f}(\underline{0}) \underbrace{=}_{\mathbf{f} \text{ isomorf.}} \underline{0} = \lambda \underline{0} \underbrace{=}_{\mathbf{g} \text{ isomorf.}} \lambda \mathbf{g}(\underline{0}) = \lambda \mathbf{g}(v) \ \ \forall \lambda$$

Quindi, dobbiamo preoccuparci solo dei vettori $v \neq \underline{0}$.

Sia $v \neq \underline{0}$

$$f(\langle v \rangle) = g(\langle v \rangle) \Leftrightarrow \langle \mathbf{f}(v) \rangle = \langle \mathbf{g}(v) \rangle \Leftrightarrow \mathbf{f}(v) = \lambda_v \mathbf{g}(v), \ \ \lambda_v \neq 0$$

$\langle 2\rangle 1.\ \lambda_v = \lambda\ \ \forall v \in \mathbf{V}$

$\mathbf{f}(v) = \lambda_v \mathbf{g}(v) \Leftrightarrow (\mathbf{g}^{-1}\mathbf{f})(v) = \lambda_v v\ \ \forall v \in \mathbf{V}$

sia $\varphi = \mathbf{g}^{-1}\mathbf{f} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$

ogni vettore e' un autovettore per φ

Presi $v, w \in \mathbf{V}$, supponiamo per assurdo che $\lambda_w \neq \lambda_v$

$$\begin{cases} \varphi(v) = \lambda_v v \\ \varphi(w) = \lambda_w w \\ \lambda_w \neq \lambda_v \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[AL,8.3,pg.53]}} \quad v, w \text{ sono l.i.}$$

$\varphi(v+w) = \lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$

$\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w) = \lambda_v v + \lambda_w w$

$$\lambda v + \lambda w = \lambda_v v + \lambda_w w \Leftrightarrow (\lambda - \lambda_v)v + (\lambda - \lambda_w)w = \underline{0} \underbrace{\Leftrightarrow}_{v,w \text{ sono l.i}} \begin{cases} \lambda - \lambda_v = 0 \\ \lambda - \lambda_w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_v = \lambda = \lambda_w$$

$\Rightarrow \lambda_v = \lambda_w$ assurdo

Quindi,

$$\forall v \in V\ \ \mathbf{f}(v) = \lambda \mathbf{g}(v) \Leftrightarrow \mathbf{f} = \lambda \mathbf{g}$$

□

Proposition 5.37.

$$\mathbb{P}(\mathbf{V}) \simeq \mathbb{P}(\mathbf{V}') \Leftrightarrow \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}')$$

In particolare,

$$\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = n \Leftrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}) \simeq \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$$

Proof:

$\langle 1\rangle 1.$ Dim $\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(\mathbf{V}) \simeq \mathbb{P}(\mathbf{V}') \Rightarrow \exists f : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}') \text{ isom. proiett. } \Rightarrow \mathbf{f} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}' \text{ isom. vettoriale } \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{V}' \Rightarrow \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}')$$

$\langle 1\rangle 2.$ Dim $\Leftarrow$

$$\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}') \Leftrightarrow \dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{V}' = n+1$$

Allora per la prop [AL,7.6,pg.40], si ha

$$\mathbf{V} \simeq \mathbf{V}'$$

e quindi

$$\mathbf{V} \simeq \mathbf{V}' \Leftrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}) \simeq \mathbb{P}(\mathbf{V}')$$

□

Proposition 5.38. *Dati due spazi $\mathbb{P}(\mathbf{V}), \mathbb{P}(\mathbf{V}')$ isomorfi, e rispettivamente $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ due loro riferimenti, allora*

$$\exists f : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}') \text{ isom. proiettivo tale che}$$
$$[P]_{\mathcal{B}} = [f(P)]_{\mathcal{B}'}$$

Proof:

$$\mathbb{P}(\mathbf{V}) \simeq \mathbb{P}(\mathbf{V}') \Leftrightarrow \mathbf{V} \simeq \mathbf{V}'$$

Allora per la prop. [AL,7.7,pg.40], si ha

$$\exists \mathbf{f} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}' \text{ isomorfismo tale che}$$
$$[v]_B = [\mathbf{f}(v)]_{B'} \quad \forall v \in \mathbf{V} \quad (1)$$

dove $B \in \mathcal{B}, B' \in \mathcal{B}'$.

E quindi scegliendo l'isom. proiettivo associato f, si ha

$P \in \mathbb{P}(\mathbf{V}) \Leftrightarrow P = \langle v \rangle, \quad v \in \mathbf{V}^*$

$$[f(P)]_{\mathcal{B}'} = [f(P)]_{B'} = [f(\langle v \rangle)]_{B'} = [\langle \mathbf{f}(v) \rangle]_{B'} = \langle [\mathbf{f}(v)]_{B'} \rangle \underbrace{=}_{(1)} \langle [v]_B \rangle = [\langle v \rangle]_B = [P]_B = [P]_{\mathcal{B}}$$

□

Proposition 5.39. *Dati due isomorfismi proiettivi*

$$f : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}')$$
$$g : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}')$$

la loro composizione $h = g \circ f$ e' un isomorfismo proiettivo, e inoltre $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \boldsymbol{f}$

Proof:

$$h(\langle v \rangle) = g \circ f(\langle v \rangle) = g(f(\langle v \rangle)) = g(\langle \mathbf{f}(v) \rangle) = \langle \mathbf{gf}(v) \rangle$$

gf e' un isom. vett. perche' composizione di isom. vettoriali. Quindi h e' un isomorfismo proiettivo e $\mathbf{h} = \mathbf{gf}$.

□

Proposition 5.40. *La relazione di isomorfismo proiettivo e' una relazione d'equivalenza nella classe di tutti gli spazi proiettivi.*

Proof:

⟨1⟩1. Riflessivita': $\mathbb{P}(\mathbf{V}) \simeq \mathbb{P}(\mathbf{V})$

L'identita' e' una proiettivita'.

⟨1⟩2. Simmetria: $\mathbb{P}(\mathbf{V}) \simeq \mathbb{P}(\mathbf{V}') \Rightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}') \simeq \mathbb{P}(\mathbf{V})$

Siano f l'isomorfismo proiettivo di $\mathbb{P}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}')$. Basta scegliere $g = f^{-1}$ come isomorfismo proiettivo inverso. Verifichiamo che f^{-1} sia un isomorfismo proiettivo:

$$P' = \langle v' \rangle \in \mathbb{P}(\mathbf{V}') \underbrace{\Rightarrow}_{\text{f surriettiva}} \exists P = \langle v \rangle \in \mathbb{P}(\mathbf{V}) : \ f(P) = P'$$

$$f(P) = f(\langle v \rangle) = \langle \mathbf{f}(v) \rangle = P' = \langle v' \rangle \Rightarrow \langle \mathbf{f}(v) \rangle = \langle v' \rangle \Rightarrow \mathbf{f}(v) = \lambda v'$$

$$f^{-1}(P') = P = \langle v \rangle = \langle \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(v)) \rangle = \langle \mathbf{f}^{-1}(\lambda v') \rangle = \langle \lambda \mathbf{f}^{-1}(v') \rangle = \langle \mathbf{f}^{-1}(v') \rangle$$

Quindi f^{-1} e' un isom. proiettivo e inoltre $\mathbf{f}^{-1}$ e' il suo isom. vettoriale associato.

⟨1⟩3. Transitivita': $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}' \simeq \mathcal{A}'' \Rightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{A}''$

Per la prop. [1.47,pg.24] segue la tesi.

□

Proposition 5.41.

$$PGL(\mathbf{V}) = \{ f : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}) \mid f \textit{ proiettivita' } \}$$

e' un gruppo con l'operazione di composizione.

Proof:

Per la prop. [5.39,pg.90], l'operazione di composizione e' ben posta.
L'elemento neutro e' l'identita'.
La proprieta' associativa sicuramente vale.
L'inverso di f e' f^{-1}, che e' ancora una proiettivita', come visto in [5.40,pg.90].

□

Theorem 5.42. *Siano* $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}') = n$ *e* $P_i \in \mathbb{P}(\mathbf{V}), Q_i \in \mathbb{P}(\mathbf{V}')$ $i = 1, 2, \dots, n+2$, *entrambi in posizione generale, allora*

$$\exists! f : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}') \text{ isom. proiettivo tale che}$$
$$f(P_i) = Q_i \quad i = 1, \dots, n+2$$

Proof:
⟨1⟩1. Troviamo f
Poiche' $\{P_i \mid i = 1, \dots, n+2\}$ sono in posizione generale, per la proposizione [5.26,pg.82]
$\exists! \mathcal{B}$ riferimento di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ t.c $\{P_1, \dots, P_{n+1}\}$ sono pt. fondamentali e $P = P_{n+2}$ e' il punto unita', percio'
$P_i = \langle v_i \rangle i = 1, \dots, n+2$, $v = v_{n+2} \Rightarrow B = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ e' una base di $\mathbf{V}$, $v = v_1 + \cdots + v_{n+1}$
Analogamente per i Q_i
$Q_i = \langle w_i \rangle i = 1, \dots, n+2$, $w = w_{n+2} \Rightarrow B' = \{w_1, \dots, w_{n+1}\}$ e' una base di $\mathbf{V}'$, $w = w_1 + \cdots + w_{n+1}$
Allora, come $\mathbf{f}$ scegliamo quell'isomorfismo vettoriale t.c. $\mathbf{f}(v_i) = w_i$, $i = 1, \dots, n+1$, che esiste per il thm [AL,7.5,pg.39]. L'isomorfismo proiettivo f indotto da $\mathbf{f}$ e' quello cercato.
⟨1⟩2. Dimostriamo che e' unico
Supponiamo che esista $g : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}')$ isom. proiet. tale che
$$g(P_i) = Q_i \quad i = 1, \dots, n+2$$
allora

$$\begin{array}{ccccc} f(P_i) & = & Q_i & = & g(P_i) \\ \| & & & & \| \\ \langle \mathbf{f}(v_i) \rangle & & & & \langle \mathbf{g}(v_i) \rangle \end{array}$$

$$\langle \mathbf{f}(v_i) \rangle = \langle \mathbf{g}(v_i) \rangle \Leftrightarrow \mathbf{f}(v_i) = \lambda_i \mathbf{g}(v_i) \quad i = 1, \dots, n+2 \quad (*)$$
$$\mathbf{f}(v) = \mathbf{f}(v_{n+2}) = \lambda_{n+2}\mathbf{g}(v) \underbrace{=}_{\text{sia } \lambda = \lambda_{n+2}} \lambda \mathbf{g}(v)$$
$$\mathbf{f}(v) = \mathbf{f}(v_1 + \cdots + v_{n+1}) = \mathbf{f}(v_1) + \cdots + \mathbf{f}(v_{n+1})$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{f}(v) & = & \mathbf{f}(v_1) + \cdots + \mathbf{f}(v_{n+1}) & = & \lambda \mathbf{g}(v) \\ & & \| & & \| \\ & & \lambda_1 \mathbf{g}(v_1) + \cdots + \lambda_{n+1} \mathbf{g}(v_{n+1}) & = & \lambda \mathbf{g}(v_1) + \cdots + \lambda \mathbf{g}(v_{n+1}) \end{array}$$

$$(\lambda - \lambda_1)\mathbf{g}(v_1) + \cdots + (\lambda - \lambda_{n+1})\mathbf{g}(v_{n+1}) = \underline{0} \underbrace{\Leftrightarrow}_{v_1, \dots, v_{n+1} \text{ l.i. e } \mathbf{g} \text{ isom. vett}} \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n+1}$$

Quindi
$$\mathbf{f} = \lambda \mathbf{g} \Rightarrow f = g$$

□

Corollary 5.43. *In* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, *con* $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = n$, *siano* $P_i \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ $i = 1, \dots, n+2$ *in posizione generale, allora*

$$\begin{cases} f : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}) \text{ proiettivita'} \\ f(P_i) = P_i \end{cases} \Rightarrow f = \mathrm{id}$$

Proof: Dal thm [5.42,pg.91]

$$\exists!\ g : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}) \text{ proiettivita' tale che } g(P_i) = P_i$$

e una tale proiettivita' e' proprio id. Quindi per l'unicita' si ha la tesi. □

Proposition 5.44. *Siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ due riferimenti proiettivi rispettivamenti di $\mathbb{P}(\mathbf{V}), \mathbb{P}(\mathbf{V}')$. Sia $f : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}')$ isom. proiettivo e sia $P = \langle v \rangle \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$, allora*

$$^t[f(P)]_{\mathcal{B}'} = \langle M_{B,B'}(\boldsymbol{f}) \rangle\, ^t[P]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\boldsymbol{f})\, ^t[P]_{\mathcal{B}}$$

dove

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\boldsymbol{f}) \overset{def}{=} \langle M_{B,B'}(\boldsymbol{f}) \rangle$$

B, B' *due qualsiasi basi in* $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$

questa proposizione e' il caso generale della proposizione [5.16,pg.78], che si riottiene con $f = \mathrm{id}$.

Proof:

⟨1⟩1. Dim. che $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \overset{\text{def}}{=} \langle M_{B,B'} \rangle$ e' ben posta

Dobbiamo dimostrare che prendendo $\overline{B} \in \mathcal{B}$ si ha

$$\langle M_{B,B'} \rangle = \left\langle M_{\overline{B},B'} \right\rangle$$

$$\overline{B} \in \mathcal{B} = \langle B \rangle \Rightarrow \overline{B} = kB, \quad k \neq 0$$

$$v \in B \Leftrightarrow kv \in kB \Rightarrow [\mathbf{f}(kv)]_{B'} = [k\mathbf{f}(v)]_{B'} = k[\mathbf{f}(v)]_{B'}$$

$$\Rightarrow M_{kB,B'} = kM_{B,B'} \Rightarrow \langle M_{kB,B'} \rangle = \langle M_{B,B'} \rangle$$

Analogamente, scelto $kB' \in \mathcal{B}'$, si ha

$$[\mathbf{f}(v)]_{kB'} = k[\mathbf{f}(v)]_{B'} \Rightarrow M_{B,kB'} = kM_{B,B'}$$

⟨1⟩2.

$$P = \langle v \rangle$$

$$^t[P]_{\mathcal{B}} = \left\langle ^t[v]_B \right\rangle$$

$$^t[f(P)]_{\mathcal{B}'} = {}^t[f(\langle v \rangle)]_{\mathcal{B}'} = {}^t[\langle \mathbf{f}(v) \rangle]_{\mathcal{B}'} = {}^t\langle [\mathbf{f}(v)]_{B'} \rangle = \left\langle ^t[\mathbf{f}(v)]_B \right\rangle = \left\langle M_{B,B'}\, ^t[v]_B \right\rangle =$$

$$= \langle M_{B,B'} \rangle \left\langle ^t[v]_B \right\rangle = \langle M_{B,B'} \rangle\, ^t[P]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\, ^t[P]_{\mathcal{B}}$$

□

5.6.1 Punti uniti e autovalori

Proposition 5.45. *Data $f : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V})$ proiettivita', si ha*

$$f(\langle v \rangle) = \langle v \rangle \Leftrightarrow v \text{ e' un autovettore di } \boldsymbol{f}$$

Ovvero, i punti uniti di f sono generati da tutti e soli gli autovettori di $\boldsymbol{f}$.

Proof:

⟨1⟩1. Dim. $\Leftrightarrow$

$$f(\langle v \rangle) \underbrace{=}_{\text{per Hp}} \langle v \rangle \Leftrightarrow \langle \mathbf{f}(v) \rangle = \langle v \rangle \Rightarrow \mathbf{f}(v) = \lambda v, \quad \lambda \neq 0 \Leftrightarrow v \text{ autovettore di } \mathbf{f}$$

□

Proposition 5.46. *Data $f : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V})$ proiettivita', si ha*

$$f = \mathrm{id} \Leftrightarrow \forall P \in \mathbb{P}(\mathbf{V}) \ \ f(P) = P \Leftrightarrow \mathbf{V} = V_\lambda \Leftrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}) = \mathbb{P}(V_\lambda)$$

dove λ e' un autovalore non nullo di $\boldsymbol{f}$ e V_λ e' il relativo autospazio di $\boldsymbol{f}$.

Proof:
⟨1⟩1. Dim. ⇒
Poiche' l'endomorfismo associato ad id : $\mathbb{P}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V})$ e' **id** : $\mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$, per la prop [5.36,pg.88], si ha

$$\mathbf{f} = \lambda\mathbf{id}, \quad \lambda \neq 0$$

e quindi

$$\forall v \in \mathbf{V} \quad \mathbf{f}(v) = (\lambda\mathbf{id})(v) = \lambda v \Rightarrow v \in V_\lambda$$
$$V \subseteq V_\lambda$$

e per definizione $V_\lambda \subseteq V$. Percio'

$$V_\lambda = \mathbf{V}$$

⟨1⟩1. Dim. ⇐

$$P \in \mathbb{P}(\mathbf{V}) \Leftrightarrow P = \langle v \rangle, \quad v \in \mathbf{V} \backslash \{\underline{0}\}$$
$$f(P) = f(\langle v \rangle) \underbrace{=}_{[5.45,\text{pg.}92]} \langle v \rangle = P$$

Quindi $f = \mathrm{id}$.

□

Proposition 5.47. *Data $f : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V})$ proiettivita', e dato $S = \mathbb{P}(W) \leq \mathbb{P}(\mathbf{V})$, si ha*

$$f_{|S} = \mathrm{id} \Leftrightarrow \forall P \in S \;\; f(P) = P \Leftrightarrow W \leq V_\lambda \Leftrightarrow S \leq \mathbb{P}(V_\lambda)$$

dove $f_{|S}$ e' la restrizione di f ad S, λ e' un autovalore non nullo di $\boldsymbol{f}$ e V_λ e' il relativo autospazio di $\boldsymbol{f}$.

Proof: Consideriamo $g = f_{|S} : \mathbb{P}(W) \longrightarrow \mathbb{P}(W)$, per ipotesi $g = \mathrm{id} : \mathbb{P}(W) \longrightarrow \mathbb{P}(W)$. Quindi g e' ancora una proiettivita' (quella identica), ma allora per la prop [5.46,pg.92], si ha

$$W = \overline{V}_\lambda$$

dove $\overline{V}_\lambda$ e' l'autospazio relativo a $\mathbf{g} : W \longrightarrow W$ rispetto all'autovalore non nullo λ. Ma poiche'

$$\mathbf{g} = \mathbf{f}_{|W}$$

si ha

$$W = \overline{V}_\lambda \leq V_\lambda$$

dove V_λ e' l'autospazio relativo a **f**. □

Definition 5.48. Sia dato $S = \mathbb{P}(W) \leq \mathbb{P}(\mathbf{V})$ e sia $f : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V})$ una proiettivita', allora

$$S \text{ e' uno spazio unito} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(S) = S$$

Proposition 5.49. *Sia dato $S = \mathbb{P}(W) \leq \mathbb{P}(\mathbf{V})$ e sia $f : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V})$ una proiettivita', allora*

$$S \text{ e' unito } \Leftrightarrow f(S) \subseteq S \Leftrightarrow \boldsymbol{f}_{|W} \text{ e' un isomorfismo}$$

dove $\boldsymbol{f}_{|W}$ e' la restrizione di $\boldsymbol{f}$ a W

Proof:
⟨1⟩1. Dim 1.
⟨2⟩1. Dim. ⇒

$$S \text{ unito } \Rightarrow f(S) = S \Rightarrow f(S) \subseteq S$$

⟨2⟩1. Dim. ⇐

$$f \text{ proiett.} \Rightarrow \dim f(S) = \dim S$$
$$\begin{cases} f(S) \subseteq S \\ \dim f(S) = \dim S \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{[5.10,\text{pg.}76]} f(S) = S$$

$\langle 1 \rangle 2$. Dim 2.

Chiaramente $\mathbf{f}_{|W}$ e' ancora iniettiva. Dimostriamo che e' surriettiva.

$$S \text{ unito } \Leftrightarrow f(S) \subseteq S \Leftrightarrow \forall w \in W^* \ \ f(\langle w \rangle) \in S = \mathbb{P}(W) \Leftrightarrow \forall w \in W^* \ \ \langle \mathbf{f}(w) \rangle \in \mathbb{P}(W) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall w \in W^* \ \ \mathbf{f}(w) \in W^* \Leftrightarrow \mathbf{f}(W^*) \subseteq W^* \underbrace{\Leftrightarrow}_{\mathbf{f} \text{ isomorf} \Rightarrow \mathbf{f}(\underline{0}) = \underline{0}} \mathbf{f}(W) \subseteq W$$

$$\begin{cases} \mathbf{f}(W) \subseteq W \\ \dim \mathbf{f}(W) \end{cases} \underbrace{=}_{\mathbf{f} \text{ isomorfismo}} \dim W \Rightarrow \mathbf{f}(W) = W$$

Quindi $\mathbf{f}_{|W}$ e' surriettiva.

□

6 Spazio affine proiettivo

Theorem 6.1. *Sia* $\mathbf{V}$ *uno spazio vettoriale di dimensione* $n+1$*, e sia* $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathbf{V})$ *il suo spazio proiettivo. Preso un qualsiasi spazio affine* $\mathcal{A}$ *di dimensione* n*, si ha*

$$\mathcal{A} \simeq \mathbb{P}(\mathbf{V}) \backslash H$$

dove H *e' un iperpiano di* $\mathbb{P}$*. L'isomorfismo e' inteso tra spazi affini.*

Proof:

$$H \text{ iperpiano di } \mathbb{P} \ \Leftrightarrow H = \mathbb{P}(W), \ \ W \leq \mathbf{V}, \ \ \dim W = n$$

Sia $v \in V \backslash W$,

$\langle 1 \rangle 1$. $W + \mathcal{L}(v) = W \oplus \mathcal{L}(v)$

Infatti, se per assurdo $\mathcal{L}(v) \cap W \neq \{\underline{0}\}$, allora,

$$\lambda v \in W, \ \ \lambda \neq 0 \Rightarrow v \in W$$

assurdo

$$\begin{cases} \dim W = n \\ \dim \mathcal{L}(v) = 1 \\ \mathcal{L}(v) + W = \mathcal{L}(v) \oplus W \end{cases} \Rightarrow W + \mathcal{L}(v) = \mathbf{V} \ \ (1)$$

Consideriamo $P \in \mathbb{P} \backslash H$, si ha

$$P \in \mathbb{P} \backslash H \Leftrightarrow P = \langle u \rangle, \ u \in \mathbf{V} \backslash W$$
$$u \underbrace{=}_{(1)} w + \mu_P v, \ \ w \in W$$
$$u \notin W \Rightarrow \mu_P \neq 0 \Rightarrow \exists \mu^{-1}$$
$$P = \langle u \rangle = \langle w + \mu_P v \rangle = \left\langle {\mu_P}^{-1} (w + \mu_P v) \right\rangle = \left\langle {\mu_P}^{-1} w + v \right\rangle \underbrace{=}_{w_P := {\mu_P}^{-1} w} \langle w_P + v \rangle$$

quindi ad ogni $P \in \mathbb{P} \backslash H$ riusciamo ad associare un vettore $w_P \in W$.

Consideriamo allora la funzione

$$\omega : \mathbb{P} \backslash H \longrightarrow W$$
$$\omega(P) = w \in W \text{ tale che } P = \langle w + v \rangle = \langle \omega(P) + v \rangle$$

$\langle 1\rangle 2$. $\omega(P)$ e' una funzione, ovvero, per ogni P $\exists! w \in W$ tale che $P = \langle w + v\rangle$
Supponiamo che esista un altro $w' \in W$: $P = \langle w' + v\rangle$, allora

$$\langle w + v\rangle = P = \langle w' + v\rangle \Rightarrow w + v = k(w' + v) \Leftrightarrow \underbrace{w - kw'}_{\in W} = (k-1)v$$

Se per assurdo $k \neq 1$, allora

$$v = \frac{w - kw'}{(k-1)} \in W$$

assurdo, perche' $v \in V\backslash W$. Quindi, $k = 1$,

$$w - w' = \underline{0} \Leftrightarrow w = w'$$

$\langle 1\rangle 3$. Chiaramente $\omega(P)$ e' biettiva
infatti, la sua inversa e':

$$\omega^{-1}(w) = \langle w + v\rangle$$

Sia $\tilde{A} = \mathbb{P}\backslash H$. Scelta la funzione

$$\rightarrow : \tilde{A}\times\tilde{A} \longrightarrow W$$
$$\overrightarrow{RQ} = \omega(Q) - \omega(R)$$

$\tilde{A}$ diventa uno spazio affine su W, infatti
1. Verifichiamo il primo assioma: sia $R \in \tilde{A},\ w \in W$,

$$\overrightarrow{RQ} = w \Leftrightarrow \omega(Q) - \omega(R) = w \Leftrightarrow \omega(Q) = w + \omega(R)$$
$$\Leftrightarrow Q = \omega^{-1}(w + \omega(R)) = \langle w + \omega(R) + v\rangle = \left\langle \overrightarrow{RQ} + \omega(R) + v \right\rangle$$

quindi Q esiste ed e' unico.
2.

$$\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QS} = \omega(Q) - \omega(R) + \omega(S) - \omega(Q) = \omega(S) - \omega(R) = \overrightarrow{RS}$$

$\langle 1\rangle 4$. $\tilde{A} \simeq \mathcal{A}$

$$\dim \tilde{A} = \dim W = n$$
$$\dim \tilde{A} = n = \dim \mathcal{A} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[1.49,pg.24]}} \tilde{A} \simeq \mathcal{A}$$

□

Definition 6.2. Sotto le ipotesi del thm [6.1,pg.94], lo spazio $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ viene chiamato *completamento proiettivo* di $\mathcal{A}$, perche'

$$\mathcal{A}\cup H \simeq \tilde{A}\cup H = \mathbb{P}(\mathbf{V})$$

H viene chiamato *iperpiano dei punti impropri.*
Ogni punto di H viene chiamato punto *improprio.*
Ogni punto di $\mathbb{P}(\mathbf{V})\backslash H$ viene chiamato punto *proprio.*

6.1 Coordinate proprie improprie

Proposition 6.3.
Sia dato $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, $\dim \mathbf{V} = n+1$, *e* $H = \mathbb{P}(W) \leq \mathbb{P}(\mathbf{V})$ *iperpiano.*
Sia $B = \{w_1, \ldots, w_n\}$ *base di* W *e* $C = \{w_1, \ldots, w_n, v\}$ *base di* $\mathbf{V}$, *dove* $v \in \mathbf{V}\backslash W$.
Sia infine $\Omega = (O = \langle v\rangle, B)$ *un riferimento affine dello spazio affine* $\tilde{A} = \mathbb{P}(\mathbf{V})\backslash H$ *costruito*[17] *su*

[17] vedi la dimostrazione del thm [6.1,pg.94]

W.
Allora, tutti e soli i punti impropri $P \in H$ avranno coordinate del tipo

$$[P]_C = \langle (a_1, a_2, \ldots, a_n, 0) \rangle$$

tutti e soli i punti propri $Q \in \tilde{A} = \mathbb{P} \backslash H$ avranno coordinate del tipo

$$[Q]_C = \langle (b_1, b_2, \ldots, b_n, 1) \rangle$$

Lo stesso punto Q, pensato nello spazio spazio affine $\tilde{A}$, ha coordinate

$$[Q]_\Omega = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

Infine, il sottospazio proiettivo H, nel sistema di rif. Ω ha equazioni:

$$x_{n+1} = 0$$

Proof:
$P \in H = \mathbb{P}(W) \Leftrightarrow P = \langle w \rangle,\ w \in W$
$w \in W \Leftrightarrow w = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n + 0v \Leftrightarrow [w]_C = (a_1, a_2, \ldots, a_n, 0)$
$[P]_C = [\langle w \rangle]_C = \langle [w]_C \rangle = \langle (a_1, a_2, \ldots, a_n, 0) \rangle \ \ (*)$

$$Q \in \tilde{A} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{vedi dim. thm [6.1,pg.94]}} Q = \langle \omega(Q) + v \rangle,\ \ \omega(Q) \in W$$

$\omega(Q) \in W \Leftrightarrow [\omega(Q)]_C = (b_1, \ldots, b_n, 0) \quad (1)$
$[Q]_C = \langle [\omega(Q) + v]_C \rangle = \langle [\omega(Q)]_C + [v]_C \rangle = \langle (b_1, \ldots, b_n, 0) + (0, 0, \ldots, 0, 1) \rangle = \langle (b_1, b_2, \ldots, b_n, 1) \rangle$

$[Q]_\Omega = [\overrightarrow{OQ}]_B = [\omega(Q) - \omega(O)]_B = [\omega(Q)]_B - [\omega(O)]_B$
$O = \langle v \rangle = \langle \underline{0} + v \rangle \Leftrightarrow \omega(O) = \underline{0} \Leftrightarrow [\omega(O)]_B = (0, 0, \ldots, 0)$
$= [\omega(Q)]_B \underbrace{=}_{(1)} (b_1, \ldots, b_n)$

Poiche' $P = \langle v \rangle \in H$, come abbiamo visto si ha
$[v]_C \underbrace{=}_{(*)} (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0)$ soddisfano l'equ. di $H \ \Leftrightarrow x_{n+1} = 0$
ma H e' un iperpiano, quindi ha solo una equazione lineare. Percio' $x_{n+1} = 0$ e' sufficiente per descrivere H. □

Proposition 6.4. *Poniamoci nelle ipotesi della prop. [6.3,pg.95]. Sia dato inoltre uno spazio affine $\mathcal{A}$, $\dim \mathcal{A} = \dim \tilde{A} = n$.*
Preso un sottospazio $S \leq \mathcal{A}$, si ha

$$S \simeq \overline{S} \backslash H$$
$$\text{giac} S \simeq \overline{S} \cap H$$

dove $\overline{S} \leq \mathbb{P}$ e' la chiusura proiettiva *di S: e' il sottospazio proiettivo definito dalla equazioni di S, in cui ogni termini noto e' moltiplicato per la $n+1$ variabile indipendente, ad esempio, se S e' il sottospazio*

$$S: \ \ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + a_{n+1} = 0$$

$\overline{S}$ *sara'*

$$S: \quad a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + a_{n+1}y_{n+1} = 0$$

In sostanza, questa proposizione afferma che $\overline{S}$ *non e' nient'altro che* S *con l'aggiunta dei punti impropri, e che la giacitura di* S *e' l'insieme dei punti impropri di* $\overline{S}$*.*

Se $\mathcal{A} = \tilde{A}$*, allora si ha l'uguaglianza:*

$$S = \overline{S} \backslash H$$
$$\text{giac}S = \overline{S} \cap H$$

Proof: Poiche' $\mathcal{A} \simeq \tilde{A}$ (hanno la stessa dimensione), possiamo considerare $S' \leq \tilde{A}: \quad S' \simeq S$. Tutte le proposizioni che vedremo varrano anche per S, a meno di isomorfismo.

$\langle 1 \rangle 1$. giac$S' \simeq \overline{S}' \cap H$

Nel riferimento Ω, il sottospazio affine S' avra' equazioni:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + a_{1n+1} = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + a_{2n+1} = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + a_{mn+1} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Consideriamo allora $\overline{S}' \leq \mathbb{P}$ di equazioni:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n + y_{n+1}a_{1n+1} = 0 \\ a_{21}y_1 + \cdots + a_{2n}y_n + y_{n+1}a_{2n+1} = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}y_1 + \cdots + a_{mn}y_n + y_{n+1}a_{mn+1} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Se intersechiamo $\overline{S}'$ con H, che ha equazione $y_{n+1} = 0$ (vedi [6.3,pg.95]), otteniamo:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n = 0 \\ a_{21}y_1 + \cdots + a_{2n}y_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}y_1 + \cdots + a_{mn}y_n = 0 \end{cases} \tag{3}$$

che sono le equazioni della giacitura di S'.

$\langle 1 \rangle 2$. $S \simeq \overline{S} \backslash H$

$$Q \in S' \leq \tilde{A} = \mathbb{P} \backslash H \underbrace{\Rightarrow}_{prop.[6.3,\text{pg.}95]} \begin{cases} [Q]_C = \langle (x_1, x_2, \ldots, x_n, 1) \rangle \Rightarrow x_{n+1} = 1 \\ [Q]_\Omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

$$Q \in S' \Rightarrow [Q]_\Omega \text{ soddisfa la (1)} \underbrace{\Rightarrow}_{x_n+1=1} [Q]_C \text{ soddisfa la (2)} \quad (**)$$

$$\begin{cases} Q \in S' \leq \tilde{A} = \mathbb{P} \backslash H \Rightarrow Q \in \mathbb{P} \\ \overline{S}' \leq \mathbb{P} \\ (**) \end{cases} \Rightarrow Q \in \overline{S}' \backslash H$$

Quindi $S' \subseteq \overline{S}' \backslash H$

E poiche'

$$R \in \overline{S}'\backslash H \subseteq \mathbb{P}\backslash H \underbrace{\Rightarrow}_{prop.[6.3,\text{pg.}95]} [R]_C = \langle (y_1, y_2, \ldots, y_n, 1)\rangle \Rightarrow y_{n+1} = 1$$

$$R \in \overline{S}' \Rightarrow [R]_C \text{ soddisfa la (2)} \underbrace{\Rightarrow}_{y_{n+1}=1} [R]_\Omega \text{ soddisfa la (1)}$$

$$\begin{cases} R \in \mathbb{P}\backslash H = \tilde{A} \\ S' \leq \tilde{A} \\ [R]_\Omega \text{ soddisfa la (1)} \end{cases} \Rightarrow R \in S'$$

Quindi $\overline{S}'\backslash H \subseteq S'$.

In definitiva,

$$S \simeq S' = \overline{S}'\backslash H \simeq \overline{S}\backslash H$$

□

Proposition 6.5. *Nelle ipotesi della prop. [6.4,pg.96], si ha*

$$\dim \overline{S} \cap H = \dim \overline{S} - 1$$

Proof:

$$\dim L(\overline{S}, H) = \dim \overline{S} + \dim H - \dim \overline{S} \cap H \leq \dim \mathbb{P} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \dim \overline{S} + \dim \mathbb{P} - 1 - \dim \overline{S} \cap H \leq \dim \mathbb{P} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \dim \overline{S} - 1 \leq \dim \overline{S} \cap H \leq \dim \overline{S}$$

Se per assurdo $\dim \overline{S} \cap H = \dim \overline{S}$, allora

$$\begin{cases} \dim \overline{S} \cap H = \dim \overline{S} \\ \overline{S} \cap H \leq \overline{S} \end{cases} \Rightarrow \overline{S} \cap H = \overline{S} \Leftrightarrow \overline{S} \subseteq H$$

e questo e' assurdo perche'

$$\overline{S}\backslash H \underbrace{\simeq}_{[6.4,\text{pg.}96]} S \neq \emptyset \Rightarrow \overline{S}\backslash H \neq \emptyset \Rightarrow \overline{S} \nsubseteq H$$

Quindi

$$\dim \overline{S} - 1 \leq \dim \overline{S} \cap H < \dim \overline{S} \Leftrightarrow \dim \overline{S} \cap H = \dim \overline{S} - 1$$

□

Proposition 6.6. *Nelle ipotesi della prop. [6.4,pg.96], presi due punti $P_1, P_2 \in \mathbb{P}(\mathbf{V})\backslash H$ distinti, si ha*

$$\overline{P_1 P_2} = L(P_1, P_2)\backslash H$$

dove $\overline{P_1 P_2}$ e' la congiungente di P_1, P_2 nello spazio affine $\tilde{A} = \mathbb{P}(\mathbf{V})\backslash H$.

Proof:

$$P_1 \in \tilde{A} \Rightarrow P_1 = \langle \omega(P_1) + v\rangle$$
$$P_2 \in \tilde{A} \Rightarrow P_2 = \langle \omega(P_2) + v\rangle$$

Ricordiamo inoltre che

$$\overline{P_1 P_2} = \left(P_1, \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1 P_2}\right)\right) \quad (0)$$

⟨1⟩1. Dim $L(P_1, P_2)\backslash H \subseteq \overline{P_1 P_2}$

$$P \in L(P_1,P_2)\backslash H = \mathbb{P}(\mathcal{L}(\omega(P_1)+v, \omega(P_2)+v))\backslash H \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P = \langle \lambda(\omega(P_1)+v) + \mu(\omega(P_2)+v)\rangle = \langle \lambda\omega(P_1) + \mu\omega(P_2) + (\lambda+\mu)\, v\rangle$$
$$P \notin H \Rightarrow \lambda+\mu \neq 0 \Rightarrow P = \left\langle \frac{\lambda\omega(P_1)+\mu\omega(P_2)}{\lambda+\mu} + v \right\rangle \quad (1)$$
$$P \in \tilde{A} \Rightarrow P = \langle \omega(P)+v\rangle \underbrace{=}_{(1)} \left\langle \frac{\lambda\omega(P_1)+\mu\omega(P_2)}{\lambda+\mu} + v \right\rangle \Leftrightarrow \omega(P) = \frac{\lambda\omega(P_1)+\mu\omega(P_2)}{\lambda+\mu} \quad (2)$$
$$\overrightarrow{P_1P} = \omega(P) - \omega(P_1) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}(\omega(P_2)-\omega(P_1)) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\overrightarrow{P_1P_2}$$
$$\overrightarrow{P_1P} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\overrightarrow{P_1P_2} \Rightarrow P \in \left(P_1, \mathcal{L}\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right)\right) \underbrace{=}_{(0)} \overline{P_1P_2}$$

e per l'arbitrarieta' di P, si ha

$$L(P_1,P_2)\backslash H \subseteq \overline{P_1P_2}$$

$\langle 1\rangle 2$. Dim $\subseteq$

Basta procedere a ritroso, con le dovute modifiche.

□

6.2 Teoremi classici (proiettivi)

Theorem 6.7. *di Pappo.*

In un qualsiasi spazio proiettivo $\mathbb{P}$ di dimensione 2, date due rette r_1, r_2 distinte, e i punti $P_{ji} \in r_j$, $i = 1,2,3$, $j = 1,2$, distinti fra loro e tutti diversi da $O = r_1 \cap r_2$ si ha che i punti A, B, C tali che

$$\{A\} = L(P_{11},P_{22}) \cap L(P_{21},P_{12})$$
$$\{B\} = L(P_{11},P_{23}) \cap L(P_{21},P_{13})$$
$$\{C\} = L(P_{12},P_{23}) \cap L(P_{22},P_{13})$$

sono allineati.

Proof: Intanto ricordiamo che per la prop. [5.30,pg.85], due rette in $\mathbb{P}^2$ si incontrano in un solo punto oppure sono coincidenti.

$\langle 1\rangle 1$. Le rette $L(P_{1j}, P_{2j'})$, $j, j' = 1,2,3$ sono tutte distinte

Supponiamo per assurdo che $\exists j, j', k, k' : \ j \neq k \vee j' \neq k'$ per cui si ha

$$L(P_{1j}, P_{2j'}) = L(P_{2k'}, P_{1k})$$

Supponiamo $j \neq k$ (se cosi' non fosse, basterebbe considerare $j' \neq k'$ e procedere analogamente).

$$\begin{cases} j \neq k \\ \text{i pt. sono a distinti per Hp} \end{cases} \Rightarrow P_{1j} \neq P_{1k}$$

E quindi si ha

$$\begin{cases} P_{1j} \neq P_{1k} \\ P_{1j}, P_{1k} \in r_1 \end{cases} \Rightarrow r_1 = L(P_{1j}, P_{1k})$$

$$L(P_{1j},P_{2j'}) = L(P_{2k'},P_{1k}) \Rightarrow \begin{cases} P_{1k} \in L(P_{1j},P_{2j'}) \\ P_{1k} \neq P_{1j} \end{cases} \Rightarrow L(P_{1j},P_{2j'}) = L(P_{1k},P_{1j}) = r_1 \Rightarrow P_{2j'} \in r_1 \cap r_2$$

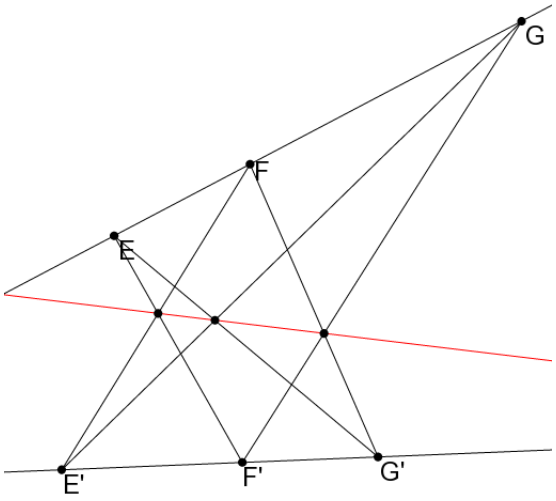


Figure 1: Rappresentazione del thm di Pappo proiettivo, dove $P_{11} = E, P_{12} = F, P_{13} = G, P_{21} = E', P_{22} = F', P_{23} = G'$

assurdo contro ipotesi.

$\langle 1 \rangle 2$. $A \neq C$

Se per assurdo, $A = C$, allora

$$\begin{cases} A = C, P_{22} \in L(P_{11}, P_{22}) \\ A = C, P_{22} \in L(P_{22}, P_{13}) \\ \text{i pt. } P_{ij} \text{ sono distinti fra loro} \end{cases} \Rightarrow L(P_{11}, P_{22}) = L(P_{22}, P_{13})$$

E come gia' visto, questo e' assurdo.

Poniamo $H = L(A, C)$, e $\tilde{A} = \mathbb{P} \backslash H$. Poiche' $A \neq C$, H e' una retta.
Per il thm [6.1,pg.94], $\tilde{A}$ e' un piano affine (nota [18]).

$\langle 1 \rangle 3$. Dim. che

$$\underbrace{\overline{P_{1j}P_{2j'}}}_{\text{retta affine}} = L(P_{1j}, P_{2j'}) \backslash H \quad \text{con } j = 1, 2, 3$$

Ovvero, la congiungente $\overline{P_{1j}P_{2j'}}$, che sta' nel piano affine $\tilde{A}$, e' uguale alla retta $L(P_{1j}, P_{2j'})$ senza i punti di H.

Supponiamo $j = 1$. Si ha che $P_{11} \notin H$, infatti, se per assurdo lo fosse,
$P_{11} \in H \cap L(P_{11}, P_{22}) = \{A\} \Rightarrow P_{11} = A \in L(P_{21}, P_{12}) \Rightarrow L(P_{21}, P_{12}) = L(P_{11}, P_{12}) = r_1 \Rightarrow P_{21} \in r_1 \cap r_2$
assurdo. Analogamente si vede che $P_{1j}, P_{2j'} \notin H$, quindi per la prop. [6.6,pg.98], si ha

$$\overline{P_{1j}P_{2j'}} = L(P_{1j}, P_{2j'}) \backslash H$$

$\langle 1 \rangle 4$. $\overline{P_{11}P_{22}} \cap \overline{P_{21}P_{12}} = \emptyset$

Infatti, l'unico punto d'incontro di $L(P_{11}, P_{22}), L(P_{21}, P_{12})$ e' A: se per assurdo ce ne fosse un altro, allora sarebbero coincidenti, ma questo e' assurdo per cio' che abbiamo visto nel primo passo.

[18] in pratica stiamo considerando $L(A, C)$ come retta impropria

Ma $A \in H$, quindi

$$\overline{P_{11}P_{22}} \cap \overline{P_{21}P_{12}} = \emptyset$$

Quindi, poiche' siamo in un piano affine

$$\overline{P_{11}P_{22}} \cap \overline{P_{21}P_{12}} = \emptyset \Rightarrow \overline{P_{11}P_{22}} \parallel \overline{P_{21}P_{12}} \quad (1)$$

Analogamente per $\overline{P_{12}P_{23}}, \overline{P_{22}P_{13}}$:

$$\overline{P_{12}P_{23}} \cap \overline{P_{22}P_{13}} = \emptyset \Rightarrow \overline{P_{12}P_{23}} \parallel \overline{P_{22}P_{13}} \quad (2)$$

Ma allora per il thm di Pappo affine (vedi [1.39,pg.19]) applicato ai punti [19]

$P'_{1j} = P_{1j} \;\; j = 1,2,3$

$P'_{2j} = P_{2(4-j)} \;\; j = 1,2,3$

$$(1),(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{P'_{11}P'_{22}} \parallel \overline{P'_{23}P'_{12}} \\ \overline{P'_{12}P'_{21}} \parallel \overline{P'_{22}P'_{13}} \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{thm Pappo [1.39,pg.19]}} \overline{P'_{11}P'_{21}} \parallel \overline{P'_{13}P'_{23}} \Leftrightarrow \overline{P_{11}P_{23}} \parallel \overline{P_{13}P_{21}}$$

Quindi

$$\overline{P_{11}P_{23}} \parallel \overline{P_{13}P_{21}} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{siamo in } \bar{A}\text{, spazio affine}} \overline{P_{11}P_{23}} \cap \overline{P_{13}P_{21}} = \emptyset \Leftrightarrow$$

$$L(P_{11},P_{23}) \backslash H \cap L(P_{13},P_{21}) \backslash H = \emptyset \Leftrightarrow \; (L(P_{11},P_{23}) \cap L(P_{13},P_{21})) \backslash H = \emptyset \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{L(P_{11},P_{23}) \cap L(P_{13},P_{21})}_{=\{B\}} \subseteq H \Leftrightarrow B \in H$$

Quindi

$$A, B, C \in H$$

□

Theorem 6.8. *Teorema di Desargues proiettivo.*
In un qualsiasi spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ di dimensione 2, date due terne di punti distinti: $(P_{j1}, P_{j2}, P_{j3}),\;\; j = 1,2$, se

$$L(P_{11},P_{21}) \cap L(P_{12},P_{22}) \cap L(P_{13},P_{23}) = \{O\}$$
$$O \neq P_{ij} \;\; \forall i,j$$

si ha che i punti

$$\{A\} = L(P_{11},P_{12}) \cap L(P_{21},P_{22})$$
$$\{B\} = L(P_{11},P_{13}) \cap L(P_{21},P_{23})$$
$$\{C\} = L(P_{12},P_{13}) \cap L(P_{22},P_{23})$$

sono allineati.

[19] in pratica stiamo applicando Pappo, con gli stessi punti P_{ij}, ma considerando in ordine inverso i punti P_{2j} della retta r_2

Proof:
$P_{ij} = \langle v \rangle_{ij} \ \ \forall i, j$

$O = \langle v \rangle$

$O \in L(P_{11}, P_{21}) \Rightarrow v = a_1 v_{11} + a_2 v_{21}$

$O \in L(P_{12}, P_{22}) \Rightarrow v = a_2 v_{12} + a_3 v_{22}$

$O \in L(P_{13}, P_{23}) \Rightarrow v = a_4 v_{13} + a_5 v_{23}$

cerchiamo di ricondurci ai vettori delle rette finali

$$\begin{cases} w_1 := a_1 v_{11} - a_2 v_{12} = a_3 v_{22} - a_2 v_{21} \\ w_2 := a_1 v_{11} - a_4 v_{13} = a_5 v_{23} - a_2 v_{21} \\ w_3 := a_2 v_{12} - a_4 v_{13} = a_5 v_{23} - a_3 v_{22} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle w_1 \rangle = \underbrace{\langle a_1 v_{11} - a_2 v_{12} \rangle}_{\in L(P_{11}, P_{12})} = \underbrace{\langle a_3 v_{22} - a_2 v_{21} \rangle}_{\in L(P_{21}, P_{22})} \\ \langle w_2 \rangle = \underbrace{\langle a_1 v_{11} - a_4 v_{13} \rangle}_{\in L(P_{11}, P_{13})} = \underbrace{\langle a_5 v_{23} - a_2 v_{21} \rangle}_{\in L(P_{23}, P_{21})} \\ \langle w_3 \rangle = \underbrace{\langle a_2 v_{12} - a_4 v_{13} \rangle}_{\in L(P_{12}, P_{13})} = \underbrace{\langle a_5 v_{23} - a_3 v_{22} \rangle}_{\in L(P_{23}, P_{22})} \end{cases}$$

$\langle w_1 \rangle = A, \ \ \langle w_2 \rangle = B, \ \ \langle w_3 \rangle = C$

$w_1 - w_2 + w_3 = a_1 v_{11} - a_2 v_{12} - a_1 v_{11} + a_4 v_{13} + a_2 v_{12} - a_4 v_{13} = 0$

$\Rightarrow w_1, w_2, w_3$ sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow A, B, C$ sono l.d. $\Rightarrow \dim L(A, B, C) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow A, B, C$ sono allineati, ovvero $A, B, C \in L(A, B, C) = L(A, B)$

□

6.3 Dualita'

Definition 6.9. Poniamo

$$\begin{aligned} &\mathbf{V}^\circ = \mathrm{Hom}(\mathbf{V}, \mathbb{K}) \\ &\mathbb{P}_-(\mathbf{V}) = \{\alpha \leq \mathbb{P}(\mathbf{V}) \mid \dim \alpha = \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) - 1\} \\ &\mathbb{P}_{-r}(\mathbf{V}) = \{S \leq \mathbb{P}(\mathbf{V}) \mid \dim S = \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) - r - 1\} \\ &\mathbb{P}_r(\mathbf{V}) = \{S \leq \mathbb{P}(\mathbf{V}) \mid \dim S = r\} \\ &\mathbb{P}_*(\mathbf{V}) = \{S \leq \mathbb{P}(\mathbf{V})\} \end{aligned}$$

Proposition 6.10.

$$|\mathbb{P}(\mathbf{V}^\circ)| = |\mathbb{P}_-(\mathbf{V})|$$

Ovvero, esiste una biezione tra $\mathbb{P}(\mathbf{V}^\circ)$ e $\mathbb{P}_-(\mathbf{V})$, e in particolare, una tale biezione e':

$$\begin{aligned} &\delta : \mathbb{P}(\mathbf{V}^\circ) \longrightarrow \mathbb{P}_-(\mathbf{V}) \\ &\delta(\langle f \rangle) = \mathbb{P}(\ker f) \end{aligned}$$

Grazie a questa biezione, possiamo considerare $\mathbb{P}_-(\mathbf{V})$ come uno spazio proiettivo: se vogliamo considerare una proposizione $P(x)$ che riguarda concetti proiettivi, e vogliamo applicarla ad un

elemento $\beta \in \mathbb{P}_-(\mathbf{V})$, bastera' considerare $P(\delta^{-1}(\beta))$. Ad esempio, presi $\beta, \beta' \in \mathbb{P}_-(\mathbf{V})$, avremo:

$$L(\beta, \beta') := L(\delta^{-1}(\beta), \delta^{-1}(\beta'))$$
$$\textit{coordinate di } \beta \ = [\beta] = [\delta^{-1}(\beta)]$$

Proof: Si ha

$$F \in \mathbb{P}(\mathbf{V}^\circ) \Leftrightarrow \exists f \in \mathbf{V}^\circ \setminus \{\underline{0}\} : \quad F = \langle f \rangle$$

Consideriamo allora la seguente applicazione

$$\delta : \mathbb{P}(\mathbf{V}^\circ) \longrightarrow \mathbb{P}_-(\mathbf{V})$$
$$\delta(\langle f \rangle) = \mathbb{P}(\ker f)$$

δ e' ben definita, perche' per la prop. [AL,9.4,pg.65] si ha

$$\langle f \rangle \in \mathbb{P}(\mathbf{V}^\circ) \Rightarrow f \in \mathbf{V}^\circ \setminus \{\underline{0}\} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{[AL,9.4,pg.65]}} \dim \ker f = \dim \mathbf{V} - 1 = \dim \mathbb{P}(\mathbf{V})$$

$$\dim \mathbb{P}(\ker f) = \dim \ker f - 1 = \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) - 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\ker f) \in \mathbb{P}_-(\mathbf{V})$$

δ e' inoltre ben posta, ovvero

$$g \in \langle f \rangle \Rightarrow \delta(\langle g \rangle) = \delta(\langle f \rangle)$$

Infatti,

$$g \in \langle f \rangle \Rightarrow \exists \lambda \neq 0 : \quad g = \lambda f \underbrace{\Rightarrow}_{\text{prop. [AL,9.5,pg.66]}} \ker g = \ker f \Rightarrow \mathbb{P}(\ker g) = \mathbb{P}(\ker f) \Leftrightarrow \delta(\langle g \rangle) = \delta(\langle f \rangle)$$

$\langle 1 \rangle 1$. δ e' iniettiva

$$\delta(\langle g \rangle) = \delta(\langle f \rangle) \Leftrightarrow \mathbb{P}(\ker g) = \mathbb{P}(\ker f) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{[5.6,pg.75]}} \ker g = \ker f \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{[AL,9.5,pg.66]}} \exists \lambda \neq 0 : \ f = \lambda g \Leftrightarrow \langle f \rangle = \langle g \rangle$$

$\langle 1 \rangle 2$. δ e' surriettiva

Sia $\alpha = \mathbb{P}(W) \in \mathbb{P}_-(\mathbf{V})$. Il nostro obbiettivo e' trovare una f non nulla t.c. $\delta(f) = \alpha$, ovvero

$$\delta(\langle f \rangle) = \alpha \Leftrightarrow \mathbb{P}(\ker f) = \mathbb{P}(W) \Leftrightarrow \ \ker f = W$$

cioe' dobbiamo trovare una f che come nucleo abbia proprio W.

Sia $C = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base di W, e sia $v \notin W$. Allora $B = C \cup \{v\}$ e' una base di $\mathbf{V}$.

Possiamo cosi' definire la seguente applicazione lineare:

$$f(v_i) = 0 \ \ i = 1, 2, \ldots, n$$
$$f(v) = \mu \neq 0$$

Si ha che $\delta(\langle f \rangle) = \alpha$, infatti,

$$f(u) = 0 \Leftrightarrow f(a_1 v_1 + \cdots + a_2 v_n + a_{n+1} v) = 0 \Leftrightarrow a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n) + a_{n+1} f(v) = 0 \Leftrightarrow a_{n+1}\mu = 0 \Leftrightarrow$$
$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\mu \neq 0} a_{n+1} = 0 \Leftrightarrow u = a_1 v_1 + \cdots + a_2 v_n \Leftrightarrow u \in W \quad (1)$$

$$\ker f = \left\{ u \in \mathbf{V} \mid f(u) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{(1)} u \in W \right\} = W$$

$$\delta(\langle f \rangle) = \mathbb{P}(\ker f) = \mathbb{P}(W)$$

□

Proposition 6.11. *Nelle ipotesi della prop [6.10,pg.102], data B base di $\mathbf{V}$, e preso $P \in \mathbb{P}(\mathbf{V}^\circ)$, si ha*

L'equazione dell'iperpiano $\delta(P)$ e'

$$AX = 0$$

dove A e' un qualsiasi elemento t.c. $A \in [P]_C$

C e' la base canonica di $\mathbf{V}^\circ$ rispetto alla base B di $\mathbf{V}$

Viceversa, se $AX = 0$ e' l'equazione di un iperpiano in $\beta \in \mathbb{P}_-(\mathbf{V})$, allora

$$\beta = \delta(P), \text{ con } P \in \mathbb{P}(\mathbf{V}^\circ) : [P]_C = \langle A \rangle$$

Proof:
$\langle 1 \rangle 1$.

$$P \in \mathbb{P}(\mathbf{V}^\circ) \Leftrightarrow P = \langle f \rangle, \quad f \neq \underline{0}$$
$$f(v) \underbrace{=}_{\text{[AL,9.3,pg.64]}} [f]_C {}^t[v]_B$$
$$\delta(\langle f \rangle) = \mathbb{P}(\ker f)$$
$$\ker f = \left\{ v \in \mathbf{V} \mid f(v) = 0 \Leftrightarrow [f]_C {}^t[v]_B = 0 \right\}$$

$$A \in [P]_C = [\langle f \rangle]_C = \langle [f]_C \rangle \Rightarrow A = \lambda [f]_C \Rightarrow \left([f]_C {}^t[v]_B = 0 \Leftrightarrow A^t[v]_B = 0 \right)$$

$\langle 1 \rangle 2$. Viceversa
Sia $P \in \mathbb{P}(\mathbf{V}^\circ) : [P]_C = \langle A \rangle$, allora per quanto abbiamo visto prima. $\delta(P)$ ha equazione:

$$A'X = 0 \text{ con } A' \in [P]_C = \langle A \rangle$$
$$A' \in \langle A \rangle \Leftrightarrow A' = \lambda A, \quad \lambda \neq 0$$
$$A'X = 0 \Leftrightarrow \lambda AX = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\lambda \neq 0} AX = 0$$

quindi $\delta(P)$ ha la stessa equazione di β

□

Definition 6.12. Definiamo la seguente funzione:

$$\Lambda_r : \mathbb{P}_r(\mathbf{V}) \longrightarrow \Lambda_r(\mathbb{P}_-(\mathbf{V}))$$
$$\Lambda_r(S) = \{ \beta \in \mathbb{P}_-(\mathbf{V}) \mid S \subseteq \beta \}$$

dove con $\Lambda_r(\mathbb{P}_-(\mathbf{V}))$ abbiamo indicato impropriamente l'immagine di Λ_r.
Quindi preso un $S \in \mathbb{P}_r(\mathbf{V})$, $\Lambda_r(S)$ e' l'insieme di iperpiani di $\mathbb{P}_-(\mathbf{V})$ che contengono S.
$\Lambda_r(S)$ si chiama *sistema lineare di iperpiani di centro S*.
Quando non c'e' pericolo di ambiguita', useremo il simbolo $\Lambda(S)$.

Proposition 6.13.

1. $\Lambda(A) \subseteq \Lambda(B) \Leftrightarrow A \supseteq B$
2. $\Lambda(A) = \Lambda(B) \Leftrightarrow A = B$
3. $\Lambda(L(A, B)) = \Lambda(A) \cap \Lambda(B)$

Proof:
$\langle 1 \rangle 1$. Dim 1.
$\langle 2 \rangle 1$. Dim. $\Leftarrow$

$$\alpha \in \Lambda(A) \Rightarrow \alpha \supseteq A \supseteq B \Rightarrow \alpha \in \Lambda(B)$$
$$\Lambda(A) \subseteq \Lambda(B)$$

$\langle 2 \rangle 1$. Dim. $\Rightarrow$

Sia $n = \dim \mathbb{P}(\mathbf{V})$, $r = \dim A$, $s = \dim B$.
Per la prop [5.11,pg.76], possiamo pensare A come intersezione di $n-r$ iperpiani distinti che contengono A:

$$A = \bigcap_{i=1}^{n-r} H_i$$

$$A \subseteq H_i \Rightarrow H_i \in \Lambda(A) \subseteq \Lambda(B) \Rightarrow H_i \supseteq B \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n-r$$

$$\Rightarrow B \subseteq \bigcap_{i=1}^{n-r} H_i = A \Rightarrow B \subseteq A$$

⟨2⟩1. Dim 2.
Immediata conseguenza del passo precedente.
⟨2⟩2. Dim 3.
⟨3⟩1. Dim $\subseteq$

$$\alpha \in \Lambda(L(A,B)) \Rightarrow \alpha \supseteq L(A,B) \supseteq A, B \Rightarrow \begin{cases} \alpha \supseteq A \\ \alpha \supseteq B \\ \alpha \text{ iperpiano} \end{cases} \Rightarrow \alpha \in \Lambda(A) \cap \Lambda(B)$$

⟨3⟩2. Dim $\supseteq$

$$\alpha \in \Lambda(A) \cap \Lambda(B) \Rightarrow \alpha \supseteq A, B \Rightarrow \alpha \supseteq L(A,B) \Rightarrow \alpha \in \Lambda(L(A,B))$$

□

Theorem 6.14.

$$|\mathbb{P}_{-r}(\mathbf{V}^\circ)| = |\mathbb{P}_r(\mathbf{V})|$$

Ovvero, esiste una biezione tra $\mathbb{P}_{-r}(\mathbf{V}^\circ)$ e $\mathbb{P}_r(\mathbf{V})$, e in particolare, una tale biezione e':

$$\delta_r : \mathbb{P}_r(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{P}_{-r}(\mathbf{V}^\circ)$$
$$\delta_r(S) = \delta^{-1}(\Lambda_r(S)) = \left\{\delta^{-1}(\alpha) \mid \alpha \in \Lambda_r(S)\right\}$$

Inoltre, se $H_1, \ldots, H_m$ sono iperpiani qualsiasi, tali che intersecati danno S, allora si ha

$$\delta_r(S) = \delta_r\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) = L(\delta^{-1}(H_1), \ldots, \delta^{-1}(H_m))$$

Per $r = n-1$ si riottiene la proposizione [6.10,pg.102]. Quindi, questa proposizione e' una sua generalizzazione. Valgono percio' analoghe considerazioni: ogni elemento di $\mathbb{P}_{-r}(\mathbf{V}^\circ)$ si possono considerare come sottospazi vettoriali di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ di dimensione r.

Proof:
⟨1⟩1. Dimostriamo intanto che δ_r e' ben definita, ovvero che $\delta_r(S) \in \mathbb{P}_{-r}(\mathbf{V}^\circ)$

Per la prop. [5.11,pg.76], abbiamo

$S = \bigcap_{i=1}^{n-r} H_i$ (1)

$n = \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}),\ \dim H_i = n-1,\ S \subseteq H_i\ \forall i = 1, \dots, n-r, \quad H_i \neq H_j\ \ \forall i \neq j$

$\forall i = 1, 2, \dots, n-r$ equazione di H_i linearmente indipendente dalle equazioni degli iperpiani $\{H_j \mid j \neq i\}$

$H_i = \mathbb{P}(W_i)$

$$S = \mathbb{P}(W) = \bigcap_{i=1}^{n-r} \mathbb{P}(W_i) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-r} W_i\right) \quad (1.1)$$

$$\Leftrightarrow W = \bigcap_{i=1}^{n-r} W_i \quad (1.2)$$

Siano

$$P_i = \delta^{-1}(H_i)\ \ \forall i = 1, 2, \dots, n-r$$

si ha

$$P_i \in \mathbb{P}(\mathbf{V}^\circ) \Leftrightarrow P_i = \langle f \rangle_i,\ f_i \neq \underline{0}\ \ i = 1, 2, \dots, n-r$$

$$H_i = \delta(P_i) = \mathbb{P}(\ker f_i) \Leftrightarrow W_i = \ker f_i$$

$$h \in W \underbrace{=}_{(1.2)} \bigcap_{i=1}^{n-r} W_i = \bigcap_{i=1}^{n-r} \ker f_i \Rightarrow f_i(h) = 0\ \ \forall i = 1, 2, \dots, n-r \quad (3)$$

$\langle 2 \rangle 1$. Dimostriamo che

$$\delta_r\left(\bigcap_{i=1}^{n-r} H_i\right) = L(\delta^{-1}(H_1), \dots, \delta^{-1}(H_{n-r}))$$

ovvero che $\delta_r(S) = L(P_1, \dots, P_{n-r}) \Leftrightarrow \Lambda(S) = \delta(L(P_1, \dots, P_{n-r}))$

$\langle 3 \rangle 1$. Dim $\Lambda(S) \supseteq \delta(L(P_1, \dots, P_{n-r}))$

Sia $\alpha \in \delta(L(P_1, \dots, P_{n-r}))$, si ha

$P := \delta^{-1}(\alpha) \in L(P_1, \dots, P_{n-r})$ (2)

$$P \in L(P_1, \dots, P_{n-r}) = \mathbb{P}(\mathcal{L}(f_1, f_2, \dots, f_{n-r})) \Rightarrow P = \left\langle \underbrace{a_1 f_1 + \cdots + a_{n-r} f_{n-r}}_{f} \right\rangle$$

$$h \in W\ \ f(h) = (a_1 f_1 + \cdots + a_{n-r} f_{n-r})(h) = a_1 f_1(h) + \cdots + a_{n-r} f_{n-r}(h) \underbrace{=}_{(3)} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h \in \ker f\ \ \forall h \in W \quad (3.1)$$

$\alpha = \delta(P) = \delta(\langle f \rangle) = \mathbb{P}(\ker f)$ (4)

$(3.1) \Rightarrow W \leq \ker f \Leftrightarrow \mathbb{P}(W) \leq \mathbb{P}(\ker f) \Leftrightarrow S \leq \mathbb{P}(\ker f) \underbrace{=}_{(4)} \alpha$

Quindi, essendo α un iperpiano che contiene S, concludiamo che:

$$\alpha \in \Lambda(S)$$

e in definitiva:

$$\delta(L(P_1, \dots, P_{n-r})) \subseteq \Lambda(S)$$

$\langle 3 \rangle 2$. Dim $\Lambda(S) \subseteq \delta(L(P_1, \dots, P_{n-r}))$

Sia adesso $\alpha = \mathbb{P}(U) \in \Lambda(S)$.

α e' un iperpiano che contiene S, allora analogamente a quanto abbiamo visto molto

tempo fa' (vedi [1.3.6,pg.7]), l'equazione di α e' del tipo:

$$\alpha: \quad \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \cdots + \lambda_{n-r} F_{n-r} = 0 \quad (5)$$

dove F_i e' l'equazione dell'iperpiano H_i.

Poiche' $H_i = \delta(P_i)$, per la prop [6.11,pg.103] abbiamo che l'equazione dell'iperpiano H_i e'

$$H_i: \quad A_i X = 0, \quad A_i \in [P_i]_C = \langle [f_i]_C \rangle \quad \forall i = 1, \ldots, n-r \quad (6)$$

quindi sostituendo nella (5):

$$\alpha: \quad \lambda_1 A_1 X + \lambda_2 A_2 X + \cdots + \lambda_{n-r} A_{n-r} X = (\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_{n-r} A_{n-r})\, X = 0$$

e sempre per la prop. [6.11,pg.103], si ha

$$\delta^{-1}(\alpha) = Q = \langle g \rangle, \text{ con } [Q]_C = \langle [g]_C \rangle = \langle \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_{n-r} A_{n-r} \rangle$$

$$\Rightarrow [g]_C = \mu(\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_{n-r} A_{n-r}) = \mu_1 A_1 + \cdots + \mu_{n-r} A_{n-r}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{A_i \in \langle [f_i]_C \rangle} \quad g \in \mathcal{L}(f_1, \ldots, f_{n-r}) \Rightarrow \langle g \rangle \in \mathbb{P}(\mathcal{L}(f_1, \ldots, f_{n-r})) = L(P_1, \ldots, P_{n-r}) \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\delta^{-1}(\alpha) = \langle g \rangle} \quad \delta^{-1}(\alpha) \in L(P_1, \ldots, P_{n-r}) \Leftrightarrow \alpha \in \delta(L(P_1, \ldots, P_{n-r}))$$

E per l'arbitrarieta' di α abbiamo cosi' dimostrato che

$$\Lambda(S) \subseteq \delta(L(P_1, \ldots, P_{n-r}))$$

Abbiamo cosi' dimostrato la doppia inclusione e quindi

$$\Lambda(S) = \delta(L(P_1, \ldots, P_{n-r}))$$

$$\delta_r(S) = \delta^{-1}(\Lambda(S)) = L(P_1, \ldots, P_{n-r}) \quad (*)$$

Nota: per dimostrare la $(*)$ abbiamo sfruttato solo l'ipotesi che gli H_i sono iperpiani che intersecati danno S. Non abbiamo sfruttato la loro lineare indipendenza. Non abbiamo neanche sfruttato il fatto che $n-r$ fosse un particolare numero. Possiamo quindi dedurre che: dati $K_1, \ldots, K_m$ iperpiani qualsiasi, tali che intersecati danno S, allora si ha

$$\delta_r(S) = \delta_r\left(\bigcap_{i=1}^{m} K_i\right) = L(\delta^{-1}(K_1), \ldots, \delta^{-1}(K_m))$$

$\langle 2 \rangle 2$. I punti $P_1, \ldots, P_{n-r}$ sono l.i.

Infatti, se per assurdo P_i e' dipendente dagli altri, allora anche f_i e' dipendente dagli altri f_j, cioe'

$$f_i = \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n-r} k_j f_j$$

$$[f_i]_C = \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n-r} k_j [f_j]_C$$

Ma allora, per la (6), deduciamo che l'equazione di H_i e' dipendente dalle equazioni degli altri iperpiani H_j. Assurdo contro la (1).

In conclusione:

$\Lambda(S) = \delta(L(P_1, \ldots, P_{n-r})) \Leftrightarrow \delta^{-1}(\Lambda(S)) = L(P_1, \ldots, P_{n-r}) \Leftrightarrow \delta_r(S) = L(P_1, \ldots, P_{n-r})$

e poiche' i punti $P_1, \ldots, P_{n-r}$ sono l.i. si ha

$$\dim L(P_1, \ldots, P_{n-r}) = n - r - 1$$

quindi $\delta_r(S) \in \mathbb{P}_{-r}(\mathbf{V}^\circ)$.

Ecco che δ_r e' effettivamente ben definita.

$\langle 1 \rangle 2$. δ_r e' iniettiva

$$\delta_r(A) = \delta_r(B) \Leftrightarrow \delta^{-1}(\Lambda(A)) = \delta^{-1}(\Lambda(B)) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\delta \text{ e' biett.}} \Lambda(A) = \Lambda(B) \underbrace{\Leftrightarrow}_{[6.13,\text{pg.}104]} A = B$$

$\langle 1 \rangle 3$. δ_r e' surriettiva

Sia $S' \in \mathbb{P}_{-r}(\mathbf{V}^\circ)$. Poiche' S' ha dimensione $n-r-1$, scegliamo i punti $P_1, \dots, P_{n-r}$ l.i. tali che

$$S' = L(P_1, \dots, P_{n-r})$$
$$\text{Sia } H_i = \delta(P_i) \quad i = 1, \dots, n-r$$
$$P_i = \langle f_i \rangle$$
$$P_1, \dots, P_{n-r} \text{ l.i } \Rightarrow f_1, \dots, f_{n-r} \text{ l.i.} \Rightarrow [f_1]_C, \dots, [f_{n-r}]_C \text{ l.i.} \quad (7)$$

Poiche' $H_i = \delta(P_i)$, per la prop [6.11,pg.103] abbiamo che l'equazione dell'iperpiano H_i e'

$$H_i: \quad A_i X = 0, \quad A_i \in [P_i]_C = \langle [f_i]_C \rangle \Leftrightarrow A_i = \kappa_i [f_i]_C, \quad \kappa_i \neq 0$$
$$H_i: \quad \kappa_i [f_i]_C X = 0 \Leftrightarrow [f_i]_C X = 0$$

Allora, per la (7), anche le equazioni degli iperpiani H_i sono l.i.
Quindi se consideriamo la loro intersezione, abbiamo

$$S = \bigcap_{i=1}^{n-r} H_i \leq \mathbb{P}_r(\mathbf{V})$$
$$\dim S = r$$

Ed S e' proprio la controimmagine che cerchiamo, infatti,

$$\delta_r(S) = \delta_r \left(\bigcap_{i=1}^{n-r} H_i \right) \underbrace{=}_{\text{per il passo precedente}} L(\delta^{-1}(H_1), \dots, \delta^{-1}(H_{n-r})) = L(P_1, \dots, P_{n-r}) = S'$$

□

Corollary 6.15.

$$|\mathbb{P}_*(\mathbf{V}^\circ)| = |\mathbb{P}_*(\mathbf{V})|$$

In particolare, una biezione tra $\mathbb{P}_*(\mathbf{V}^\circ)$ e $\mathbb{P}_*(\mathbf{V})$ e':

$$\delta_* : \mathbb{P}_*(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{P}_*(\mathbf{V}^\circ)$$
$$\delta_*(S) = \delta_r(S) = \delta^{-1}(\Lambda_r(S)), \quad r = \dim S$$

dove δ_r e' definita in [6.14,pg.105]. Inoltre,

$$\dim \delta_*(S) = n - r - 1, \quad n = \dim \mathbb{P}(\mathbf{V})$$

In particolare, poiche' sussiste l'isomorfismo $\mathbf{V} \simeq \mathbf{V}^\circ$, indicando con $\overline{\delta_*}$ la composizione di δ_* con tale isomorfismo, si ha che $\overline{\delta_*}$ associa, biettivamente, sottospazi di dimensione r di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ a sottospazi di dimensione $n-r-1$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$.

Proof: Per il thm [6.14,pg.105], la δ_* e' sicuramente ben posta, e vale

$$\dim \delta_*(S) = \dim \delta_r(S) = n - r - 1$$

⟨1⟩1. Dim δ_* iniettiva

$$\delta_*(A) = \delta_*(B) \Leftrightarrow \delta_r(A) = \delta_r(B) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\delta_r \text{ e' biettiva}} A = B$$

⟨1⟩2. Dim δ_* surriettiva
Preso $S' \in \mathbb{P}_*(\mathbf{V}^\circ)$, allora basta prendere $S = {\delta_r}^{-1}(S')$, cosi' che'

$$\delta_*(S) = \delta_r(S) = S'$$

□

Corollary 6.16. *La funzione Λ_r e' biettiva.*

Proof: Λ_r e' per definizione surriettiva.
Poiche'

$$\delta_r = \delta^{-1} \circ \Lambda_r \text{ e' una funzione biettiva}$$

segue per le proprieta' delle funzioni che Λ_r e' iniettiva.
Quindi la tesi. □

Proposition 6.17. *Valgono le seguenti proprieta':*

1. $A \subseteq B \Leftrightarrow \delta_*(A) \supseteq \delta_*(B)$
2. $\delta_*(L(A,B)) = \delta_*(A) \cap \delta_*(B)$
3. $\delta_*(A \cap B) = L(\delta_*(A), \delta_*(B))$

Proof:
⟨1⟩1. Dim 1.

$$A \subseteq B \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{[6.13,pg.104]}} \Lambda(A) \supseteq \Lambda(B) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\delta \text{ biettiva}} \delta^{-1}\Lambda(A) \supseteq \delta^{-1}\Lambda(B) \Leftrightarrow \delta_*(A) \supseteq \delta_*(B)$$

⟨1⟩2. Dim 2.

$$\delta_*(L(A,B)) = \delta^{-1}\Lambda(L(A,B)) \underbrace{=}_{\text{[6.13,pg.104]}} = \delta^{-1}(\Lambda(A) \cap \Lambda(B)) =$$

$$\underbrace{=}_{\delta^{-1} \text{ e' iniettiva}} \delta^{-1}(\Lambda(A)) \cap \delta^{-1}(\Lambda(B)) = \delta_*(A) \cap \delta_*(B)$$

⟨1⟩3. Dim 3.
Com abbiamo gia' fatto nella dim. del thm [6.14,pg.105], scriviamo A e B come intersezione di iperpiani:

$$A = \bigcap_{i=1}^{n-r} H_i, \quad B = \bigcap_{i=1}^{n-s} K_i$$

Si ha

$$\delta_*(A) = \delta_*\left(\bigcap_{i=1}^{n-r} H_i\right) \underbrace{=}_{\text{[6.14,pg.105]}} L(\delta^{-1}(H_1), \ldots, \delta^{-1}(H_{n-r}))$$

$$\delta_*(B) = \delta_*\left(\bigcap_{i=1}^{n-s} K_i\right) \underbrace{=}_{\text{[6.14,pg.105]}} L(\delta^{-1}(K_1), \ldots, \delta^{-1}(K_{n-s}))$$

$$\delta_*(A \cap B) = \delta_*\left(\bigcap_{i=1}^{n-r} H_i \bigcap \bigcap_{i=1}^{n-s} K_i\right) \underbrace{=}_{\text{[6.14,pg.105]}} L(\delta^{-1}(H_1), \ldots, \delta^{-1}(H_{n-r}), \delta^{-1}(K_1), \ldots, \delta^{-1}(K_{n-r})) =$$

$$= L(L(\delta^{-1}(H_1), \ldots, \delta^{-1}(H_{n-r})), L(\delta^{-1}(K_1), \ldots, \delta^{-1}(K_{n-r})) = L(\delta_*(A), \delta_*(B))$$

□

Theorem 6.18. *Principio di dualita' proiettivo.*
In uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V}), \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = n$, *sia data una proposizione qualunque* $\mathcal{P}$ *basata sulle relazioni* $\subseteq$, $L(,)$, $\cap$, *o su relazioni derivate dalle precedenti, allora*

$$\mathcal{P} \Leftrightarrow \delta_*(\mathcal{P})$$

dove con $\delta_*(\mathcal{P})$ *intendiamo la proposizione* duale *di* $\mathcal{P}$, *ottenuta effettuando le seguenti sostituzioni letterali in* $\mathcal{P}$*:*

1. *"sottospazio* A *di dimensione* r*"* $\longrightarrow$ *"sottospazio* $\overline{\delta_*}(A)$ *dimensione* $n-r-1$*"*
2. $A \subseteq B \longrightarrow \overline{\delta_*}(A) \supseteq \overline{\delta_*}(B)$
3. $L(A,B) \longrightarrow \overline{\delta_*}(A) \cap \overline{\delta_*}(B)$
4. $A \cap B \longrightarrow L(\overline{\delta_*}(A), \overline{\delta_*}(B))$

Proof: Come abbiamo visto in [6.15,pg.108], la funzione $\overline{\delta_*} : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V})$ e' biettiva, e porta sottospazi di dimensione r in sottospazi di dimensione $n-r-1$.
Tramite la funzione $\overline{\delta_*}$ portiamo biunivocamente elementi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ in elementi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, e tramite la [6.17,pg.109], le relazioni si preservano nel modo indicato dalle sostituzioni.
$\overline{\delta_*}$ e' quindi una specie di isomorfismo che preserva alcune relazioni scambiandole con altre.
Notiamo infine che se $(a,b) \in \mathcal{R}$, dove $\mathcal{R}$ e' una relazione che non si basa sulle relazioni 1., 2., 3., 4., allora non e' detto che $(\overline{\delta_*}(a), \overline{\delta_*}(b)) \in \mathcal{R}$. □

6.4 Teoremi duali

Theorem 6.19. *In virtu' del thm [6.18,pg.110], enunciamo il duale del teorema di Pappo (vedi [6.7,pg.99]*
In un qualsiasi spazio proiettivo $\mathbb{P}$ *di dimensione 2, dati due punti* O_1, O_2 *distinti, e le rette* $r_{ji} \in r_j$, $i = 1,2,3$, $j = 1,2$, *distinte fra loro e tutte diverse da* $L(O_1, O_2)$, *si ha che le rette* e, f, g *tali che*

$$e = L(r_{11} \cap r_{22}, r_{21} \cap r_{12})$$
$$f = L(r_{11} \cap r_{23}, r_{21} \cap r_{13})$$
$$g = L(r_{12} \cap r_{23}, r_{22} \cap r_{13})$$

si intersecano in uno stesso punto[20]

Proof: In virtu' del principio duale! □

Theorem 6.20. *Duale del thm di Desargues (vedi [6.8,pg.101]).*
In un qualsiasi spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ *di dimensione 2, date due terne di rette distinte:* (r_{j1}, r_{j2}, r_{j3}), $j = 1,2$, *se*

$$L(r_{11} \cap r_{21}, r_{12} \cap r_{22}, r_{13} \cap r_{23}) = s$$
ovvero, i punti $r_{11} \cap r_{21}, r_{12} \cap r_{22}, r_{13} \cap r_{23}$ *sono allineati in* s
$$s \neq r_{ij} \quad \forall i,j$$

[20] il thm di pappo diceva "i tre punti A,B,C sono allineati". Per definizione, tre punti sono allineati quando sono contenuti in una stessa retta:

$$A, B, C \subseteq r$$

Quindi il duale di questa proposizione e':

$$e, f, g \supseteq P$$

ovvero, le tre rette e, f, g contengono uno stesso punto P.

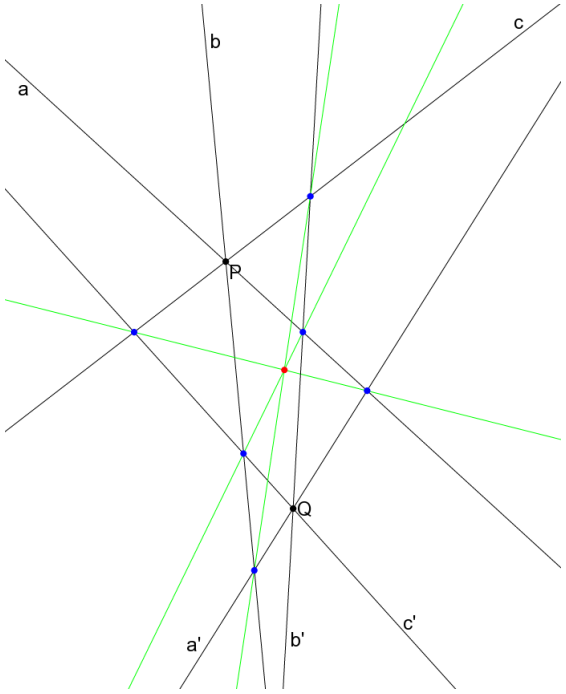


Figure 2: Rappresentazione del duale del thm di Pappo proiettivo, dove $O_1 = P,\ O_2 = Q,\ r_{11} = a, r_{12} = b, r_{13} = c, r_{21} = a', r_{22} = b', r_{23} = c'$

si ha che le rette

$$a = L(r_{11} \cap r_{12}, r_{21} \cap r_{22})$$
$$b = L(r_{11} \cap r_{13}, r_{21} \cap r_{23})$$
$$c = L(r_{12} \cap r_{13}, r_{22} \cap r_{23})$$

si intersecano in uno stesso punto O.

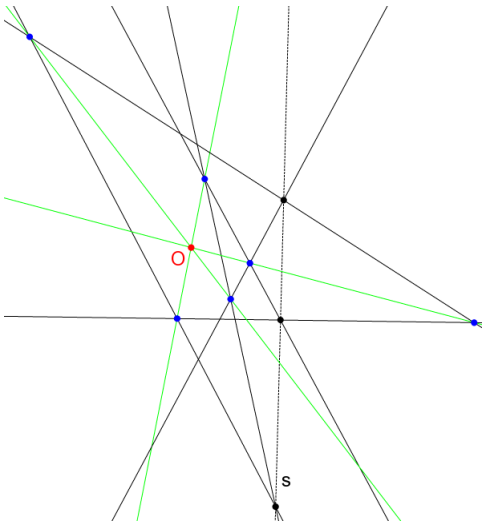


Figure 3: Rappresentazione del thm duale di Desargues

7 Esercizi

Example 7.1. In $\mathcal{A}^5(\mathbb{R})$ sono assegnati i seguenti punti:

$$A_1 = (1,1,0,0,0)$$
$$A_2 = (0,0,0,-1,0)$$
$$A_3 = (0,2,0,1,0)$$
$$A_4 = (0,-1,0,-2,2)$$

e T e' il sottospazio da essi generato.

$\langle 1 \rangle 1$. Trova per quali valori di a e b i seguenti punti individuano un piano parallelo a T:

$$B_1 = (0,4,3,2,0)$$
$$B_2 = (0,4,b,2,1)$$
$$B_3 = (a,4,3,2,1)$$

$$T = (A_1, W), \;\; W = \mathcal{L}\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_3}\right)$$
$$\overrightarrow{A_1A_2} = A_2 - A_1 = (-1,-1,0,-1,0)$$
$$\overrightarrow{A_1A_3} = A_3 - A_1 = (-1,1,0,1,0)$$
$$\overrightarrow{A_1A_4} = A_4 - A_1 = (-1,-2,0,-2,2)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \text{ e' un minore non nullo della matrice dei generatori di } W$$

$$\Rightarrow \dim W = 3, \text{ e inoltre } \left\{\overrightarrow{A_1A_i} \mid i = 2,3,4\right\} \text{ sono l.i}$$

$$\pi = (B_1, U), \;\; U = \mathcal{L}\left(\overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{B_1B_3}\right)$$
$$\overrightarrow{B_1B_2} = B_2 - B - 1 = (0,0,b-3,0,1)$$
$$\overrightarrow{B_1B_3} = B_3 - B_1 = (a,0,0,0,1)$$
$$\begin{cases} \dim \pi = 2 < \dim W = \dim T = 3 \\ \pi \parallel T \Leftrightarrow U \subseteq W \vee W \subseteq U \end{cases} \Rightarrow U \subseteq W \Leftrightarrow U \cap W = U \;\; (1)$$

Possiamo affermare che

$$U \cap W = U \Leftrightarrow \dim U \cap W = \dim U \;\; (1.1)$$

Infatti,

$$\begin{cases} U \cap W \subseteq U \\ \dim U \cap W = \dim U \end{cases} \Rightarrow U \cap W = U$$

il viceversa e' ovvio.

Allora, per imporre la validita' della (1), basta che ricerchiamo la validita' della (1.1), che

equivale a:

$$\dim U\cap W = \dim U \Leftrightarrow \rho(\text{sistema di } U\cap W) = 5 - \dim U = 3$$

$$\rho(\text{sistema di } U\cap W) = \rho\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & b-3 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{la colonna 2 e 4 sono uguali}} \rho\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & b-3 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

prima avevamo gia' trovato un minore non nullo. Imponendo che tutti i suoi orlati siano nulli, otteniamo $b = 3$.

Quindi π cercato si ha per $b = 3$ e per qualsiasi valore di a. Poiche' π deve essere un piano, $\overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{B_1B_3}$ devono essere l.i. quindi, $a \neq 0$.

In definitiva, $b = 3, a \neq 0$.

Un altro metodo che avremmo potuto seguire e': trovare le equazioni cartesiane di W, e imporre che $\overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{B_1B_3}$ soddisfino queste equazioni.

⟨1⟩2. Verifica che esiste una ed una sola affinita' $f : \mathcal{A}^5(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{A}^5(\mathbb{R})$ tale che

$$f(A_i) = A_i \quad i = 1, 2, 3, 4$$
$$f(O) = O', \quad O = (0, 0, 0, 0, 0), \quad O' = (0, 0, 0, 0, 1)$$
$$f(P) = P', \quad P = (0, 0, 1, 0, 0), \quad P' = (0, 0, 1, 4, 2)$$

prova che

$$\forall x \in T \quad f(x) = x$$

Per il cor [1.52,pg.26], basta verificare che i punti

$$\{A_i, O, P \mid i = 1, 2, 3, 4\} \text{ e } \{A_i, O', P' \mid i = 1, 2, 3, 4\}$$

siano l.i., cioe' che $\left\{\overrightarrow{A_1A_i},\ \overrightarrow{A_1O}, \overrightarrow{A_1P} \mid i = 2, 3, 4\right\}$ e $\left\{\overrightarrow{A_1A_i},\ \overrightarrow{A_1O'}, \overrightarrow{A_1P'} \mid i = 2, 3, 4\right\}$ e sono l.i.

Cominciamo con i primi,

$$\overrightarrow{A_1O} = -A_1 = (-1, -1, 0, 0, 0)$$
$$\overrightarrow{A_1P} = P - A_1 = (-1, -1, 1, 0, 0)$$
$$\rho\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 5$$

Quindi sono l.i.

I vettori $\left\{\overrightarrow{A_1A_i},\ \overrightarrow{A_1O'}, \overrightarrow{A_1P'} \mid 1 =, 2, 3, 4\right\}$ sono pure l.i.:

$$\overrightarrow{A_1O'} = O' - A_1 = (-1, -1, 0, 0, 1)$$
$$\overrightarrow{A_1P'} = P' - A_1 = (-1, -1, 1, 4, 2)$$

$$\rho \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 5$$

Allora, per il cor [1.52,pg.26], f e' univocamente determinata. Calcoliamola usando la prop [1.63,pg.31], scegliendo il riferimento standard $\Omega = (O, \varepsilon)$

$$^t[f(P)]_\Omega = M_{\varepsilon,\varepsilon}(\mathbf{f})\,^t[P]_\Omega + {}^t[f(O)]_\Omega$$

$f(O)$ lo conosciamo gia' (nota [21]) per Hp: e' O', percio'

$$[f(O)]_\Omega = [O']_\Omega = O'$$

ci serve quindi conoscere la matrice associata a $\mathbf{f}$ rispetto a $\varepsilon = \{e_1, e_2, \ldots, e_5\}$, la base canonica di $\mathcal{A}^5$.

$$\overrightarrow{f(A_1)f(O)} \underbrace{=}_{\text{per Hp}} \overrightarrow{A_1O'}$$

ma d'altra parte, essendo f un'isomorfismo affine,

$$\overrightarrow{f(A_1)f(O)} = \mathbf{f}(\overrightarrow{A_1O})$$

quindi

$$\mathbf{f}(\overrightarrow{A_1O}) = \overrightarrow{A_1O'}$$

Scomponiamo $\overrightarrow{A_1O}$ e $\overrightarrow{A_1O'}$ nella base canonica:

$$\overrightarrow{A_1O} = (-1, -1, 0, 0, 0) = -e_1 - e_2$$
$$\overrightarrow{A_1O'} = (-1, -1, 0, 0, 1) = -e_1 - e_2 + e_5$$

quindi

$$\mathbf{f}(\overrightarrow{A_1O}) = \overrightarrow{A_1O'} \Leftrightarrow \mathbf{f}(-e_1 - e_2) = -e_1 - e_2 + e_5 \Leftrightarrow \mathbf{f}(e_1) + \mathbf{f}(e_2) = e_1 + e_2 - e_5$$

Cosi' procedendo per gli altri vettori ricaviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{f}(e_1) + \mathbf{f}(e_2) = e_1 + e_2 - e_5 \\ \mathbf{f}(e_1) + \mathbf{f}(e_2) - \mathbf{f}(e_3) = e_1 + e_2 - e_3 - 4e_4 - 2e_5 \\ \mathbf{f}(e_1) + \mathbf{f}(e_2) + \mathbf{f}(e_4) = +e_1 + e_2 + e_4 \\ -\mathbf{f}(e_1) + \mathbf{f}(e_2) + \mathbf{f}(e_4) = -e_1 + e_2 + e_4 \\ -\mathbf{f}(e_1) - 2\mathbf{f}(e_2) - 2\mathbf{f}(e_4) + 2\mathbf{f}(e_5) = -e_1 - 2e_2 - 2e_4 + 2e_5 \end{cases}$$

che risolto da'

$$\begin{cases} \mathbf{f}(e_1) = e_1 \\ \mathbf{f}(e_2) = -e_5 + e_2 \\ \mathbf{f}(e_3) = e_5 + e_3 + 4 * e_4 \\ \mathbf{f}(e_4) = e_5 + e_4 \\ \mathbf{f}(e_5) = e_5 \end{cases}$$

[21] se non lo avessimo conosciuto, una volta trovata la matrice $M_{\varepsilon,\varepsilon}(\mathbf{f})$ avremmo potuto calcolarlo in questo modo:

$$^t[f(O)]_\Omega = {}^t[f(P)]_\Omega - M_{\varepsilon,\varepsilon}(\mathbf{f})\,^t[P]_\Omega$$

dove al posto di P usiamo un punto di cui conosciamo l'immagine, ad esempio A_1.

quindi

$$M_{\varepsilon,\varepsilon}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cosi' l'equazione di f e' trovata.
Proviamo adesso che

$$\forall x \in T \quad f(x) = x$$

Metodo 1: troviamo il vettore generico di T, calcoliamo con l'equazione $[f(T)]$ e verichiamo che $[f(T)] = [T]$
Metodo 2: notiamo che la tesi equivale a dire che

$$f/_T = \mathrm{id}$$

$A_1, A_2, \ldots, A_4 \in T$ e inoltre abbiamo visto che sono l.i. Allora, per il cor [1.52,pg.26]

$$\exists! f' \text{ isom. aff. } t.c. f'(A_i) = A_i \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, 4$$

Quindi per l'unicita' di f', e poiche' $f/_T$, la restrizione di f a T, rispetta queste condizioni ed e' sempre un isom. aff., abbiamo che $f/_T = f'$.
Infine, anche $\mathrm{id} : T \longrightarrow T$ rispetta le stesse condizioni ed e' pure un isom. aff., quindi

$$f' = \mathrm{id}$$
$$f/_T = f' = \mathrm{id}$$
$$f/_T = \mathrm{id}$$

che e' la tesi.

8 *

Index

*, 118

affinita', 21

b degenere, 38

Congiungente, 8
congiungente
    corollario, 10
    teorema, 8
Congruenza, 37
coordinate omogenee, 77
Coordinate proprie improprie, 96

Data la base del sottospazio, 6
Date le equazioni, 5
Dato il sottospazio, 5
Dato il sottospazio - II, 6
Diagonalizzazione di b simmetrica, 45
Dualita', 103

endomorfismo trasposto, 66
Endomorfismo unitario, 61
Equazione dell'iperpiano, 7
Equazioni cartesiane, 5
Equazioni cartesiane proiettive, 79
Equazioni di un'isomorfismo, 31
Equazioni parametriche, 7
Esercizi, 114

Forma quadratica, 44
Forme bilineari, 32
Formula di Grassman proiettiva, 83

Gram-Schmidt, 60

indotta, 39
intersezione sottospazi, 4
Isometria, 69
Isomorfismi affini, 21
Isomorfismo proiettivo, 88
Isotropo, 43
isotropo, 43

Omotetia, 29
Ortogonalita', 40

PGL, 91
posizione generale, 81
Proiezione, 14
Proiezione (spazi proiettivi), 86
punti fondamentali, 81
punti linearmente indipendenti, 11
Punti uniti e autovalori, 93
punto unita', 81

radicale, 41
rango bilineare, 38
Riferimento, 77
riferimento, 2

schwartz, 57
Sistema di riferimento, 2
Sottospazio affine, 3
Sottospazio generato, 80
Sottospazio proiettivo, 74
Spazi paralleli, 12
spazio
    affine, 1
Spazio affine, 1
Spazio affine euclideo, 67
Spazio affine proiettivo, 94
Spazio proiettivo, 73
Spazio vettoriale euclideo, 56

teorema delle dimensioni, 11
Teorema di Desargues, 20
Teorema di Pappo, 19
Teorema di Talete, 17
Teorema spettrale, 70
Teoremi classici, 16
Teoremi classici (proiettivi), 100
Teoremi duali, 111
traslazione, 23

versore, 59