

# Geometria I

AlpT (@freaknet.org)

May 26, 2009

Copyright ©2007 Andrea Lo Pumo aka AlpT <alpt@freaknet.org>. All rights reserved.

This document is free; you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or (at your option) any later version.

This document is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for more details.

You should have received a copy of the GNU General Public License along with this document; if not, write to the Free Software Foundation, Inc., 675 Mass Ave, Cambridge, MA 02139, USA.

# Contents

|          |                                                 |           |
|----------|-------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Geometria piana</b>                          | <b>1</b>  |
| 1.1      | Segmento . . . . .                              | 1         |
| 1.2      | Retta . . . . .                                 | 1         |
| 1.2.1    | Distanza punto-retta . . . . .                  | 1         |
| 1.2.2    | Distanza retta-retta . . . . .                  | 1         |
| 1.2.3    | Condizioni di parallelismo . . . . .            | 2         |
| 1.2.4    | Condizioni di perpendicolarita' . . . . .       | 2         |
| 1.2.5    | Equazioni parametriche . . . . .                | 3         |
| 1.3      | Asse di un segmento . . . . .                   | 4         |
| 1.4      | Bisettrice . . . . .                            | 4         |
| 1.5      | Sistemi di riferimento . . . . .                | 5         |
| 1.5.1    | Traslazione . . . . .                           | 5         |
| 1.5.2    | Rotazione . . . . .                             | 5         |
| 1.5.3    | Rototraslazione . . . . .                       | 5         |
| <b>2</b> | <b>Geometria proiettiva</b>                     | <b>5</b>  |
| 2.1      | Piano proiettivo . . . . .                      | 6         |
| 2.2      | Coordinate omogenee . . . . .                   | 6         |
| 2.2.1    | Conversione di coordinate . . . . .             | 7         |
| 2.2.2    | Punto improprio di una retta . . . . .          | 8         |
| 2.3      | Equazione di una retta dati due punti . . . . . | 9         |
| <b>3</b> | <b>Coniche</b>                                  | <b>10</b> |
| 3.0.1    | Tipi di coniche . . . . .                       | 10        |
| 3.0.2    | Retta-Conica . . . . .                          | 11        |
| 3.0.3    | Classi di coniche . . . . .                     | 12        |
| 3.1      | Equazioni ridotte e invarianti . . . . .        | 12        |
| 3.2      | Equazione retta tangente . . . . .              | 17        |
| 3.3      | Equazioni canoniche . . . . .                   | 19        |
| 3.3.1    | Parabola . . . . .                              | 19        |
| 3.3.2    | Iperbole e ellisse . . . . .                    | 20        |
| 3.4      | Polarita' . . . . .                             | 21        |
| 3.4.1    | Costruzione della retta polare . . . . .        | 22        |
| 3.4.2    | Diametri e centri . . . . .                     | 24        |
| 3.5      | Ellisse o iperbole . . . . .                    | 24        |
| 3.6      | Parabola . . . . .                              | 28        |
| 3.7      | Circonferenza . . . . .                         | 31        |
| <b>4</b> | <b>Fascio di coniche</b>                        | <b>33</b> |
| 4.1      | Proprieta' del fascio . . . . .                 | 35        |
| 4.2      | Calcolare l'equazione del fascio . . . . .      | 36        |
| 4.2.1    | Dati 4 punti . . . . .                          | 36        |
| 4.2.2    | Dato un fuoco e direttrice . . . . .            | 37        |
| 4.3      | Studio del fascio . . . . .                     | 38        |

|          |                                                   |           |
|----------|---------------------------------------------------|-----------|
| <b>5</b> | <b>Spazio a tre dimensioni</b>                    | <b>38</b> |
| 5.1      | Vettore geometrico . . . . .                      | 39        |
| 5.2      | Condizioni di perp e parall . . . . .             | 40        |
| 5.3      | Piano . . . . .                                   | 40        |
| 5.3.1    | Parallelismo e perpendicolarita' . . . . .        | 41        |
| 5.3.2    | Passante per tre punti . . . . .                  | 41        |
| 5.3.3    | Casi vari . . . . .                               | 42        |
| 5.4      | Retta . . . . .                                   | 42        |
| 5.4.1    | Retta in forma parametrica . . . . .              | 43        |
| 5.4.2    | Parallelismo e perpendicolarita' . . . . .        | 43        |
| 5.4.3    | Piano - Retta . . . . .                           | 43        |
| 5.4.4    | Passante per due punti . . . . .                  | 44        |
| 5.5      | Piano improprio . . . . .                         | 45        |
| 5.6      | Rette sghembe . . . . .                           | 46        |
| 5.7      | Distanze nello spazio . . . . .                   | 47        |
| 5.8      | Quadriche . . . . .                               | 48        |
| 5.9      | Vertice . . . . .                                 | 48        |
| 5.9.1    | Classificazione delle quadriche . . . . .         | 51        |
| 5.10     | Quadrica-retta . . . . .                          | 52        |
| 5.10.1   | Quadrica-piano . . . . .                          | 52        |
| 5.11     | Sfera . . . . .                                   | 52        |
| 5.11.1   | Cerchio assoluto . . . . .                        | 53        |
| 5.12     | Cono . . . . .                                    | 53        |
| 5.12.1   | Cilindro . . . . .                                | 55        |
| 5.12.2   | Proprieta' . . . . .                              | 55        |
| 5.12.3   | Proprieta' analitiche . . . . .                   | 56        |
| 5.13     | Tangente . . . . .                                | 58        |
| 5.14     | Punti iperbolici, ellittici, parabolici . . . . . | 61        |
| 5.14.1   | Tabella riassuntiva . . . . .                     | 63        |
| 5.15     | Sezioni piane - Cono-Cilindro . . . . .           | 63        |
| 5.15.1   | Classificazione . . . . .                         | 63        |
| 5.15.2   | Tipi di coniche . . . . .                         | 64        |
| 5.16     | Sezioni piane - Quadriche non degeneri . . . . .  | 65        |
| 5.16.1   | Ellissoide . . . . .                              | 65        |
| 5.16.2   | Iperboloide . . . . .                             | 65        |
| 5.16.3   | Paraboloide . . . . .                             | 65        |
| 5.17     | Equazioni ridotte e invarianti . . . . .          | 65        |
| 5.17.1   | Equ. ridotte . . . . .                            | 66        |
| 5.17.2   | Equazioni canoniche . . . . .                     | 66        |
| 5.17.3   | Invarianti . . . . .                              | 69        |
| 5.18     | Polare . . . . .                                  | 71        |
| 5.18.1   | Cono-Cilindro circoscritto a $Q$ . . . . .        | 73        |
| 5.19     | Quadriche di rotazione . . . . .                  | 73        |
| 5.20     | Esercizi vari . . . . .                           | 76        |
| 5.21     | Figure di quadriche . . . . .                     | 78        |

# 1 Geometria piana

## 1.1 Segmento

Dato il punto  $A \equiv (x_1, y_1)$  e il punto  $B \equiv (x_2, y_2)$ , la distanza  $\overline{AB}$  e' pari a

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Le coordinate del punto medio M del segmento AB sono:

$$M \equiv \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

## 1.2 Retta

Una retta, nella geometria analitica, puo' essere definita come l'insieme dei punti che soddisfano un'equazione del tipo  $ax + by + c = 0$ , dove  $x, y$  sono le variabili. Esistono due forme per esprimere l'equazione di una retta:

$$ax + by + c = 0 \text{ equ. generale o implicita}$$

$$y = mx + n \text{ equ. esplicita}$$

Le equazioni esplicite non possono descrivere rette nella forma  $ax + c = 0$ . Quindi una retta  $r$  nel piano e':

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$$

### 1.2.1 Distanza punto-retta

Dato il punto  $A \equiv (x_1, y_1)$  e la retta  $r : ax + by + c = 0$ , la distanza da  $A$  a  $r$  e' la lunghezza del segmento perpendicolare a  $r$  che ha un estremo in  $A$ , analiticamente:

$$d(A, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

### 1.2.2 Distanza retta-retta

Se abbiamo due rette  $r \parallel s$ , possiamo calcolare la loro distanza.

Sia  $r : ax + by + c = 0$  e  $s : a'x + b'y + c' = 0$ , poiche' sono parallele,  $(a, b)$  e' proporzionale a  $(a', b')$  (vedi [pg.2, par.1.2.3]).

Dato che  $(a', b') = k(a, b)$ , possiamo riscrivere  $s$  come:

$$a'x + b'y + c' = 0 \Leftrightarrow \frac{a'}{k}x + \frac{b'}{k}y + \frac{c'}{k} = 0 \Leftrightarrow ax + by + c^* = 0$$

allora la distanza  $d(r, s)$  e'

$$d(r, s) = \frac{|c - c^*|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

La dimostrazione consiste nel prendere una della rette  $r$  e applicare la formula della distanza punto-retta con la retta  $s$ .

### 1.2.3 Condizioni di parallelismo

Prendiamo due rette  $r, s$  definite dalle equazioni  $ax+by+c=0$ ,  $a'x+b'y+c'=0$ .  
E calcoliamo la loro intersezione:

$$r \cap s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by+c=0 \wedge a'x+b'y+c'=0\}$$

che quindi equivale al sistema:

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

Le matrici incompleta e completa del sistema sono:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & b & -c \\ a' & b' & -c' \end{pmatrix}$$

CASE:  $|A| \neq 0$

In questo caso, per il teorema di Cramer, il sistema ammette una sola soluzione  $(\alpha, \beta)$ , che descrive il punto di intersezione tra  $r$  e  $s$ .

CASE:  $|A| = 0$

Qui abbiamo che  $rk(A) = 1$ , perche'  $rk(A) = 0$  implicherebbe  $a=0, b=0$ , e dato che  $|A|=0$  non puo' essere  $rk(A) = 2$ . Invece, per  $rk(C)$  abbiamo due ulteriori casi:

$$rk(C) = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

Nel primo caso, per il teorema di Rouché-Capelli, abbiamo che esistono  $\infty$  soluzioni. Geometricamente, questo vuol dire che le due rette  $r$  e  $s$  coincidono, e quindi, per definizione sono parallele.

Nel secondo caso, il sistema non ammette soluzioni ( $rk(A) \neq rk(C)$ ), quindi le due rette non hanno nessun punto in comune, ovvero sono ancora parallele.

In conclusione:

$$r \parallel s \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$$

se le rette si possono scrivere in forma implita  $y = mx + n$ ,  $y = m'x + n'$ , allora la condizione diventa:

$$r \parallel s \Leftrightarrow m = m'$$

cioe' se hanno lo stesso coefficiente angolare.

Se abbiamo il punto  $A \equiv (x_1, y_1)$  e la retta  $r: ax+by+c=0$ , per trovare la retta parallela a  $r$  e passante per  $A$  basta scrivere  $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$  per ottenere la sua equazione.

### 1.2.4 Condizioni di perpendicolarita'

Date due rette  $r, s$  definite dalle equazioni  $ax+by+c=0$ ,  $a'x+b'y+c'=0$ ,

$$r \perp s \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$$

se le rette si possono scrivere in forma implita  $y = mx + n$ ,  $y = m'x + n'$ , allora la condizione diventa:

$$r \perp s \Leftrightarrow mm' = -1$$

Se abbiamo il punto  $A \equiv (x_1, y_1)$  e la retta  $r : ax + by + c = 0$ , per trovare la retta perpendicolare a  $r$  e passante per  $A$  basta scrivere  $-b(x - x_1) + a(y - y_1) = 0$  per ottenere la sua equazione.

### 1.2.5 Equazioni parametriche

Dati due punti  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ , l'equazione della retta passante per essi e' :

$$(y_1 - y_0)(x - x_0) = (x_1 - x_0)(y - y_0)$$

Infatti, sostituendo  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  l'equazione e' soddisfatta. Equivalentemente:

1. Se  $x_0 \neq x_1$ ,  $y_0 \neq y_1$ :

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

2. Se  $x_0 = x_1$ :

$$x = x_0$$

3. Se  $y_0 = y_1$ :

$$y = y_0$$

In ogni caso possiamo scrivere l'equazione della retta in forma parametrica:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + k(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + k(y_1 - y_0) \end{cases}$$

Per passare da una forma all'altra, basta introdurre o risolvere il parametro  $k$ . Possiamo aggiungere nel sistema un numero arbitrario di parametri, introduciamo allora  $h$ :

$$\begin{cases} x = x_0(1 - k) + kx_1 \\ y = y_0(1 - k) + ky_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = hx_0 + kx_1 \\ y = hy_0 + ky_1 \\ h = 1 - k \Leftrightarrow 1 = h + k \end{cases}$$

a questo punto possiamo esprimere questo sistema usando le matrici:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Per convenienza:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$X = hX_0 + kX_1$$

Questa modo di esprimere l'equazione della retta e' chiamata "forma compatta".

### 1.3 Asse di un segmento

Dati i due punti  $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ , l'asse del segmento  $AB$  e' la retta perpendicolare alla retta  $AB$  e passante per il punto medio di  $AB$ .

Esiste un teorema che dice che l'asse e' il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento, quindi se l'asse lo chiamiamo  $r$  abbiamo:

$$P \in r \Leftrightarrow PA = PB$$

con  $P = (x, y)$  analiticamente diventa:

$$\sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

e quindi elevando al quadrato e semplificando otteniamo l'equazione di  $r$ :

$$r : 2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y + x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 = 0$$

### 1.4 Bisettrice

Date due rette  $r, s$  di equazioni  $ax + by + c = 0, a'x + b'y + c' = 0$ , le loro bisettrici  $b_1, b_2$  sono quelle rette che dividono i due angoli che  $r, s$  formano in parti uguali. Le bisettrici sono caratterizzate dal luogo dei punti che hanno ugual distanza

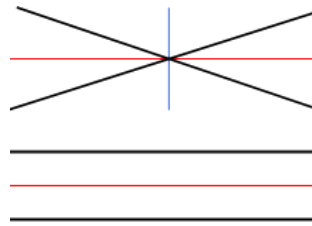


Figure 1: bisettrici

da  $r$  e da  $s$ . Quindi, dette  $p_1, p_2$  le due bisettrici di  $r, s$ ,

$$P \in p_1 \vee P \in p_2 \Leftrightarrow Pr = Ps$$

analiticamente, con  $P = (x, y)$ :

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

per "eliminare" il valore assoluto basta considerare questa proprieta':

$$|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$$

e quindi si avranno due equazioni di rette, e piu' precisamente abbiamo che  $Ax + By + C = 0$  rappresenta l'equazione delle bisettrici, con:

$$A = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \pm \frac{a'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}, B = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \pm \frac{b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}, C = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \pm \frac{c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

**Osservazione:** se avessimo tolto il valore assoluto elevando al quadrato ambo i membri, avremmo ottenuto un'equazione di secondo grado del tipo

$ax^2+by^2+\dots$ , ovvero una conica. Questa conica descrive contemporaneamente tutte e due le bisettrici, ovvero descrive  $r \cup s$ . Per trovare le due equazioni sarebbe stato sufficiente risolvere ad una incognita. Questa situazione e' un caso particolare di un fatto piu' generale: se abbiamo un polinomio  $f(x)$  che descrive una curva  $c_1$  e un polinomio  $g(x)$  che descrive  $c_2$ ,  $f(x)g(x) = 0$  e' l'equazione che descrive  $c_1 \cup c_2$  perche'  $f(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \vee g(x) = 0$ .

## 1.5 Sistemi di riferimento

### 1.5.1 Traslazione

Se abbiamo due sistemi di riferimento  $xOy$  e  $X\Omega Y$ , con  $\Omega \equiv (a, b)$ , dove  $(a, b)$  e' un punto rispetto a  $xOy$ , le equazioni che legano i due sistemi sono:

$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$$

### 1.5.2 Rotazione

Se abbiamo due sistemi, aventi la stessa origine, l'uno ruotato rispetto all'altro di un angolo  $\Theta$ , le equazioni che li legano sono:

$$\begin{cases} x = X \cos \Theta - Y \sin \Theta \\ y = X \sin \Theta + Y \cos \Theta \end{cases}$$

### 1.5.3 Rototraslazione

Possiamo combinare sia la traslazione che la rotazione (non importa in che ordine), ottenendo:

$$\begin{cases} x = a + X \cos \Theta - Y \sin \Theta \\ y = b + X \sin \Theta + Y \cos \Theta \end{cases}$$

dove  $xOy$  e  $X\Omega Y$ , con  $\Omega \equiv (a, b)$ , sono i due sistemi di riferimento.

## 2 Geometria proiettiva

La geometria proiettiva e' l'estensione delle geometria affine (quella che abbiamo considerato fino adesso). E' costruita aggiungendo la definizione di punto improprio.

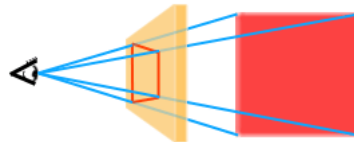


Figure 2: La geometria proiettiva e' la geometria vista da un occhio

## 2.1 Piano proiettivo

Limitiamoci a un piano. Associamo a ogni fascio di rette parallele del piano un punto, che non appartiene al piano, e che chiamiamo punto improprio. In altri termini, il punto improprio di una retta e' la sua direzione.

Se prendiamo allora tutti i punti impropri di un piano, nasce la retta impropria, chiamata anche retta all'infinito:

$$r_\infty = \{\text{punti impropri del piano}\}$$

Nella geometria proiettiva il V postulato di Euclide non vale piu', infatti, non esistono rette parallele, dato che tutte le rette hanno un punto in comune (o proprio o improprio).

Nella geometria affine si distinguono due casi di fasci di rette (il fascio di retta parallele e il fascio di rette passanti per un punto), in quella proiettiva esiste solo il fascio di rette che condividono uno stesso punto (o proprio o improprio).

L'insieme dei punti propri e impropri del piano costituisce il piano proiettivo e si indica con  $\mathcal{P}^2$ .

## 2.2 Coordinate omogenee

Diamo adesso un'interpretazione analitica al piano proiettivo.

Il piano della geometria analitica euclidea e' definito come

$$\text{Piano} := \mathbb{R}^2$$

Come piano proiettivo, adotteremo il seguente insieme quoziente:

$$\mathcal{P}^2 := (\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}) / \mathcal{R}$$

dove  $\mathcal{R}$  e' la seguente relazione di equivalenza:

$P$  una tripletta  $(x, y, t)$  tenendo conto di questa relazione:

$$(x_1, y_1, t_1) \sim (x_2, y_2, t_2) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (x_1, y_1, t_1) = \alpha(x_2, y_2, t_2)$$

Ovvero, terne proporzionali individuano lo stesso punto.

$\alpha$  deve essere diverso da zero, altrimenti tutti i punti sarebbero uguali a  $(0, 0, 0)$  e sempre per questo motivo il punto  $(0, 0, 0)$  non e' incluso nel piano proiettivo.

**Osservazione:** in altre parole,  $\mathcal{P}^2$  e' lo spazio euclideo a tre dimensioni, privato dell'origine, in cui punti appartenenti a una stessa retta passante per l'origine sono equivalenti. O ancora: una retta dello spazio, passante per l'origine, individua un punto del piano proiettivo, e viceversa. Vedi figura [pg.7, par.3].

**Definition 2.1.**

$$(x, y, t) \text{ e' un punto proprio } \Leftrightarrow \exists \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R} : (x, y, t) = (t\bar{x}, t\bar{y}, t) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \bar{x}t \\ y = \bar{y}t \end{cases}$$

I punti propri si caratterizzano nel modo seguente:

$$P = (x, y, t) \text{ punto proprio } \Leftrightarrow t \neq 0$$

di conseguenza

$$P = (x, y, t) \text{ punto improprio } \Leftrightarrow t = 0$$

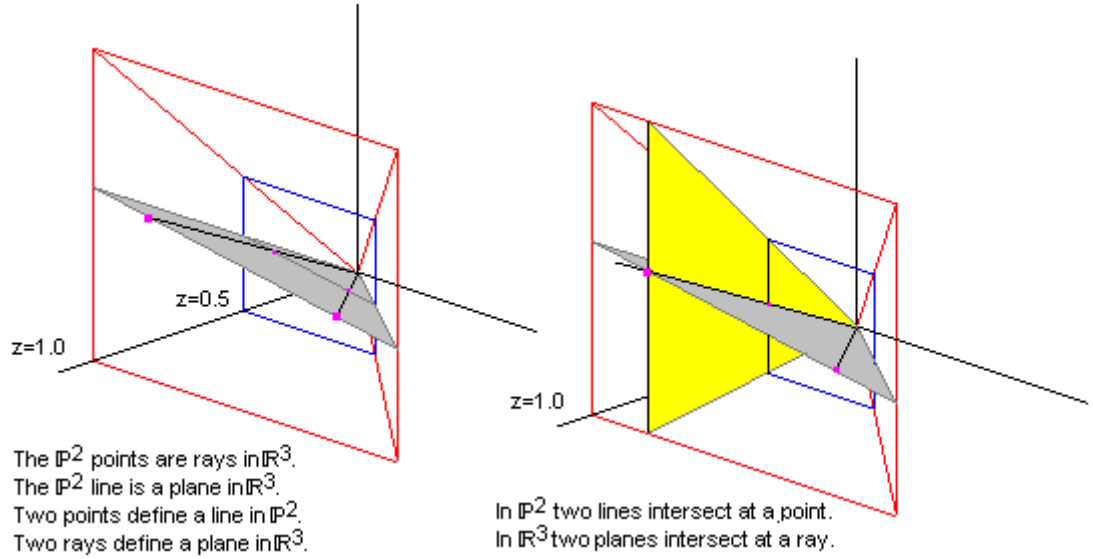


Figure 3: Il piano proiettivo e lo spazio

**Definition 2.2.** La retta impropria e' l'insieme di tutti i punti impropri:

$$r_\infty := \{(x, y, t) \in \mathcal{P}^2 \mid t = 0\}$$

quindi e' definita dall'equazione  $t = 0$ .

### 2.2.1 Conversione di coordinate

Per quanto detto, a ogni punto del piano possiamo associare un punto proprio del piano proiettivo:

$$(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow (\bar{x}t, \bar{y}t, t), t \neq 0$$

ricordando sempre che  $(\bar{x}t, \bar{y}t, t)$  e' il rappresentante di una classe d'equivalenza, ovvero  $(\bar{x}t, \bar{y}t, t) \sim k(\bar{x}t, \bar{y}t, t), \forall k \neq 0$ .

Quindi, per la conversione di coordinate:

- se abbiamo  $P \equiv (\bar{x}, \bar{y})$ , tutti i punti equivalenti a  $P$  in  $\mathcal{P}^2$  sono  $(k\bar{x}, k\bar{y}, k)$  al variare di  $k \neq 0$ , quindi per convenienza possiamo prendere direttamente  $(\bar{x}, \bar{y}, 1)$ .
- Viceversa, dato  $(x, y, t)$ , con  $t \neq 0$ ,  $(\frac{x}{t}, \frac{y}{t})$  sara' il punto corrispondente del piano. Infatti, poiche'  $(x, y, t)$  e' proprio,  $\exists \bar{x}, \bar{y} : (x, y, t) = (\bar{x}t, \bar{y}t, t)$ . Osservando che  $(\bar{x}t, \bar{y}t, t) \sim (\bar{x}, \bar{y}, 1)$ , possiamo dare la regola pratica per passare dalle coordinate omogenee a quelle ordinarie: basta ricondursi alla forma del tipo  $(\bar{x}, \bar{y}, 1)$  e considerare  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

Scriviamo una retta in coordinate omogenee. Data la retta del piano

$$r = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0\}$$

considerando che  $(\bar{x}, \bar{y}) \sim (\bar{x}t, \bar{y}t, t) = (x, y, t) \quad \forall t \neq 0, \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}$ , avremo

$$r = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0\} \simeq \{(x, y, t) \in \mathcal{P}^2 \mid t \neq 0, a\frac{x}{t} + b\frac{y}{t} + c = 0 \Leftrightarrow ax + by + ct = 0\}$$

Viceversa,

$$\{(x, y, t) \in \mathcal{P}^2 \mid t \neq 0, ax + by + ct = 0\} \simeq \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid a\bar{x}t + b\bar{y}t + ct = 0 \Leftrightarrow a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0\} = r$$

Nella pratica, per scrivere l'equazione omogenea, si utilizzano le stesse indeterminate dell'equazione ordinaria, quindi nel nostro caso avremo:

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0 \longleftrightarrow a\bar{x} + b\bar{y} + ct = 0$$

In generale, la regola pratica per convertire un'equazione non omogenea in una omogenea e': moltiplicare ogni monomio dell'equazione per una costante  $t^c$ , in modo tale da ottenere monomi che hanno tutti lo stesso grado, ad esempio:

$$x^3 + 3x^2y - y^2 + 2x - y + 1 = 0 \longrightarrow x^3 + 3x^2y - y^2t + 2xt^2 - yt^2 + t^3 = 0$$

per il viceversa basta sostituire  $t = 1$ .

### 2.2.2 Punto improprio di una retta

Il punto improprio associato ad una retta  $ax + by + c = 0$  e'  $(-b, a, 0)$ , o equivalentemente  $(b, -a, 0)$ .

(1)1. Dimostriamolo geometricamente

Prima abbiamo visto che a ogni punto  $(x, y)$  del piano possiamo associare biunivocamente un punto proprio  $(x, y, 1)$  del piano proiettivo<sup>1</sup>. Questo significa che avanzano i punti impropri. Possiamo allora dire per definizione, che a ogni retta corrisponde un punto improprio e che a rette parallele corrisponde lo stesso punto improprio.

Quindi, data la retta  $r : ax + by + c = 0$ , ogni sua retta parallela deve avere il suo stesso punto improprio. Se consideriamo la retta parallela a  $r$  e passante per l'origine, cioe'  $ax + by = 0$ , abbiamo che  $(b, -a, 0)$  e' una sua soluzione, cosi' come  $(kb, -ka, 0)$ , al variare di  $k$ .  $\square$

(1)2. Dimostriamolo facendo uso della retta impropria

Il punto improprio di una retta, essendo improprio, appartiene all'insieme di tutti i punti impropri, ovvero a  $r_\infty$ . Abbiamo gia' visto che:

$$r_\infty := \{(x, y, t) \in \mathcal{P}^2 \mid t = 0\}$$

Scriviamo la retta  $r : ax + by + c = 0$  in coordinate omogenee:  $ax + by + ct = 0$ . Adesso basta trovare l'intersezione di  $r$  con la retta impropria e quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} ax + by + ct = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

dove  $t = 0$  e' l'equazione della retta impropria.

$$\begin{cases} ax + by + ct = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, troviamo le infinite soluzioni  $(kb, -ka, 0)$ .  $\square$

<sup>1</sup>tenendo presente che  $(x, y, 1) \sim k(x, y, 1)$

Dal punto improprio  $(b, -a, 0)$  possiamo calcolare il coeff. angolare se  $b \neq 0$ : infatti,  $(1, -\frac{a}{b}, 0)$  individua lo stesso punto di  $(b, -a, 0)$ , e  $-\frac{a}{b}$  e' il coeff. angolare.

La regola pratica per trovare il punto improprio di una curva consiste nell'eliminare dalla sua equazione tutti i monomi che non hanno grado massimo, ad esempio:

$$\begin{aligned} ax + by + t &= 0 \longrightarrow ax + by = 0 \\ x^3 + 3x^2y - y^2 + 2x - y + 1 &= 0 \longrightarrow x^3 + 3x^2y = 0 \end{aligned}$$

e trovare le soluzioni omogenee del tipo  $(x, y, 0)$ , ad esempio:

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \text{ e' soddisfatta da } (-b, a, 0) \\ x^3 + 3x^2y &= 0 \Rightarrow x^2(x + 3y) = 0 \\ \begin{cases} x^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} &\vee \begin{cases} x = -3y \\ t = 0 \end{cases} \\ (0, k, 0) &= (0, 1, 0) \vee (-3h, h, 0) = (-3, 1, 0) \end{aligned}$$

$Y_\infty \equiv (0, k, 0) = (0, 1, 0)$  e' il punto improprio dell'asse  $y$

$X_\infty \equiv (k, 0, 0) = (1, 0, 0)$  e' il punto improprio dell'asse  $x$

$O_\infty \equiv (0, 0, k) = (0, 0, 1)$  e' l'origine di coordinate omogenee.

### 2.3 Equazione di una retta dati due punti

CASE:  $A, B$  punti impropri

Allora la retta  $AB$  e' la retta impropria, quindi l'equazione e':

$$t = 0$$

CASE:  $A$  proprio,  $B$  improprio

$$B = (b, a, 0)$$

$$A = (x_0, y_0)$$

L'equazione e':

$$a(x - x_0) = b(y - y_0)$$

O equivalentemente:

$$B = (b, -a, 0)$$

$$A = (x_0, y_0)$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Infatti, per quanto detto in precedenza, il punto improprio della retta e'  $(b, -a)$ . Inoltre, l'equazione e' soddisfatta da  $A$ .

CASE:  $A, B$  proprio

$$A = (x_0, y_0, 1)$$

$$B = (x_1, y_1, 1)$$

$$C = B - A = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, 0)$$

Quindi si applica il caso precedente per i punti  $A, C$  e si ha:

$$(y_1 - y_0)(x - x_0) = (x_1 - x_0)(y - y_0)$$

Nota:  $C$  e' il punto improprio della retta.

### 3 Coniche

Una conica e' il luogo dei punti descritto da un'equazione di secondo grado a due incognite:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

la sua forma omogenea e'

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = 0 \quad (2)$$

Sia

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

una matrice simmetrica, cioe'  $a_{ij} = a_{ji}$ . Poniamo

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix}$$

allora

$$({}^tX)AX = 0 \Leftrightarrow (1)$$

e

$$({}^tY)AY = 0 \Leftrightarrow (2)$$

#### 3.0.1 Tipi di coniche

Distinguiamo 6 diversi tipi di coniche:

1. Le ellissi, come ad esempio  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$
2. Le parabole,  $x^2 - y = 0$
3. Le iperboli,  $x^2 - y^2 = 1$

questi primi quattro si chiamano *coniche non spezzate*, perche' i polinomi che le generano sono irriducibili.

1. Unione di due rette distinte, ad esempio

$$x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x - (y-1))}_{\text{retta } r} \underbrace{(x + (y-1))}_{\text{retta } s} = 0$$

2. Unione di due rette coincidenti:

$$(x + y + 1)^2 = 0$$

3. Unione di due rette immaginarie coniugate:

$$x^2 + 4y^2 = 0; \Leftrightarrow (x - 2iy)(x + 2iy) = 0$$

Nota: l'intersezione di due rette immaginarie e' un punto reale.

### 3.0.2 Retta-Conica

I punti di intersezione tra una retta e una conica sono i punti che risolvono il seguente sistema:

$$\begin{cases} ({}^tX)AX = 0 \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases}$$

dove la prima equazione e' quella di una conica e la seconda quella di una retta (vedi [pg.3,par.1.2.5]). Possono essere sia in coordinate omogenea che in coordinate non omogenea. Risolviamo il sistema nelle incognite  $\lambda, \mu$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} ({}^tX)AX = 0 \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} ({}^t(\lambda X_0 + \mu X_1))A(\lambda X_0 + \mu X_1) = 0 \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} \lambda {}^tX_0 A \lambda X_0 + \lambda {}^tX_0 A \mu X_1 + \mu {}^tX_1 A \lambda X_0 + \mu {}^tX_1 A \mu X_1 = 0 \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \begin{cases} \lambda^2 ({}^tX_0 A X_0) + \mu^2 ({}^tX_1 A X_1) + \lambda \mu ({}^tX_0 A X_1) + \lambda \mu ({}^tX_1 A X_0) = 0 \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases} & \\ {}^t(X_0 A X_1) = {}^tX_1 {}^tA X_0 = {}^tX_1 A X_0 \quad [A \text{ e' una mat. sym}] & \\ {}^t(X_0 A X_1) = ({}^tX_0 A X_1) \quad [\text{perche' } ({}^tX_0 A X_1) \text{ e' una mat. } 1 \times 1] & \\ \Rightarrow {}^tX_0 A X_1 = {}^tX_1 A X_0 & \\ \begin{cases} \lambda^2 ({}^tX_0 A X_0) + \mu^2 ({}^tX_1 A X_1) + 2\lambda \mu ({}^tX_0 A X_1) = 0 \quad (1) \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \quad (2) \end{cases} & \end{aligned}$$

Dall'equazione (1), al variare di  $\mu$ , possiamo ricavarci  $\lambda$  e sostituirla in (2), ricavando cosi' i punti d'intersezione  $X$ . Quindi, se consideriamo  $\lambda$  come incognita, (1) diventa un'equazione di secondo grado e nascono tre casi:

CASE:  $\Delta > 0$

Allora la conica si interseca con la retta in due punti reali e distinti.

CASE:  $\Delta = 0$

Allora la conica si interseca con la retta in due punti reali e coincidenti.

CASE:  $\Delta < 0$

In questo caso si intersecano in due punti immaginari e coniugati.

Si puo' anche verificare un caso in cui risolvendo il sistema si ottiene un'identita', come ad esempio:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x = y \end{cases}$$

In questo caso, tutti i punti che soddisfano la retta  $x = y$  soddisfano la curva  $x^3 - y^3$ , in altre parole tutta la retta e' contenuta nella curva.

**Theorem 3.1.** Data una conica  $\Gamma$  e una retta  $r$ , si ha

$$r \cap \Gamma = r \quad \vee \quad r \cap \Gamma = 2 \text{ punti}$$

**Corollary 3.2.** Se  $\Gamma$  non e' spezzata  $\Rightarrow r \cap \Gamma = 2 \text{ punti}$

**Definition 3.1.** Definizione di retta  $r$ , tangente a una conica  $\Gamma$ , non spezzata, in un punto  $P_0$ :

$$r \text{ e' tangente a } \Gamma \text{ in } P_0 \Leftrightarrow r \cap \Gamma = \{P_0, P_0\}$$

Cioe' se  $r$  incontra  $\Gamma$  in un punto "contato due volte" <sup>2</sup>.

La tangente a una conica in un punto improprio si chiama *asintoto*

### 3.0.3 Classi di coniche

Data la conica  $\Gamma$ , non spezzata

$\Gamma \equiv$  ellisse  $\Leftrightarrow \Gamma \cap r_\infty = 2$  punti immaginari coniugati

$\Gamma \equiv$  iperbole  $\Leftrightarrow \Gamma \cap r_\infty = 2$  punti reali e distinti

$\Gamma \equiv$  iperbole equilatera  $\Leftrightarrow \Gamma \cap r_\infty = 2$  punti reali e distinti, perpendicolari fra loro(\*)

$\Gamma \equiv$  parabola  $\Leftrightarrow \Gamma \cap r_\infty = 2$  punti reali coincidenti

(\*) ovvero, due punti impropri che individuano rette perpendicolari fra loro.

1. Data una parabola  $\mathcal{P}$ ,  $\exists$  una retta  $r$  detta direttrice,  $\exists$  un punto proprio  $F$ ,  $F \notin r$  detto fuoco tale che:

$$P \in \mathcal{P}, \text{ proprio} \Leftrightarrow \overline{PF} = \overline{Pr}$$

2. Data un'ellisse  $\mathcal{E}$ ,  $\exists$  i punti  $F_1, F_2$ , chiamati fuochi tale che:

$$P \in \mathcal{E}, \text{ proprio} \Leftrightarrow \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = k$$

Se  $F_1 = F_2$  allora si avra' un cerchio.

3. Data un'iperbole  $\mathcal{I}$ ,  $\exists$  i punti  $F_1, F_2$ , chiamati fuochi tale che:

$$P \in \mathcal{I}, \text{ proprio} \Leftrightarrow |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = k$$

Data la conica  $\Gamma$  spezzata

$\Gamma \equiv$  due rette immaginarie distinte  $\Leftrightarrow \Gamma \cap r_\infty = 2$  punti immaginari coniugati

$\Gamma \equiv$  due rette reali distinte  $\Leftrightarrow \Gamma \cap r_\infty = 2$  punti reali e distinti

$\Gamma \equiv$  due rette reali coincidenti  $\Leftrightarrow \Gamma \cap r_\infty = 2$  punti reali coincidenti

## 3.1 Equazioni ridotte e invarianti

**Theorem 3.3.** *Data una conica*

$$\Gamma : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

esiste almeno un sistema di riferimento  $X\Omega Y$  rispetto al quale  $\Gamma$  si puo' scrivere in una delle seguenti forme:

$$\alpha_{11}X^2 + \alpha_{22}Y^2 + \alpha_{33} = 0$$

$$\alpha_{11}X^2 + 2\alpha_{23}Y = 0$$

---

<sup>2</sup>in questi appunti usiamo  $\tan(\Gamma, \text{ in } Q_0, Q_1, \dots, \text{ per } P_0, P_1, \dots)$  per indicare le rette tangenti a  $\Gamma$  nei punti  $Q_0, Q_1, \dots$ , e passanti per i punti  $P_0, P_1, \dots$ ,

**Theorem 3.4.** *Data una conica*

$$\Gamma : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

*in qualsiasi sistema di riferimento  $X\Omega Y$ , le seguenti caratteristiche dell'equazione restano invariate:*

1.  $r(A)$ , la caratteristica di  $A$ .
2.  $\det A$ .
3.  $A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ , il complemento algebrico di posto  $(3,3)$ .
4.  $I = a_{11} + a_{22}$ , la somma dei primi due elementi della diagonale principale di  $A$ .

**Theorem 3.5.** *Proprieta' dell' $A_{33}$ :*

- $A_{33} > 0 \Leftrightarrow \Gamma$  ha 2 punti impropri immaginari e coniugati, ovvero puo' essere o l'unione di due rette immaginarie distinte oppure un'ellisse
- $A_{33} < 0 \Leftrightarrow \Gamma$  ha 2 punti impropri reali e distinti, ovvero puo' essere o l'unione di due rette reali distinte oppure un'iperbole
- $A_{33} = 0 \Leftrightarrow \Gamma$  ha 2 punti impropri reali e coincidenti, ovvero puo' essere l'unione di due rette reali coincidenti oppure una parabola; oppure  $r_\infty \subseteq \Gamma$ .

**Proof:** Per il thm [pg.12, par.3.3], possiamo scrivere qualsiasi conica in una delle seguenti forme:

$$\alpha_{11}X^2 + \alpha_{22}Y^2 + \alpha_{33} = 0$$

$$\alpha_{11}X^2 + 2\alpha_{23}Y = 0$$

Limitiamoci al primo caso. Abbiamo che

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$A_{33} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

(1)1. Dim per  $A_{33} > 0$

Se  $A_{33} > 0$  allora  $\alpha_{11}\alpha_{22} > 0$ , quindi  $\alpha_{11}$  e  $\alpha_{22}$  sono concordi. Consideriamo l'intersezione  $r_\infty \cap \Gamma$ , in coordinate omogenee:

$$\begin{cases} \alpha_{11}X^2 + \alpha_{22}Y^2 + \alpha_{33}t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{11}X^2 + \alpha_{22}Y^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Poiche'  $\alpha_{11}$  e  $\alpha_{22}$  sono concordi, (1) e' somma di quadrati e quindi e' irriducibile. Questo significa che le soluzioni sono immaginarie e coniugate.  $\square$

(1)2. Dim per  $A_{33} < 0$

Rifacendo lo stesso ragionamento di prima, notiamo che  $\alpha_{11}$  e  $\alpha_{22}$  sono discordi, e quindi  $\alpha_{11}X^2 + \alpha_{22}Y^2$  diventa una differenza di quadrati, ovvero  $\alpha_{11}X^2 + \alpha_{22}Y^2$  e' riducibile in  $R[x, y]$  e quindi la (1) ha due soluzioni reali e distinte.  $\square$

(1)3. Dim per  $A_{33} = 0$

$\alpha_{11}\alpha_{22} = 0$ . Distinguiamo i vari casi:

CASE:  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$

il sistema diventa

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

e quindi  $r_\infty \subseteq \Gamma$   $\square$

CASE:  $\alpha_{11} = 0, \alpha_{22} \neq 0$

il sistema diventa

$$\begin{cases} Y^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi:  $(x, 0, 0), (x, 0, 0)$ . Ovvero due punti reali e coincidenti.

CASE:  $\alpha_{11} \neq 0, \alpha_{22} = 0$

e' analogo a quello di sopra.

Se, invece, la conica e' della forma

$$\alpha_{11}X^2 + 2\alpha_{23}Y = 0$$

allora

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{23} \\ 0 & \alpha_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{32} = \alpha_{23}$$

e quindi

$$A_{33} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

poiche'  $A_{33}$  ha det uguale a zero, dobbiamo considerare solo un caso.

(2)1. Dim  $A_{33} = 0$

CASE:  $\alpha_{11} = 0$

allora il sistema d'intersezione con  $r_\infty$  diventa:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

e quindi  $r_\infty \subseteq \Gamma$

CASE:  $\alpha_{11} \neq 0$

il sistema diventa

$$\begin{cases} \alpha_{11}X^2 + \alpha_{23}Yt = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

e quindi abbiamo due sol. reali e distinte.  $\square$

(1)4. Dim  $\Leftarrow$

Supponiamo che  $\Gamma \cap r_\infty$  in due punti reali e distinti. Se per assurdo  $A_{33} = 0$ , per quanto visto, avremo  $\Gamma \cap r_\infty$  in due punti reali e coincidenti, assurdo. Se per assurdo  $A_{33} > 0$ , avremo due punti img. Quindi, per esclusione  $A_{33} < 0$ . In modo analogo si procede per gli altri casi.

**Corollary 3.6.** *Se  $\Gamma$  non e' spezzata,*

- $A_{33} > 0 \Leftrightarrow \Gamma$  e' un ellisse.

- $A_{33} < 0 \Leftrightarrow \Gamma$  e' un'iperbole.
- $A_{33} = 0 \Leftrightarrow \Gamma$  e' una parabola.

**Theorem 3.7.**  $I = 0 \Rightarrow r_\infty \subseteq \Gamma \vee \Gamma$  ha due punti impropri reali e distinti che individuano rette  $\perp$  tra loro.

**Proof:**

Per il thm [pg.12, par.3.3], possiamo scrivere qualsiasi conica in una delle seguenti forme:

$$\alpha_{11}X^2 + \alpha_{22}Y^2 + \alpha_{33} = 0 \quad (1)$$

$$\alpha_{11}X^2 + 2\alpha_{23}Y = 0 \quad (2)$$

CASE: (1)  
abbiamo che

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

e quindi  $I = \alpha_{11} + \alpha_{22}$ . Per Hp  $I = 0$ , allora  $\alpha_{11} = -\alpha_{22}$ . Consideriamo  $r_\infty \cap \Gamma$ :

$$\begin{cases} \alpha_{11}X^2 + \alpha_{22}Y^2 + \alpha_{33}t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Se  $\alpha_{11} = -\alpha_{22} = 0$  allora  $r_\infty \subseteq \Gamma$ , altrimenti se  $\alpha_{11} = -\alpha_{22} \neq 0$  abbiamo

$$\begin{cases} \alpha_{11}X^2 + \alpha_{22}Y^2 + \alpha_{33}t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - Y^2 + \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{11}}t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - Y^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0$$

le soluzioni sono  $(x, x, 0)$ ,  $(x, -x, 0)$  che sono la stessa cosa di  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, -1, 0)$ .

Quindi abbiamo due punti impropri reali e perpendicolari fra loro (perche'  $(m = 1) \cdot (m' = -1) = -1$ )

CASE: (2)

siamo in questa situazione:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{23} \\ 0 & \alpha_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{32} = \alpha_{23}$$

e quindi  $I = \alpha_{11} = 0$ , allora  $r_\infty \cap \Gamma$  e':

$$\begin{cases} 2\alpha_{23}Yt = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

quindi  $r_\infty \subseteq \Gamma$  □

**Corollary 3.8.** Se  $\Gamma$  non e' spezzata,  $I = 0 \Rightarrow \Gamma$  e' una iperbole equilatera.

**Theorem 3.9.** Sia  $r(A)$  il rango della matrice simmetrica  $A$  della conica  $\Gamma$ , allora

- $r(A) = 1 \Leftrightarrow$  la conica si spezza in due rette coincidenti
- $r(A) = 2 \Leftrightarrow$  la conica si spezza in due rette distinte
- $r(A) = 3 \Leftrightarrow$  la conica non si spezza

**Proof:**

(1)1.  $r(A) = 1 \Rightarrow \Gamma = r = s$

CASE: la conica e' nella forma  $\alpha_{11}X^2 + \alpha_{22}Y^2 + \alpha_{33} = 0$   
 Abbiamo che

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

$A$  e' una matrice ridotta, dato che tutti i suoi elementi sono speciali. Poiche'  $r(A)$  e' il numero di elementi speciali, e per Hp  $r(A) = 1$ , almeno due elementi devono essere nulli. Quindi le tre possibili equazioni sono:

$$X^2 = 0 \vee Y^2 = 0 \vee t^2 = 0$$

in ogni caso abbiamo che  $\Gamma$  si spezza in due rette coincidenti.

CASE: la conica e' nella forma  $\alpha_{11}X^2 + 2\alpha_{23}Y = 0$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{23} \\ 0 & \alpha_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{32} = \alpha_{23}$$

Poiche'  $\alpha_{32} = \alpha_{23}$  e poiche' due elementi speciali devono essere nulli (dato che  $r(A) = 1$ ), l'unica possibilita' e' che sia  $\alpha_{32} = \alpha_{23} = 0$ , quindi l'equazione diventa  $X^2 = 0$ . In conclusione, anche in questo caso abbiamo due rette coincidenti.  $\square$

(1)2.  $r(A) = 2 \Rightarrow \Gamma$  si spezza in  $r \neq s$

Se la conica e' nella prima forma, un elemento speciale di  $A$  deve essere nullo e quindi un termine di  $\alpha_{11}X^2 + \alpha_{22}Y^2 + \alpha_{33} = 0$  deve essere nullo. In ogni caso, l'equazione diventa o somma o differenza di quadrati e quindi la conica si spezza in due rette distinte (che possono essere o immaginarie o reali).

Se invece la conica e' nella forma  $\alpha_{11}X^2 + 2\alpha_{23}Y = 0$ ,  $A$  e'

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{23} \\ 0 & \alpha_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{32} = \alpha_{23}$$

poiche'  $\alpha_{32} = \alpha_{23}$  e  $r(A) = 2$ , l'unica possibilita' che rimane e'  $\alpha_{11} = 0$ , quindi abbiamo

$$2\alpha_{23}Yt = 0 \Leftrightarrow Yt = 0 \Leftrightarrow (Y = 0 \vee t = 0)$$

e quindi si spezza nell'unione della retta impropria e dell'asse  $X$   $\square$

Adesso dimostriamo il viceversa dei casi fin'ora considerati, cosi', per esclusione, dimostreremo automaticamente  $r(A) = 3$ .

(1)3.  $\text{Dim } r(A) = 1 \Leftarrow \Gamma = r = s$

Abbiamo due rette coincidenti  $r, s$  in cui  $\Gamma$  e' spezzata. Prendiamo la retta  $r$  e una qualsiasi sua perpendicolare. A partire da questo nuovo sistema di riferimento scriviamo l'equazione della conica:

$$Y^2 = 0$$

allora

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi  $r(A) = 1$ . Poiche'  $r(A)$  e' un invariante, questo vale per tutti i sistemi di riferimento.

Se le due rette coincidenti sono  $r_\infty \equiv r_\infty$ , allora abbiamo  $t^2 = 0$  e quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

(1)4.  $\text{Dim } r(A) = 2 \Leftarrow \Gamma$  si spezza in  $r \neq s$

Distinguiamo tre casi

CASE:  $r = r_\infty$

Consideriamo  $s$  come l'asse  $X$  e prendendo un suo punto qualsiasi, costruiamo l'asse  $Y$ . In questo nuovo sistema di riferimento l'equazione di  $\Gamma$  diventa:

$$Yt = 0$$

Quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

CASE:  $r \neq s, r \parallel s$

Costruiamo la retta equidistante da  $r$  e da  $s$  e chiamiamola  $X$ . Scegliendo un qualsiasi punto di  $X$  costruiamo l'asse  $Y$ . In questo nuovo sistema di riferimento l'equazione di  $r$  e'  $Y = -k$  e di  $s$ :  $Y = k$ , quindi l'equ di  $\Gamma$ :

$$(Y - k)(Y + k) = Y^2 - k^2 = 0$$

e quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k^2 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

CASE:  $r$  incidente a  $s$

Prendiamo le bisettrici di entrambe le rette, una la usiamo come  $X$  e l'altra come  $Y$ . L'equazione di  $r$  diventa allora  $Y = mX$  mentre quella di  $s$ :  $Y = -mX$ , quindi

$$\Gamma: (Y - mX)(Y + mX) = Y^2 - m^2X^2 = 0$$

e quindi

$$A = \begin{pmatrix} -m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

□

Poiche' abbiamo visto che

- $r(A) = 1 \Leftrightarrow$  la conica si spezza in due rette coincidenti
- $r(A) = 2 \Leftrightarrow$  la conica si spezza in due rette distinte

per esclusione otteniamo:  $r(A) = 3 \Leftrightarrow$  la conica non si spezza

**Corollary 3.10.** Poiche'  $r(A) = 3 \Leftrightarrow |A| \neq 0$ , per il cor [pg.14,par.3.6] si ha

- $|A| \neq 0 \wedge A_{33} > 0 \Leftrightarrow \Gamma$  e' un ellisse.
- $|A| \neq 0 \wedge A_{33} < 0 \Leftrightarrow \Gamma$  e' un iperbole.
- $|A| \neq 0 \wedge A_{33} = 0 \Leftrightarrow \Gamma$  e' una parabola.

### 3.2 Equazione retta tangente

In [pg.11,par.3.1] abbiamo dato la def. di retta tangente a una conica. Adesso troviamo la sua equazione. Data la conica  $\Gamma: {}^tXAX = 0$ , non spezzata, e preso un  $P_0 \in \Gamma$ , l'equazione della retta  $\tan(\Gamma, in P_0)$  e'

$${}^tX_0AX = 0$$

**Proof:**

Dapprima individuiamo una caratterizzazione delle rette tangenti a  $\Gamma$ . Data una retta  $r$  passante per  $P_0$  e  $P_1$ :

$$r \text{ tg a } \Gamma \text{ in } P_0 \Leftrightarrow {}^tX_0AX_1 = 0$$

dove  $X_1$  sono le coordinate omogenee di  $P_1$  e  $X_0AX_1$  e' un numero.

**Proof:**

$\langle 3 \rangle 1.$  Dim  $\Rightarrow$

L'equazione di  $r$ , in forma compatta, e'  $X = \lambda X_0 + \mu X_1$ , scrivendo il sistema per trovare i punti d'intersezione  $\Gamma \cap r$ , cosi' come abbiamo fatto in [pg.11, par.3.0.2], otteniamo:

$$\begin{cases} \lambda^2({}^tX_0AX_0) + \mu^2({}^tX_1AX_1) + 2\lambda\mu({}^tX_0AX_1) = 0 & (1) \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases}$$

Poiche'  $P_0 \in \Gamma$ , si ha  ${}^tX_0AX_0 = 0$ :

$$\begin{cases} \mu(\mu({}^tX_1AX_1) + {}^tX_0AX_1) = 0 \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases} \Rightarrow \mu_1 = 0 \vee \mu_2 = \frac{-{}^tX_0AX_1}{{}^tX_1AX_1}$$

Nota:  ${}^tX_1AX_1 \neq 0$ , infatti, se per assurdo lo fosse, allora  $P_1 \in \Gamma \cap r$ , ma questo e' assurdo perche'  $r$ , essendo tangente, e' tale che  $r \cap \Gamma = \{P_0, P_0\}$ . Sostituendo  $\mu = \mu_1 = 0$  in  $X = \lambda X_0 + \mu X_1$  ritroviamo  $X = \lambda X_0 = P_0$ . Poiche', per Hp,  $r$  e' tg  $\mu$  deve individuare lo stesso punto, e quindi anche  $\mu_2$  deve individuare  $P_0$ , cioe'

$$\mu_1 = \mu_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{-{}^tX_0AX_1}{{}^tX_1AX_1} = 0 \Rightarrow {}^tX_0AX_1 = 0$$

$\langle 3 \rangle 2.$  Dim  $\Leftarrow$

Per Hp  $({}^tX_0AX_1) = 0$ , quindi sostituendo nell'intersezione  $r \cap \Gamma$  otteniamo:

$$\begin{cases} \lambda^2({}^tX_0AX_0) + \mu^2({}^tX_1AX_1) = 0 \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases}$$

Poiche'  $P_0 \in \Gamma$ , si ha  ${}^tX_0AX_0 = 0$ :

$$\begin{cases} \mu^2({}^tX_1AX_1) = 0 \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases} \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = 0 \Rightarrow X = \lambda X_0 = P_0$$

Ovvero  $r \cap \Gamma = \{P_0, P_0\}$

Adesso facciamo vedere che prendendo una retta  $s$  passante per  $P_0$  della forma  $s : {}^tX_0AX = 0$ , si ha che

$${}^tX_0AX_1 = 0 \Leftrightarrow r = s$$

**Proof:**

$\langle 4 \rangle 1.$  Dim  $\Rightarrow$

Per le nostre Hp iniziali,  $P_0, P_1 \in r$ ,  $r$  tg in  $P_0$ ,  $P_0 \in s$

Inoltre  ${}^tX_0AX_1 = 0 \Leftrightarrow P_1 \in s$ . Quindi,  $r, s$  sono due rette che passano per gli stessi due punti, cioe' coincidono.

$\langle 4 \rangle 2.$  Dim  $\Leftarrow$

$$P_0, P_1 \in r = s \Rightarrow P_1 \in s \Rightarrow {}^tX_0AX_1 = 0$$

Ricapitolando tutto abbiamo:

$$r \text{ tg a } \Gamma \text{ in } P_0 \Leftrightarrow {}^tX_0AX_1 = 0 \Leftrightarrow r = s$$

Se quindi  $t$  e' la retta tangente, avra' allora la stessa equazione di  $s$ , cioe':

$$t : {}^tX_0AX = 0$$

□

**Proposition 3.11.** *Data la conica*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0$$

passante per l'origine (cioe' con  $a_{33} = 0$ ), la retta tangente a essa, passante per l'origine e'  $a_{13}x + a_{23}y = 0$

**Proof:**

La  $A$  della conica e':

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

Per cio' che abbiamo detto, la retta tangente e'  ${}^tX_0AX$ , dove in questo caso  $X_0 = [0, 0, 1]$  (l'origine). Quindi

$$(0 \ 0 \ 1) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_{13}x + a_{23}y = 0$$

□

### 3.3 Equazioni canoniche

Data  $\Gamma$  non spezzata, cioe' con  $|A| \neq 0$ , abbiamo:

$\Gamma \equiv$  ellisse o iperbole  $\Leftrightarrow$  la sua forma ridotta e' di tipo (1)

$\Gamma \equiv$  parabola  $\Leftrightarrow$  la sua forma ridotta e' di tipo (2)

Le due forme ridotte sono (vedi [pg.12, par.3.3]):

$$\alpha_{11}X^2 + \alpha_{22}Y^2 + \alpha_{33} = 0 \quad (1)$$

$$\alpha_{11}X^2 + 2\alpha_{23}Y = 0 \quad (2)$$

**Proof:**

Data un'ellisse o un'iperbole  $\mathcal{I}$ , per definizione,  $\mathcal{I} \cap r_\infty = \{P_0, P_1\}$ ,  $P_0 \neq P_1$ . L'unica equazione ridotta che messa a sistema con  $t = 0$  da' due punti distinti e' il tipo (1). Questo perche' la (1) puo' essere o differenza o somma di quadrati.

Data una parabola  $\mathcal{P}$ , per definizione,  $\mathcal{P} \cap r_\infty = \{P_0, P_0\}$ . Allora, l'unica equazione che, a sistema con  $t = 0$ , da' due punti coincidenti e' la (2). Infatti:

$$\begin{cases} \alpha_{11}X^2 + 2\alpha_{23}Yt = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

#### 3.3.1 Parabola

Poiche' la forma ridotta della parabola e'  $\alpha_{11}X^2 + 2\alpha_{23}Y = 0$ , possiamo condurla a:

$$\alpha_{11}X^2 + 2\alpha_{23}Y = 0 \Leftrightarrow Y = -\frac{\alpha_{11}}{2\alpha_{23}}X^2 \Leftrightarrow Y = aX^2$$

Questa e' la sua forma canonica.

$Y = aX^2$  e' una parabola che

1. passa per l'origine
2. ha  $Y$  per asse di simmetria
3.  $F \equiv (0, \frac{1}{4a})$
4. la sua direttrice e'  $y = -\frac{1}{4a}$

### 3.3.2 Iperbole e ellisse

Poiche' la forma ridotta dell'iperbole e dell'ellisse e'  $\alpha_{11}X^2 + \alpha_{22}Y^2 + \alpha_{33} = 0$  possiamo condurla a:

$$\alpha_{11}X^2 + \alpha_{22}Y^2 + \alpha_{33} = 0 \Leftrightarrow \frac{X^2}{\frac{-\alpha_{33}}{\alpha_{11}}} + \frac{Y^2}{\frac{-\alpha_{33}}{\alpha_{22}}} = 1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} = 1$$

CASE:  $A, B > 0$

possiamo ricondurla a

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

Questa e' la forma canonica dell'ellisse reale.

CASE:  $A, B < 0$

possiamo ricondurla a

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$$

Questa e' la forma canonica dell'ellisse immaginaria (tutti i suoi punti sono complessi).

CASE:  $A > 0, B < 0 \vee A < 0, B > 0$

possiamo ricondurla a

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{o ad} \quad -\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

Questa e' la forma canonica di un'iperbole. La differenza tra le due e' che la seconda e' espressa nel sistema di riferimento in cui l'asse  $X$  e' stato sostituito da  $Y$  e viceversa.

#### Proprieta' dell'iperbole canonica:

1. I punti impropri di un'iperbole sono

$$\left\{ \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - t = t = 0 \right\} = \left\{ Y = \pm \frac{a}{b} X = t = 0 \right\} = \{(a, b, 0), (a, -b, 0)\}$$

2. L'asse  $X, Y$  sono di simmetria per l'iperbole canonica.  $O$  e' il centro di simmetria.

- 3.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$F_1 \equiv (c, 0)$$

$$F_2 \equiv (-c, 0)$$

4. Gli asintoti, che sono le rette tangenti nei punti impropri sono:  $Y = \pm \frac{b}{a} X$   
Per ricavarli, basta usare la formula di retta tangente ( ${}^tX_0AX = 0$ ) applicata a  $(a, b, 0)$ ,  $(a, -b, 0)$ , cioe'

$$(a \quad \pm b \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow Y = \pm \frac{b}{a} X$$

### Proprieta' dell'ellisse canonica:

1. L'asse  $X, Y$  sono di simmetria per l'iperbole canonica.  $O$  e' il centro di simmetria.
2. CASE:  $a^2 > b^2$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$F_1 \equiv (-c, 0)$$

$$F_2 \equiv (c, 0)$$

CASE:  $b^2 > a^2$

$$c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

$$F_1 \equiv (0, c)$$

$$F_2 \equiv (0, -c)$$

### 3.4 Polarita'

Data una conica non spezzata  $\Gamma$ , possiamo definire la seguente applicazione biunivoca:

$$\pi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{R}$$

Dove  $\mathcal{P}$  e' il piano, e  $\mathcal{R}$  e' l'insieme di tutte le rette del piano. La legge e':

$$\pi(P) = \{Q \in \mathcal{P} \mid {}^tPAQ = 0\}$$

In altre parole, a ogni punto  $P$  viene associata la retta di equazione  ${}^tPAX = 0$ , dove  $A$  e' la matrice sym di  $\Gamma$ .

$\pi$  e' chiamata *polarita'*

$\pi(P) = r$  e' chiamata *retta polare* di  $P$ .  $P$  e' chiamato polo di  $r$ .

(0)1. Dimostriamo che  $\pi$  e' biunivoca

**Proof:** La biunivocita' di  $\pi$  equivale a:

$$\forall r \in \mathcal{R} \exists ! P \in \mathcal{P} : \pi(P) = r$$

(1)1. Prendiamo allora una retta  $r : ax + by + c = 0$  e verifichiamo se il sistema

$$\{(x, y) \in \mathcal{P} \mid ax + by + c = 0\} = \pi(P)$$

, con incognite le coordinate di  $P$ , ammette una e una sola soluzione.

LET:  $P = (x_0, y_0, t_0)$

$$\pi(P) : {}^tPAX = 0 \Leftrightarrow (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}t_0)x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}t_0)y + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}t_0)t$$

$$\{ax + by + c\} = \pi(P) \Leftrightarrow ax + by + c = {}^tPAX \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}t_0 = a \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}t_0 = b \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}t_0 = c \end{cases}$$

$\Gamma$  non spezzata  $\Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$  per Cramer, il sistema ammette un'unica soluzione

Nota: Il sistema non e' omogeneo, perche' se per assurdo  $a = b = c = 0$ , l'equazione  $ax + by + c = 0$  non rappresenterebbe nessuna retta. Inoltre, poiche' la soluzione del sistema e' unica, non sara'  $(0, 0, 0)$ , che e' invece un'unica soluzione del sistema quadrato omogeneo.  $\square$

**Theorem 3.12.** *Teorema della reciprocita'.*

*Dati  $P_0, P_1 \in \mathcal{P}$*

$$P_0 \in \pi(P_1) \Leftrightarrow P_1 \in \pi(P_0)$$

*$P_0, P_1$  si dicono punti coniugati.*

*$\pi(P_0), \pi(P_1)$  si dicono rette coniugate.*

*$P_2 \in \pi(P_2)$  si dice autoconiugato*

**Proof:**

$\langle 1 \rangle 1.$  Dim  $\Leftrightarrow$

$$P_0 \in \pi(P_1) \Leftrightarrow {}^tP_1AP_0 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{{}^tP_0AP_1 = 0}_{(*)} \Leftrightarrow P_1 \in \{{}^tP_0AX = 0\} \Leftrightarrow P_1 \in \pi(P_0)$$

Nota  $(*)$ <sup>3</sup>

□

**Proposition 3.13.**

$$P \in \Gamma \Leftrightarrow P \in \pi(P)$$

*I punti autoconiugati sono tutti e soli quelli che appartengono alla conica.*

**Proof:**

$$P \in \Gamma \Leftrightarrow {}^tPAP = 0 \Leftrightarrow P \in \pi(P)$$

□

### 3.4.1 Costruzione della retta polare

Vediamo adesso, geometricamente, chi e' la retta polare del punto  $P = (x_0, y_0, t_0)$ .

CASE:  $P \in \Gamma$

Per la proposizione [pg.22, par.3.13], si ha

$$P \in \Gamma \Leftrightarrow P \in \pi(P) \Leftrightarrow {}^tPAP = 0$$

${}^tPAX = 0$  e' l'equazione della retta tangente in  $P$  a  $\Gamma$ . Questo vuol dire che la retta polare di un punto della conica e' la retta tangente in quel punto, e viceversa.

Nota: qui abbiamo visto il caso in cui la tangente passante per  $P$  a  $\Gamma$  e' una sola.

CASE:  $P \notin \Gamma$ , ed esistono due tangenti passanti per  $P$  a  $\Gamma$

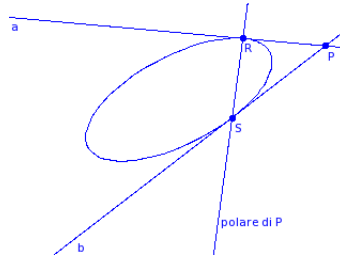


Figure 4: Polare di  $P$

In questo caso la polare si costruisce cosi':

---

<sup>3</sup>(\*) per quanto avevamo osservato in [pg.11, par.3.0.2] si ha  ${}^tX_1AX_0 = {}^tX_0AX_1$

1. Sia  $a$  una tangente a  $\Gamma$ , passante per  $P$ .
  2. Sia  $R$  il suo punto di tangenza con  $\Gamma$ .
  3. Sia  $b$  l'altra tangente a  $\Gamma$ , passante per  $P$ .
  4. Sia  $S$  il suo punto di tangenza con  $\Gamma$ .
  5. La retta  $r$  passante per  $R, S$  e' la polare di  $P$ .
- ⟨2⟩1. Dimostriamo che  $r = \pi(P)$

**Proof:**

$$\left\{ \begin{array}{l} R \in RS, \quad S \in RS \\ \text{lemma [pg.24, par.3.15]} \end{array} \right. \Rightarrow \pi(\pi(R) \cap \pi(S)) = RS \quad \begin{array}{c} \Leftrightarrow \\ \pi(R)=r, \pi(S)=s, P=r \cap s \end{array} \quad \pi(P) = RS \quad \square$$

CASE:  $P \notin \Gamma$ , la tangente a  $\Gamma$ , passante per  $P$  non esiste  
In questo caso la polare si costruisce cosi':

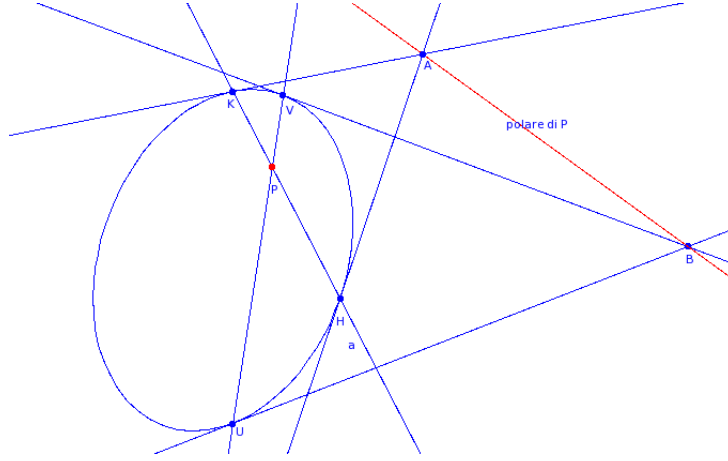


Figure 5: Polare di  $P$

1. Sia  $a$  una retta passante per  $P$  e siano  $\{H, K\} = a \cap \Gamma$  i suoi punti d'intersezione con  $\Gamma$ .
2. Sia  $b$  una retta passante per  $P$ , distinta da  $a$ , e siano  $\{U, V\} = b \cap \Gamma$  i suoi punti d'intersezione con  $\Gamma$ .
3. Siano  $t_1, t_2$  le tangenti a  $\Gamma$  passanti rispettivamente per  $H$  e  $K$ . Sia  $\{A\} = t_1 \cap t_2$ .
4. Siano  $t_3, t_4$  le tangenti a  $\Gamma$  passanti rispettivamente per  $U$  e  $V$ . Sia  $\{B\} = t_3 \cap t_4$ .
5. La retta  $r$ , passante per  $A, B$  e' la polare di  $P$ .

**Proof:**

$t_1, t_2$  sono le tangenti di  $\Gamma$  passanti per  $A$ . Per quanto abbiamo visto nel caso precedente, la retta  $KH$ , ovvero la retta  $a$  e' la polare di  $A$ . Con lo stesso ragionamento su  $B$ :

$$a = \pi(A), \quad b = \pi(B)$$

Applichiamo due volte il thm di reciprocita':

$$P \in a = \pi(A) \Leftrightarrow A \in \pi(P)$$

$$P \in b = \pi(B) \Leftrightarrow B \in \pi(P)$$

Ed ecco provato che  $\pi(P)$  passa per  $A, B$ .

□

### 3.4.2 Diametri e centri

**Definition 3.2.** Data la conica  $\Gamma$  non spezzata,  
 $C \in \mathcal{P}$  si dice centro di  $\Gamma \Leftrightarrow \pi(C) = r_\infty$

Dato  $P \in r_\infty$ ,  $\pi(P)$  si dice diametro.

**Proposition 3.14.** Data la retta  $d$ , e  $C$  centro di  $\Gamma$ , si ha:

$$d \equiv \text{diametro} \Leftrightarrow C \in d$$

Ovvero, i diametri sono tutte le rette passanti per  $C$

**Proof:**

$$\begin{aligned} d \equiv \text{diametro} &\Leftrightarrow d = \pi(P_\infty) \\ P_\infty \in \pi(C) = r_\infty &\Leftrightarrow C \in \pi(P_\infty) = d \quad [\text{thm di reciprocita'}] \end{aligned}$$

**Lemma 3.15.** Data una retta  $r$  e  $P_1, P_2 \in r$ ,

$$\pi(\pi(P_1) \cap \pi(P_2)) = r$$

ovvero, il polo di  $r$  e' il punto di intersezione tra la polare di  $P_1$  e la polare di  $P_2$

**Proof:**

$$\text{LET: } P_0 = \pi(P_1) \cap \pi(P_2)$$

$$\begin{aligned} P_0 \in \pi(P_1) &\Leftrightarrow P_1 \in \pi(P_0) \\ P_0 \in \pi(P_2) &\Leftrightarrow P_2 \in \pi(P_0) \\ \pi(P_0) &= \underbrace{\overline{P_1 P_2}}_{\text{retta passante per } P_1, P_2} = r \end{aligned}$$

□

## 3.5 Ellisse o iperbole

Vedremo come calcolare il centro e gli assi di simmetria di un ellisse o di una iperbole.

**Proposition 3.16.** Data  $\Gamma$ , ellisse o iperbole, siano  $a, b$  gli assi di simmetria di  $\Gamma$ .  $C = a \cap b$  e' il centro di simmetria. Si ha:

$$\pi(C) = r_\infty$$

ovvero, il centro di simmetria e' anche il centro di  $\Gamma$ .

**Proof:**

(1)1. Dimostriamo nel caso dell'ellisse

$$\begin{aligned} \text{LET: } \Gamma \cap a &= \{A_1, A_2\} \\ \Gamma \cap b &= \{B_1, B_2\} \\ t_1 &= \tan(\Gamma, \text{in} A_1), \quad t_2 = \tan(\Gamma, \text{in} A_2) \\ s_1 &= \tan(\Gamma, \text{in} B_1) \quad s_2 = \tan(\Gamma, \text{in} B_2) \end{aligned}$$

Considerando che  $a \perp b$  (gli assi di sym sono perp tra loro), si avra':

$$t_1 \perp a, t_2 \perp a \Rightarrow t_1 \parallel t_2 \text{ (vedi le note a pag. 37)}$$

$$t_1 \parallel t_2 \parallel b$$

$$s_1 \parallel s_2 \parallel a$$

Quindi  $t_1, t_2, b$  avranno lo stesso punto improprio  $P'$  e  $s_1, s_2, a$  avranno  $P''$ . Poiche' le rette  $\tan(\Gamma, \text{per} P')$  sono due  $(t_1, t_2)$ , siamo nel secondo caso del paragrafo [pg.22,par.3.4.1] e quindi  $\pi(P')$  e' la retta passante per  $A_1, A_2$ , ovvero  $\pi(P') = a$ .

Con ragionamento analogo si vede che  $\pi(P'')$  e' la retta passante per  $B_1, B_2$ , ovvero  $\pi(P'') = b$ .

Riassumendo:

$$\pi(P') = a, \pi(P'') = b, P', P'' \in r_\infty \Rightarrow a, b \text{ sono diametri}$$

$$\Rightarrow C, \text{ centro}, C \in a, C \in b \text{ [thm [pg.24,par.3.14]]}$$

$$a \perp b \Rightarrow a \cap b = \text{un solo punto} = C$$

Nota <sup>4</sup>

□

### Proposition 3.17.

$$C = d_1 \cap d_2, \quad d_1, d_2 \text{ diametri}, \quad d_1 \neq d_2$$

ovvero, il centro di  $\Gamma$  e' l'intersezione di due qualsiasi diametri. Per convenienza possiamo allora usare:

$$C = \pi(X_\infty) \cap \pi(Y_\infty)$$

dove  $X_\infty \equiv (1, 0, 0)$  e' il punto improprio dell'asse  $x$  e  $Y_\infty \equiv (0, 1, 0)$  quello dell'asse  $y$ .

Praticamente, per calcolare il centro si dovra' risolvere il sistema

CALCOLARE  
IL CENTRO

$$C \equiv \begin{cases} \pi(X_\infty) \\ \pi(Y_\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

ATTENZIONE<sup>5</sup>

**Proof:**

Dal lemma [pg.24,par.3.15], prendendo  $P', P'' \in r_\infty$ , segue che

$$\pi(C) = \pi(\pi(P') \cap \pi(P'')) = r_\infty \Leftrightarrow C = \pi(P') \cap \pi(P'')$$

allora scegliamo  $P' = X_\infty, P'' = Y_\infty$ , Calcoliamo  $\pi(X_\infty)$ :

$$\pi(X_\infty) : {}^tX_\infty AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$$

Calcoliamo  $\pi(Y_\infty)$ :

$$\pi(Y_\infty) : {}^tY_\infty AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \text{ [ricorda che } a_{12} = a_{21}]$$

<sup>4</sup>La (\*) mostra anche che  $a, b$  sono coniugati, cioe'  $P' \in \pi(P''), P'' \in \pi(P')$

<sup>5</sup>Con  $a_{12}$  ci riferiamo all'elemento  $a_{12}$  della matrice  $A$  associata alla conica: se il coefficiente di  $xy$  e'  $c$ , allora  $a_{12} = \frac{c}{2}$ , e non  $c$ !

**Theorem 3.18.** Data  $\Gamma$ , iperbole o ellissi, si ha

$$a_{12}=0 \Leftrightarrow \text{gli assi di sym di } \Gamma \text{ sono paralleli agli assi cartesiani}$$

**Proof:**

(1)1. Dim  $\Rightarrow$

Calcoliamo il centro di  $\Gamma$ :

$$\begin{cases} a_{11}x + \underbrace{a_{12}y}_{=0} + a_{13} = 0 \\ \underbrace{a_{21}x + a_{22}y}_{=0} + a_{23} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{13} = 0 \\ a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C \equiv \left(-\frac{a_{13}}{a_{11}}, -\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)$$

e adesso trasliamo la conica nel nuovo sistema di riferimento  $XCY$ :

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \longrightarrow$$

$$a_{11}\left(X - \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}\left(Y - \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 + 2a_{12}\left(X - \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)\left(Y - \frac{a_{23}}{a_{22}}\right) + 2a_{13}\left(X - \frac{a_{13}}{a_{11}}\right) + 2a_{23}\left(Y - \frac{a_{23}}{a_{22}}\right) + a_{33} = 0$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{a_{12}=0} a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + h = 0, \quad [\text{dove } h \text{ e' un termine noto}]$$

$X$  ha solo esponente pari,  $Y$  ha solo esponente pari  $\Rightarrow X, Y$  sono assi di simmetria.

Poiche'  $X \parallel \vec{x}$ ,  $Y \parallel \vec{y}$ , la tesi e' dimostrata.

(1)2. Dim  $\Leftarrow$ , ma solo nel caso dell'ellisse reale

Scriviamo l'ellisse nella sua forma canonica rispetto al sistema di riferimento  $XCY$

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

poiche'  $X \parallel \vec{x}$ ,  $Y \parallel \vec{y}$ , la possiamo scrivere rispetto a  $xOy$  come:

$$\frac{(x + \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y + \beta)^2}{b^2} = 1$$

portandola a forma intera, vediamo che  $a_{12}$ , cioe' il coefficiente di  $xy$ , e' 0.

□

**Theorem 3.19.** .

Data l'ellisse con  $a_{12} \neq 0$ , le radici dell'equazione

$$a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0$$

sono i coefficienti angolari degli assi di simmetria dell'ellisse.

**Proof:** Gli assi di simmetria sono dei diametri, perche' per quanto visto nella proposizione [pg.24, par.3.16], passano dal centro  $C$ . Inoltre, poiche' sono perpendicolari tra loro, sono anche diametri coniugati (l'avevamo visto nella dimostrazione della prop. [pg.24, par.3.16]).

(1)1. Calcoliamo tutti i possibili diametri coniugati tra loro

LET:  $D' = (1, m', 0), D = (1, m, 0) \in r_\infty$

I due diametri  $\pi(D'), \pi(D)$  sono coniugati  $\Leftrightarrow D \in \pi(D'), D' \in \pi(D)$ , ovvero

${}^tDAD' = 0$ :

$$(1 \quad m \quad 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m' \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a_{11} + a_{12}m) + (a_{21} + a_{22}m)m' = 0 \Leftrightarrow a_{22}mm' + a_{12}m + a_{21}m' + a_{11} = 0$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{a_{12}=a_{21}} a_{22}mm' + a_{12}(m + m') + a_{11} = 0$$

$a_{12}=a_{21}$

Questa e' l'equazione dei diametri coniugati.

⟨1⟩2. Adesso calcoliamo gli assi di symmetria

Poiche' gli assi di simmetria sono perpendicolari fra loro, imponiamo che pure i diametri lo siano  $\perp$ , cioe' che  $mm' = -1$ . Abbiamo:

$$m' = -\frac{1}{m}$$

$$-a_{22}m + a_{12}(m^2 - 1) + a_{11}m = 0 \Leftrightarrow a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0$$

□

**Proposition 3.20.** *Applichiamo quello che abbiamo visto fin'ora. Data una iperbole o ellisse  $\Gamma$ , per calcolare i suoi assi di simmetria si procede in questo modo:*

LET:  $C = (x_c, y_c)$ , centro di  $\Gamma$

CASE:  $a_{12} = 0$

CALCOLARE  
GLI ASSI  
SYM

*gli assi di simmetria sono paralleli. Poiche' sono dei diametri, e passano per il centro, si avra':*

$$\text{asse 1: } x = x_c$$

$$\text{asse 2: } y = y_c$$

CASE:  $a_{12} \neq 0$

*Siano  $m_1, m_2$  le radici dell'equazione*

$$a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0$$

*allora gli assi saranno*

$$\text{asse 1: } y - y_c = m_1(x - x_c)$$

$$\text{asse 2: } y - y_c = m_2(x - x_c)$$

**Theorem 3.21.** *Data l'iperbole con  $a_{12} \neq 0$ , le radici dell'equazione*

$$a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0$$

*sono i coefficienti angolari degli asintoti dell'iperbole.*

**Proof:**

Per definizione, gli asintoti sono tangenti a  $\Gamma$  nei punti impropri  $P', P'' \in \Gamma \cap r_\infty$ .

⟨2⟩1. Gli asintoti sono autoconiugati

LET:  $t$  = asintoto

$$P' = t \cap \Gamma$$

PROVE:  $t = \pi(P')$

$P' \in \Gamma \Rightarrow \pi(P')$  e' la retta tangente in  $P'$  (vedi par. [pg.22, par.3.4.1]).

Questa retta e' proprio l'asintoto.

⟨2⟩2. Gli asintoti passano dal centro, ovvero sono diametri

Abbiamo visto che  $\pi(P')$  e' un asintoto.

$$P' \in r_\infty \Rightarrow \pi(P') \text{ diametro} \Rightarrow C \in \pi(P')$$

⟨2⟩3. Usiamo l'equazione dei diametri coniugati (vedi [pg.26, par.3.5])

Per trovare gli asintoti, basta trovare tutti i diametri autoconiugati<sup>6</sup>, ovvero imponiamo all'equazione dei diametri coniugati che  $m = m'$ :

$$a_{22}mm' + a_{12}(m + m') + a_{11} = 0 \longrightarrow a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0$$

**Proposition 3.22.** *Gli asintoti dell'iperbole possono essere calcolati in diversi modi.*

<sup>6</sup>infatti, i diametri sono le rette passanti per  $C$ . I diametri tangenti a  $\Gamma$  nel proprio polo, sono gli asintoti. Gli asintoti sono autoconiugati.

CASE: Metodo 1

Si calcolano i punti impropri di  $\Gamma$ , e si usa l'equazione della retta tangente, imponendo che passi per i punti impropri. Cioe', se i punti impropri sono  $P', P''$  allora i due asintoti sono  ${}^tP'AX = 0$ ,  ${}^tP''AX = 0$

CALCOLARE  
GLI ASIN-  
TOTI

CASE: Metodo 2

Siano  $m_1, m_2$  le radici dell'equazione (vedi thm [pg.27, par.3.21])

$$a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0$$

Le equazioni degli asintoti sono:

$$\text{as. 1: } y - y_c = m_1(x - x_c)$$

$$\text{as. 2: } y - y_c = m_2(x - x_c)$$

CASE: Metodo 3

Siano  $P', P''$  i punti impropri dell'iperbole, allora gli asintoti, dato che passano per il centro, sono quelle rette che hanno per coefficiente angolare i punti impropri, e passano da  $C$ . Ovvero, se  $P' = (1, m', 0)$ ,  $P = (1, m, 0)$ , allora

$$\text{as. 1: } y - y_c = m(x - x_c)$$

$$\text{as. 2: } y - y_c = m'(x - x_c)$$

Infine, gli assi di simmetria si possono calcolare usando gli asintoti: essi sono le bisettrici degli asintoti.

### 3.6 Parabola

La parabola  $\Gamma$  si incontra con  $r_\infty$  in due punti reali coincidenti, ovvero  $r_\infty$  e' tangente a  $\Gamma$  in un punto  $P_\infty$ . Per questo motivo,  $P_\infty$  e' un punto autoconiugato, ovvero  $P_\infty \in \pi(P_\infty)$ ,  $\pi(P_\infty) = r_\infty$ .

Quindi,  $P_\infty$ , punto improprio della parabola  $\Gamma$ , e' anche il suo centro e inoltre  $r_\infty$  e' un suo diametro. Tutti gli altri diametri propri, dovendo passare dal centro, saranno tutte rette parallele tra loro, e in particolare saranno parallele all'asse di simmetria.

Per calcolare l'asse di simmetria usando le coordinate polari si procede in questo modo:

CALCOLARE  
L'ASSE DI  
SYM

1. Sia  $P = (1, m, 0) \in r_\infty$  il punto improprio di  $\Gamma$  (che si calcola ponendo a sistema l'equ di  $\Gamma$  con  $t = 0$ ).
2. Sia  $P' = (1, m', 0) \in r_\infty$  il punto perpendicolare a  $P$ .
3.  $\pi(P') : {}^tP'AX = 0$  e' l'asse di simmetria di  $\Gamma$ .

**Proof:**

Sia  $r$  l'asse di sym di  $\Gamma$ . Poiche'  $r$  e' un diametro, passera' per  $P = (1, m, 0) \in r_\infty$ , il centro di  $\Gamma$ .

Sia  $V$  l'unico punto d'intersezione tra  $\Gamma$  e  $r$ .

Consideriamo  $t = \tan(\Gamma, inV)$ . Si ha che  $t \perp r$ , e quindi il punto improprio di  $t$  e'  $P' = (1, -\frac{1}{m}, 0)$ .

Dato che  $t$  e  $r_\infty$  sono due rette tangenti a  $\Gamma$  passanti per  $P'$ , per costruzione (vedi [pg.22, par.3.4.1]) abbiamo che  $\pi(P') = r$ .

□

Per calcolare l'asse di sym usando il fascio di rette:

1. Sia  $P = (1, m, 0) \in r_\infty$  il punto improprio di  $\Gamma$ .
2. Sia  $P' = (1, m', 0) \in r_\infty$  il punto perpendicolare a  $P$ .
3. Sia  $f : y = m'x + k$  il fascio di rette con coeff. angolare  $m'$
4. Dal sistema  $f \cap \Gamma$ , imponendo  $\Delta = 0$ <sup>7</sup>, si ottiene  $k$
5. Con il  $k$  ottenuto, si ricava il punto di incontro  $V = f \cap \Gamma$ , che corrisponde al vertice.
6. La retta passante per  $V$  con coeff. angolare  $m$  e' l'asse di sym.

Una volta trovato l'asse di sym  $r$ , il vertice e'  $V = r \cap \Gamma$ .

CALCOLARE  
IL VER-  
TICE

**Example 3.3.** Supponiamo di avere  $r : 2x + 2y - 1 = 0$ ,  $\Gamma : x^2 + y^2 + 2xy - 2x = 0$ , il vertice e':

$$V : \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy - 2x = 0 \\ 2x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

un metodo pratico per risolvere questo sistema, che si puo' sempre applicare nel caso di una parabola, e' il seguente:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy - 2x = 0 \\ 2x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2x = 0 \\ x+y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} - 2x = 0 \\ x+y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{8}, \quad y = \frac{3}{8}$$

Una volta trovato l'asse di sym  $r$  e il vertice  $V = (v_x, v_y)$ , per calcolare il fuoco  $F$  si procede in questo modo:

CALCOLARE  
IL FUOCO

1. Si scrive l'equazione dell'asse  $r$  in forma parametrica:

$$r : ax + by + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = -\frac{a}{b}k - \frac{c}{b} \end{cases}$$

2. Poiche'  $F \in r$ , possiamo esprimere  $F$  in funzione di  $k$ :

$$F = (k, -\frac{a}{b}k - \frac{c}{b}) = (f_x, f_y)$$

3. Si trova l'equazione della direttrice  $d$ .

(a) Sia  $H = d \cap r = (x, y)$

---

<sup>7</sup>ovvero, imponendo che la retta  $y = m'x + k$  si incontri con  $\Gamma$  in un solo punto

- (b) Per la caratterizzazione dei punti propri della parabola, il vertice deve essere il punto medio del segmento  $\overline{HF}$ . Si pone quindi:

$$v_x = \frac{x + f_x}{2}$$

$$v_y = \frac{y + f_y}{2}$$

e si ricava  $x, y$ .

- (c)  $d$  è la retta passante per  $H$  con coeff. angolare  $m'$ , perpendicolare a quello dell'asse  $r$ .
4. A questo punto ricaviamo  $k$ , utilizzando la caratterizzazione della parabola, ovvero imponendo che

$$O \in \Gamma, \quad \overline{OF} = \overline{Od}$$

dove come punto  $O$ , per comodità, scegliamo l'origine (quando possibile).

**Example 3.4.** Continuiamo l'esempio di prima, dove avevamo:

$$r : 2x + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -x + \frac{1}{2}$$

$$V = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$$

Quindi

$$2x + 2y - 1 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = \frac{1}{2} - k \end{cases}$$

$$F = \left(k, \frac{1}{2} - k\right)$$

$$H = (x, y), \quad \frac{x + k}{2} = \frac{1}{8}, \quad \frac{y + \frac{1}{2} - k}{2} = \frac{3}{8}$$

$$H = \left(\frac{1}{4} - k, \frac{1}{4} + k\right)$$

$$d : y - \frac{1}{4} - k = x - \frac{1}{4} + k \Leftrightarrow x - y + 2k = 0$$

$$O = (0, 0) \quad \overline{OF} = \overline{Od} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{k^2 + \left(\frac{1}{2} - k\right)^2} = \frac{|2k|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow k^2 + \left(\frac{1}{2} - k\right)^2 = \frac{4k^2}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$$

$$F = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

**Example 3.5.** Per una parabola con asse parallelo a  $\vec{y}$ :

$$ax^2 + bx - y + c = 0$$

applicando quanto abbiamo visto prima, abbiamo:

1. Asse di sym:  $x = -\frac{b}{2a}$

2. Vertice:  $V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$
3. Fuoco:  $F = (-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a})$
4. Direttrice:  $d: y = \frac{-1-\Delta}{4a}$

### 3.7 Circonferenza

La circonferenza reale e' definita dall'insieme dei punti che hanno ugual distanza  $r$  da un punto  $C$ , chiamato centro. Quindi:

$$\begin{aligned}
 P &= (x, y), \quad C = (x_0, y_0), \quad r \geq 0 \\
 d(P, C) = r &\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r \Leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0 \\
 &\quad a = -2x_0, \quad b = -2y_0, \quad c = x_0^2 + y_0^2 - r^2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + ax + by + c = 0
 \end{aligned}$$

Generalizzando, da questo momento in poi, chiameremo *circonferenza* una conica di equazione  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ , ovvero,

$$\Gamma: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$\Gamma \text{ e' una circonferenza} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = a_{22} = 1 \\ a_{12} = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo le intersezioni della circonferenza con  $r_\infty$ :

$$\mathcal{C} \cap r_\infty: \begin{cases} x^2 + y^2 + atx + bty + ct^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm ix \\ t = 0 \end{cases} \longrightarrow (1, \pm i, 0)$$

Questo significa che ogni circonferenza del piano incontra  $r_\infty$  negli stessi punti  $C' = (1, +i, 0)$ ,  $C'' = (1, -i, 0)$ , che vengono chiamati *punti ciclici* del piano.

La conica  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ , non sempre rappresenta la consueta circonferenza reale, infatti, distinguiamo tre casi: prima di tutto scriviamo l'equazione in forma opportuna,

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + ax + by + c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \Leftrightarrow (x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = k \\
 k &= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c
 \end{aligned}$$

CASE:  $k > 0$

In questo caso  $(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = k$  ha infinite soluzioni che rappresentano la circonferenza di centro  $C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$  e raggio  $\sqrt{k}$

CASE:  $k = 0$

L'equazione si scompone in due polinomi coniugati di  $\mathbb{C}[x, y]$ :

$$\begin{aligned}
 (x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = 0 &\Leftrightarrow \left[ (x + \frac{a}{2}) - i(y + \frac{b}{2}) \right] \left[ (x + \frac{a}{2}) + i(y + \frac{b}{2}) \right] = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left( x - iy + \frac{a}{2} - i\frac{b}{2} \right) \left( x + iy + \frac{a}{2} + i\frac{b}{2} \right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (2x - i2y + a - ib)(2x + i2y + a + b) = 0
 \end{aligned}$$

Questo vuol dire che la conica e' spezzata in due rette immaginarie coniugate  $2x - i2y + a - ib = 0$  e  $2x + i2y + a + b = 0$ , chiamate *rette isotrope*, che si incontrano in un unico punto reale:

$$x + \frac{a}{2} = 0, \quad y + \frac{b}{2} = 0 \quad \text{e' sol. dell'equ originale}$$

$$x = -\frac{a}{2}, \quad y = -\frac{b}{2}$$

$$C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$$

Questo punto  $C$ , e in generale l'equazione della circonferenza con  $k = 0$ , viene chiamata *circonferenza di raggio 0*.

E' ovvio che a ogni punto del piano corrisponde un circonferenza di raggio 0 e le due rette isotrope<sup>8</sup>.

CASE:  $k < 0$

L'equazione non ammette soluzioni reali. Poiche'  $|A| \neq 0$ ,  $A_{33} > 0$  si avranno due ellissi immaginarie.

Questo tipo di circonferenza prende il nome di *circonferenza immaginaria*.

**Proposition 3.23.** *Data una conica*

$$\mathcal{C} : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

si ha

$$a_{11} \neq 0, \quad r_\infty \cap \mathcal{C} = \{C', C''\} \Leftrightarrow \mathcal{C} \text{ e' un circonferenza}$$

**Proof:**

$\langle 1 \rangle 1$ . Dim  $\Leftarrow$

$a_{11} = 1 \neq 0$  e' implicato dalla def. di circonferenza.  $\mathcal{C} \Rightarrow r_\infty \cap \mathcal{C} = \{C', C''\}$ , l'abbiamo visto quando abbiamo introdotto i punti ciclici.

$\langle 1 \rangle 2$ . Dim  $\Rightarrow$

$$r_\infty \cap \mathcal{C} = \{C', C''\} \Leftrightarrow C', C'' \in \begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}tx + 2a_{23}ty + a_{33}t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C', C'' \in \begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} a_{11}(C'_x)^2 + a_{22}(C'_y)^2 + 2a_{12}(C'_xC'_y) = 0 \\ a_{11}(C''_x)^2 + a_{22}(C''_y)^2 + 2a_{12}(C''_xC''_y) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} - a_{22} + 2a_{12}i = 0 \\ a_{11} - a_{22} - 2a_{12}i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{12} = 0 \\ a_{11} = a_{22} \end{cases}$$

sostituendo all'equ di  $\mathcal{C}$ :

$$a_{11}x^2 + a_{11}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{a_{11} \neq 0} x^2 + y^2 + \frac{2a_{13}}{a_{11}}x + \frac{2a_{23}}{a_{11}}y + \frac{a_{33}}{a_{11}} = 0$$

che e' proprio l'equazione di una circonferenza. □

---

<sup>8</sup>Dato il punto  $C = (x_0, y_0)$ , per calcolare le sue rette isotrope, basta scomporre in  $\mathbb{C}[x]$  l'equazione  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$ , cioe' l'equ della circ. di raggio 0 e centro  $C$ . Alternativamente si puo' calcolare la retta passante da  $C$  e  $C' = (1, i, 0)$  e quella passante da  $C$  e  $C'' = (1, -i, 0)$ :  $y - y_0 = i(x - x_0)$ ,  $y - y_0 = -i(x - x_0)$ .  $C', C''$  sono i punti ciclici del piano vedi [pg.31, par.3.7].

## 4 Fascio di coniche

**Definition 4.1.** Questa definizione fa uso dei teoremi [pg.33,par.4.1], [pg.34,par.4.2], [pg.34,par.4.3].

Fissati 4 punti  $P_1, \dots, P_4$ , si chiama fascio di coniche di base  $P_1, \dots, P_4$ , l'insieme di tutte le coniche passanti per  $P_1, \dots, P_4$ .

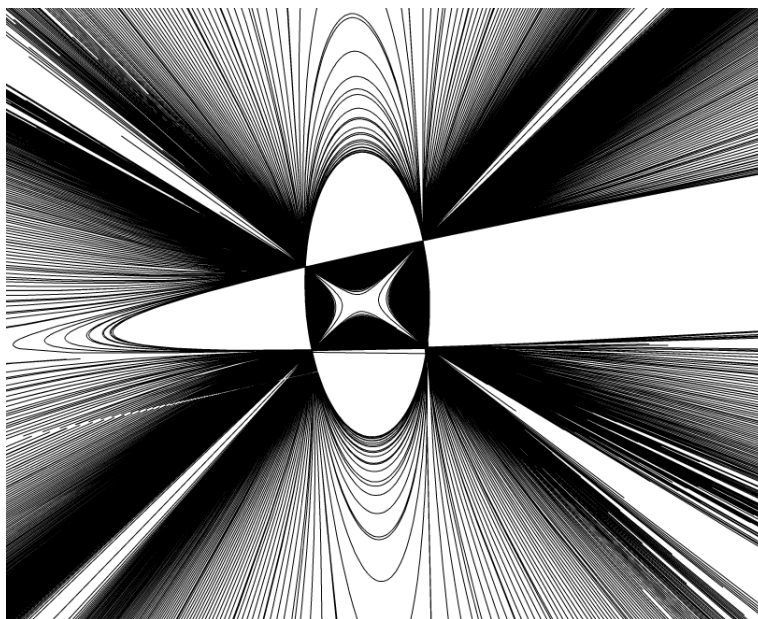


Figure 6: Una porzione di un fascio di coniche

**Theorem 4.1.** *Da 5 punti (propri o impropri) passa una sola conica oppure ne passano infinite.*

**Proof:**

L'espressione generale di una conica  $\Gamma$  e':

$$f(x, y, t) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = 0$$

Dati i punti  $P_1, P_2, \dots, P_5$ , imporre che  $\Gamma$  passi da loro equivale a imporre il seguente sistema:

$$f(P_1) = 0$$

$$f(P_2) = 0$$

...

$$f(P_5) = 0$$

con  $a_{11}, a_{22}, \dots$ , come incognite. La matrice  $M$  dei coeff. del sistema sara' una  $5 \times 6$ .

CASE:  $r(M) = 5$

Per il thm di Rouché-Capelli, il sistema ammette  $\infty^1$  soluzioni, che dipendono da un parametro  $k$ . Poiche' il sistema e' omogeneo, le soluzioni sono proporzionali tra di loro, con  $k$  come coeff. di proporzionalita'. L'equazione di  $\Gamma$  sara' quindi del tipo:

$$a'_{11}kx^2 + a'_{22}ky^2 + 2a'_{12}kxy + 2a'_{13}kxt + 2a'_{23}kyt + a'_{33}kt^2 = 0$$

Semplificando  $k$ , otterremo:

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + 2a'_{12}xy + 2a'_{13}xt + 2a'_{23}yt + a'_{33}t^2 = 0$$

ovvero, una conica.

CASE:  $r(M) < 5$

Sempre per il thm di Rouché-Capelli, si avranno  $\infty^{6-r(M)}$  soluzioni, di cui due almeno non proporzionali tra loro. Avremo quindi almeno  $\infty^2$  soluzioni non proporzionali tra loro, e questo basta per affermare che passano infinite coniche dai 5 punti  $P_1, \dots, P_5$ .  $\square$

**Theorem 4.2.** *Esistono infinite coniche passanti per cinque punti  $\Leftrightarrow$  almeno 4 punti sono allineati.*

**Proof:**

(1)1. Dim  $\Leftarrow$

Consideriamo i cinque punti  $P_1, \dots, P_5$  e siano  $P_1, \dots, P_4 \in r$ , dove  $r$  è una retta propria qualsiasi. Allora basta prendere una qualsiasi retta  $s$  passante per  $P_5$  e si avrà la conica spezzata  $\Gamma = r \cup s$ . Ovviamente di rette passanti per il punto  $P_5$  ne esistono infinite.

(1)2. Dim  $\Rightarrow$

Per Hp passano infinite coniche dai punti  $P_1, \dots, P_5$ . Consideriamo allora le seguenti coniche:

$$\Gamma_1 = r_1 \cup r_2$$

$$\Gamma_2 = s_1 \cup s_2$$

dove le rette  $r_1, r_2, s_1, s_2$  sono rispettivamente le rette passanti per  $P_1P_2, P_3P_4, P_1P_4, P_2P_3$ .

Per quanto abbiamo visto nella dim. del precedente thm,  $r(M) < 5$ , e quindi una riga di  $M$  è combinazione lineare delle altre. Supponiamo che sia l'ultima riga. Questo significa che la condizione  $f(P_5) = 0$  dipende dalle altre 4, cioè

$$f(P_1) = 0 \wedge f(P_2) = 0 \wedge \dots \wedge f(P_4) = 0 \Rightarrow f(P_5) = 0$$

Consideriamo  $\Gamma_1$  e la sua rispettiva espressione  $f_1(x, y, t)$ . Poiché  $\Gamma_1 = r_1 \cup r_2$ , si ha che

$$P_1, P_2, P_3, P_4 \in \Gamma_1 \Rightarrow f(P_1) = 0 \wedge \dots \wedge f(P_4) = 0 \Rightarrow f(P_5) = 0 \Rightarrow P_5 \in \Gamma_1 \Rightarrow P_5 \in r_1 \vee P_5 \in r_2$$

Supponiamo per semplicità che  $P_5 \in r_1$ .

Ripetendo lo stesso ragionamento per  $\Gamma_2$  avremo che

$$P_5 \in \Gamma_2 \Rightarrow P_5 \in s_1 \vee P_5 \in s_2$$

Supponiamo per semplicità che  $P_5 \in s_1$ .

Ricapitolando:

$$P_5 \in r_1 = \overline{P_1P_2} \Rightarrow r_1 = \overline{P_1P_5}$$

$$P_5 \in s_1 = \overline{P_1P_4} \Rightarrow s_1 = \overline{P_1P_5}$$

$$r_1 = s_1 \Rightarrow P_1, P_2, P_4, P_5 \in r_1 = s_1$$

Quindi  $P_1, P_2, P_4, P_5$  sono allineati.  $\square$

**Theorem 4.3.** *Date due curve  $c_1, c_2$ , rispettivamente di ordine  $n_1, n_2$ , si ha che la loro intersezione dà luogo a  $n_1n_2$  punti oppure a infiniti punti.*

*Nel caso di due coniche  $\Gamma_1, \Gamma_2$  si ha  $n_1 = n_2 = 2$  e quindi si intersecheranno in al più 4 punti distinti.*

## 4.1 Proprieta' del fascio

Date due coniche  $\Gamma_1, \Gamma_2$  appartenenti al fascio  $\mathcal{F}$ , definite da

$$\begin{aligned}\Gamma_1 : f(x, y, t) &= 0 \\ \Gamma_2 : g(x, y, t) &= 0\end{aligned}$$

si ha che:

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) : h(\lambda, \mu, x, y, t) = \lambda f(x, y, t) + \mu g(x, y, t) = 0 \quad (1)$$

ovvero  $f(x, y, t), g(x, y, t)$  sono linearmente dipendenti.

Al variare di  $\lambda$  e  $\mu$ , la (1) rappresenta l'equazione del fascio che indicheremo con  $\mathcal{F}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ : per ogni  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$  la (1) definisce un'equazione  $\Gamma \in \mathcal{F}$ .

Valgono le seguenti proprieta':

1. La coppia  $(\lambda', \mu') = k(\lambda, \mu)$ , con  $k \neq 0$ , (proporzionale a  $(\lambda, \mu)$ ) definisce la stessa conica di  $(\lambda, \mu)$ , ovvero

$$h(\lambda', \mu', x, y, t) = h(\lambda, \mu, x, y, t)$$

**Proof:** Questo segue immediatamente dal fatto che:

$$h(\lambda', \mu', x, y, t) = k\lambda f(x, y, t) + k\mu g(x, y, t) = \lambda f(x, y, t) + \mu g(x, y, t)$$

2.  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{F}$

**Proof:** Basta assegnare  $\lambda = 0, \mu = 1$  e  $\lambda = 1, \mu = 0$ , ottenendo cosi'

$$h(1, 0, x, y, t) = f(x, y, t), \quad h(0, 1, x, y, t) = g(x, y, t),$$

3.  $\forall \Gamma, \Gamma' \in \mathcal{F} \quad \mathcal{F}(\Gamma, \Gamma') = \mathcal{F}(\Gamma_1, \Gamma_2)$

Ovvero, il fascio non dipende dalla scelta di  $\Gamma_1, \Gamma_2$ .

4.  $P \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \Rightarrow P \in \Gamma \quad \forall \Gamma \in \mathcal{F}$

$P$  e' chiamato punto base del fascio. Questa proprieta' afferma che ogni punto base e' contenuto in ogni conica del fascio.

Dal thm [pg.34, par.4.3] segue che per le coniche si possono avere 4 punti base oppure infiniti.

**Proof:** Sia  $P \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ , allora

$$\begin{aligned}P \in \Gamma_1 &\Rightarrow f(P) = 0 \\ P \in \Gamma_2 &\Rightarrow g(P) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda f(P) + \mu g(P) = 0 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

5.  $\forall P \notin \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \quad \exists! \Gamma \in \mathcal{F} : P \in \Gamma$

Ovvero, appena prendiamo un punto non base, esiste una sola conica del fascio che passa per esso.

**Proof:** Il fascio e' definito da 4 punti, cioe' dai punti base. Da 5 punti passa una sola conica, che otteniamo quindi imponendo il passaggio da un altro punto, non base.

6. Le coniche spezzate del fascio sono 3 oppure infinite.

**Proof:**

La matrice  $A$  della conica  $h(\lambda, \mu, x, y, t)$  sarà del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \lambda a_{12} + \mu b_{12} & \lambda a_{13} + \mu b_{13} \\ \lambda a_{21} + \mu b_{21} & \lambda a_{22} + \mu b_{22} & \lambda a_{23} + \mu b_{23} \\ \lambda a_{31} + \mu b_{31} & \lambda a_{32} + \mu b_{32} & \lambda a_{33} + \mu b_{33} \end{pmatrix}$$

Per trovare le coniche spezzate imponiamo che  $|A| = 0$ . Otterremo così un polinomio  $P(\lambda, \mu)$  di terzo grado, omogeneo. Esisteranno quindi 3 radici, ovvero 3 coppie  $(\lambda, \mu)$ , di cui una almeno reale.<sup>9</sup>

Se il polinomio  $P(\lambda, \mu)$  è identicamente nullo, allora tutte le infinite coppie  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  daranno delle coniche spezzate<sup>10</sup>

## 4.2 Calcolare l'equazione del fascio

### 4.2.1 Dati 4 punti

Dati i quattro punti  $A, B, C, D$ , vogliamo calcolare l'equazione del fascio  $\mathcal{F}$ . Si presentano tre casi:

CASE:  $A \neq B \neq C \neq D$

Poiché il  $\mathcal{F}(\Gamma, \Gamma')$  non dipende da  $\Gamma$  e da  $\Gamma'$ , possiamo scegliere due qualsiasi coniche del fascio. Scegliamo allora quelle spezzate, ovvero scegliamo:

$$\Gamma : AB \cup CD : f(x, y, t) = 0$$

$$\Gamma' : AC \cup BD : g(x, y, t) = 0$$

l'equazione del fascio sarà quindi

$$\mathcal{F}(\Gamma, \Gamma') : \lambda f(x, y, t) + \mu g(x, y, t) = 0$$

CASE:  $A = B \neq C \neq D$

In questo caso, le coniche del fascio passano da  $A$  due volte, perciò tra quelle spezzate ci sarà la conica che è unione della retta  $r$ , tangente alle coniche in  $A$ , con un'altra retta. Come  $\Gamma, \Gamma'$  scegliamo allora

$$\Gamma : r \cup CD : f(x, y, t) = 0$$

$$\Gamma' : AC \cup BD = AC \cup AD : g(x, y, t) = 0$$

l'equazione del fascio è sempre

$$\mathcal{F}(\Gamma, \Gamma') : \lambda f(x, y, t) + \mu g(x, y, t) = 0$$

CASE:  $A = B \neq C = D$

Stavolta, anche in  $C$  passa una retta  $s$  tangente alle coniche. Come  $\Gamma, \Gamma'$  scegliamo allora

$$\Gamma : r \cup s : f(x, y, t) = 0$$

$\Gamma' : AC \cup AC : g(x, y, t) = (ax + by + c)^2 = 0$ , dove  $ax + by + c = 0$  è l'equazione di  $AC$

l'equazione del fascio è sempre

$$\mathcal{F}(\Gamma, \Gamma') : \lambda f(x, y, t) + \mu g(x, y, t) = 0$$

<sup>9</sup> Se, ad esempio, consideriamo il fascio con i 4 punti base  $A, B, C, D$ , allora il fascio conterrà le seguenti coniche spezzate:  $AB \cup CD$ ,  $AC \cup BD$ ,  $AD \cup BC$ , dove  $AB$  è la retta passante per  $A$  e  $B$ .

<sup>10</sup> Ad esempio, nel caso in cui  $\Gamma_1 : r \cup s$ ,  $\Gamma_2 : r \cup t$ , il fascio  $\mathcal{F}(\Gamma_1, \Gamma_2)$  avrà infinite coniche spezzate:

- i punti base sono tutti i punti di  $r$ :  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = r$
- tutte le coniche del fascio contengono  $r$  (e sono perciò spezzate)

Usando l'equazione del fascio possiamo calcolare piu' rapidamente l'equazione di una conica a partire da 5 punti:

1. Si considerano solo 4 punti e si calcola l'equazione  $h(\lambda, \mu, x, y, t) = 0$  del fascio, con uno dei tre metodi visti prima.
2. Si impone che la conica del fascio cercata passi per  $P$ , dove  $P$  e' il quinto punto non considerato prima, ovvero si pone

$$h(\lambda, \mu, P) = 0$$

Così facendo ricaviamo infinite coppie  $(\lambda, \mu)$  proporzionali tra loro.

3. Basta sceglierne una, e sostituirla in  $h(\lambda, \mu, x, y, t) = 0$ , ottenendo così la conica cercata.

**Example 4.2.** LET:  $r$ , asse di simmetria della parabola  $\Gamma$

$$A \in r, A \in \Gamma$$

$$B \in \Gamma$$

per trovare l'equazione della parabola  $\Gamma$  che ha per asse di sym  $r$  e che passa da  $A$  e  $B$  si procede così:

1. La parabola e' tangente a  $r_\infty$  in  $P_\infty$
2.  $A \in \Gamma, A \in r \Rightarrow A' \in \Gamma$ , dove  $A'$  e' il simmetrico di  $A$  rispetto a  $r$ , che in questo caso e' proprio  $A$  stesso. Quindi la retta  $s$ ,  $\perp r$  in  $A$ , e' tangente alla parabola<sup>11</sup>.
3. Scriviamo l'equ del fascio. Conderiamo queste due coniche:  $\Gamma_1 : r_\infty \cup s : f_1(x, y, t)f_2(x, y, t) = 0$ ,  $\Gamma_2 : AP_\infty \cup AP_\infty : g(x, y, t)^2 = 0$ .  
Il fascio e'  $\mathcal{F} : h(x, y, t) = \lambda f_1(x, y, t)f_2(x, y, t) + \mu g(x, y, t)^2 = 0$
4. Imponiamo  $h(B) = 0$ , ovvero scegliamo la conica del fascio che passa per  $B$ . Risolvendo otteniamo  $\lambda, \mu$ .

#### 4.2.2 Dato un fuoco e direttrice

La direttrice di una conica  $\Gamma$ , associata al fuoco  $F$  e'  $\pi(F)$ , cioe' la polare di  $F$ <sup>12</sup>.

Dato un punto  $F$  e una retta  $d$ , nasce il fascio di coniche che hanno  $F$  come fuoco e  $d$  come direttrice associata. L'equazione di questo fascio si calcola nel modo seguente:

$$\Gamma_1 : d \cup d : f(x, y, t)^2 = 0$$

$$\Gamma_2 : g(x, y, t) = (x - F_x)^2 + (y - F_y)^2 = 0 \text{ Il fascio e'}$$

$$\mathcal{F} : \lambda f(x, y, t)^2 + \mu g(x, y, t) = 0$$

**Proof:**

<sup>11</sup> Vale in generale: se  $r$  e' asse di sym della conica  $\Gamma$ , e se  $A \in r, A \in \Gamma$ , allora la retta  $\perp r$ , passante per  $A$ , e' tangente a  $\Gamma$  in  $A$ . Si dimostra per assurdo: se  $\exists R \neq A \in \Gamma \cap r \Rightarrow \exists R' \in \Gamma$ , dove  $R'$  e' il sym di  $R$  rispetto a  $r$ . Si ha percio'  $r \cap \Gamma = \{R, R', A\}$  e questo e' assurdo, perche' per il thm di Bezout, una retta interseca una conica in al piu' due punti.

<sup>12</sup>poiche' stiamo parlando di fuochi e direttrici, ci stiamo riferendo solo a coniche non spezzate

Data una conica non spezzata e un suo fuoco  $F$ , le rette isotrope  $r_1, r_2$  passanti per  $F$  sono tangenti a  $\Gamma$ .<sup>13</sup> Quindi  $\pi(F)$ , ovvero la direttrice  $d$  del fuoco, passa per i punti di tangenza  $A, B$  (vedi [pg.22, par.3.4.1]):

$$A = r_1 \cap \Gamma, \quad B = r_2 \cap \Gamma$$

$$A, B \in \pi(F) = d$$

Quindi possiamo definire le seguenti coniche appartenenti al fascio:

$$\Gamma_1 : AB \cup AB = d \cup d : f(x, y, t)^2 = 0 \quad \Gamma_2 : r_1 \cup r_2 : g(x, y, t) = 0$$

il fascio e' quindi:

$$\mathcal{F} : \lambda f(x, y, t)^2 + \mu g(x, y, t) = 0$$

Inoltre,  $r_1$  non e' altro che la retta passante fa  $F$  e da  $C'$ ,  $r_2 = FC''$ , dove  $C', C''$  sono i punti ciclici del piano. Allora, l'equazione di  $FC' \cup FC''$  puo' essere calcolata direttamente considerando

$$g(x, y, t) = (x - F_x)^2 + (y - F_y)^2 = 0$$

ovvero la circonferenza di raggio zero con centro  $F$  □

### 4.3 Studio del fascio

Avendo un'equazione del fascio

$$\mathcal{F} : h(x, y, t) = \lambda f(x, y, t) + \mu g(x, y, t) = 0$$

possiamo studiare le coniche contenute nel fascio, al variare dei parametri.

Distinguiamo due casi:

CASE:  $\lambda = 0 \neq \mu$

Si ha  $g(x, y, t) = 0$ . Ovvero otteniamo l'equazione di  $\Gamma_2$ . Se abbiamo trovato l'equazione del fascio usando i metodi descritti sopra, allora  $g(x, y, t) = 0$  sara' una conica spezzata.

CASE:  $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$

Imponiamo  $\frac{\lambda}{\mu} = k$ , e dividendo tutto per  $\lambda$ , l'equ del fascio diventa:

$$\mathcal{F} : f(x, y, t) + kg(x, y, t) = 0$$

Allora non rimane altro che studiare il fascio al variare di  $k$ , ovvero:

1. Imponiamo  $|A| = 0$  e troviamo i valori di  $k$  per cui si hanno coniche spezzate e non.
2. Imponiamo  $A_{33} > 0, = 0, < 0$  e confrontando con i risultati di prima, vediamo quando si ha una ellisse, una parabola o una iperbole.
3. Imponiamo  $a_{11} = a_{22} \neq 0, a_{12} = 0$  e troviamo i valori di  $k$  per cui si ha una circonferenza.
4. Imponiamo  $I = a_{11} + a_{22} = 0$  e troviamo i valori di  $k$  per cui si ha una iperbole equilatera.

## 5 Spazio a tre dimensioni

Entriamo adesso nello spazio a tre dimensioni.

---

<sup>13</sup>Si dimostra analiticamente, caso per caso (ellisse, iperbole, parabola), che l'intersezione tra una retta isotropa di un fuoco  $F$  con la conica da' un punto contato con molteplicita' due.

## 5.1 Vettore geometrico

**Definition 5.1.** di vettore geometrico. Siano  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$  due segmenti orientati dello spazio  $\mathbb{R}^3$ , definiamo la seguente relazione d'equivalenza:

$$\overline{AB} \sim \overline{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{la retta } AB \parallel \text{ retta } CD \\ \text{lunghezza } AB = \text{lunghezza } CD \\ \text{verso } AB = \text{verso } CD \end{cases}$$

Diremo che un *vettore geometrico* e' una classe d'equivalenza e la indicheremo con

$$\vec{AB} = \{\text{segmenti orientati equivalenti a } AB\}$$

Indichiamo con  $V_n$ , l'insieme di tutti i vettori geometrici, dello spazio  $\mathbb{R}^n$ . Per comodita', come rappresentante  $AB$  di  $\vec{AB}$ , possiamo considerare il segmento orientato uscente dall'origine. Questo ci permette anche di considerare ogni vettore geometrico dello spazio  $\mathbb{R}^3$  come un vettore dello spazio vettoriale  $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ , cioe' quello i cui vettori sono terne di numeri reali: dato il vettore geometrico  $\vec{OP}$ , con  $O = (0, 0, 0)$ ,  $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , associamo biunivocamente il vettore  $(x, y, z)$ <sup>14</sup>. Possiamo quindi rendere  $V_3$  uno spazio vettoriale usando le stesse operazioni definite per  $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ :

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R} \forall \vec{OP}, \vec{OQ} \text{ vettori geometrici con } P = (x, y, z), Q = (x', y', z') \\ \vec{OP} + \vec{OQ} = (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \\ \text{[nello spazio geometrico, questa e' la regola del parallelogramma]} \\ a\vec{OP} = a(x, y, z) = (ax, ay, az) \end{aligned}$$

Cosi' come lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$  ha base canonica:

$$\varepsilon = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

la base canonica per  $V_3$  e':

$$E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

dove  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  vengono chiamati versori, e sono tutti perpendicolari tra loro. Possiamo usare le componenti per esprimere un vettore geometrico:

$$\begin{aligned} P = (x, y, z) \\ [\vec{OP}]_E = (x, y, z), \text{ ovvero, } \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \end{aligned}$$

---

<sup>14</sup>ric conducendo il vettore  $P_0P_1$  a un vettore uscente dall'originie, possiamo associargli  $(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$

Definiamo anche il prodotto scalare tra vettori geometrici:

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\alpha$  e' l'angolo compreso tra  $\vec{v}$ ,  $\vec{q}$

$$\vec{v}\vec{q} := |\vec{v}||\vec{q}| \cos \alpha \quad [\text{dove } |\vec{q}| \text{ e' il modulo di } \vec{q}]$$

proprietà':

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \vec{v}\vec{w} = 0, \quad |\vec{v}|, |\vec{w}| \neq 0$$

$$\vec{v}\vec{w} = \vec{w}\vec{v}$$

$$\vec{v}(\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v}\vec{w} + \vec{v}\vec{u}$$

che usando le componenti diventa:

$$\begin{aligned} \vec{v}\vec{w} &= (v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k})(w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}) = v_xw_x\vec{i}\vec{i} + v_xw_y\vec{i}\vec{j} + v_xw_z\vec{i}\vec{k} + v_yw_x\vec{j}\vec{i} + \dots = \\ &\vec{i} \perp \vec{j} \Rightarrow \vec{i}\vec{j} = 0, \quad \vec{i}\vec{i} = |\vec{i}||\vec{i}| \cos 0 = 1, \quad \dots \\ &= v_xw_x + v_yw_y + v_zw_z \end{aligned}$$

la formula e' quindi:

$$\vec{v}\vec{w} = v_xw_x + v_yw_y + v_zw_z$$

Poiche'  $|\vec{v}| \cos \alpha$  si puo' interpretare geometricamente come la proiezione di  $\vec{v}$  su  $\vec{w}$ ,  $\vec{v}\vec{w}$  si puo' interpretare come il prodotto di questa proiezione per la lunghezza di  $\vec{w}$ .

Ultima nota: potevamo definire il prodotto scalare algebricamente, svincolandoci dalle dimensioni:

$$\vec{v}\vec{w} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = v_xw_x + v_yw_y + v_zw_z$$

## 5.2 Condizioni di perp e parall

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v}\vec{w} = 0, \quad |\vec{v}|, |\vec{w}| \neq 0 \quad \vec{v} \parallel \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} = a\vec{w} \Leftrightarrow (v_x, v_y, v_z) = a(w_x, w_y, w_z)$$

## 5.3 Piano

I piani definiti dagli assi cartesiani sono:  $xy : z = 0$      $xz : y = 0$      $zy : x = 0$

Sappiamo che una retta e un punto definiscono un piano: esiste un solo piano  $\pi$  che passa per un punto  $P_0$  ed e' perpendicolare alla retta  $r$ . Al posto di  $r$ , usiamo un vettore  $\vec{v} \neq 0_v$ , quindi dato  $P \neq P_0$

$$P \in \pi \Leftrightarrow \vec{P_0P} \perp \vec{v}$$

allora

$$[\vec{v}]_E = (a, b, c)$$

$$\begin{aligned} \vec{P_0P} \perp \vec{v} &\Leftrightarrow \vec{P_0P}\vec{v} = 0 \Leftrightarrow (x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0, \quad d = -ax_0 - by_0 - cz_0 \end{aligned}$$

quindi l'equazione di un piano dello spazio e':

$$ax + by + cz + d = 0$$

### 5.3.1 Parallelismo e perpendicolarita'

Dati due piani:

$$\begin{aligned}\alpha : ax + by + cz + d &= 0 \\ \beta : a'x + b'y + c'z + d' &= 0\end{aligned}$$

e i loro vettori direttori:

$$\begin{aligned}[\vec{v}]_E &= (a, b, c) \\ [\vec{w}]_E &= (a', b', c')\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}\alpha \parallel \beta &\Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{w} \Leftrightarrow (a, b, c) = k(a', b', c') \\ \alpha \perp \beta &\Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0\end{aligned}$$

### 5.3.2 Passante per tre punti

Dati tre punti non allineati  $A = (x_0, y_0, c_0), B = (x_1, y_1, c_1), C = (x_2, y_2, c_2)$ , vogliamo trovare il piano  $\alpha : f(x, y, z)$ , che passa da essi. I possibili metodi sono:

1. Risolvere il sistema ottenuto sostituendo all'equazione di  $\alpha$  le coordinate dei punti, ovvero

$$\alpha : \begin{cases} f(A) \\ f(B) \\ f(C) \end{cases}$$

2. (a) Ricavare la retta  $r$  passante per due punti, e trovare due piani  $\alpha', \beta$  tali che  $r = \alpha' \cap \beta$ . Le equazioni dei due piani sono  $f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)$   
(b) trovare il fascio  $\mathcal{F}$  dei piani passanti per  $r$ :

$$\mathcal{F} : h(x, y, z) = \lambda f_1(x, y, z) + \mu f_2(x, y, z)$$

- (c) Imporre il passaggio del fascio dal terzo punto.

3. Ricavare l'equazione dal determinante della seguente matrice  $M$ :

$$\alpha : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sostituiamo  $(x, y, z) = A, B, C$  in  $M$ . Il determinante avra' di volta in volta una riga c.l. delle altre, quindi  $A, B, C$  soddisfano l'equazione, che essendo di primo grado, rappresenta un piano.

Nota che possiamo ottenere un'identita' in questo caso:

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad |M| = 0 \Leftrightarrow A, B, C \text{ sono allineati}$$

### 5.3.3 Casi vari

Dato il piano  $\alpha$ , e i punti  $P, Q$ , troviamo il piano  $\beta$  che  $e' \perp \alpha$  e  $P, Q \in \beta$ :

1. Troviamo la retta  $r$  passante per  $P$  e  $Q$  (vedi par [pg.44,par.5.4.4]) e la esprimiamo come intersezione di due piani:

$$r : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

2. troviamo il fascio  $\mathcal{F}_r$  dei piani passanti per  $r$ :

$$\mathcal{F}_r : h(x, y, z) = \lambda f(x, y, z) + \mu g(x, y, z)$$

3. Imponiamo al fascio, la condizione di perpendicolarita' tra due piani, cioe'  $aa' + bb' + cc' = 0$ , dove  $a, b, c$  sono i coeff di  $\alpha$  e  $a', b', c'$  dell'equazione del fascio.

Troviamo cosi'  $\lambda$  e  $\mu$ , e prendendo una particolare valore per essi, li sostituiamo in  $h(x, y, z)$  ottenendo cosi'  $\beta$

Date due rette  $r, s$ , troviamo il piano  $\alpha : r \subseteq \alpha, \alpha \parallel s$ . Si procede cosi':

1. Troviamo  $\mathcal{F}_r$
2. imponiamo la condizione di perpendicolarita' tra la retta  $s$  e il piano generico del fascio

## 5.4 Retta

Una retta  $r$  e' semplicemente:

$$r = \alpha \cap \beta$$

dove  $\alpha \neq \beta$  sono due piani. Analiticamente, se i piani sono:

$$\begin{aligned} \alpha : ax + by + cz + d &= 0 \\ \beta : a'x + b'y + c'z + d' &= 0 \end{aligned}$$

allora

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

con la condizione che

$$\rho \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$$

ovvero le due equ. del sistema devono essere indipendenti.

### 5.4.1 Retta in forma parametrica

La retta  $r$  passante per  $P_0$  e parallela a  $\vec{v}$ :

$$\begin{aligned} [\vec{v}]_E &= (a, b, c) \\ P \in r &\Leftrightarrow \vec{P_0P} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = k(a, b, c) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + ka \\ y = y_0 + kb \\ z = z_0 + kc \end{cases} \end{aligned}$$

quindi la retta e' data da

$$r : \begin{cases} x = x_0 + ka \\ y = y_0 + kb \\ z = z_0 + kc \end{cases}$$

questa e' l'equazione parametrica della retta espressa con l'uso dei numeri direttori.

Se invece abbiamo due punti, possiamo procedere come avevamo fatto in [pg.3,par.1.2.5]:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}, X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix}, X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e l'equ diventa:

$$X = hX_0 + kX_1$$

### 5.4.2 Parallelismo e perpendicolarita'

Date

$$r : \begin{cases} x = x_0 + ka \\ y = y_0 + kb \\ z = z_0 + kc \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = x'_0 + ka' \\ y = y'_0 + kb' \\ z = z'_0 + kc' \end{cases}$$

e i loro vettori direttori:

$$\begin{aligned} [\vec{v}]_E &= (a, b, c) \\ [\vec{w}]_E &= (a', b', c') \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} r \parallel s &\Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{w} \Leftrightarrow (a, b, c) = \lambda(a', b', c') \\ r \perp s &\Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0 \end{aligned}$$

### 5.4.3 Piano - Retta

Dato un piano  $\alpha$  e una retta  $r$ , con i rispettivi vettori direttori  $\vec{v}, \vec{w}$ ,  $[\vec{v}]_E = (a, b, c)$ ,  $[\vec{w}]_E = (a', b', c')$ , si ha

$$\begin{aligned} \alpha \perp r &\Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{w} \Leftrightarrow (a, b, c) = k(a', b', c') \\ \alpha \parallel r &\Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0 \end{aligned}$$

#### 5.4.4 Passante per due punti

Dati due punti  $A = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $B = (x_1, y_1, z_1)$ , troviamo la retta passante per essi. Avremo che

$$[\vec{AB}]_E = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

Allora usando la costruzione del par [pg.43, par.5.4.1], troviamo la retta parallela a  $\vec{AB}$  e passante per  $A$ :

$$r : \begin{cases} x = x_0 + k(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + k(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + k(z_1 - z_0) \end{cases}$$

Se  $x_1 \neq x_0$ ,  $y_1 \neq y_0$ ,  $z_1 \neq z_0$ , allora possiamo scriverla come:

$$\begin{cases} k = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \\ k = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \\ k = \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

Nota che  $x_1 - x_0$ ,  $y_1 - y_0$ ,  $z_1 - z_0$ , ovvero i numeri ai denominatori, sono i numeri direttori della retta. Da qui possiamo esprimere la retta come intersezione di due piani:

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \\ \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \end{cases}$$

Dall'equazione

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

possiamo ricondurci a quella parametrica:

$$\begin{cases} k = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \\ k = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \\ k = \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + k(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + k(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + k(z_1 - z_0) \end{cases}$$

Per passare dalla forma d'intersezione di due piani, a quella parametrica, si risolve il sistema rispetto a un parametro. Ad esempio:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{bd' - db'}{ab' - ba'} + k \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} \\ y = \frac{da' - ad'}{ab' - ba'} + k \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} \\ z = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{bd' - db'}{ab' - ba'} + k(bc' - cb') \\ y = \frac{da' - ad'}{ab' - ba'} + k(ca' - ac') \\ z = k(ab' - ba') \end{cases}$$

**Lemma 5.1.** *Data la retta*

$$r = \alpha \cap \beta : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

*un suo vettore direttore  $\vec{v}$  e'*

$$\vec{v} = |M| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

**Proof:**

⟨1⟩1. Dobbiamo provare che  $\vec{v} \parallel r$

Calcoliamo  $|M|$  usando Laplace sulla prima riga di  $M$ :

$$\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$$

dove

$$l = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \quad m = - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \quad n = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

Riscriviamo, come abbiamo visto prima, la retta in forma parametrica:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{bd' - db'}{ab' - ba'} + k(bc' - cb') \\ y = \frac{da' - ad'}{ab' - ba'} + k(ca' - ac') \\ z = k(ab' - ba') \end{cases}$$

La tesi equivale quindi a provare che

$$r \parallel \vec{v} \Leftrightarrow (l, m, n) = \lambda(bc' - cb', ca' - ac', ab' - ba')$$

⟨2⟩1. Dim che  $l = \lambda(bc' - cb')$

$$l = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = bc' - cb' = 1 \cdot (bc' - cb')$$

⟨2⟩2. Q.E.D.

Analogamente per gli altri casi.

□

**Corollary 5.2.** *Da questo lemma e applicando la regola di Laplace alla prima riga del determinante, possiamo facilmente ricavare dalla forma d'intersezione di due piani, i numeri direttori  $l, m, n$  della retta:*

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \longrightarrow l = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \quad m = - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \quad n = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

## 5.5 Piano improprio

Anche nello spazio a tre dimensioni possiamo parlare di punti impropri.

Ogni piano  $\alpha$  e' dotato della sua retta impropria  $r_\infty(\alpha)$ , che e' l'insieme di tutti i suoi punti impropri, ovvero l'insieme di tutte le direzioni delle sue rette.

Definiamo allora il piano improprio  $\pi_\infty$ , come l'insieme di tutti i punti impropri di tutti i piani dello spazio, o equivalentemente, come l'insieme di tutti i punti di tutte le rette improprie dello spazio.

Nello spazio, si aggiunge questa proprieta': se consideriamo la retta  $s = \alpha \cap \beta$ , avremo che i due piani  $\alpha, \beta$  condividono la stessa retta  $s$ , e quindi una stessa direzione, ovvero, uno stesso punto improprio.

Le coordinate omogenee si ottengono sempre usando una coordinata  $t$  in piu', con le seguenti relazioni:

$$\text{punto proprio } P = (x, y, z) \sim (x', y', z', t')$$

$$\begin{cases} x' = xt' \\ y' = yt' \\ z' = zt' \end{cases}$$

$$\text{punto improprio } P_\infty = (x', y', x', 0)$$

Notiamo anche che le prime tre coordinate del punto improprio  $(l, m, n, 0)$  danno i numeri direttori delle rette passanti da esso, infatti:

**Proof:**

$$r = \alpha \cap \beta$$

$$r \cap \pi_\infty = \alpha \cap \beta \cap \pi_\infty : \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \longrightarrow \left( \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} k, -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} k, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & c' \end{vmatrix} k, 0 \right)$$

□

## 5.6 Rette sghembe

**Definition 5.2.** Due rette  $r, s$  sono complanari  $\Leftrightarrow \exists$  piano  $\alpha : r, s \subseteq \alpha \Leftrightarrow r \cap s = P$ , dove  $P$  puo' essere un punto proprio (incidenti) o improprio (parallele). Due rette  $r, s$  non complanari (sghembe)  $\Leftrightarrow r \cap s = \emptyset$  (considerando anche i punti impropri).

**Theorem 5.3.** Date due rette  $r \neq s$ , si ha:  
 $r, s$  sghembe  $\Rightarrow \exists$  piano  $\alpha, \beta : r \subseteq \alpha, s \subseteq \beta, \alpha \parallel \beta$   
 Non vale il viceversa.

**Theorem 5.4.** Date le rette

$$r : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{cases}$$

esse sono sghembe  $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ , dove

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

**Proof:**

Per vedere se sono sghembe dobbiamo controllare se  $r \cap s = \emptyset$ , cioè' dobbiamo risolvere il sistema (in coord. omogenee)

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3t = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4t = 0 \end{cases}$$

Se  $|A| \neq 0$ , per Cramer, ammette una sola soluzione, e dato che il sist. e' omogeneo, e' quella nulla, cioè'  $(0, 0, 0, 0)$ . Quest'ultima quaterna pero' non rappresenta alcun punto nello spazio proiettivo, ovvero, in questo caso,  $r \cap s = \emptyset$ .

Se  $|A| = 0$ , abbiamo che  $\rho(A) = 3$  e quindi abbiamo  $\infty^1$  soluzioni proporzionali, ovvero  $r \cap s = P$ .

$\langle 2 \rangle 1$ . Dim  $\rho(A) = 3$

Intanto  $|A| = 0 \Rightarrow \rho(A) \leq 3$ . Osserviamo che le righe

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

sono l.i. perche' definiscono i piani che intersecandosi danno  $r$ . Lo stesso vale per le altre due righe di  $A$ . Quindi

$$\rho(A) = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

ma questo e' impossibile perche'  $r \neq s$ . In definitiva,  $\rho(A) = 3$ . □

Vediamo quando le due rette  $r, s$  sono sghembe:

**Example 5.3.** Date due rette sghembe  $r, s$ , prendiamo il piano  $\alpha : r \subseteq \alpha, \alpha \parallel s$  e il piano  $\beta : s \subseteq \beta, \beta \parallel r$ , allora

$\exists$  retta  $p : p \perp \alpha, p \cap r = \{P_0\}, p \cap s = \{P_1\}$ .

Si ha che  $p = \pi \cap \pi'$ , dove  $\pi \supseteq p, r, \pi' \supseteq p, s$

Per trovare  $p$  si procede in questo modo:

1. Si trovano i num direttori di  $r, s$
2. Si trova  $\alpha$ , che e' il piano contenente  $r$  e parallelo a  $s$  (vedi pag. 42)
3. Si trova  $\pi : \pi \supseteq r, \pi \perp \alpha$  (nota<sup>15</sup>)
4. Si trova  $\pi' : \pi' \supseteq s, \pi' \perp \alpha$
5.  $p = \pi \cap \pi'$

## 5.7 Distanze nello spazio

Avendo  $p$  (vedi esempio [pg.47, par.5.3]), possiamo anche definire la distanza tra le due rette sghembe:

$$d(r, s) := d(A, B)$$

dove  $p \cap s = \{A\}, p \cap r = \{B\}$ . Questa distanza e' quella minima tra le due rette  $r, s$ .

Se  $r \parallel s$ , allora la distanza e' quella usuale.

La distanza tra un punto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e un piano  $\alpha : ax + by + cz + d = 0$  e':

$$d(\alpha, P_0) = d(P, H)$$

dove  $H = r \cap \alpha$ , dove  $r$  e' la retta  $\perp$  a  $\alpha$  e passante per  $P_0$ . Procedendo come di consueto<sup>16</sup> si arriva alla seguente formula:

$$d(\alpha, P_0) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

<sup>15</sup>  $\pi \supseteq p \perp \alpha \Rightarrow \pi \perp \alpha$

<sup>16</sup> si scrive  $r$  in forma parametrica, con i numeri direttori rispettivamente uguali a  $a, b, c$  e passante per  $P_0$ , cioe':

$$r : \begin{cases} x = x_0 + ak \\ y = y_0 + bk \\ z = z_0 + ck \end{cases}$$

poi si risolve il sistema  $r \cap \alpha$  e si calcola  $d(P, H)$

La distanza tra due piani paralleli  $\alpha :: ax + by + cz + d = 0$ ,  $\beta : a'x + b'y + c'z + d' = 0$  e' la distanza da un punto qualsiasi di  $\beta$  dal piano  $\alpha$  (o viceversa). La sua formula e'

$$d(\alpha, \beta) = \frac{|d - d^*|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

La formula si ricava facilmente da quella della distanza punto-piano, considerando che possiamo riscrivere l'equ di  $\beta$  come  $ax + by + cz + d^* = 0$ . Dove  $d^*$  si ricava con procedimento analogo a quello usato per la distanza retta-retta (vedi par [pg.1, par.1.2.2]).

## 5.8 Quadriche

Ovvero, coniche estese nello spazio:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + 2a_{44} = 0 \quad (1)$$

La sua matrice associata e'

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$$

## 5.9 Vertice

Rispetto al piano, abbiamo un elemento in piu': il vertice.

Dato un punto  $V \in Q$ , dove  $Q$  e' una quartica,

$$V \text{ vertice della quartica} \Leftrightarrow \forall P \in Q \setminus \{V\} \text{ la retta } PV \subseteq Q$$

**Theorem 5.5.**

$$\text{vertici } V_1, V_2 \in Q \Rightarrow Q \text{ e' spezzata}$$

**Proof:**

Sia  $P_0 \in Q : P_0 \notin V_1V_2$ , allora

$$V_1P_0 \subseteq Q$$

$$P \in V_1P_0 \subseteq Q \Rightarrow P \in Q$$

$$V_2 \text{ vertice} \Rightarrow V_2P \subseteq Q$$

$$\forall P \in V_1P_0 \quad V_2P \subseteq Q$$

$$\Rightarrow \text{il piano } \alpha : V_1P_0 \subseteq \alpha, V_2 \in \alpha \text{ e' tale che } \alpha \subseteq Q$$

Quindi, la quartica e' spezzata.

□

**Theorem 5.6.**

$$Q \text{ e' spezzata} \Rightarrow \exists \infty \text{ vertici } \in Q$$

**Proof:**

Supponiamo che la conica sia spezzata in  $\alpha \neq \beta$ , allora tutti i punti appartenenti alla retta  $r = \alpha \cap \beta$  sono dei vertici.

□

**Corollary 5.7.**

$$\text{vertici } V_1, V_2 \in Q \Rightarrow \exists \infty \text{ vertici } \in Q$$

**Theorem 5.8.** *Preso un punto  $V \in Q$*

$$V \text{ e' vertice} \Leftrightarrow \forall \text{rette } r: V \in r \text{ si ha } r \cap Q = r \vee r \cap Q = \{V\}$$

**Proof:**

(1)1. Dim  $\Rightarrow$

Sia  $r$  una retta che passa per  $V$ . Intanto,  $r \cap Q$  non puo' essere vuota, perche' c'e' almeno  $V$ .

Poiche'  $V \in r$ ,  $V \in Q$ , se  $r \cap Q$  e' un punto, questo deve essere necessariamente il vertice  $V$ .

Se in  $r \cap Q$  ci sono almeno due punti, allora uno sara' il vertice, e l'altro un punto  $P$  di  $Q$  e di  $r$ , quindi, per definizione di vertice,  $PV \subseteq Q$  e' questo implica  $r \subseteq Q$ .

(1)2. Dim  $\Leftarrow$

Esiminiamo gli unici due casi che abbiamo nell'hp:  $r \cap Q = V$ ,  $r \cap Q = r$

(2)1. Mostriamo che dato un punto  $P$ , si ha  $P \notin Q \Leftrightarrow PV \cap Q = \{V\}$

(3)1. Dim  $\Rightarrow$

Poiche'  $V \in Q$  si ha che  $V \in PV \cap Q$ . Se per assurdo  $PV \cap Q = PV$  allora si avrebbe  $P \in Q$ , assurdo. Quindi, per Hp del passo (1)2, deve necessariamente essere  $PV \cap Q = \{V\}$ .

(3)2. Dim  $\Leftarrow$

Vale anche il viceversa:  $PV \cap Q = \{V\} \Rightarrow P \notin Q$ , infatti, se per assurdo  $P \in Q$  si avrebbe  $P \in PV \cap Q$ , assurdo contro  $PV \cap Q = \{V\}$ .

Da questo deduciamo che  $P \in Q \Leftrightarrow PV \cap Q = PV \Leftrightarrow PV \subseteq Q$ . E questa e' proprio la definizione di vertice.

□

**Theorem 5.9.** *Siano  $R_1 \neq R_2 \subseteq Q$  due rette contenute in  $Q$ , e sia  $\{V'\} = R_1 \cap R_2$  (puo' anche essere improprio), allora*

$$\begin{cases} Q \text{ non spezzata} \\ \exists V \in Q \text{ vertice} \end{cases} \Rightarrow V' = V \text{ e' un vertice di } Q$$

*Quindi, e' facile trovare il vertice di una  $Q$  non spezzata: basta prendere due rette contenute e intersecarle.*

*Proof.* Supponiamo per assurdo che  $V'$  non sia un vertice

$$V' \text{ non vertice} \Rightarrow V \neq V' \Rightarrow V \notin R_1 \cap R_2$$

Supponiamo ad esempio che  $V \notin R_2$ , allora

$$V \notin R_2 \Rightarrow VP \neq R_2 \quad \forall P \in R_2$$

$$V \text{ vertice} \Rightarrow VP \subseteq Q \quad \forall P \in R_2$$

Quindi il piano individuato da  $V$  e dalla retta  $R_2$  e' contenuto in  $Q$ . Allora  $Q$  e' spezzata, assurdo. □

**Theorem 5.10.** Sia  $V = (x_0, y_0, z_0, t_0)$  e  $Q : XAX = 0$ , allora

$$V \text{ vertice di } Q \Leftrightarrow AX_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{dove } X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{bmatrix}.$$

Questo teorema ci permette di calcolare i vertici di una quadrica: basta porre  $X$  al posto di  $X_0$  e risolvere il sistema.

**Proof:**

(1)1. Dim  $\Rightarrow$

Sia  $P = (x_1, y_1, z_1, t_1) = (X_1) \neq V$  un punto. Per il thm [pg.49, par.5.8],  $PV \cap Q = \{V\} \vee PV$ . Calcoliamo il sistema  $PV \cap Q$ :

$$\begin{cases} {}^tXAX = 0 \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases} \quad \begin{cases} {}^t(\lambda X_0 + \mu X_1)A(\lambda X_0 + \mu X_1) \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases}$$

Procedendo così come abbiamo fatto in par [pg.11, par.3.0.2], si giunge a:

$$\begin{cases} \lambda^2({}^tX_0AX_0) + \mu^2({}^tX_1AX_1) + 2\lambda\mu({}^tX_0AX_1) = 0 \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases}$$

Nel caso in cui  $PV \cap Q = \{V\}$  si ha

$$V \in Q \Rightarrow ({}^tX_0AX_0) = 0$$

$$P \notin Q \Rightarrow ({}^tX_1AX_1) \neq 0$$

$$\begin{cases} \mu(\mu({}^tX_1AX_1) + 2\lambda({}^tX_0AX_1)) = 0 \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = 0 \\ X = \lambda X_0 \end{cases} \vee \begin{cases} \mu_2 = -\frac{2\lambda({}^tX_0AX_1)}{{}^tX_1AX_1} \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases}$$

il sistema deve avere un'unica soluzione, quindi

$$\mu_1 = \mu_2 = -\frac{2\lambda({}^tX_0AX_1)}{{}^tX_1AX_1} = 0 \Rightarrow {}^tX_0AX_1 = 0$$

poiché possiamo ripetere tutto questo ragionamento per  $\forall P \neq V$ , e quindi  $\forall X_1$ , deduciamo che  $({}^tX_0AX_1) = 0 \Rightarrow {}^tX_0A = 0 \Leftrightarrow AX_0 = 0$

Nel caso in cui  $PV \cap Q = PV$ , il sistema darà un'identità, e di conseguenza

$$({}^tX_0AX_0) = ({}^tX_1AX_1) = ({}^tX_0AX_1) = 0$$

e da qui, come prima arriviamo a  $AX_0 = 0$

(1)2. Dim  $\Leftarrow$

Per Hp abbiamo  $AX_0 = 0$ . Preso un punto  $P = (X_1) \neq V \in Q$ :

$$r \cap Q : \begin{cases} {}^tXAX = 0 \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 \underbrace{({}^tX_0AX_0)}_{=0 \text{ } V \in Q} + \mu^2 \underbrace{({}^tX_1AX_1)}_{=0 \text{ } P \in Q} + 2\lambda\mu \underbrace{({}^tX_0AX_1)}_{=0 \text{ } AX_0=0} \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases} \Rightarrow PV \subseteq Q$$

Quindi preso un  $P \neq V \in Q \Rightarrow PV \subseteq Q$ . Questa è la definizione di vertice.  $\square$

### 5.9.1 Classificazione delle quadriche

Classificazione delle quadriche in base ai loro vertici:

**Zero vertici** Si hanno le quadriche non degeneri.

Queste si classificano ulteriormente con  $C_\infty(Q) = \pi_\infty \cap Q$ , la conica all'infinito di  $Q$  (dove  $\pi_\infty$  e' il piano all'infinito) Q NON DE-  
GENERE

$C_\infty(Q)$  e' non spezzata, con almeno un punto reale si ha allora l'*iperboloide*

$C_\infty(Q)$  e' spezzata si ha il *paraboloide*.

$C_\infty(Q)$  e' non spezzata, senza punti reali, ovvero a punti tutti immaginari si ha l'*ellissoide*

#### 1 vertice

|                          |          |                                  |          |
|--------------------------|----------|----------------------------------|----------|
| <b>Vertice proprio</b>   | Cono     | ( $C_\infty(Q)$ e' non spezzata) | DEGENERE |
| <b>Vertice improprio</b> | Cilindro | ( $C_\infty(Q)$ e' spezzata)     |          |

$\infty$  vertici disposti su una retta si ha una spezzata in due piani distinti

$\infty$  vertici disposti su un piano si ha una spezzata in due piani coincidenti.

Usando il  $\rho(A)$  possiamo capire in quale caso siamo:

1.  $\rho(A) = 4 \Leftrightarrow \nexists$  vertici
2.  $\rho(A) = 3 \Leftrightarrow \exists_1$  vertice
3.  $\rho(A) = 2 \Leftrightarrow \exists \infty^1$  vertici, disposti su una retta
4.  $\rho(A) = 1 \Leftrightarrow \exists \infty^2$  vertici disposti su un piano.

Ovvero,

1.  $\rho(A) = 4 \Leftrightarrow$   
 $C_\infty(Q)$  e' non spezzata, con almeno un pt. reale : *iperboloide*  
 $C_\infty(Q)$  e' spezzata : *paraboloide*  
 $C_\infty(Q)$  e' img non spezzata : *ellissoide*
2.  $\rho(A) = 3 \Leftrightarrow$   
**V proprio** : cono  
**V improprio** : cilindro
3.  $\rho(A) = 2 \Leftrightarrow$  spezzata in due piani distinti
4.  $\rho(A) = 1 \Leftrightarrow$  spezzata in due piani coincidenti

**Proof:**

Utilizzando il thm [pg.50,par.5.10], basta studiare il sistema  $AX = 0$ , dove in questo caso  $X$  e' il nostro punto incognita.

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t = 0 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34}t = 0 \\ a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44}t = 0 \end{cases}$$

Tenendo presente che il sistema e' omogeneo,

CASE:  $\rho(A) = 4$

per Cramer, si ha una sola soluzione, e quindi quella nulla  $(0, 0, 0, 0)$ , che non descrive alcun punto.

CASE:  $\rho(A) = 3$

per Rouché, e sempre perché il sis è omogeneo, si hanno  $\infty^1$  soluzioni proporzionali fra loro, che descrivono quindi un unico punto.

CASE:  $\rho(A) = 2$

$\infty^1$  soluzioni (che non possono essere proporzionali), quindi  $\infty$  vertici. Solo due equazioni del sistema rimangono indipendenti, perciò il sistema si riduce a due equazioni, e quindi alla descrizione di una retta.

CASE:  $\rho(A) = 1$

$\infty^2$  soluzioni. Solo un'equazione è l.i. Essa descrive un piano.

□

## 5.10 Quadrica-retta

Così come abbiamo fatto in [pg.11, par.3.0.2], abbiamo

$$r \cap Q = \begin{cases} P_0 \neq P_1 & \text{due punti distinti} \\ P_0 = P_1 & \text{due punti coincidenti} \\ P_0, P_1 & \text{due punti immaginari e coniugati} \\ r & \text{l'intera retta (ad esempio, quando la quadrica è spezzata)} \end{cases}$$

### 5.10.1 Quadrica-piano

$$Q \cap \alpha = \text{conica} \vee \emptyset$$

**Proof:**

Premessa: sia  $f(x, y) = 0$  l'equ di una conica nel piano. Sicuramente è lecito pensarla immersa nello spazio, ad esempio, se il piano fosse  $z = 0$ , la sua equazione sarebbe:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Sia adesso  $Q : f(x, y, z) = 0$  una quadrica e  $\alpha : ax + by + cz + d = 0$  un piano. Spostiamoci in un nuovo sistema di riferimento in modo tale che  $\alpha$  sia il piano  $Z = 0$ . Si ha:

$$Q \cap \alpha = \begin{cases} f'(X, Y, Z) = 0 \\ Z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(X, Y, 0) = 0 \\ Z = 0 \end{cases}$$

$f'$  è di secondo grado nell'incognite  $X, Y$ . Ecco quindi che abbiamo una conica nel piano  $Z = 0$ .

□

## 5.11 Sfera

Così come abbiamo fatto per la circonferenza (vedi [pg.31, par.3.7]), diamo la seguente definizione:

$$Q; \text{ è una sfera} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1 \\ a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

Il centro della sfera e'  $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$ .

Il raggio e':  $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d}$

Per  $r > 0, r < 0, Q$ , e' un ellissoide (il primo a punti reali, il secondo img).

### 5.11.1 Cerchio assoluto

Anche nello spazio esiste l'analogo dei punti ciclici: il cerchio assoluto indicato con  $K$ , che e' l'intersezione di una qualsiasi sfera con  $\pi_\infty$ :

$$K : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$K$  e' una conica a pt. img e non spezzata (e' somma di tre quadrati).

Da  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ , per  $r = 0$ ,  $\rho(A) = 3$ . Otteniamo quindi un cono img con vertice in  $C$ . Questo cono viene detto *cono isotropo*.

**Theorem 5.11.** *Il cerchio assoluto e' il luogo dei punti ciclici dello spazio, ovvero*

$$P \text{ punto ciclico} \Leftrightarrow P \in K$$

**Proof:**

$\langle 1 \rangle 1. \Rightarrow$

Sia  $C'$  un punto ciclico  $\in \pi_\infty$

sia  $C''$  il suo coniugato.

Sia  $r_\infty : C'C''$  la retta per  $C', C''$

$r_\infty$  e' impropria e pt. reali.

Sia  $\alpha$  un qualsiasi piano che la contiene. Sia  $C \subseteq \alpha$  una circonferenza e  $S$  una sfera t.c.  $C \subseteq S$ . Allora:

$$C \subseteq S \Rightarrow K = C_\infty(S) \supseteq r_\infty \supseteq \{C', C''\}$$

$\langle 2 \rangle 1. \Leftarrow$

Sia  $P' \in K$

Sia  $P'' \in K$  il suo coniugato

Sia  $r_\infty : P'P''$ . E' una retta reale.

Sia  $\alpha$  un qualsiasi piano che la contiene. Consideriamo la sfera  $S$  t.c.  $S \cap \alpha = C$ , dove  $C$  e' una circonferenza che ha per punti all'infinito  $P', P''$ .

Così facendo  $P', P''$  sono diventati dei punti ciclici.

□

**Theorem 5.12.** *Il cono isotropo uscente dal punto  $P$  e' il luogo delle rette isotrope uscenti di  $P$ .*

**Theorem 5.13.** *L'analogo del thm [pg.32, par.3.23]:*

$Q$  e' una sfera  $\Leftrightarrow a_{11} \neq 0$  e i suoi punti impropri sono quelli del cerchio assoluto

## 5.12 Cono

Dato una curva  $\Gamma : f(x, y, z) = 0$  contenuta in un piano  $\alpha$ , e un punto  $V$  (il vertice),

$$\text{cono} = \{P \in \text{retta } VQ \mid Q \in \Gamma\}$$

L'equazione del cono si ricava così:

1. Scriviamo la retta generica  $VQ$  in forma parametrica:

$$\frac{x - V_x}{Q_x - V_x} = \frac{y - V_y}{Q_y - V_y} = \frac{z - V_z}{Q_z - V_z}$$

che scriviamo in forma parametrica:

$$r : \begin{cases} x = V_x + k(Q_x - V_x) \\ y = V_y + k(Q_y - V_y) \\ z = V_z + k(Q_z - V_z) \end{cases}$$

2. e imponiamo che  $Q \in \Gamma$ :

$$\begin{cases} x = V_x + k(Q_x - V_x) \\ y = V_y + k(Q_y - V_y) \\ z = V_z + k(Q_z - V_z) \\ f(Q_x, Q_y, Q_z) = 0 \end{cases}$$

3. Al variare di  $Q_x, Q_y, Q_z, k$ , avremo tutti i punti del cono.
4. Volendo, si possono trovare i parametri, sostituirli in  $f(Q_x, Q_y, Q_z)$  e ottenere l'equazione non parametrica del cono.

**Example 5.4.** Calcolare il cono che ha per direttrice la conica

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xy + 2x + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

con vertice  $V = (1, 1, 2)$ .

Si procede così:

1. Il fascio di quadriche che contengono  $\Gamma$  e' dato da

$$\mathcal{F} : z(ax + by + cz + d) + x^2 - y^2 + 2xy + 2x + 1 = 0$$

Infatti, ogni punto che soddisfa  $\Gamma$ , soddisfa anche  $\mathcal{F}$ . In forma espansa diventa:

$$\mathcal{F} : cz^2 + zxa + zyb + zd + x^2 + 2xy + 2x + 1 - y^2$$

2. Usiamo la caratterizzazione analitica del vertice (vedi [pg.50, par.5.10]):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a/2 & 1 \\ 1 & -1 & b/2 & 0 \\ a/2 & b/2 & c & d/2 \\ 1 & 0 & d/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. risolviamo il sistema ottenendo  $a, b, c, d$

Questo stesso esempio si puo' ripetere nel caso di un cilindro: l'unica differenza e' il vertice che e' improprio.

### 5.12.1 Cilindro

Un cilindro e' un cono con il vertice all'infinito. Ovvero, data la retta  $r$  e una curva  $\Gamma : f(x, y, z) = 0$  contenuta in un piano  $\alpha$ ,

$$\text{cilindro} = \{P \in s \mid s \parallel r, s \cap \Gamma \neq \emptyset\}$$

il vertice del cilindro e' il punto all'infinito di  $r$ .

Per trovare la sua equazione:

1. Siano  $l, m, n$  i num. direttori di  $r$
2. Sia  $P \in \Gamma$ , ovvero  $f(P_x, P_y, P_z) = 0$
3. La retta generica  $s$  e' allora:

$$\begin{cases} x = P_x + lk \\ y = P_y + mk \\ z = P_z + nk \end{cases}$$

4. l'equazione e'

$$\begin{cases} x = P_x + lk \\ y = P_y + mk \\ z = P_z + nk \\ f(P_x, P_y, P_z) = 0 \end{cases}$$

al variare di  $k, P_x, P_y, P_z$  otteniamo tutti i punti del cilindro.

### 5.12.2 Proprieta'

**Theorem 5.14.** Sia  $Q$  un cono o un cilindro,  $V$  il suo vertice, e  $\alpha$  un piano, allora

$$V \in \alpha \Leftrightarrow \alpha \cap Q = \Gamma \text{ e' una conica spezzata}$$

**Proof:**

$\langle 1 \rangle 1.$  Dim  $\Rightarrow$

Sia  $P \in \Gamma$ .

$p : VP \subseteq Q$ , per def di vertice

$V \in \alpha, P \in \alpha \Rightarrow VP \subseteq \alpha$

$VP \subseteq \Gamma \Rightarrow \Gamma$  e' una conica spezzata

$\langle 1 \rangle 2.$  Dim  $\Leftarrow$

Supponiamo per assurdo che  $V \notin \alpha$

$\Gamma$  e' una conica spezzata  $\Rightarrow \exists$  retta  $p \subseteq \Gamma$

Sia  $P' \in p$ :

$$P' \in p \subseteq \Gamma \Rightarrow P' \in \Gamma$$

per def di vertice  $VP' \subseteq Q$ . Poiche' questo vale  $\forall P' \in p$ , il piano definito dalla retta  $p$  e dal punto  $V$  e' contenuto in  $Q$ , cioe'

$$\text{piano } pV \subseteq Q$$

e quindi  $Q$  e' spezzata, ma questo e' assurdo, contro ipotesi.

□

**Corollary 5.15.** *Sia  $Q$  un cono o un cilindro,  $V$  il suo vertice, e  $\alpha$  un piano, allora*

$$\alpha \cap Q = \Gamma \text{ e' una conica spezzata in } r \cup s, r \neq s \Rightarrow r \cap s = \{V\} \text{ e' vertice}$$

**Proof:**

Per il thm di prima il vertice  $V$  e' t.c.  $V \in \alpha$ , allora

$$V \in \alpha, V \in Q \Rightarrow V \in \Gamma \Rightarrow V \in r \vee V \in s$$

⟨2⟩1. Supponiamo per assurdo che  $V \in r, V \notin s$

Sia  $\{P'\} = r \cap s$ . Prendiamo  $P'' \in s : P'' \neq P'$ , allora per definizione di vertice  $VP'' \subseteq Q = r \cup s \Rightarrow VP'' = r \vee VP'' = s$ . Il primo caso e' assurdo perche'  $P'' \notin r$ . Il secondo perche'  $V \notin s$ .

⟨2⟩2. Supponiamo per assurdo che  $V \in s, V \notin r$

si procede come prima

⟨2⟩3. Q.E.D.

Quindi, poiche' necessariamente  $V \in \Gamma$ , per esclusione segue che  $V \in r \cap s$

□

**Corollary 5.16.**

$$Q \text{ cono} \Leftrightarrow C_\infty(Q) \text{ non e' spezzata}$$

$$Q \text{ cilindro} \Leftrightarrow C_\infty(Q) \text{ e' spezzata}$$

dove  $C_\infty(Q) = \pi_\infty \cap Q$  e' la conica all'infinito di  $Q$  ( $\pi_\infty$  e' il piano all'infinito)

**Proof:**

CASE:  $Q$  cono

$V$  e' un punto proprio  $\Leftrightarrow V \notin \pi_\infty$

Per il thm [pg.55,par.5.14],

$$V \notin \pi_\infty \Leftrightarrow \pi_\infty \cap Q = C_\infty \text{ e' non spezzata.}$$

CASE:  $Q$  cilindro

$V$  e' un punto improprio  $\Leftrightarrow V \in \pi_\infty$

Per il thm [pg.55,par.5.14],

$$V \in \pi_\infty \Leftrightarrow \pi_\infty \cap Q = C_\infty \text{ e' spezzata.}$$

□

### 5.12.3 Proprieta' analitiche

**Theorem 5.17.** *Sia  $Q$  una conica, allora*

1.  $a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{44} = 0 \Rightarrow O$  e' il vertice della quadrica  $\Rightarrow Q$  e' un cono o una spezzata

2.  $a_{13} = a_{23} = a_{33} = a_{43} = 0 \Rightarrow Z_\infty$  e' il vertice della quadrica  $\Rightarrow Q$  e' un cilindro con rette  $\parallel$  a  $\vec{Z}$  oppure e' una spezzata

3.  $a_{12} = a_{22} = a_{32} = a_{42} = 0 \Rightarrow Y_\infty$  e' il vertice della quadrica  $\Rightarrow Q$  e' un cilindro con rette  $\parallel$  a  $\vec{Y}$  oppure e' una spezzata

4.  $a_{11} = a_{21} = a_{31} = a_{41} = 0 \Rightarrow X_\infty$  e' il vertice della quadrica  $\Rightarrow Q$  e' un cilindro con rette  $\parallel$  a  $\vec{X}$  oppure e' una spezzata

**Proof:**

(1)1. Primo caso

$a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{44} = 0$  vuol dire che tutti il termine noto e' nullo. Usando la caratterizzazione analitica del vertice ( [pg.50,par.5.10]), controlliamo che  $O$  sia vertice:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 0 = 0$$

(1)2. Secondo caso

Si procede come prima, tenendo presente che stavolta la matrice associata e':

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{14} & a_{24} & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

e che

$$Z_{\infty} = (0, 0, 1, 0)$$

□

Negli altri casi si procede analogamente

□

**Corollary 5.18.** *Se  $Q$  non e' spezzata, allora*

1.  $\not\rightarrow$  terminenoto  $\longrightarrow$  cono con vertice in  $O$
2.  $\not\rightarrow X \longrightarrow$  cilindro parallelo a  $\vec{X}$
3.  $\not\rightarrow Y \longrightarrow$  cilindro parallelo a  $\vec{Y}$
4.  $\not\rightarrow Z \longrightarrow$  cilindro parallelo a  $\vec{Z}$

Dove con  $\not\rightarrow X$  indichiamo l'assenza di termini con la  $x$  nell'equazione della quadrica.

**Example 5.5.** Se consideriamo una conica  $\Gamma : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + \dots = 0$  nello spazio, otteniamo un cilindro con vertice  $Z_{\infty}$ , poiche' l'equazione della quadrica  $Q : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + \dots = 0$  non ha termini in  $Z_{\infty}$ . La questione si puo' anche vedere cosi': prendiamo la conica  $\Gamma$  definita nel piano e la immergiamo nello spazio con questo sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + \dots = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

dando un qualsiasi valore a  $z$ , ci "sposteremo" sull'asse  $\vec{Z}$ , ottenendo nel piano parallelo al piano  $xy$ , posto ad altezza  $z$  la nostra conica  $\Gamma$ . Così, se  $\Gamma$  fosse un'ellisse, otterremo un cilindro ellittico, e cioe' un ellissi traslata parallelamente a  $z$ , che lascia la "scia". Se fosse un parabola, otterremo un cilindro parabolico, etc. . . .

Caso analogo per

$$\begin{cases} a_1 1z^2 + a_2 2y^2 + \dots = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

In questo caso, lo spostamento sara' parallelo a  $\vec{X}$ .

### 5.13 Tangente

Sia  $P \in Q$ , non vertice,

$$\text{la retta } r \text{ e' } \tan(Q, \text{in}P) \Leftrightarrow r \cap Q = r \vee r \cap Q = \{P, P\}$$

Nota: se  $P$  fosse un vertice, allora per il thm [pg.50,par.5.10], tutte le rette passanti per  $P$  sarebbero delle tangenti. Ecco perche' imponiamo che  $P$  non debba essere un vertice.

**Theorem 5.19.**

- LET: 1.  $P = (X_0) \in Q : {}^tXAX = 0$ , con  $P$  non vertice  
 2.  $r$  una retta  
 3. Piano  $\alpha : {}^tX_0AX = 0$

allora

$$r \subseteq \alpha, P \in r \Leftrightarrow r \text{ e' } \tan(Q, \text{in}P)$$

Ovvero,  $\alpha$  e' il luogo di tutte e sole le tangenti a  $Q$  passanti per  $P$ . Esso e' chiamato il piano tangente.

**Proof:**

(1)1. Dim  $\Rightarrow$

Per Hp  $r \subseteq \alpha$ ,  $P \in r$ , allora  $r$  e' data da

$$r : X = \lambda X_0 + \mu X_1$$

dove  $P' = (X_1)$  e' un suo punto distinto da  $P$ . Alcune considerazione preliminari:

$$r \subseteq \alpha \Rightarrow P' \in \alpha \Rightarrow {}^tX_0AX_1 = 0$$

$$P \in Q \Rightarrow {}^tX_0AX_0 = 0$$

Consideriamo

$$\begin{aligned} r \cap Q : \begin{cases} {}^tXAX = 0 \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 \underbrace{({}^tX_0AX_0)}_{=0 \text{ } P \in Q} + \mu^2({}^tX_1AX_1) + 2\lambda\mu \underbrace{({}^tX_0AX_1)}_{=0} = 0 \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \mu^2({}^tX_1AX_1) = 0 \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ X = \lambda X_0 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 = 0 \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi in questo caso abbiamo ottenuto o il punto  $P$  contato due volte, oppure tutta la retta  $r$ . Per la def di tangente,  $r$  e'  $\tan(Q, \text{in}P)$ .

(1)2. Dim  $\Leftarrow$

Supponiamo per assurdo che  $r \not\subseteq \alpha$ .

$$r \text{ e' } \tan(Q, \text{in}P) \Rightarrow P \in r$$

$$P \in Q \Rightarrow {}^tX_0AX_0 = 0 \Rightarrow P \in \alpha$$

$$r \not\subseteq \alpha \Rightarrow \exists P' \in r : P' \notin \alpha, P' \neq P$$

$$P' \notin \alpha \Rightarrow {}^tX_0AX_1 \neq 0$$

$$r \cap Q = P, P' \neq P, \Rightarrow P' \notin Q \Rightarrow {}^tX_1AX_1 \neq 0$$

Consideriamo  $r \cap Q$ :

$$r \cap Q : \begin{cases} {}^tXAX = 0 \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 \underbrace{({}^tX_0AX_0)}_{=0 \text{ } P \in Q} + \mu^2 \underbrace{({}^tX_1AX_1)}_{\neq 0} + 2\lambda\mu \underbrace{({}^tX_0AX_1)}_{\neq 0} = 0 \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu^2 \underbrace{({}^tX_1AX_1)}_{\neq 0} + 2\lambda\mu \underbrace{({}^tX_0AX_1)}_{\neq 0} = 0 \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu \underbrace{(\mu({}^tX_1AX_1))}_{\neq 0} + 2\lambda \underbrace{({}^tX_0AX_1)}_{\neq 0} = 0 \\ X = \lambda X_0 + \mu X_1 \end{cases}$$

Oltre a  $\mu = 0$  che ci da' il punto  $P$ , per  $\mu \neq 0$ , come soluzione abbiamo:

$$\lambda = \frac{-\mu {}^tX_1AX_1}{2{}^tX_0AX_1}$$

che ci da' un altro punto  $P_*$ , distinto da  $P$ . Quindi  $r \cap Q = \{P, P_*\}$ , ma questo e' assurdo perche'  $r$  e'  $\tan(Q, in P)$ .

□

**Example 5.6.** Se  $O \in Q$ , dove  $O = (0, 0, 0, 1)$  e' l'origine, allora

$$\alpha : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} AX = 0 \Leftrightarrow a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z = 0$$

Nota: che  $a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z$  sono le ultime componenti dell'equazione della quadrica.

In sostanza, se abbiamo una quadrica, con un'equazione omogenea, cioe' passante per  $O$ , per trovare il piano di rette tg a  $Q$  in  $O$ , basta eguagliare le ultime quattro componenti dell'equazione. Se questo piano non esiste, allora  $O$  e' un vertice.

**Theorem 5.20.** Sia  $\alpha$  il piano tg a  $Q$  in un punto  $P_0$ , che non e' vertice, allora

$$\alpha \cap Q = \alpha \quad \vee \quad \alpha \cap Q = \Gamma \quad \text{conica spezzata}$$

**Proof:**

CASE:  $Q$  spezzata

$Q$  non puo' essere spezzata in due piani coincidenti, perche' tutti i suoi punti sarebbero dei vertici e quindi non esisterebbe  $\alpha$

$Q$  e' quindi spezzata in due piani distinti  $\pi_1, \pi_2$ . I punti della retta  $\pi_1 \cap \pi_2$  sono tutti e soli i vertici di  $Q$ . Percio'  $P_0 \in Q$  non vertice  $\Rightarrow P_0 \notin \pi_1 \cap \pi_2 \Rightarrow P_0 \in \pi_1 \oplus P_0 \in \pi_2$ . Supponiamo ad esempio che  $P_0 \in \pi_1$ .

Tutte le rette  $\subseteq \pi_1$  e passanti per  $P_0$  sono delle tangenti a  $Q$ :

$$r \subseteq \pi_1, P_0 \in r$$

$$r \cap Q = r \cap (\pi_1 \cup \pi_2) = (r \cap \pi_1) \cup r \cap \pi_2 = r \Rightarrow r \text{ e' tg}$$

allora, il piano  $\pi_1$  e' proprio il piano tangente a  $Q$  in  $P_0$ , e percio'  $\pi_1 \cap Q = \pi_1$

CASE:  $Q$  non spezzata

LET: 1.  $\Gamma = \alpha \cap Q$

2.  $P_1 \in \Gamma : P_1 \neq P_0$

3. retta  $p : P_0P_1$

$$P_0, P_1 \in \alpha \Rightarrow p \subseteq \alpha$$

Poiche'  $p$  passa per  $P_0$  ed e' contenuta in  $\alpha$ , e' allora  $\tan(Q, in P_0)$ .

$$\begin{cases} P_0, P_1 \in p \cap Q \\ p \text{ e' } \tan(Q, in P_0) \end{cases} \Rightarrow p \cap Q = p \Rightarrow p \subseteq Q$$

$$\begin{cases} p \subseteq \alpha \\ p \subseteq Q \end{cases} \Rightarrow p \subseteq \Gamma \Rightarrow \Gamma \text{ e' spezzata}$$

□

**Corollary 5.21.**

$Q$  non e' spezzata,  $\alpha$  piano tg a  $Q$  in  $P \Rightarrow Q \cap \alpha = \Gamma$  e' una conica spezzata.  
Con questo corollario possiamo effettuare la seguente classificazione di punti:

$\Gamma$  spezzata in due rette distinte :  $P_0$  si dice punto iperbolico

$\Gamma$  spezzata in due rette coincidenti :  $P_0$  si dice punto parabolico

$\Gamma$  spezzata in due rette immaginarie (che si incontrano in un punto reale):  
 $P_0$  si dice punto ellittico

Ad esempio, un piano tangente a una sfera, si incontra con essa in un solo punto reale, che e' pero' l'intersezione delle due rette immaginarie.

**Corollary 5.22.** Escludiamo il caso del cono-cilindro dal corollario precedente:  
sia  $Q$  non degenerare, allora

$\alpha$  piano tg a  $Q$  in  $P \Leftrightarrow Q \cap \alpha = \Gamma$  e' una conica spezzata.

**Proof:**

(1)1. Dim  $\Leftarrow$

Intanto, osserviamo perche' nel caso del cono-cilindro non vale: prendiamo  $\alpha$  in modo tale che  $\alpha \cap Q$  sia una conica spezzata in due rette reali distinte  $r, s$ , dove  $r \cap s = \{P\}$ . Per il cor [pg.56, par.5.15],  $P$  sarebbe il vertice di  $Q$ , ma questo e' assurdo; infatti,  $P$  e' il pt. di tangenza di  $\alpha$ : se per assurdo il pt. di tg  $T$  fosse  $\in r$  e  $\notin s$ , la retta  $TT'$ , con  $T' \in s$ , non sarebbe tg, poiche'  $\{T, T'\} \subseteq TT' \cap Q$ . Ma  $P$  e' un vertice, questo e' assurdo perche' le rette passanti dal vertice non sono tg.

Ritorniamo a noi: il caso  $\alpha \cap Q = \text{due-rette-coinc.}$  non puo' accadare, perche' altrimenti  $Q$  sarebbe un cono-cilindro, ma  $Q$  e' non degenerare<sup>17</sup>. Allora, se  $\alpha \cap Q$  e' una conica spezzata in due rette distinte reali  $r, s$ , si avra'  $P = r \cap s$ .  $P$  sara' punto di tangenza, e tutte le rette contenute in  $\alpha$ , passanti per  $P$  saranno tangenti. Infatti, sia  $q$  retta t.c.  $q \subseteq \alpha$ ,  $P \in q$ ,  $q \neq r, s$ . Se per assurdo  $q$  non fosse tg, allora  $\exists O \in q : O \neq P, O \in Q$

$$\begin{cases} O \in q \subseteq \alpha \Rightarrow O \in \alpha \\ O \in Q \end{cases} \Rightarrow O \in \Gamma = r \cup s \Rightarrow O \in r \vee O \in s$$

assurdo perche'  $q \neq r, s$ . Infine, se  $q = r \vee q = s$

$$r, s \subseteq \Gamma \subseteq Q \Rightarrow q \cap Q = q$$

.

**Proposition 5.23.** Da quest'ultimo risultato segue che  $\pi_\infty$  e' un piano tangente a un paraboloide.

<sup>17</sup>proveremo piu' avanti che tutti i punti dei cono-cilindri sono parabolici

## 5.14 Punti iperbolici, ellittici, parabolici

Abbiamo dato la definizione di punto iperbolico, ellittico, parabolico in [pg.60, par.5.21].

**Theorem 5.24.** *Sia  $Q$  una quadrica non spezzata, e  $P_0 \in Q$ , allora*

$$P_0 \text{ parabolico} \Rightarrow Q \text{ e' un cono o un cilindro}$$

**Proof:**

Una quadrica non spezzata puo' essere o un cono-cilindro oppure non degenerare. Supponiamo per assurdo che sia non degenerare. Poiche' non e' degenerare, non ha vertici, percio' per  $P_0$  esiste sicuramente il piano  $\alpha$  tg a  $Q$ .

$$P_0 \text{ parabolico} \Rightarrow \alpha \cap Q = r \cup r$$

PROOF SKETCH: considereremo un piano  $\beta \neq \alpha : r \subseteq \beta$ . Dimostrando che sia  $\alpha$ , che  $\beta$  sono piano tg, arriveremo all'assurdo.

Sia  $P_1 \in Q \setminus \alpha$ , e sia  $\beta$  il piano contenente  $r$  e  $P_1$ .

$$\beta \cap Q = \Gamma$$

$$r \subseteq \beta, r \subseteq Q \Rightarrow r \subseteq \Gamma \Rightarrow \Gamma \text{ e' spezzata}$$

$$\begin{cases} P_1 \in Q, P_1 \in \beta \Rightarrow P_1 \in \Gamma \\ P_1 \notin \alpha \Rightarrow P_1 \notin r \end{cases} \Rightarrow \exists s \neq r \subseteq \Gamma$$

$$\Gamma = r \cup s$$

Sia  $\{T\} = r \cap s$ .

<2>1. Mostriamo che  $\beta$  e' il piano tg a  $Q$  in  $T$

tutte le rette in  $\beta$ , passanti per  $T$  sono tg a  $Q$  in  $T$ . Infatti, sia  $q$  retta t.c.  $q \subseteq \beta$ ,  $T \in q$ ,  $q \neq r, s$ . Se per assurdo  $q$  non fosse tg, allora  $\exists O \in q : O \neq T, O \in Q$

$$\begin{cases} O \in q \subseteq \beta \Rightarrow O \in \beta \\ O \in Q \end{cases} \Rightarrow O \in \Gamma = r \cup s \Rightarrow O \in r \vee O \in s$$

assurdo perche'  $q \neq r, s$ . Infine, se  $q = r \vee q = s$

$$r, s \subseteq \Gamma \subseteq Q \Rightarrow q \cap Q = q$$

Ecco quindi che ogni retta passante per  $T$  e contenuta in  $\beta$  e' tg per  $Q$

<2>2.  $\alpha$  e' il piano tg a  $Q$  in  $T$

si procede come prima, tenendo presente che  $\alpha \cap Q = r$

In definitiva,

$\alpha$  e' il piano tg a  $Q$  in  $T$

$\beta$  e' il piano tg a  $Q$  in  $T$

assurdo, perche' il piano tg e' unico.

□

**Theorem 5.25.** *Sia  $Q$  una quadrica non spezzata, e  $P_0 \in Q$  non vertice, allora*

$$P_0 \text{ parabolico} \Leftrightarrow Q \text{ e' un cono o un cilindro}$$

ovvero i punti, non vertici, di un cono-cilindro sono tutti e soli i punti parabolici.

**Proof:**

<1>1. Dim  $\Rightarrow$

l'abbiamo gia' dimostrato nel thm precedente

<1>2. Dim  $\Leftarrow$

Poiche'  $P_0$  non e' vertice,  $\exists$  il piano  $\alpha$  tg a  $Q$  in  $P$ . Ora, per quanto abbiamo visto in cor [pg.60,par.5.21],  $P_0$  puo' essere o iperbolico o parabolico o ellittico. Se per assurdo  $\alpha \cap Q = r \cup s$ , per il cor [pg.56,par.5.15], vertice  $V = r \cap s$ .  $V \in r \cup s = \alpha \cap Q \Rightarrow V \in \alpha$ , ma questo e' assurdo, perche', in questo caso, il piano tg non puo' contenere il vertice<sup>18</sup>. Quindi  $\alpha \cap Q = r \cup r$ .

□

**Corollary 5.26.**  *$Q$  non degenerare ha solo punti iperbolici o ellittici.*

**Proof:**

$Q$  non degenerare significa che non ha vertici, allora per il thm [pg.61,par.5.25], tutti i suoi punti non sono paraboloidi. Quindi sono o iperbolici o ellittici.

□

**Theorem 5.27.**  *$Q$  non spezzata,*

$$P_0 \in Q \text{ iperbolico} \Rightarrow \forall P \in Q \text{ } P \text{ iperbolico}$$

**Proof:**

Osserviamo che per il cor [pg.61,par.5.25],

$$P_0 \text{ iperbolico} \Rightarrow P_0 \text{ non e' cono-cilindro}$$

poiche'  $Q$  non e' spezzata, e non e' un cono-cilindro, allora e' non degenerare.

Sia  $\alpha$  il piano  $\tan(Q, in P_0)$ . Osserviamo che  $P_0$  iperbolico  $\Rightarrow \Gamma = \alpha \cap Q = r \cup s$ .

Sia  $P_1 \in Q : P_1 \neq P_0$ ,

CASE:  $P_1 \in \alpha$

Supponiamo che  $P_1 \in s$ . Sia  $\beta$  il piano  $\tan(Q, in P_1)$ , si ha

$$P_0 \in s \subseteq \alpha \Rightarrow s \text{ e' tg in } P_0$$

$$P_1 \in s$$

$$\Rightarrow s \subseteq \beta \quad [\text{per def di piano tg}]$$

studiamo  $\Gamma' = \beta \cap Q$ :

1.  $\Gamma'$  non puo' essere unione di due rette coincidenti perche' altrimenti  $P_1$  sarebbe parabolico, e per il thm [pg.61,par.5.25]  $P_0$  dovrebbe essere pure parabolico, assurdo.
2.  $\Gamma'$  non puo' essere unione di rette img, perche'

$$\begin{cases} \alpha \cap Q = r \cup s \Rightarrow s \subseteq Q \\ s \subseteq \beta \end{cases} \Rightarrow s \subseteq \Gamma'$$

ed  $s$  e' reale.

3. Quindi l'unico caso rimasto e' che  $\Gamma'$  sia unione di due rette reali, cioe'  $P_1$  e' un iperboloide.

CASE:  $P_1 \notin \alpha$

Ricordando che  $\Gamma = \alpha \cap Q = r \cup s$ ,

LET: 1.  $\beta$  il piano  $\tan(Q, in P_1)$

2. retta  $p = \beta \cap \alpha$

3.  $\{A, B\} \subseteq p \cap (r \cup s)$

---

<sup>18</sup>Vedi la dim. del cor [pg.60,par.5.22]

Allora,

$$\begin{aligned}
P_1 \in \beta, A \in \beta &\Rightarrow P_1 A \subseteq \beta \\
&\Rightarrow P_1 A \text{ e' } \tan(Q, in P_1) \Rightarrow P_1 A \cap Q = (P_1 \vee P_1 A) \\
P_1 A \cap Q &= P_1 \text{ assurdo perche' } A \in Q \\
&\Rightarrow P_1 A \cap Q = P_1 A \Rightarrow P_1 A \subseteq Q
\end{aligned}$$

$$P_1 A \subseteq \beta \cap Q = \Gamma'$$

in modo analogo si vede che

$$P_1 B \subseteq \beta \cap Q$$

Quindi  $\beta \cap Q$  e' spezzata in due rette reali e distinte, percio'  $P_1$  e' iperbolico.  $\square$

**Theorem 5.28.**

$$P_0 \in Q \text{ ellittico} \Rightarrow \forall P \in Q \text{ } P \text{ ellittico}$$

Questo thm si ottiene per esclusione dal thm [pg.61,par.5.25], e dal [pg.62,par.5.27].

**Proposition 5.29.** Riassumendo i precedenti tre teoremi:

*una conica non spezzata, ha i punti tutti dello stesso tipo.*

#### 5.14.1 Tabella riassuntiva

|                | $C_\infty(Q)$ non spezzata              | $C_\infty(Q)$ spezzata |
|----------------|-----------------------------------------|------------------------|
| pt. iperbolici | Iperboloide iperbolico                  | Paraboloide iperbolico |
| pt. ellittici  | Iperboloide ellittico $\vee$ Ellissoide | Paraboloide ellittico  |
| pt. parabolici | Cono                                    | Cilindro               |

Il caso dubbio "Iperboloide ellittico  $\vee$  Ellissoide" si risolve vedendo di che tipo sono i punti di  $C_\infty(Q)$ : se img avremo l'ellissoide, se reali l'iperboloide ellittico.

### 5.15 Sezioni piane - Cono-Cilindro

In questa sottosezione, analizzeremo le sezioni piane dei coni e dei cilindri.

#### 5.15.1 Classificazione

Consideriamo  $\Gamma = \alpha \cap Q$ , dove  $Q$  e' un cono-cilindro,  $\alpha$  un piano,  $\Gamma$  una conica. Per classificare  $\Gamma$  si procede in questo modo:

1. Se  $V$ , vertice di  $Q$ ,  $\in \alpha \Rightarrow \Gamma$  e' spezzata (thm [pg.55,par.5.14])

2. Se  $V \notin Q$ , e  $\Gamma$  e' dato da un sistema del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + \dots = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

allora possiamo applicare tutti i teoremi che conosciamo sulle coniche  $(A_{33}, |A|, \dots)$ .

3. Altrimenti, calcoliamo i punti impropri di  $\Gamma$ , e la classifichiamo usando le definizioni (ellisse=due pt. impropri img, parabola=due pt. impropri reali coinci,  $\dots$ ).

### 5.15.2 Tipi di coniche

**Theorem 5.30.** *Sia  $Q$  un cilindro, allora si verifica uno dei seguenti casi:*

1.  $\forall \beta$  piano :  $V \notin \beta$  si ha  $\beta \cap Q$  e' una parabola
2.  $\forall \beta$  piano :  $V \notin \beta$  si ha  $\beta \cap Q$  e' una ellisse
3.  $\forall \beta$  piano :  $V \notin \beta$  si ha  $\beta \cap Q$  e' una iperbole

*Ovvero, il cilindro contiene coniche tutte dello stesso tipo.*

*In base a questo teorema, possiamo suddividere i cilindri nelle seguenti classi: cilindri ellittici, iperbolici, parabolici.*

**Proof:**

Per il corollario [pg.56,par.5.16],  $C_\infty(Q)$  e' una conica spezzata.

Consideriamo  $C_\infty(Q)$

CASE:  $C_\infty(Q)$  sono due rette  $s_1, s_2$  reali e distinte (improprie)

Notiamo che  $s_1, s_2 \subseteq \pi_\infty$ , e che per il corollario [pg.56,par.5.15],  $s_1 \cap s_2 = V$  vertice.

Prendiamo un piano  $\beta$  che non passi per  $V$ .  $r_\infty(\beta)$ , non passando per  $V$ , taglierà  $s_1, s_2$  in due punti reali e distinti. Allora,

$$\Gamma_\times = \{P_1, P_2\} \Rightarrow \Gamma \text{ e' una iperbole}$$

Nota <sup>19</sup>

CASE:  $C_\infty(Q)$  sue due rette reali e coincidenti

Come prima. Stavolta pero' si avranno due punti reali e coincidenti, e perciò

$$\Gamma_\times = \{P_1, P_2\} \Rightarrow \Gamma \text{ e' una parabola}$$

CASE:  $C_\infty(Q)$  sono due rette img

Come prima. Si avranno pero' due punti img coniugati. Quindi

$$\Gamma_\times = \{P_1, P_2\} \Rightarrow \Gamma \text{ e' una ellisse}$$

□

**Theorem 5.31.**

*Le sezioni di un cono danno origine a tutti i tipi di coniche.*

**Proof:** Basta procedere in modo analogo alla dim del thm precedente, considerando pero' che  $C_\infty(Q)$  e' una conica non spezzata.

<sup>19</sup>Conviene rappresentarsi la situazione disegnando il piano all'infinito, le due rette  $s_1, s_2$  contenute in esso, che si intersecano in  $V$ , e una retta qualsiasi che non passa per  $V$ .

## 5.16 Sezioni piane - Quadriche non degeneri

In questa sottosezione, analizzeremo delle quadriche non degeneri.

Sia  $Q$  la quadradica che considereremo di volta in volta,  $\alpha$  un piano non tg ad essa e  $\Gamma = \alpha \cap Q$ ,  $\Gamma_\infty = r_\infty(\alpha) \cap C_\infty(Q)$ .

### 5.16.1 Ellissoide

$\Gamma$  e' sempre un'ellisse

**Proof:** proprio per def.  $C_\infty(Q)$  e' tutta a punti img, quindi pure  $\Gamma$  lo e'.

### 5.16.2 Iperboloide

1.  $\Gamma_\infty = \{P_1, P_2\}$  reali  $\Rightarrow \Gamma$  e' un iperbole
2.  $\Gamma_\infty = \{P_1, P_1\}$  reali  $\Rightarrow \Gamma$  e' una parabola
3.  $\Gamma_\infty = \{P_1, P_2\}$  img  $\Rightarrow \Gamma$  e' una ellisse

**Proof:** Questi casi si verificano perche'  $C_\infty(Q)$  e' non spezzata, e reale. Nota: a differenza del cono, nell'iperboloide una sezione piana non puo' contenere tutti i tipi di coniche spezzate.

### 5.16.3 Paraboloide

CASE: Iperbolico

1.  $\Gamma_\infty = \{P_1, P_2\}$  reali  $\Rightarrow \Gamma$  e' un iperbole
2.  $\Gamma_\infty = \{P_1, P_1\}$  reale  $\Rightarrow \Gamma$  e' una parabola  
 $P_1$  e' il punto di tg della parabola con  $\pi_\infty$ , ed e' anche il suo centro.

**Proof:**  $C_\infty(Q)$  e' spezzata in due rette reali e distinte, che si possono percio' "tagliare" con  $r_\infty(\alpha)$  in due pt. distinti o due coinc.

CASE: Ellittico

1.  $\Gamma_\infty = \{P_1, P_2\}$  img  $\Rightarrow \Gamma$  e' un ellisse
2.  $\Gamma_\infty = \{P_1, P_1\}$  reale  $\Rightarrow \Gamma$  e' una parabola  
**Proof:**  $C_\infty(Q)$  e' spezzata in due rette img.

## 5.17 Equazioni ridotte e invarianti

**Theorem 5.32.** *Data una quadrica  $Q$  esiste almeno un sistema di riferimento  $\Omega XYZ$  rispetto al quale  $Q$  si puo' scrivere in una delle seguenti forme:*

$$\alpha_{11}X^2 + \alpha_{22}Y^2 + \alpha_{33}Z^2 + \alpha_{44} = 0 \quad (1)$$

$$\alpha_{11}X^2 + \alpha_{22}Y^2 + 2\alpha_{34}Z = 0 \quad (2)$$

*Inoltre, le seguenti caratteristiche dell'equazione restano invariate:*

1.  $r(A)$ , la caratteristica di  $A$ .
2.  $\det A$ .

$$3. A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ il complemento algebrico di posto } (4, 4).$$

4.

$$J = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

*Nota che ogni addendo e' il complemento algebrico (in valore assoluto) della matrice  $A_{44}$ , rispettivamente di posto  $(1,1)$ ,  $(2,2)$ ,  $(3,3)$*

5.  $I = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

### 5.17.1 Equ. ridotte

#### Coniche degeneri

1.  $Q$  cono  $\Rightarrow Q$  ha equazione ridotta di tipo (1)
2.  $Q$  cilindro iperbolico o ellittico  $\Rightarrow Q$  ha equazione ridotta di tipo (1)
3.  $Q$  cilindro parabolico  $\Rightarrow Q$  ha equazione ridotta di tipo (2)

#### non degeneri

1.  $Q$  paraboloide  $\Leftrightarrow Q$  ha equazione ridotta di tipo (2)
2.  $Q$  ellissoide o iperboloide  $\Leftrightarrow Q$  ha equazione ridotta di tipo (1)

### 5.17.2 Equazioni canoniche

Piu' in dettaglio, abbiamo le varie equazioni canoniche:

#### Coniche degeneri

1. Cilindro parabolico:  $Z = aX^2$
2. Cilindro ellittico:  $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$
3. Cilindro ellittico immaginario:  $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$
4. Cilindro iperbolico:  $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$
5. Cono:  $\alpha_{11}X^2 + \alpha_{22}Y^2 + \alpha_{33}Z^2 = 0$  (che e' l'equ di un cono con vertice in  $O$ )

#### non degeneri

1. Paraboloide ellittico<sup>20</sup>:  $Z = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}$   
Il piano  $Z = 0$  e' tangente nell'origine.
2. Paraboloide iperbolico:  $Z = \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2}$   
Il piano  $Z = 0$  e' tangente nell'origine.
3. Ellissoide a pt. reali:  $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$   
 $A = (a, 0, 0)$  e' un suo punto. Il piano tg ad  $A$  e'  $X = a$ .

---

<sup>20</sup>con "paraboloide ellittico" intendiamo "paraboloide a pt. ellittici"

4. Ellissoide a pt. immaginari:  $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = -1$
5. Iperboloide iperbolico:  $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$   
 $A = (a, 0, 0)$  e' un suo punto. Il piano tg ad  $A$  e'  $X = a$ .
6. Iperboloide ellittico:  $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$   
 $A = (a, 0, 0)$  e' un suo punto. Il piano tg ad  $A$  e'  $X = a$ .

**Proof:** Prima di proseguire consideriamo le matrici associate alle due forme ridotte:

$$(1) \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & 0 \end{bmatrix}$$

(1)1. Sia  $Q$  un cono o un cilindro, ovvero  $\rho(A) = 3$  (vedi [pg.51, par.5.9.1])

CASE: supponiamo che abbia equazione ridotta (1)

Poiche'  $\rho(A) = 3$ , allora almeno un coefficiente si deve annullare.

CASE:  $\alpha_{33} = 0$ , gli altri  $\neq 0$

Si ha  $\alpha_{22}Y^2 + \alpha_{33}X^2 + \alpha_{44}$ , che si puo' riscrivere come  $\pm \frac{X^2}{a^2} \pm \frac{Y^2}{b^2} = 1$ . Per il cor [pg.57, par.5.18], avremo un cilindro parallelo a  $\vec{Z}$ , la cui direttrice e' un ellisse (immaginaria o reale) o un'iperbole.

CASE:  $\alpha_{22} = 0$ , gli altri  $\neq 0$

come prima, pero' il cilindro e' parallelo a  $\vec{Y}$

CASE:  $\alpha_{11} = 0$ , gli altri  $\neq 0$

come prima, pero' il cilindro e' parallelo a  $\vec{X}$

CASE:  $\alpha_{44} = 0$ , gli altri  $\neq 0$

L'equazione diventa  $\alpha_{11}X^2 + \alpha_{22}Y^2 + \alpha_{33}Z^2 = 0$ . Sempre per il cor [pg.57, par.5.18], avremo un cono con vertice in  $O$ .

CASE: supponiamo che abbia equazione ridotta (2)

$\rho(A) = 3 \Rightarrow \alpha_{34} \neq 0$  (altrimenti si avrebbe  $\rho(A) = 2$ ). Allora ci sono solo due casi analoghi.

CASE:  $\alpha_{22} = 0$ , gli altri  $\neq 0$

L'equazione diventa  $\alpha_{11}X^2 + 2\alpha_{34}Z = 0$  che si puo' trasformare in  $Z = aX^2$ . Questo e' un cilindro che ha per direttrice una parabola, ed e' parallelo a  $\vec{Y}$

CASE:  $\alpha_{11} = 0$ , gli altri  $\neq 0$

L'equazione:  $\alpha_{11}Y^2 + 2\alpha_{34}Z = 0$  che si puo' trasformare in  $Z = aY^2$ . Cilindro che ha per direttrice una parabola, ed e' parallelo a  $\vec{X}$

(2)1. Sia  $Q$  una quadrica non degenera, ovvero  $\rho(A) = 4$

Stavolta  $\rho(A) = 4$ , quindi tutti i coefficienti sono  $\neq 0$

CASE: supponiamo che abbia equazione ridotta (2)

Semplificando la forma ridotta, si arriva alle due equazioni  $Z = \frac{X^2}{a^2} \pm \frac{Y^2}{b^2}$

Classifichiamole:

CASE: +

Calcoliamo la sua conica all'infinito:

$$\begin{cases} Zt = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = (\frac{X}{a} + i\frac{Y}{b})(\frac{X}{a} - i\frac{Y}{b}) = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

questa e' una conica spezzata in due rette img. Quindi, in questo caso l'equazione ridotta rappresenta un paraboloide.

Vediamo che tipi di punti possiede: basta considerare un qualsiasi

piano tangente ad essa (vedi [pg.60,par.5.21]) . Come piano prendiamo quello tangente in  $O$ , che e'  $Z = 0$  (vedi [pg.59,par.5.6]).

$$\begin{cases} 0 = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} \\ Z = 0 \end{cases}$$

che e' una conica spezzata in due rette img e quindi  $O$  e' un punto ellittico. Allora, per quanto visto prima, tutti i punti della quadrica saranno ellittici.

CASE: -

Si procede come prima, e si arriva a un iperboloide iperbolico (a pt. iperbolici).

CASE: supponiamo che abbia equazione ridotta (1)

Le equazioni canoniche a cui perveniamo sono:

$$\frac{X^2}{a^2} \pm \frac{Y^2}{b^2} \pm \frac{Z^2}{c^2} = \pm 1$$

Classifichiamole:

CASE: +, +, +

La sua conica all'infinito e'

$$\begin{cases} \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

che e' una conica non spezzata a punti immaginari. Quindi la quadrica e' un ellissoide, a punti reali (dato che l'equ della quadrica ammette soluzioni reali).

CASE: +, +, -

La sua conica all'infinito e'

$$\begin{cases} \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

che e' una conica non spezzata a punti immaginari. Quindi la quadrica e' un ellissoide, che pero' ha tutti i punti immaginari.

CASE: +, -, +

La sua conica all'infinito e'

$$\begin{cases} \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

che e' una conica non spezzata con almeno un punto reale (ad esempio  $(0, b, c, 0)$ ). Quindi la quadrica e' un iperboloide.

CASE: -, -, +

Lo stesso caso precedente. Pero' stavolta un punto reale della conica all'infinito e'  $(a, b, 0, 0)$

(4)1. Classifichiamo i tipi di punti

Un punto comune ai casi  $(+, +, +)$ ,  $(+, -, +)$ ,  $(-, -, +)$  e'  $A = (a, 0, 0)$ , infatti, soddisfa le loro equazioni. Poiche' siamo nel caso di coniche non degeneri, non c'e' dubbio che  $A$  non sia vertice. Calcoliamo allora il piano tg in  $A$  con la formula (vedi [pg.58,par.5.19]):

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm \frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}X - 1 = 0 \Leftrightarrow X = a : \alpha$$

Per classificare i punti delle quadriche, calcoliamo il sistema  $\alpha \cap Q$  nei vari.

CASE: +, +, +

$$\alpha \cap Q : \begin{cases} \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{+c^2} = 1 \\ X = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{+c^2} = 0 \\ X = a \end{cases}$$

quindi  $\alpha \cap Q$  si spezza in due rette img, avremo allora punti ellittici.  
CASE: +, -, +

$$\alpha \cap Q : \begin{cases} \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{+c^2} = 1 \\ X = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{+c^2} = 0 \\ X = a \end{cases}$$

quindi  $\alpha \cap Q$  si spezza in due rette reali distinte, avremo allora punti iperbolici.  
CASE: -, -, +

$$\alpha \cap Q : \begin{cases} \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{+c^2} = 1 \\ X = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{+c^2} = 0 \\ X = a \end{cases}$$

punti ellittici.

□

### 5.17.3 Invarianti

$|A| > 0 \Leftrightarrow Q$  e' a pt. iperbolici

$|A| < 0 \Leftrightarrow Q$  e' a pt. ellittici

$|A| = 0 \Leftrightarrow Q$  e' a pt. parabolici

$A_{44} = 0 \Leftrightarrow Q$  e' spezzata

|                        | $A_{44} \neq 0$                         | $A_{44} = 0$           |
|------------------------|-----------------------------------------|------------------------|
| $ A  > 0$              | Iperboloide iperbolico                  | Paraboloide iperbolico |
| $ A  < 0$              | Iperboloide ellittico $\vee$ Ellissoide | Paraboloide ellittico  |
| $\rho(A) = 3,  A  = 0$ | Cono                                    | Cilindro               |

Il caso  $|A| > 0, A_{44} \neq 0$  si risolve vedendo di che tipo sono i punti di  $C_\infty(Q)$ : se img avremo l'ellissoide, se reali l'iperboloide ellittico.

**Proof:**

$\langle 2 \rangle$  1. Analizziamo  $|A|$

Consideriamo le quadriche non degeneri, ovvero supponiamo che  $|A| \neq 0$ , cioe'  $\rho(A) = 4$ . Per quanto visto in 5.17.2, possiamo ricondurre l'equazione di  $Q$  a una forma canonica. Calcoliamo il determinante di ognuna:

1. Paraboloide ellittico  $Z = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}$

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2a^2b^2} < 0$$

2. Paraboloide iperbolico:  $Z = \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2}$

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2a^2b^2} > 0$$

3. Ellissoide a pt. reali:  $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{a^2b^2c^2} < 0$$

4. Iperboloide iperbolico:  $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2b^2c^2} > 0$$

5. Iperboloide ellittico:  $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{a^2b^2c^2} < 0$$

⟨2⟩2. Analizziamo  $A_{44}$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Notiamo che gli elementi dell' $A_{44}$  sono i termini di II grado dell'equazione di  $Q$ , e sono quindi quelli che rimangono quando si calcola  $C_\infty(Q)$ :

$$C_\infty(Q) = Q \cap \pi_\infty : \begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + = 0 & (1) \\ t = 0 & (2) \end{cases}$$

La (1) si può intendere come una conica scritta in coordinate omogenee usando la variabile  $z$  al posto di  $t$ . Poiché la (2) è irriducibile,  $C_\infty(Q)$  si spezza se la conica (1) si spezza. Per quanto abbiamo visto nel piano, la (1) si spezza se il suo  $\det$  è 0, ma il suo determinante è proprio  $A_{44}$ .

**Example 5.7.** Per classificare i punti di  $Q$ , esiste un metodo che in alcuni casi risulta più veloce, e che non fa uso di  $|A|$ . Questo metodo si basa sulla definizione dei tipi di punti e sull'esempio [pg.59, par.5.6].

Sia  $Q : x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + x = 0$ .

1. Passa per l'origine. Il piano  $tg$  in  $O$  è  $\alpha : x = 0$

2. Calcoliamo  $\alpha \cap Q$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + x = 0 \\ x = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - z^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (z - y)(z + y) = 0 \\ x = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} z - y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} z + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ecco che si spezza in due rette reali distinte.  $O$  e' quindi un punto iperbolico.

3.  $Q$  e' a pt. iperbolici

allora poiche' passa per l'origine,  $x = 0$

### 5.18 Polare

Data una quadrica non degenera ( $|A| \neq 0$ ), definiamo la polare cosi' come abbiamo fatto nel piano (vedi [pg.21, par.3.4]):

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{R} \\ \pi(P_1) &= \{P \in \mathcal{P} \mid {}^t P_1 A P = 0\} \end{aligned}$$

nel piano  $\pi(P_1)$  era una retta, nello spazio  $\pi(P_1)$  e' un piano: *il piano polare* di  $P_1$ . Tuttavia, poiche' la definizione formale e' identica, tutti i teoremi e le dimostrazioni viste nel piano valgono anche nello spazio:

1.  $P_0 \in \pi(P_1) \Leftrightarrow P_1 \in \pi(P_0)$   
 $P_0, P_1$  si dicono punti coniugati.  
 $\pi(P_0), \pi(P_1)$  si dicono piani coniugati.  
 $P_2 \in \pi(P_2)$  si dice *autoconiugato*
2.  $P \in Q \Leftrightarrow P \in \pi(P_1)$   
I punti autoconiugati sono tutti e soli quelli che appartengono alla quadrica.
3.  $\pi(P)$  e' tg a  $Q$  in  $P \Leftrightarrow P \in \pi(P)$   
ovvero, un piano polare e' tg a  $Q$  sse e' autoconiugato, cioe' se ha almeno un punto autoconiugato.
4.  $C \in \mathcal{P}$  si dice centro di  $Q \Leftrightarrow \pi(C) = \pi_\infty$   
Dato  $P \in \pi_\infty$ ,  $\pi(P)$  si dice piano diametrale.
5.  $d \equiv$  diametro  $\Leftrightarrow C \in d$   
Ovvero, i diametri sono tutti i piani passanti per  $C$

Anche i metodi per calcolare il centro rimangono invariati:

1. Il centro di un'ellissoide o di un iperboloide e' dato da (vedi [pg.25, par.3.17]):

$$C : \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0 \end{cases}$$

2. Il centro di un paraboloide  $Q$  e' il punto di tangenza tra  $Q$  e  $\pi_\infty$

Abbiamo pero' un nuovo teorema:

**Theorem 5.33.** *Sia  $r$  una retta e  $P_1, P_2 \in r$ , allora*

$$\forall P_0 \in r \quad \pi(P_0) \in \mathcal{F}(\pi(P_1), \pi(P_2))$$

dove  $\mathcal{F}(\pi(P_1), \pi(P_2))$  e' il fascio di piani generato da  $\pi(P_1)$  e da  $\pi(P_2)$ . Inoltre,  $r$  e' l'asse di questo fascio.

**Proof:**

$$P_1 = (X_1), \quad P_2 = (X_2), \quad P_0 = (X_0)$$

$$r : X = \lambda X_1 + \mu X_2$$

$$P_0 \in r \Rightarrow \exists \lambda', \mu' : \quad X_0 = \lambda' X_1 + \mu' X_2 \quad (1)$$

$$\pi(P_0) : {}^t X_0 A X = 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow {}^t (\lambda' X_1 + \mu' X_2) A X = 0 \Leftrightarrow \lambda' {}^t X_1 A X + \mu' {}^t X_2 A X = 0$$

$$\pi(P_1) : {}^t X_1 A X = 0$$

$$\pi(P_2) : {}^t X_2 A X = 0$$

□

**Definition 5.8.** Le rette  $r$  e  $s$  sono coniugate fra loro  $\Leftrightarrow$

$$\forall P \in r, Q \in s \quad P \in \pi(Q), Q \in \pi(P)$$

ovvero, se due qualsiasi punti delle due rette sono coniugati fra loro.

**Theorem 5.34.** *Data una retta  $r$ , esiste la sua retta coniugata  $s$ , che si trova col seguente metodo:*

1.  $P_1, P_2 \in r$
2.  $s = \pi(P_1) \cap \pi(P_2)$

**Proof:**

Sia  $P \in r$ . Costruiamo  $s$ :

$$\begin{aligned} P, P' &\in r \\ s &= \pi(P) \cap \pi(P') \\ s : &\begin{cases} {}^t P A X = 0 \\ {}^t P' A X = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Sia  $Q \in s$

(2)1. Dim che  $P \in \pi(Q)$ , ovvero  ${}^t Q A P = 0$

$$\begin{aligned} Q \in s &\Leftrightarrow \begin{cases} {}^t P A Q = 0 \Leftrightarrow {}^t Q A P = 0 \\ {}^t P' A Q = 0 \end{cases} \\ {}^t Q A P &= 0 \Leftrightarrow P \in \pi(Q) \end{aligned}$$

Per il thm della reciprocita' segue anche che  $Q \in \pi(P)$ , e quindi il viceversa e' pure dimostrato.

□

### 5.18.1 Cono-Cilindro circoscritto a $Q$

Sia  $Q$  una conica non degenera e  $P_0 \notin Q$ . Un suo cono-cilindro circoscritto e' l'unione di tutte le rette tangenti a  $Q$  e passanti per  $P_0$ . Ad esempio, un cono che continene una palla, e' un cono circoscritto ad essa.

**Theorem 5.35.**

$$\text{retta } P_0T \text{ tg a } Q \text{ in } T \Leftrightarrow T \in \pi(P_0), T \in Q$$

**Proof:**

Sia  $\alpha$  il piano tg a  $Q$  in  $T$ .

$$\alpha = \pi(T)$$

$$P_0T \subseteq \alpha \Rightarrow (P_0 \in \alpha = \pi(T)) \Leftrightarrow T \in \pi(P_0)$$

Viceversa,

$$T \in \pi(P_0) \Rightarrow P_0 \in \pi(T) \underbrace{=}_{T \in Q} \alpha \text{ piano tg a } Q \text{ in } T$$

$$P_0, T \in \alpha \Rightarrow P_0T \subseteq \alpha \Rightarrow P_0T \text{ e' una retta tg a } Q \text{ in } T$$

□

**Proposition 5.36.** Per calcolare il cono-cilindro circoscritto di  $Q$ , con vertice  $P_0$ , si procede cosi':

1. Sia  $\alpha = \pi(P_0)$
2. Sia  $\Gamma = \alpha \cap Q$
3. Calcoliamo il cono-cilindro con i metodi visti in [pg.53, par.5.12], usando  $\Gamma$  come direttrice e  $P_0$  come vertice.

CALCOLARE  
IL CONO  
CIRCO-  
SCRITTO

## 5.19 Quadriche di rotazione

Una quadrica di rotazione e' generata da una curva che ruota attorno a un asse. Ad esempio, se prendiamo  $z = x^2$ , e la facciamo ruotare attorno all'asse  $z$ , otteniamo  $z = x^2 + y^2$ . Poiche' ogni punto della curva che ruota descrive una circonferenza, le quadriche di rotazione si possono pensare come luogo di circonferenze. Per questo motivo, tutte le quadriche che non contengono ellissi, non possono essere quadriche di rotazione:

**NON sono quadriche di rotazione :** Cilindro parabolico, cilindro iperbolico, paraboloide iperbolico

**Theorem 5.37.** Data una quadrica  $Q$ , che non sia una sfera,

$$Q \text{ e' di rotazione} \Leftrightarrow C_\infty(Q) \text{ e } K \text{ sono bitangenti} \Leftrightarrow C_\infty(Q) \cap K = \{A, A, \bar{A}, \bar{A}\}$$

dove  $K$  e' il cerchio assoluto, e  $\bar{A}$  il coniugato del punto immaginario  $A$ . Nota che l'intersezione di due coniche da' al massimo 4 punti. Quando due coniche sono bitangenti, abbiamo una coppia di punti che hanno molteplicita' 2.

Questo teorema permette di verificare se una data conica e' di rotazione oppure no:

1. Si calcola  $C_\infty(Q)$

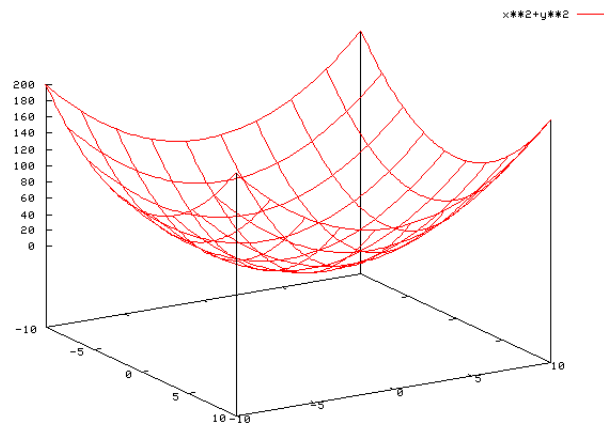


Figure 7:  $z = x^2 + y^2$

2. si pone il sistema  $C_\infty(Q) \cap K$ , dove

$$K : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

3. Se si ha una soluzione del tipo  $\{A, A, \bar{A}, \bar{A}\}$ , allora  $Q$  e' di rotazione.

Sia  $r$  la retta impropria  $A\bar{A}$ , e sia  $s$  l'asse di rotazione di  $Q$  che vogliamo trovare.  $r$  e  $s$  sono due rette coniugate, quindi, per quanto visto in 5.34, possiamo calcolare  $s$  in questo modo:

CALCOLARE  
L'ASSE DI  
ROT

1.  $s = \pi(A) \cap \pi(\bar{A})$ , e piu' precisamente, dato che  $A, \bar{A} \in Q$ , avremo  $s = \alpha \cap \beta$ , dove  $\alpha$  e' il piano tg a  $Q$  in  $A$  e  $\beta$  quello tg a  $Q$  in  $B$ .
2. Nel caso particolare in cui  $Q$  e' un cono, allora,  $s$  e' la retta passante per  $V$ , vertice, e  $\perp$  a un piano che contiene una qualsiasi circonferenza di rotazione.

Supponiamo adesso di conoscere l'equ della conica  $\Gamma : f(x, y) = 0$ , e una retta  $r$ . Vogliamo calcolare l'equazione della conica di rotazione generata da  $\Gamma$  che ruota attorno a  $r$ . Si procede cosi':

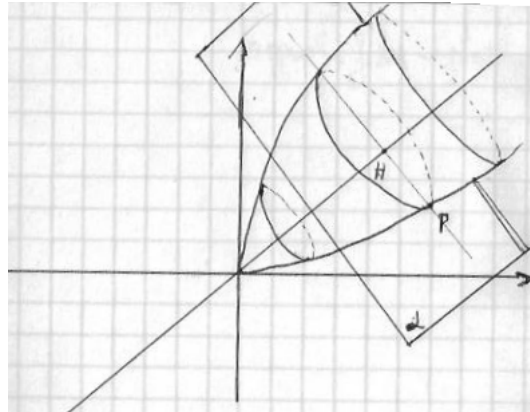
CALCOLARE  
L'EQU DI  
ROT

1. Prendiamo  $P$ , punto generico di  $\Gamma$ , ovvero, imponiamo

$$f(P_x, P_y) = 0 \quad (1)$$

Ora procediamo nel trovare la circonferenza generica.

2. Sia  $PH$  la retta  $\perp$  a  $s$ , passante per  $P$ . Sia  $H = PH \cap s$ .  $PH$  e' il raggio della circonferenza generica.
3. Sia  $\alpha : g(x, y, z) = 0$  il piano passante per  $P$  e  $\perp$  a  $s$



4. Sia  $S : s(x, y, z) = 0$  la sfera di centro  $H$  e raggio  $PH$ . La circonferenza generica e':

$$C = S \cap \alpha : \begin{cases} s(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

5. L'equazione finale di  $Q$  comprende tutte le condizioni trovate:

$$\begin{cases} f(P_x, P_y) = 0 \\ C = S \cap \alpha \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} f(P_x, P_y) = 0 \\ s(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

**Proposition 5.38.** *Se  $s$  e' un asse cartesiano del piano di  $\Gamma$  ed e' anche un suo asse di simmetria, allora vale questa regola:*

1. *Si sostituisce, nell'equazione di  $\Gamma$ , la variabile  $v$ , che non indica l'asse  $s$ , con  $v = \sqrt{v^2 + z^2}$*

*Ad esempio, se  $y = x^2$  e' la parabola canonica e  $s : x = 0$  e' l'asse di rotazione:*

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow \sqrt{x^2 + z^2} \\ y &= x^2 + z^2 \end{aligned}$$

*$y = x^2 + z^2$  e' l'equazione cercata.*

*Altro esempio:  $x^2 - y^2 = 1$  e' l'iperbole. Per ruotarla attorno all'asse  $y = 0$ :*

$$\begin{aligned} y &\longrightarrow \sqrt{y^2 + z^2} \\ x^2 - y^2 + z^2 &= 1 \end{aligned}$$

*Se  $s$  e' parallelo a un asse cartesiano, allora si puo' applicare la traslazione e poi applicare questa regola.*

## 5.20 Esercizi vari

**Example 5.9.** Trovare l'equ della sfera tg a  $\alpha$  in  $P$  e passante per  $A$

1. Si trova  $r$  retta t.c.  $r \perp \alpha$ ,  $P \in r$ . Questa retta passa per il centro della sfera.

$$r : \begin{cases} x = x_0 + ak \\ y = y_0 + bk \\ z = z_0 + ck \end{cases}$$

2.  $C \in r$ , si esprime in forma parametrica:  $C = (x_0 + ak, y_0 + bk, z_0 + ck)$
3.  $\overline{CP} = \overline{CA}$ , e si trova  $k$

**Example 5.10.** Trovare l'equ della sfera tg a  $r$  in  $P$  e avente  $C \in s$

1. Sia  $\alpha$  piano  $\perp$  a  $r$  e passante per  $P$ . Il centro stara' in questo piano.
2. E precisamente e'  $C = \alpha \cap s$

**Example 5.11.** Trovare centro e raggio della circonferenza  $C = S \cap \alpha$ , conoscendo  $S$  sfera e  $\alpha$  piano.

1. Troviamo  $c$ ,  $r$ , centro e raggio di  $S$
2. sia  $p$  la retta passante per  $c$  e  $\perp$  a  $\alpha$
3.  $c'$  centro di  $C$  e'  $c' = p \cap \alpha$
4. Sia  $t$  un generico punto di  $C$ .  $\overline{cc'}, \overline{ct}, \overline{c't}$  formano un triangolo rettango. Noi conosciamo  $cc', ct$ , con pitagora troviamo  $c't$ .

**Example 5.12.** Trovare la sfera tg al piano  $\alpha$ , passante per il pt.  $A$  e avente centro  $C$  nella retta  $r$ .

1. Si scrive  $r$  in forma parametrica
2. Da  $r$  esprimiamo  $C$  in forma parametrica
3. Imponiamo che  $d(C, A) = d(C, \alpha)$  (la seconda con la formula della distanza punto-retta)

**Example 5.13.** Data una sfera  $S$ , e una retta  $r$ , trovare i piani passanti da  $r$  e tg a  $S$ .

1. Scriviamo il fascio di piani passanti da  $r$ . Ad esempio,

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F} : \lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

2. Imponiamo  $d(\beta, C) = R$ , dove  $\beta$  e' il generico piano di  $\mathcal{F}$ , e  $R$  il raggio della sfera (che possiamo calcolare dall'equazione). Così facendo otteniamo  $\lambda$  e  $\mu$

**Example 5.14.** Dati tre punti  $A, B, C$  trovare l'unica circonferenza passante per essi:

1.  $\alpha$  piano passante per  $A, B, C$  (vedi [pg.41, par.5.3.2])
2. Fascio di sfere  $S$  passanti per  $A, B, C$ : l'equazione si ottiene sostituendo le coordinate dei punti:

$$S : \begin{cases} A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 + aA_x + bA_y + cA_z + d = 0 \\ B_x^2 + B_y^2 + A_z^2 + aB_x + bB_y + cA_z + d = 0 \\ C_x^2 + C_y^2 + A_z^2 + aC_x + bC_y + cA_z + d = 0 \end{cases}$$

3.  $C_S$  centro di  $S$ .  $r_S$  raggio di  $S$ .
4. Si calcola infine la circonferenza:  $C = S \cap \alpha$ .

**Example 5.15.** Sia  $\Gamma$  una conica nello spazio, data come intersezione di un piano e una quadrica:

$$\Gamma : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 : Q \\ g(x, y, z) = 0 : \alpha \end{cases}$$

Sostituendo possiamo ricondurci al sistema equivalente:

$$\begin{cases} f'(x, y) = 0 & (1) \\ z = g'(x, y) \end{cases}$$

La (1) può essere intesa come

$$\begin{cases} f'(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

ovvero, come la proiezione di una conica nel piano  $z = 0$ . A questo punto possiamo classificare la (1) con tutti gli strumenti relativi alle coniche  $(A_{33}, |A|, \dots)$ .

**Example 5.16.** Data la conica, intersezione di quadrica  $Q$  e piano  $\alpha$

$$\Gamma = \alpha \cap Q : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 : Q \\ g(x, y, z) = 0 : \alpha \end{cases}$$

, verificare se essa è una circonferenza, e trovare il centro e il suo raggio. Possiamo procedere in vari modi:

(1)1. Metodo I

Ricavandoci una variabile da  $g(x, y, z) = 0$  e sostituendola in  $f(x, y, z) = 0$ , otteniamo una nuova equazione a due variabili, ad esempio

$$g(x, y, z) = 0 \longrightarrow z = g'(x, y)$$

$$f(x, y, z) = 0 \longrightarrow f(x, y, g'(x, y)) = 0 \longrightarrow f'(x, y) = 0$$

Se  $f'$  rappresenta una sfera, allora  $\Gamma$  è proprio una circonferenza  $C$ , perché intersezione del piano  $\alpha$  con una sfera.

Per controllare che  $C$  sia reale, dobbiamo verificare che  $d(\alpha, S_c) < r$ , dove  $S_c$

e' il centro della sfera e  $r$  il suo raggio.

Per calcolare il centro della sfera, basta considerare:

$$C_c = p \cap \alpha$$

dove  $p$  e' la retta passante per  $S_c$  e  $\perp$  a  $\alpha$ .

Infine, per calcolare il raggio di  $C$ , si usa il thm di pitagora sul triangolo  $S_c C_c P$ :

$$C_c P = \sqrt{S_c C_c^2 + S_c P^2}$$

dove  $S_c P$  e' il raggio della sfera,  $S_c C_c = d(C_c, S_c) = d(S_c, \alpha)$ , e  $C_c P$  e' il raggio incognita della circonferenza.

(1)2. Metodo II

Come visto nell'esempio [pg.77,par.5.15], calcoliamo la conica proiezione di  $\Gamma$ :

$$\Gamma' : \begin{cases} f'(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

dopo aver verificato che si tratta di un'ellisse (utilizzando l' $A_{33}$ ), calcoliamo il centro dell'ellisse  $E_c$  (vedi [pg.25,par.3.17]).

Consideriamo la retta  $r \perp$  al piano  $z = 0$ , e passante per  $E_c$ . Il centro della circonferenza  $\Gamma$  sara'  $C_c = r \cap \alpha$ .

(1)3. Metodo III

Troviamo i punti impropri di  $\Gamma$ , ovvero passiamo a un sistema del tipo

$$\Gamma_\infty : \begin{cases} Q_\infty : f(x, y, z, t) = 0 \\ \alpha_\infty : g(x, y, z, t) = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

se con opportune sostituzioni riusciamo ad ottenere nel sistema il cerchio assoluto, cioe' ad avere qualcosa del tipo

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ g'(x, y, z, t) = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

allora possiamo affermare che  $\Gamma$  e' una circonferenza, poiche' i suoi punti impropri sono i punti ciclici del piano  $\alpha$ .

(1)4. Metodo IV

Usiamo il sistema

$$\Gamma_\infty \cap K : \begin{cases} Q_\infty : f(x, y, z, t) = 0 & (0) \\ \alpha_\infty : g(x, y, z, t) = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 & (2) \\ t = 0 & (3) \end{cases}$$

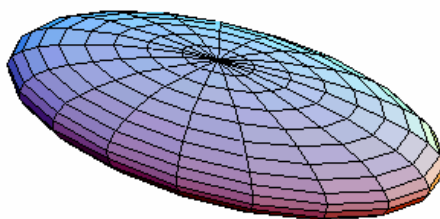
risolviamo il sistema formato dalla (1), (2), (3), ottenendo due punti img. Questi sono i punti ciclici di  $\alpha$ . Li sostituiamo in (0). Se risulta un'identita', allora  $\Gamma$  e' una circonferenza: poiche' passa per i punti ciclici del suo piano, e quindi per il thm [pg.32,par.3.23],  $\Gamma$  e' una circonferenza.

## 5.21 Figure di quadriche

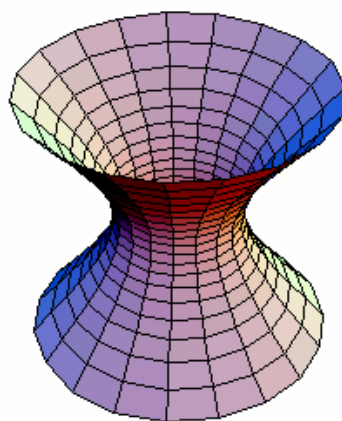
Queste immagini che seguono, sono state prese da

[http://www.mat.unical.it/~dapri/materiali/geo\\_analit\\_06/Quadriche.pdf](http://www.mat.unical.it/~dapri/materiali/geo_analit_06/Quadriche.pdf)

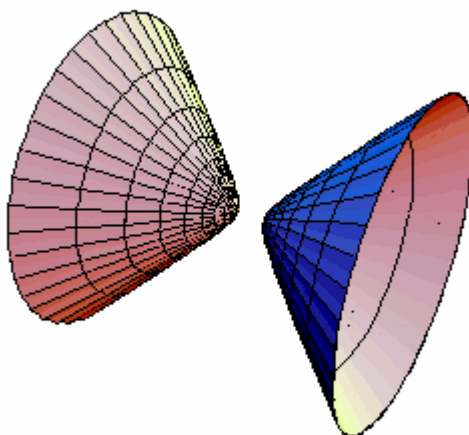
**Ellissoide :**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



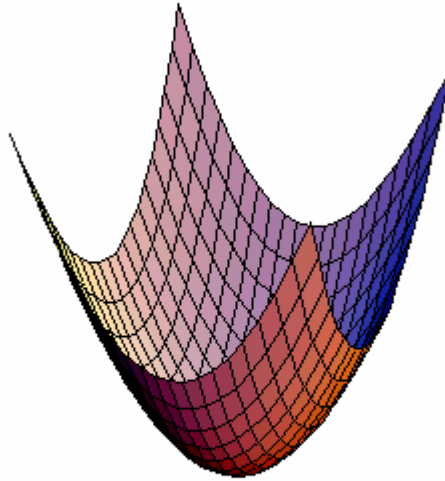
**Iperboloide iperbolico:**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



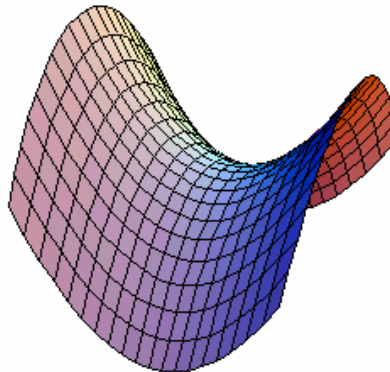
**Iperboloide ellittico o a due falde:**  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



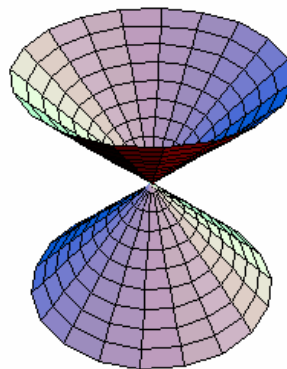
**Paraboloide ellittico:**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$



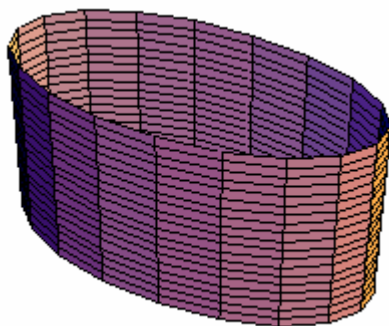
**Paraboloide iperbolico:**  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$



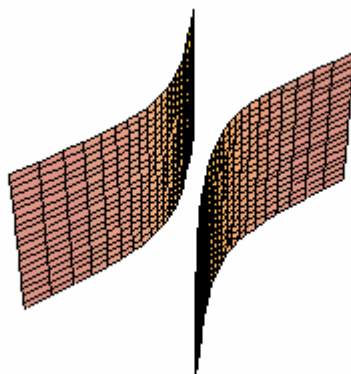
**Cono:**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$



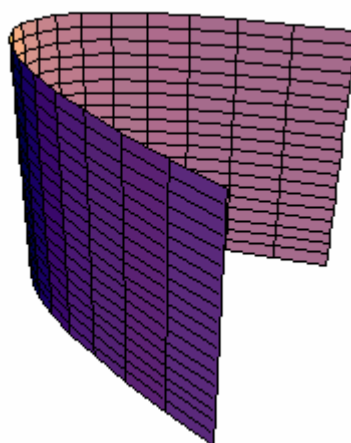
**Cilindro ellittico:**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



**Cilindro iperbolico:**  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



**Cilindro parabolico**  $y^2 = 2 p x$



## Index

- asintoto, 11
- centro della conica, 23
- cilindro, 54
  - ellittico, 64
  - iperbolico, 64
  - parabolico, 64
- circonferenza, 30
  - di raggio 0, 31
  - immaginaria, 32
  - reale, 31
- cono, 53
- cono isotropo, 53
- costruzione della polare, 22
- diametro, 23
- direttrice, 37
- ellissoide, 50
- equazione
  - canonica, 18
  - diametri coniugati, 26
  - tangente, 17
- fascio
  - di coniche, 33
- iperboloide, 50
- paraboloide, 50
- piano, 40
  - polare, 71
  - tangente, 58
- polare, 21
- polarità, 21
- prodotto scalare, 40
- punto
  - autoconiugato, 21
  - base del fascio, 35
  - ciclico, 31
  - coniugato, 21
  - ellittico, 60
  - iperbolico, 59
  - parabolico, 59
  - polare, 21
- quadrica degenerare, 50
- quadrica non degenerare, 50
- reciprocità, 21
- retta
  - coniugata, 21
  - isotropa, 31
  - polare, 21
- rette
  - complanari, 46
  - sghembe, 46
- sfera, 52
- tabella quadriche, 63
- tabella quadriche (invarianti), 69
- tangente, 11
  - quadrica, 57
- teorema
  - della reciprocità, 21
  - di Bezout, 34
- versore, 39
- vertice (quartica), 48
- vettore geometrico, 39

$$\overbrace{(O.O)}^{( )}$$