

Analisi III

AlpT (@freaknet.org)

<http://freaknet.org/alpt>

February 16, 2008

Abstract

Questo testo e' una rielaborazione personale degli appunti presi durante il corso di Analisi III, tenuto dal Prof. Mario Marino e dalla Prof.ssa Maria Fanciullo presso il dipartimento di Matematica, Catania, A.A. 2007/2008.

Saro' ben lieto di correggere ogni eventuale errore che mi comunicherai.

Buon lettura.

~ ~

Copyright ©2007 Andrea Lo Pumo aka AlpT <alpt@freaknet.org>. All rights reserved.

This document is free; you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or (at your option) any later version.

This document is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for more details.

You should have received a copy of the GNU General Public License along with this document; if not, write to the Free Software Foundation, Inc., 675 Mass Ave, Cambridge, MA 02139, USA.

Contents

1	Teoria delle curve piane	1
1.1	Esempi di curve	5
1.2	Lunghezza di una curva	6
1.3	Retta tangente ad una curva	14
1.4	Superficie	16
1.4.1	Piano tangente	20
1.4.2	Area di superficie	22
1.5	Ascisse curvilinee	27
1.6	Curve geometriche e analitiche	29
1.7	Massimo e minimo vincolato	35
2	Misurabilita' secondo Jordan	38
2.1	Integrale multiplo	41
2.1.1	Proprieta'	44
2.1.2	Teorema della media	45
2.2	Cilindroidi a tre dimensioni	47
2.3	Insieme normale	48
2.4	Formule di riduzione	49
2.5	Solido di rotazione	54
2.6	Baricentro e momento	54
2.7	Domini regolari	60
3	Integrale improprio	70
3.1	Integrale generalizzato	74
3.2	Integrale illimitato	77
4	Integrali curvilinei	79
4.1	Baricentro e momento curvilinei	81
5	Forme differenziali lineari	82
5.1	Integrale curvilineo della f.d.l.	85
5.1.1	Integrale di frontiera	96
6	Equazioni differenziali ordinarie	100
6.1	Problema di Cauchy	101
6.2	Equazioni di ordine uno	104
6.2.1	A variabili separate	104
6.2.2	Omogenee	109
6.2.3	Lineari	111
6.2.4	Di Bernoulli	115
6.3	Equazioni lineari	121
6.3.1	Con coeff. costanti	134
6.3.2	Algoritmo risolutivo	138
7	*	140

1 Teoria delle curve piane

Definition 1.1. Sia data una funzione $f(x, y) : X \longrightarrow \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}^2, X \neq \emptyset$.
Una curva piana nel senso della geometria e' il seguente insieme:

$$\gamma = \{(x, y) \in X \mid f(x, y) = 0\}$$

Definition 1.2. Siano date due funzioni $f(x, y, z), g(x, y, z) : Y \longrightarrow \mathbb{R}, Y \subseteq \mathbb{R}^3, Y \neq \emptyset$, una curva sgheмба nel senso della geometria e' il seguente insieme:

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in Y \mid f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0\}$$

Definition 1.3. Data le seguenti funzioni reali $x(t), y(t), z(t) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, una curva piana nel senso dell'analisi e' il seguente insieme:

$$\gamma = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (a, b)\}$$

Possiamo rappresentare parametricamente γ :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in (a, b)$$

(a, b) e' chiamato *intervallo base* Una curva sgheмба nel senso dell'analisi e' invece il seguente insieme:

$$\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in (a, b)\}$$

Da ora in poi, con *curva piana* intenderemo la curva piana nel senso analitico. La rappresentazione parametrica di γ non e' unica, infatti, vale la seguente proposizione.

Proposition 1.4.

- LET: 1. La curva γ , definita dalle funzioni $x(t), y(t) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$
2. $\varphi(t) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R} : \text{Im } \varphi = (a, b)$
3. $h(\tau) = x(\varphi(\tau)), k(\tau) = y(\varphi(\tau)) \quad \forall \tau \in (\alpha, \beta)$
4. γ' la curva piana definita da $h(\tau), k(\tau)$.

allora, $\gamma = \gamma'$.

Proof:

(1)1. Dim $\gamma \subseteq \gamma'$

Sia $(\bar{x}, \bar{y}) \in \gamma$, allora $\exists t \in (a, b) : (\bar{x}, \bar{y}) = (x(t), y(t))$.

Poiche' $t \in (a, b)$ e $\text{Im } \varphi = (a, b)$, si ha che $\exists \tau \in (\alpha, \beta) : \varphi(\tau) = t$. Allora,

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (x(t), y(t)) = (x(\varphi(\tau)), y(\varphi(\tau))) = (h(\tau), k(\tau)) \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in \gamma'$$

(1)2. Dim $\gamma' \subseteq \gamma$

Sia $(x^*, y^*) \in \gamma'$, allora $\exists \tau \in (\alpha, \beta) : (x^*, y^*) = (h(\tau), k(\tau))$, ma ricordandoci delle ipotesi:

$$(h(\tau), k(\tau)) = (x(\varphi(\tau)), y(\varphi(\tau)))$$

$$t := \varphi(\tau) \in (a, b)$$

$$(x^*, y^*) = (h(\tau), k(\tau)) = (x(t), y(t)) \Rightarrow (x^*, y^*) \in \gamma$$

Example 1.5. Le seguenti rappresentazioni definiscono la stessa curva (una circonferenza):

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{cases} x = \cos 2\pi - t \\ y = \sin 2\pi - t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

Definition 1.6. Sia γ una curva piana nel senso dell'analisi,

γ e' continua $\Leftrightarrow$ ammette una rappresentazione parametrica del tipo

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [a, b], \quad x(t), y(t) \text{ continue in } [a, b]$$

Proposition 1.7. *Ogni curva piana continua e' un insieme chiuso e limitato.*

Proof:

(1)1. Dim. la limitatezza:

1. Sia γ la nostra curva continua.
2. costruiamo f che da' la distanza dall'origine a un qualsiasi punto della curva. f e' continua.
3. sia δ maggiore del massimo di f
4. $I((0, 0), \delta)$ contiene la curva

Sia $f(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$. Poiche' γ e' continua, $x(t), y(t)$ sono continue in $[a, b]$. f e' pure continua in $[a, b]$ perche' composizione di funzioni continue. Quindi per il thm di Weiestrass (vedi [AII, 8.34, pg. 89]), ammette sia minimo che massimo M . Sia $\delta > M$. Sia $(x(t), y(t)) \in \gamma$,

$$d((x(t), y(t)), (0, 0)) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \leq M < \delta \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\Rightarrow \gamma \subseteq I((0, 0), \delta)$$

(1)2. Dim. la chiusura

Dobbiamo dimostrare che $D(\gamma) \subseteq \gamma$. Sia $(\bar{x}, \bar{y}) \in D(\gamma)$.

$$\begin{aligned}
& (\bar{x}, \bar{y}) \in D(\gamma) \xRightarrow{\text{prop. [AII, 8.15, pg. 78]}} \\
& \exists \{(x(t_n), y(t_n))\} \subseteq \gamma, (x(t_n), y(t_n)) \neq (x(t_m), y(t_m)) \forall n \neq m \text{ t.c. } (x(t_n), y(t_n)) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (\bar{x}, \bar{y}) \\
& t_n \in [a, b] \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{t_n\} \text{ e' limitata} \xRightarrow{\text{AI}} \exists \{t_{k_n}\} : t_{k_n} \xrightarrow{\mathbb{R}} t^* \quad (1) \\
& \left\{ \begin{array}{l} x(t), y(t) \text{ continue in } [a, b] \Rightarrow \text{continue in } t^* \\ (1) \end{array} \right. \xRightarrow{\text{prop. [AII, 8.31, pg. 87]}} \left\{ \begin{array}{l} x(t_{k_n}) \xrightarrow{\mathbb{R}} x(t^*) \\ y(t_{k_n}) \xrightarrow{\mathbb{R}} y(t^*) \end{array} \right. \\
& \xRightarrow{\text{thm [AII, 8.17, pg. 79]}} (x(t_{k_n}), y(t_{k_n})) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (x(t^*), y(t^*)) \quad (2) \\
& (x(t_n), y(t_n)) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow (x(t_{k_n}), y(t_{k_n})) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (\bar{x}, \bar{y}) \quad (3) \\
& (2), (3) \xRightarrow{\text{unicita' limite}} (x(t^*), y(t^*)) = (\bar{x}, \bar{y}) \quad (4) \\
& \left\{ \begin{array}{l} (1) \xRightarrow{\text{prop. [AII, 8.14, pg. 77]}} t^* \in \overline{[a, b]} = [a, b] \\ (4) \end{array} \right. \xRightarrow{\text{def. di } \gamma} (\bar{x}, \bar{y}) \in \gamma
\end{aligned}$$

□

Definition 1.8. Sia γ una curva piana.

γ e' una curva continua semplice $\Leftrightarrow$ ammette almeno una rappresentazione del tipo

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

1. $x(t), y(t)$ continue in $[a, b]$
2. $\forall t' \neq t'' \in [a, b] \quad (x(t'), y(t')) \neq (x(t''), y(t''))$

La seconda condizione stabilisce una corrispondenza biunivoca tra $[a, b]$ e γ , ovvero la funzione g

$$\begin{aligned} g &: [a, b] \longrightarrow \gamma \\ g(t) &= (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

e' biettiva¹.

Definition 1.9. Sia γ una curva piana.

γ e' una curva continua, semplice e chiusa $\Leftrightarrow$ ammette almeno una rappresentazione del tipo

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

- 1(continua). $x(t), y(t)$ continue in $[a, b]$
- 2(semplce). $\forall t' \neq t'' \in [a, b] \quad (x(t'), y(t')) \neq (x(t''), y(t''))$
- 3(chiusa). $(x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$ ovvero, i pt. terminali della curva coincidono

¹e' chiaramente surriettiva, perche' preso $(x, y) \in \gamma$, per def. di γ esiste $t \in [a, b] : g(t) = (x, y)$

Definition 1.10. Sia γ una curva piana.

γ e' una regolare $\Leftrightarrow$ ammette almeno una rappresentazione del tipo

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

1. $x(t), y(t) \in C^1([a, b])$
2. $\forall t' \neq t'' \in [a, b] \quad (x(t'), y(t')) \neq (x(t''), y(t''))$
3. $x'^2(t) + y'^2(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$

Remark 1.1. La terza condizione equivale a dire che $x'(t) \neq 0 \vee y'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$. Nei calcoli pero' e' generalmente piu' semplice controllare che $x'^2(t) + y'^2(t) > 0$.

Definition 1.11.

γ e' generalmente regolare $\Leftrightarrow$ ammette almeno una rappresentazione del tipo

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

1. $x(t), y(t)$ continua in $[a, b]$
2. $\exists [t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$, con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, tale che

$$\gamma_i = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [t_{i-1}, t_i] \text{ e' regolare}$$

ovvero, γ e' regolare in ogni intervallino

Ovviamente,

regolare $\Rightarrow$ generalmente regolare $\Rightarrow$ continua

Theorem 1.12.

$y(x) \in C^1([a, b]) \Rightarrow$ il grafico di $y(x)$ e' una curva regolare.
non vale il viceversa

Proof:

(1)1. Dim $\Rightarrow$

Intanto osserviamo che G_y e' una curva piana nel senso dell'analisi:

$$G_y = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x \in [a, b], y = y(x)\} = \begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

E' regolare, infatti, per Hp $x, y(x) \in C^1([a, b])$, inoltre, $\forall t', t'' \in [a, b], t' \neq t'' \quad (t', y(t')) \neq (t'', y(t''))$.

Infine, $x' = 1, y(x) \in C^1([a, b]) \Rightarrow \exists y'(x)$ e quindi $x'^2 + y'(x)^2 = 1 + y'(x)^2 > 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

(1)2. Dim $\Leftarrow$

Consideriamo la funzione $y(x) = \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1, 1]$. Il suo grafico G_y e' la semicirconferenza. $y(x) \notin C^1([-1, 1])$ perche' non e' derivabile agli estremi. G_y e' pero' regolare, basta infatti considerare questa sua rappresentazione:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

□

Definition 1.13.

γ e' di classe $C^1 \Leftrightarrow$ ammette almeno una rappresentazione del tipo

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

e tale che

$$\begin{cases} 1. \ x(t), y(t) \in C^1([a, b]) \\ 2. \ \forall t', t'' \in [a, b] \quad (x(t'), y(t')) \neq (x(t''), y(t'')) \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} 1. \ x(t), y(t) \in C^1([a, b]) \\ 2. \ \forall t', t'' \in [a, b[\quad (x(t'), y(t')) \neq (x(t''), y(t'')) \\ 3. \ (x(a), y(a)) = (x(b), y(b)) \end{cases}$$

1.1 Esempi di curve**1. Arco di cicloide**

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

con $r > 0$

$$l(\gamma) = 8r$$

2. Elica cilindrica

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = bt \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

con $r > 0$

$$l(\gamma) = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$$

3. Spirale logaritmica

$$f(\theta) = e^{k\theta} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

con $k > 0$

4. Cardiode

$$f(\theta) = a(1 + \cos \theta) : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

con $a > 0$

$$l(\gamma) = 4a$$

1.2 Lunghezza di una curva

Sia γ una curva continua-semplce o continua-semplce-chiusa, e sia

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

una sua rappresentazione da cui si deduce che e' continua-semplce(-chiusa).

Sia $\mathbb{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partizione di $[a, b]$, ovvero

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

Definiamo i seguenti punti:

$$P_i = (x(t_i), y(t_i)), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Troviamo cosi' la seguente poligonale:

$$\Sigma_{\mathbb{P}} = \bigcup_{i=1}^n \overline{P_{i-1}P_i}$$

Definiamo la lunghezza (o perimetro) della poligonale:

$$p(\Sigma_{\mathbb{P}}) = \sum_{i=1}^n d_{\mathbb{R}^2}(P_{i-1}, P_i)$$

Al variare di $\mathbb{P}$, nasce il seguente insieme di numeri reali non negativi:

$$\mathcal{P} = \{p(\Sigma_{\mathbb{P}})\}_{\mathbb{P}}$$

Se $\mathcal{P}$ e' superiormente limitato, allora γ si dira' rettificabile, e $\sup \mathcal{P}$ sara' la sua lunghezza:

$$l(\gamma) = \sup \mathcal{P}$$

Lemma 1.14. *Date due funzioni $f(t), g(t) : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue in $[\alpha, \beta]$ si ha*

$$\sqrt{\left(\int_{[\alpha, \beta]} f(t) dt\right)^2 + \left(\int_{[\alpha, \beta]} g(t) dt\right)^2} \leq \int_{[\alpha, \beta]} \sqrt{f(t)^2 + g(t)^2} dt$$

Proof: Poiche' f, g sono continue in $[\alpha, \beta]$ i loro integrali estesi ad $[\alpha, \beta]$ esistono. Se

$$\sqrt{\left(\int_{[\alpha, \beta]} f(x) dx\right)^2 + \left(\int_{[\alpha, \beta]} g(x) dx\right)^2} = 0$$

allora la tesi sarebbe vera, perche' $\sqrt{f(x)^2 + g(x)^2} \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ e quindi per le prop. degli integrali estesi, anche

$$\int_{[\alpha, \beta]} \sqrt{f(x)^2 + g(x)^2} dx \geq 0$$

. Supponiamo allora che il I membro sia $\neq 0$.

Consideriamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz ([AII,8.1,pg.62]):

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \quad \forall a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

e riscriviamola con $n = 2$:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \quad \forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

fissato $t \in [\alpha, \beta]$, $b_1 := f(t)$, $b_2 := g(t)$

$$a_1 f(t) + a_2 g(t) \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{f(t)^2 + g(t)^2} \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, t \in [\alpha, \beta]$$

consideriamo il I e il II membro funzioni in t . Esse sono continue e quindi integrabili sec. R.

per la prop. [AII,1.20,pg.16] segue:

$$\int_{[\alpha, \beta]} a_1 f(t) + a_2 g(t) dt \leq \int_{[\alpha, \beta]} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{f(t)^2 + g(t)^2} dt \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, t \in [\alpha, \beta]$$

$$a_1 \int_{[\alpha, \beta]} f(t) dt + a_2 \int_{[\alpha, \beta]} g(t) dt \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \int_{[\alpha, \beta]} \sqrt{f(t)^2 + g(t)^2} dt \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, t \in [\alpha, \beta]$$

$$a_1 := \int_{[\alpha, \beta]} f(t) dt, \quad a_2 := \int_{[\alpha, \beta]} g(t) dt$$

$$\int_{[\alpha, \beta]} f(t) dt \int_{[\alpha, \beta]} f(t) dt + \int_{[\alpha, \beta]} g(t) dt \int_{[\alpha, \beta]} g(t) dt \leq \sqrt{\int_{[\alpha, \beta]} f(t)^2 dt + \int_{[\alpha, \beta]} g(t)^2 dt} \int_{[\alpha, \beta]} \sqrt{f(t)^2 + g(t)^2} dt$$

$$\left(\int_{[\alpha, \beta]} f(t) dt \right)^2 + \left(\int_{[\alpha, \beta]} g(t) dt \right)^2 \leq \sqrt{\left(\int_{[\alpha, \beta]} f(t) dt \right)^2 + \left(\int_{[\alpha, \beta]} g(t) dt \right)^2} \int_{[\alpha, \beta]} \sqrt{f(t)^2 + g(t)^2} dt$$

$$\sqrt{\left(\int_{[\alpha, \beta]} f(t) dt \right)^2 + \left(\int_{[\alpha, \beta]} g(t) dt \right)^2} \leq \int_{[\alpha, \beta]} \sqrt{f(t)^2 + g(t)^2} dt$$

Nota: per l'ultimo passaggio, abbiamo usato le seguenti operazioni:

$$\frac{k}{\sqrt{k}} = \frac{k\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k}} = \sqrt{k}$$

Nota anche che $\sqrt{k} \neq 0$ per ipotesi. □

Theorem 1.15.

γ e' di classe $C^1 \Rightarrow \gamma$ e' rettificabile, e inoltre

$$l(\gamma) = \int_{[a, b]} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

dove $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$ e' una rappresentazione di γ da cui si riconosce che e' di classe C^1

Proof:

(1)1. Dim. che γ e' rettificabile

Presa una partizione $\mathbb{P}$, cosi' come abbiamo fatto in [1.2,pg.6], consideriamo

$$p(\Sigma_{\mathbb{P}}) = \sum_{i=1}^n d_{\mathbb{R}^2}(P_{i-1}, P_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \quad (1)$$

Per la formula fondamentale del calcolo integrale e per il fatto che $x(t), y(t) \in C^1([a, b])$, valgono le seguenti proposizioni:

$$\begin{aligned} x(t_i) - x(t_{i-1}) &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} x'(t) dt \\ y(t_i) - y(t_{i-1}) &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} y'(t) dt \end{aligned}$$

quindi, sostituendo in (1) e utilizzando le prop. di additivita' degli integrali definiti:

$$\begin{aligned} p(\Sigma_{\mathbb{P}}) &= \sum_{i=1}^n d_{\mathbb{R}^2}(P_{i-1}, P_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} x'(t) dt\right)^2 + \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} y'(t) dt\right)^2} \\ &\stackrel{\text{lemma [1.14, pg.6]}}{\leq} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \end{aligned}$$

Per l'arbitrarieta' di $\mathbb{P}$ si avra':

$$p(\Sigma_{\mathbb{P}}) \leq \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad \forall \mathbb{P} \quad (2)$$

quindi $\mathcal{P}$ e' un insieme limitato, e percio' γ e' rettificabile.

(1)2. Dimostriamo che $\sup \mathcal{P} = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$

Sia $T = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$.

Dobbiamo dimostrare le due proprieta' del sup. La prima e' stata gia' dimostrata con la (1). La seconda e':

$$\forall \varepsilon > 0 \exists p(\Sigma_{\mathbb{P}}) \in \mathcal{P} : p(\Sigma_{\mathbb{P}}) > T - \varepsilon \Leftrightarrow T - p(\Sigma_{\mathbb{P}}) < \varepsilon \quad (3)$$

(2)1. Maggioriamo $T - p(\Sigma_{\mathbb{P}})$

Sia $H(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \quad \forall t \in [a, b]$.

Per definizione di integrale definito ed esteso

$$T = \int_a^b H(t) dt \stackrel{a < b}{=} \int_{[a, b]} H(t) dt \leq S(H, \mathbb{P}) \quad \forall \mathbb{P} \text{ partizione di } [a, b]$$

Fissiamo una generica partizione $\mathbb{P}$ di $[a, b]$, cosi' come abbiamo fatto in [1.2, pg.6]

$$T \leq S(H, \mathbb{P}) = \sum_{i=1}^n \left(\sup_{t \in [t_{i-1}, t_i]} H(t) \right) (t_i - t_{i-1}) \stackrel{H(t) \text{ e' continua}}{=} \sum_{i=1}^n \left(\max_{t \in [t_{i-1}, t_i]} H(t) \right) (t_i - t_{i-1})$$

sia t_i^* un punto di massimo in $[t_{i-1}, t_i]$, allora ,

$$T \leq S(H, \mathbb{P}) = \sum_{i=1}^n H(t_i^*) (t_i - t_{i-1})$$

Sottraendo membro a membro $p(\Sigma_{\mathbb{P}})$ ci riavviciniamo alla (3):

$$T - p(\Sigma_{\mathbb{P}}) \leq \sum_{i=1}^n H(t_i^*) (t_i - t_{i-1}) - p(\Sigma_{\mathbb{P}}) \quad (3.1)$$

$$p(\Sigma_{\mathbb{P}}) = \sum_{i=1}^n d_{\mathbb{R}^2}(P_{i-1}, P_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \quad (4)$$

(3)1. Utilizziamo Lagrange per avere $x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$

Dato che $x(t), y(t) \in C^1([t_{i-1}, t_i]) \quad i = 1, 2, \dots, n$ si ha per il thm di

Lagrange:

$$\exists \xi_i \in]t_{i-1}, t_i[: x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$\exists \eta_i \in]t_{i-1}, t_i[: y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i)(t_i - t_{i-1})$$

Possiamo allora riscrivere la (4), così:

$$p(\Sigma_{\mathbb{P}}) = \sum_{i=1}^n \sqrt{x'(\xi_i)^2(t_i - t_{i-1})^2 + y'(\eta_i)^2(t_i - t_{i-1})^2} = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2} \quad (4.1)$$

La (3.1) diventa:

$$\begin{aligned} T - p(\Sigma_{\mathbb{P}}) &\leq \sum_{i=1}^n H(t_i^*)(t_i - t_{i-1}) - p(\Sigma_{\mathbb{P}}) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \left(H(t_i^*) - \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \left(\sqrt{x'(t_i^*)^2 + y'(t_i^*)^2} - \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2} \right) \quad (3.2) \end{aligned}$$

⟨3⟩2. Con la II disuguaglianza triangolare, si ha $\sqrt{x'(t_i^*)^2 + y'(t_i^*)^2} - \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2} \leq \sqrt{(x'(t_i^*) - x'(\xi_i))^2 + (y'(t_i^*) - y'(\eta_i))^2}$

(vedi [AII, 8.3, pg. 65])

$$d(x, z) - d(z, y) \leq |d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y, z \in S$$

Che in $\mathbb{R}^2$ diventa:

$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} - \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$\text{Ponendo } \begin{cases} x_1 = x'(t_i^*), & z_1 = 0 \\ x_2 = y'(t_i^*), & z_2 = 0 \\ y_1 = x'(\xi_i), & y_2 = y'(\eta_i) \end{cases} \quad \text{otteniamo}$$

$$\sqrt{x'(t_i^*)^2 + y'(t_i^*)^2} - \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2} \leq \sqrt{(x'(t_i^*) - x'(\xi_i))^2 + (y'(t_i^*) - y'(\eta_i))^2}$$

Possiamo allora maggiorare la (3.2) così:

$$T - p(\Sigma_{\mathbb{P}}) \leq \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sqrt{(x'(t_i^*) - x'(\xi_i))^2 + (y'(t_i^*) - y'(\eta_i))^2} \quad (3.3)$$

⟨2⟩2. $x(t), y(t)$ uniformemente continue

Dalle Hp abbiamo che $x(t), y(t) \in C^1([a, b])$, quindi per il cor di Cantor-Heine ([AII, 8.33, pg. 89]), $x'(t), y'(t)$ sono uniformemente continue in $[a, b]$, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta' > 0 : |x'(t') - x'(t'')| < \varepsilon \quad \forall t', t'' \in [a, b] : |t' - t''| < \delta'$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta'' > 0 : |y'(t') - y'(t'')| < \varepsilon \quad \forall t', t'' \in [a, b] : |t' - t''| < \delta''$$

Fissato $\varepsilon > 0$ e prendendo $\delta = \min \delta', \delta''$ segue che

$$|x'(t') - x'(t'')| < \varepsilon, \quad |y'(t') - y'(t'')| < \varepsilon \quad \forall t', t'' \in [a, b] : |t' - t''| < \delta \quad (5)$$

⟨2⟩3. Fissiamo $\mathbb{P} : |\mathbb{P}| < \delta$

Nella (3.3) abbiamo usato un $\mathbb{P}$ generico. Consideriamo adesso un $\mathbb{P} : |\mathbb{P}| < \delta$, avremo

$$t_i - t_{i-1} < \delta \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{cases} t_i^* \in [t_{i-1}, t_i] \\ \xi_i \in]t_{i-1}, t_i[\end{cases} \Rightarrow |t_i^* - \xi_i| < |t_i - t_{i-1}| < \delta \stackrel{(5)}{\Rightarrow} |x'(t_i^*) - x'(\xi_i)| < \varepsilon$$

$$\text{analogamente per } y : |y'(t_i^*) - y'(\eta_i)| < \varepsilon \quad (6)$$

Utilizzando la (6), maggioriamo la (3.3):

$$\begin{aligned} T - p(\Sigma_{\mathbb{P}}) &\leq \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sqrt{(x'(t_i^*) - x'(\xi_i))^2 + (y'(t_i^*) - y'(\eta_i))^2} \underbrace{\leq}_{(6)} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sqrt{(\varepsilon)^2 + (\varepsilon)^2} = \\ &= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \varepsilon \sqrt{2} = \varepsilon \sqrt{2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon \sqrt{2} (b - a) \quad (3.4) \end{aligned}$$

Fin qui abbiamo usato un ε generico. Fissiamo allora

$$\varepsilon := \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}(b-a)} > 0$$

avremo così dalla (3.4) che

$$T - p(\Sigma_{\mathbb{P}}) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}(b-a)} \sqrt{2}(b-a) = \varepsilon$$

$$T - p(\Sigma_{\mathbb{P}}) < \varepsilon$$

che è proprio la (3). □

Corollary 1.16. *Se γ è una curva regolare, allora vale la tesi del teorema [1.15,pg.7]. Inoltre, se abbiamo una funzione $y(x) \in C^1([a, b])$, si avrà'*

$$l(G_y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

Proof:

Una curva γ regolare è anche di classe C^1 , quindi per lei vale il thm [1.15,pg.7].

Per il thm [1.12,pg.4], sappiamo che

$$y(x) \in C^1([a, b]) \Rightarrow G_y \text{ è una curva regolare.}$$

e una rappresentazione parametrica di G_y da cui si evince che è regolare è:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases}, x \in [a, b]$$

quindi, per il thm [1.15,pg.7], abbiamo:

$$l(G_y) = \int_{[a,b]} \sqrt{(x')^2 + y'(x)^2} dx = \int_{[a,b]} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

□

Corollary 1.17. *Data la funzione polare $f(\theta) : [\theta_0, \theta_1] \longrightarrow \mathbb{R}$, si ha*

$$\begin{cases} f(\theta) \geq 0 \quad \forall \theta \in [\theta_0, \theta_1] \\ f \in C^1([\theta_0, \theta_1]) \\ f'(\theta) > 0 \quad \forall \theta \in [\theta_0, \theta_1] \quad \vee \quad f'(\theta) < 0 \quad \forall \theta \in [\theta_0, \theta_1] \end{cases} \Rightarrow G_f \text{ è regolare e } l(G_f) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} d\theta$$

Una sua rappresentazione parametrica da cui si evince che è regolare è:

$$\begin{cases} x = f(\theta) \cos(\theta) \\ y = f(\theta) \sin(\theta) \end{cases}, \theta \in [\theta_0, \theta_1]$$

Nota: l'ultima ipotesi equivale a dire che f è strettamente crescente, o decrescente, in tutto $[\theta_0, \theta_1]$.

Proof:

$$\begin{aligned}
f, \cos &\in C^1([\theta_0, \theta_1]) \Rightarrow f(\theta) \cos(\theta) \in C^1([\theta_0, \theta_1]) \\
x'(t) &= f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta \\
y'(t) &= f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta \\
H(\theta) &= \sqrt{f'(\theta)^2 \cos^2 \theta + f(\theta)^2 \sin^2 \theta + f'(\theta)^2 \sin^2 \theta + f(\theta)^2 \cos^2 \theta} = \\
&= \sqrt{f'(\theta)^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + f(\theta)^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} = \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} \\
f'(\theta)^2 &\underset{\text{per la II Hp}}{\geq} 0 \quad \forall \theta \in [\theta_0, \theta_1] \Rightarrow f'(\theta)^2 + f(\theta)^2 > 0 \quad \forall \theta \in [\theta_0, \theta_1]
\end{aligned}$$

Supponiamo per assurdo che non valga la semplicità, ovvero che
 $\exists \theta', \theta'' \in [\theta_0, \theta_1], \theta' \neq \theta'' : (x(\theta'), y(\theta')) = (x(\theta''), y(\theta''))$
che equivale al sistema:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x(\theta') = x(\theta'') \\ y(\theta') = y(\theta'') \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} f(\theta') \cos(\theta') = f(\theta'') \cos(\theta'') \\ f(\theta') \sin(\theta') = f(\theta'') \sin(\theta'') \end{cases} \\
\Rightarrow \begin{cases} f(\theta')^2 \cos(\theta')^2 = f(\theta'')^2 \cos(\theta'')^2 \\ f(\theta')^2 \sin(\theta')^2 = f(\theta'')^2 \sin(\theta'')^2 \end{cases} \\
\Rightarrow f(\theta')^2 \cos(\theta')^2 + f(\theta')^2 \sin(\theta')^2 &= f(\theta'')^2 \cos(\theta'')^2 + f(\theta'')^2 \sin(\theta'')^2 \\
\Leftrightarrow f(\theta')^2 = f(\theta'')^2 &\underset{f(\theta) \geq 0 \quad \forall \theta}{\Leftrightarrow} f(\theta') = f(\theta'') \quad (2)
\end{aligned}$$

Per la II Hp e per il III cor di Lagrange f è strettamente crescente in $[\theta_0, \theta_1]$, quindi la (2) è assurda.

Con ciò che abbiamo visto fin'ora, possiamo concludere che γ è regolare, e quindi per il cor [1.15, pg. 7](#) si ha

$$l(\gamma) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} H(\theta) d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} d\theta$$

□

Example 1.18. Consideriamo $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$. $f \in C^1([-1, 1])$, perciò non abbiamo problemi a calcolare la lunghezza di G_f , ovvero del ramo di parabola tra $[-1, 1]$:

$$\begin{aligned}
l(G_f) &= \int_{[-1, 1]} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx \\
x &= \frac{1}{2} \sinh t \quad dx = \frac{1}{2} \cosh t \quad t = \operatorname{arsinh}(2x) \\
\int \sqrt{1 + 4x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \cosh^2 t = \frac{1}{4} (\cosh t \sinh t + t) = \frac{1}{4} (2x \cosh(\operatorname{arsinh}(2x)) + \operatorname{arsinh}(2x)) = \\
&\underset{(*)}{=} \underbrace{\frac{x}{2} \sqrt{4x^2 + 1}}_{(*)} + \frac{\operatorname{arsinh} 2x}{4} \\
\int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx &= \left[\frac{x}{2} \sqrt{4x^2 + 1} + \frac{\operatorname{arsinh} 2x}{4} \right]_{-1}^1 = \sqrt{5} + \frac{\operatorname{arsinh} 2}{2} = \sqrt{5} + \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{5})
\end{aligned}$$

(*) Per controllare che $\cosh(\operatorname{arsinh}(2x)) = \sqrt{4x^2 + 1}$, basta prendere la derivata

in ambo i membri:

$$4 \frac{x}{\sqrt{(4x^2 + 1)}} = 4 \frac{x}{\sqrt{(4x^2 + 1)}}$$

Sono uguali. Quindi per Lagrange le due funzioni differiscono per una costante k :

$$\cosh(\operatorname{arsinh}(2x)) = \sqrt{4x^2 + 1} + k \quad \forall x$$

Calcolando in $x = 0$, si vede che tale $k = 0$.

Example 1.19. Calcoliamo la lunghezza di una circonferenza γ :

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

dove r e' il suo raggio.

γ e' di classe C^1 , infatti,

$$x(t) = r \cos t, y(t) = r \sin t \in C^1([0, 2\pi])$$

Negli intervalli $[0, \pi], [\pi, 2\pi]$, $\cos t$ risulta biunivoca, e quindi:

$$\forall t', t'' \in [0, \pi] : t' \neq t'' \Rightarrow \cos t' \neq \cos t'' \Rightarrow (x(t'), y(t')) \neq (x(t''), y(t''))$$

$$\forall t', t'' \in [\pi, 2\pi] : t' \neq t'' \Rightarrow \cos t' \neq \cos t'' \Rightarrow (x(t'), y(t')) \neq (x(t''), y(t''))$$

Nel caso in cui $t' \in [0, \pi], t'' \in [\pi, 2\pi]$ si ha $\sin t' > 0, \sin t'' < 0$, per cui: $(x(t'), y(t')) \neq (x(t''), y(t''))$

infine, $x'(t)^2 + y'(t)^2 = (-\sin t)^2 + (\cos t)^2 > 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi]$

Possiamo perciò applicare il thm [1.15,pg.7]:

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} = r \int_0^{2\pi} 1 = r [x]_0^{2\pi} = 2\pi r$$

Example 1.20. di una curva semplice, continua, ma non rettificabile.

$$\gamma : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad t = 0 \quad \gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t \cos \frac{\pi}{t} \end{cases} \quad \begin{matrix} t = 0 \\ 0 < t \leq 1 \end{matrix}, \quad t \in]0, 1]$$

Supponiamo per assurdo che sia rettificabile e sia $L = l(\gamma)$.

Consideriamo la seguente partizione:

$$\begin{aligned}\mathbb{P} &= \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \dots, \frac{1}{1}\right\} \\ Q &= (x(0), y(0)) = (0, 0) \\ Q_0 &= \left(x\left(\frac{1}{n}\right), y\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \cos \pi n\right) = \left(\frac{1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}\right) \\ &\dots \\ Q_i &= \left(x\left(\frac{1}{n-i}\right), y\left(\frac{1}{n-i}\right)\right) = \left(\frac{1}{n-i}, \frac{(-1)^{n-i}}{n-i}\right) \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, n-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(Q, Q_0) &= \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n} > \frac{1}{n} \quad (1.1) \\ d(Q_i, Q_{i+1}) &= \sqrt{\left(\frac{1}{n-i-1} - \frac{1}{n-i}\right)^2 + \left(\frac{(-1)^{n-i-1}}{n-i-1} - \frac{(-1)^{n-i}}{n-i}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{n-i-1} - \frac{1}{n-i}\right)^2 + ((-1)^{n-i-1})^2 \left(\frac{1}{n-i-1} - \frac{-1}{n-i}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{n-i-1} - \frac{1}{n-i}\right)^2 + \left(\frac{1}{n-i-1} + \frac{1}{n-i}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{(n-i-1)^2} + \frac{2}{(n-i)^2}} \underset{\substack{\geq \\ \text{eleva per verificare}}}{\geq} \frac{1}{n-i-1} + \frac{1}{n-i} \quad (1.2)\end{aligned}$$

Per definizione di lunghezza si ha

$$\begin{aligned}L &\geq p(\Sigma_{\mathbb{P}}) = d(Q, Q_0) + d\left(\sum_{i=0}^{n-2} d(Q_{i+1}, Q_i)\right) = d(Q_1, Q_0) + d(Q_2, Q_1) + \dots + d(Q_{n-1}, Q_{n-2}) \\ &\underset{(1.1), (1.2)}{\geq} \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right) = \\ &= \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right) = \frac{2}{n} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n-2} + \dots + 2 \\ &> \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + 1\end{aligned}$$

quest'ultimo membro e' la somma parziale della serie armonica. Poiche' la serie armonica diverge a $+\infty$, quell'ultimo membro e' definitivamente piu' grande di qualsiasi $\mathbb{R}$ fissato, e in questo caso di L . Quindi abbiamo che definitivamente $L < \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + 1$. Assurdo.

1.3 Retta tangente ad una curva

Sia γ una curva **regolare** e

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

una sua rappresentazione parametrica da cui si evince che e' regolare.

Sia $t_0, t \in [a, b] : t_0 \neq t$, $P_0 = (x(t_0), y(t_0))$, $P = (x(t), y(t))$.

La retta tangente a γ nel suo punto P_0 e'

$$\begin{cases} x = x(t_0) + x'(t_0)\tau \\ y = y(t_0) + y'(t_0)\tau \end{cases} \quad \text{con } \tau \in \mathbb{R}$$

o equivalentemente, se $x'(t_0) \neq 0, y'(t_0) \neq 0$:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$$

Se γ fosse una curva a tre dimensioni, avremmo:

$$\begin{cases} x = x(t_0) + x'(t_0)\tau \\ y = y(t_0) + y'(t_0)\tau \\ z = z(t_0) + z'(t_0)\tau \end{cases}$$

o equivalentemente, se $x'(t_0) \neq 0, y'(t_0) \neq 0, z'(t_0) \neq 0$:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

Nota: possiamo sempre scrivere la seconda forma dell'equazione, adoperando la seguente convenzione: se $x'(t_0) = 0$ allora la scrittura dell'equazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x - x(t_0) = 0 \\ \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)} \end{cases}$$

. Analogamente per y', z' .

Proof:

Innanzitutto

$$\gamma \text{ regolare, } t_0 \neq t \Rightarrow P_0 \neq P$$

Sia s la retta secante passate per P_0P , orientata da P_0 a P se $t_0 < t$, orientata da P a P_0 se $t < t_0$. Calcoliamo i suoi coseni direttori in entrambi i casi:

CASE: $t_0 < t$

$$\begin{aligned} \cos \overrightarrow{\widehat{x}s} &= \frac{x(t) - x(t_0)}{d(P_0, P)} = \frac{x(t) - x(t_0)}{\sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2}} \\ &= \frac{\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}}{\frac{\sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2}}{t - t_0}} = \frac{\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}}{\sqrt{\left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}\right)^2 + \left(\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}\right)^2}} \\ \sin \overrightarrow{\widehat{y}s} &= \frac{\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}}{\sqrt{\left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}\right)^2 + \left(\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}\right)^2}} \end{aligned}$$

Nota: $t - t_0 > 0$, questo ha permesso di portare $t - t_0$ dentro la radice.

CASE: $t < t_0$

Con lo stesso procedimento di prima:

$$\begin{aligned}
 \cos \overrightarrow{\widehat{x} s} &= \frac{x(t_0) - x(t)}{d(P_0, P)} = \\
 &= \frac{\frac{x(t_0) - x(t)}{t_0 - t}}{\sqrt{\left(\frac{x(t_0) - x(t)}{t_0 - t}\right)^2 + \left(\frac{y(t_0) - y(t)}{t_0 - t}\right)^2}} \\
 &= \frac{\frac{-(x(t) - x(t_0))}{-(t - t_0)}}{\sqrt{\left(\frac{-(x(t) - x(t_0))}{-(t - t_0)}\right)^2 + \left(\frac{-(y(t) - y(t_0))}{-(t - t_0)}\right)^2}} = \\
 &= \frac{\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}}{\sqrt{\left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}\right)^2 + \left(\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}\right)^2}}
 \end{aligned}$$

Quindi anche in questo caso, otteniamo lo stesso coseno direttore di prima.

Lo stesso vale per il seno:

$$\sin \overrightarrow{\widehat{y} s} = \frac{\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}}{\sqrt{\left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}\right)^2 + \left(\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}\right)^2}}$$

Per definizione la retta r tangente a γ in P_0 e' la secante s con il punto P che tende a P_0 . Quindi, considerando $t \rightarrow t_0$,

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} &= x'(t_0) \\
 \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} &= y'(t_0)
 \end{aligned}$$

questi limiti esistono perche' $x(t), y(t) \in C^1([a, b])$, essendo $\{x = x(t), y = y(t)\} t \in [a, b]$ la rappresentazione parametrica di γ da cui si evince che e' regolare.

Otteniamo cosi' i coseni direttori della tangente:

$$\begin{aligned}
 \cos \overrightarrow{\widehat{x} s} &= \frac{x'(t_0)}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}} \\
 \sin \overrightarrow{\widehat{y} s} &= \frac{y'(t_0)}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}}
 \end{aligned}$$

E' immediato verificare che

$$\cos^2 \overrightarrow{\widehat{x} s} + \sin^2 \overrightarrow{\widehat{y} s} = 1$$

infatti,

$$\gamma \text{ regolare} \Rightarrow x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2 > 0 \Rightarrow (\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2})^2 = x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2$$

$$\cos^2 \overrightarrow{\widehat{x} s} + \sin^2 \overrightarrow{\widehat{y} s} = \frac{x'(t_0)^2}{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2} + \frac{y'(t_0)^2}{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2} = 1$$

Percio' la retta tangente e':

$$\begin{cases} x = x(t_0) + \frac{x'(t_0)}{H(t_0)} \tau \\ y = y(t_0) + \frac{y'(t_0)}{H(t_0)} \tau \end{cases} \quad \text{con } \tau \in \mathbb{R}, \quad H(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \quad \forall t \in [a, b]$$

Possiamo moltiplicare i numeri direttori per $H(t_0)$ ottenendo sempre la stessa retta:

$$\begin{cases} x = x(t_0) + x'(t_0) \tau \\ y = y(t_0) + y'(t_0) \tau \end{cases} \quad \text{con } \tau \in \mathbb{R}$$

□

1.4 Superficie

Siano dati i seguenti oggetti:

$$\begin{aligned} X &\subseteq \mathbb{R}^2, \quad X \neq \emptyset \\ x(u, v) &: X \longrightarrow \mathbb{R} \\ y(u, v) &: X \longrightarrow \mathbb{R} \\ z(u, v) &: X \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

come sinonimi delle tre funzioni a volte useremo

$$x_1(u, v), \quad x_2(u, v), \quad x_3(u, v)$$

Definition 1.21. Chiameremo *superficie* il seguente insieme

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in X\}$$

Una sua rappresentazione parametrica e':

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in X$$

Per immaginare cosa sia una superficie: fissa una v . Con la v fissata ritorniamo al caso di una curva sghemba, quindi le tre funzioni “disegnano” una curva nello spazio. Adesso fissa un'altra v , otterrai un'altra curva. Quindi al variare di v ottieni diverse curve. L'unione di tutte queste curve descrive la superficie. Ad esempio, una sfera e' l'unione di circonferenze.

Diremo che $P_0 = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ e' un punto interno a $S \Leftrightarrow (u_0, v_0) \in X^\circ$.

Definition 1.22. Diremo che la superficie S e' regolare $\Leftrightarrow$ esiste almeno una sua rappresentazione parametrica per cui vengono rispettate le seguenti condizioni:

1. X e' un dominio limitato e internamente connesso
2. $x(u, v), y(u, v), z(u, v) \in C^1(X)$
3. $M = \begin{pmatrix} x_u(u, v) & y_u(u, v) & z_u(u, v) \\ x_v(u, v) & y_v(u, v) & z_v(u, v) \end{pmatrix}, \quad \rho(M) = 2 \quad \forall (u, v) \in X$
4. deve essere semplice, ovvero:

$$\forall (u, v) \neq (u', v') \quad \begin{cases} x(u, v) \neq x(u', v') \\ y(u, v) \neq y(u', v') \\ z(u, v) \neq z(u', v') \end{cases}$$

Lemma 1.23. *Sia S una superficie regolare, e la seguente una sua rappresentazione parametrica da cui si evince che e' regolare:*

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in X$$

Siano date le seguenti funzioni definite da $X \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} A(u, v) &= \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} & B(u, v) &= - \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix} & C(u, v) &= \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \\ E(u, v) &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F(u, v) &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ G(u, v) &= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{aligned}$$

per brevit  con x_u si intende $x_u(u, v)$.

Valgono le seguenti proposizioni $\forall (u, v) \in X$,

$$\begin{aligned} A(u, v)^2 + B(u, v)^2 + C(u, v)^2 &> 0 \\ A(u, v)^2 + B(u, v)^2 + C(u, v)^2 &= E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2 > 0 \\ \lambda^2 E(u, v) + 2\lambda\mu F(u, v) + \mu^2 G(u, v) &> 0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \lambda^2 + \mu^2 > 0 \end{aligned}$$

Proof:

(1)1. Dim prop 1

Se per assurdo $A(u, v)^2 + B(u, v)^2 + C(u, v)^2 = 0$, allora $A(u, v) = B(u, v) = C(u, v) = 0$. Ma A, B, C sono tutti i minori di ordine 2 di M , quindi $\rho(M) < 2$, il che e' assurdo perche' S e' regolare.

(1)2. Dim prop 2

Si tratta di fare un po' di conti:

$$\begin{aligned}
A(u, v)^2 + B(u, v)^2 + C(u, v)^2 &= (y_u z_v - y_v z_u)^2 + (x_u z_v - x_v z_u)^2 + (x_u y_v - x_v y_u)^2 = \\
&= (y_u^2 z_v^2 + y_v^2 z_u^2 - 2y_u z_v y_v z_u) + (x_u^2 z_v^2 + x_v^2 z_u^2 - 2x_u z_v x_v z_u) + (x_u^2 y_v^2 + x_v^2 y_u^2 - 2x_u y_v x_v y_u) = \\
&= z_v^2(y_u^2 + x_u^2) + x_v^2(z_u^2 + y_u^2) + y_v^2(x_u^2 + z_u^2) + \\
&\quad - (2y_u z_v y_v z_u + 2x_u z_v x_v z_u + 2x_u y_v x_v y_u) = \\
&= z_v^2(y_u^2 + x_u^2 + z_u^2 - z_u^2) + x_v^2(z_u^2 + y_u^2 + x_u^2 - x_u^2) + y_v^2(x_u^2 + z_u^2 + y_u^2 - y_u^2) + \\
&\quad - (2y_u z_v y_v z_u + 2x_u z_v x_v z_u + 2x_u y_v x_v y_u) = \\
&= z_v^2(E(u, v) - z_u^2) + x_v^2(E(u, v) - x_u^2) + y_v^2(E(u, v) - y_u^2) + \\
&\quad - (2y_u z_v y_v z_u + 2x_u z_v x_v z_u + 2x_u y_v x_v y_u) = \\
&= E(u, v)(\underbrace{z_v^2 + x_v^2 + y_v^2}_{=G(u, v)}) + \\
&\quad - (z_v^2 z_u^2 + x_v^2 x_u^2 + y_v^2 y_u^2 + 2y_u z_v y_v z_u + 2x_u z_v x_v z_u + 2x_u y_v x_v y_u) = \\
&= E(u, v)G(u, v) + \\
&\quad - (z_v z_u + x_v x_u + y_v y_u)^2 = \\
&= E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2
\end{aligned}$$

$$A(u, v)^2 + B(u, v)^2 + C(u, v)^2 = E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2$$

$$A(u, v)^2 + B(u, v)^2 + C(u, v)^2 > 0 \Rightarrow E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2 > 0$$

(1)3. Dim prop 3

Dobbiamo dimostrare che

$$\lambda^2 E(u, v) + 2\lambda\mu F(u, v) + \mu^2 G(u, v) > 0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \lambda^2 + \mu^2 > 0$$

CASE: $\mu = 0$

In questo caso dobbiamo verificare:

$$\lambda^2 E(u, v) > 0$$

Per Hp abbiamo

$$\mu = 0, \lambda^2 + \mu^2 > 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$$

$E(u, v)$ e' somma di quadrati, quindi al massimo sara' nullo. Ma se per assurdo fosse nullo:

$$E(u, v) = 0 \Leftrightarrow x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = 0 \Leftrightarrow x_u = y_u = z_u = 0$$

questo implica che la prima riga della matrice M e' nulla e quindi $\rho(M) < 2$, che e' assurdo perche' S e' per Hp regolare.

CASE: $\mu \neq 0$

$$\lambda^2 E(u, v) + 2\lambda\mu F(u, v) + \mu^2 G(u, v) > 0 \Leftrightarrow_{\mu \neq 0} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 E(u, v) + 2\frac{\lambda}{\mu} F(u, v) + G(u, v) > 0$$

Esaminiamo il Δ del trinomio nell'indeterminata $\frac{\lambda}{\mu}$:

$$\frac{\Delta}{4} = F(u, v)^2 - E(u, v)G(u, v) = -(E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2) \underset{\text{prop 2}}{<} < 0$$

Inoltre $E(u, v) \neq 0$ (per quanto visto nel caso precedente).

Quindi, poiche' $\Delta < 0$ e $E(u, v) > 0$ si ha che il segno del trinomio e' sempre positivo.

□

Definition 1.24. Sia γ una curva piana di rappresentazione parametrica:

$$\gamma : \begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

tale che $\gamma \subseteq X^\circ \Leftrightarrow (u(t), v(t)) \in X^\circ \quad \forall t \in [a, b]$

Sia S una curva di rappresentazione parametrica:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

Definiamo le seguenti funzioni, che hanno senso poiche' $\gamma \subseteq X^\circ$:

$$\bar{x}(t) = x(u(t), v(t))$$

$$\bar{y}(t) = y(u(t), v(t))$$

$$\bar{z}(t) = z(u(t), v(t))$$

$$\forall t \in [a, b]$$

La seguente curva sghemba:

$$\Gamma : \begin{cases} x = \bar{x}(t) \\ y = \bar{y}(t) \\ z = \bar{z}(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

si dice *curva tracciata su S* .

Theorem 1.25. Nelle ipotesi della definizione [1.24, pg. 19], si ha

$$\gamma \text{ regolare, } S \text{ regolare} \Rightarrow \Gamma \text{ regolare}$$

Proof:

(1)1. Dim. $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in C^1([a, b])$

$$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in C^0([a, b]) \quad (1)$$

perche' composizione di funzioni continue.

$$\begin{cases} S \text{ regolare} \\ \gamma \text{ regolare} \\ (u(t), v(t)) \in X^\circ \quad \forall t \in [a, b] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x, y, z \in C^1(X) \\ u, v \in C^1([a, b]) \\ (u(t), v(t)) \in X^\circ \quad \forall t \in [a, b] \end{cases}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{thm deriv. f. composte [AII, 9.4, pg. 97]}} \begin{cases} \bar{x}'(t) = x'(u(t), v(t)) = x_u(u(t), v(t))u'(t) + x_v(u(t), v(t))v'(t) \\ \bar{y}'(t) = y'(u(t), v(t)) = y_u(u(t), v(t))u'(t) + y_v(u(t), v(t))v'(t) \\ \bar{z}'(t) = z'(u(t), v(t)) = z_u(u(t), v(t))u'(t) + z_v(u(t), v(t))v'(t) \end{cases} \quad \forall t \in [a, b]$$

$\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$ sono continue in $[a, b]$, perche' composizione, somma e prod. di f. continue (2)

$$(1), (2) \Rightarrow \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in C^1([a, b])$$

(1)2. Dim che Γ e' semplice

Siano $t, t' \in [a, b] : t \neq t'$.

$$\gamma \text{ regolare} \Rightarrow \gamma \text{ semplice} \Rightarrow (u(t), v(t)) \neq (u(t'), v(t')) \quad (3)$$

$$S \text{ regolare}, (3) \Rightarrow \begin{cases} x(u(t), v(t)) \neq x(u(t'), v(t')) \\ y(u(t), v(t)) \neq y(u(t'), v(t')) \\ z(u(t), v(t)) \neq z(u(t'), v(t')) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x}(t) \neq \bar{x}(t') \\ \bar{y}(t) \neq \bar{y}(t') \\ \bar{z}(t) \neq \bar{z}(t') \end{cases}$$

(1)3. Dim che $\bar{x}'(t)^2 + \bar{y}'(t)^2 + \bar{z}'(t)^2 > 0 \quad \forall t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \bar{x}'(t)^2 + \bar{y}'(t)^2 + \bar{z}'(t)^2 &\stackrel{\text{passo (1)1}}{=} (x_u u' + x_v v')^2 + (y_u u' + y_v v')^2 + (z_u u' + z_v v')^2 = \\ &= u'^2(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) + v'^2(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) + 2u'v'(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v) = \\ &= u'^2 E(u, v) + v'^2 G(u, v) + u'v' F(u, v) \stackrel{\text{lem [1.23,pg.16]}}{>} 0 \quad \forall u', v' \in \mathbb{R} : u'^2 + v'^2 > 0 \end{aligned}$$

$$\gamma \text{ regolare} \Rightarrow u'^2 + v'^2 > 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\Rightarrow u'^2 E(u, v) + v'^2 G(u, v) + u'v' F(u, v) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

Nota ²

□

Theorem 1.26. Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, allora

X e' un dominio limitato e internamente connesso, $f \in C^1(X)$

$\Rightarrow G_f = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in X\}$ e' una superficie regolare, con rapp. param:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in X$$

Proof:

Delle 4 condizioni per la regolarita' di G_f , controlliamo solo la 3, le altre sono immediate.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_x(x, y) \\ 0 & 1 & f_y(x, y) \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \rho(M) = 2$$

□

1.4.1 Piano tangente

Definition 1.27. Il piano tangente in un punto P_0 a una superficie S e' il luogo di tutte le rette tangenti in P_0 a curve tracciate su S passanti per P_0 .

Per chiarire:

$$\alpha = \text{piano tg a } S \text{ in } P_0 = \bigcup_{r \in T_r} r$$

$$T_r = \{r \text{ retta} \mid P_0 \in r, \exists \Gamma \in T_g : r \text{ tangente a } \Gamma\}$$

$$T_g = \{\Gamma \text{ curva tracciata su } S \mid P_0 \in \Gamma\}$$

²per brevit  abbiamo scritto u' al posto di $u'(t)$ e x_u al posto di $x_u(u, v)$

Theorem 1.28. Dato $P_0 \in S$, dove S e' una superficie regolare, allora

$$A(u_0, v_0)(x - x_0) + B(u_0, v_0)(y - y_0) + C(u_0, v_0)(z - z_0) = 0$$

$$\text{con } P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)), \quad (u_0, v_0) \in X^\circ$$

e' l'equazione del piano tangente a S in P_0 .

Proof:

Sia α il piano di equazione:

$$\alpha : A(u_0, v_0)(x - x_0) + B(u_0, v_0)(y - y_0) + C(u_0, v_0)(z - z_0) = 0$$

Sia $\gamma = \{(u(t), v(t)), t \in [a, b]\}$ una qualsiasi curva regolare passante per (u_0, v_0) . La sua traccia Γ su S passerà per P_0 :

$$(u_0, v_0) \in \gamma \Rightarrow \exists t_0 \in [a, b] : (u_0, v_0) = (u(t_0), v(t_0))$$

$$\Gamma : \begin{cases} x = \bar{x}(t) := x(u(t), v(t)) \\ y = \bar{y}(t) := y(u(t), v(t)) \\ z = \bar{z}(t) := z(u(t), v(t)) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

$$t_0 \in [a, b] \Rightarrow (\bar{x}(t_0), \bar{y}(t_0), \bar{z}(t_0)) \in \Gamma$$

$$\Gamma \ni (\bar{x}(t_0), \bar{y}(t_0), \bar{z}(t_0)) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)) = (x_0, y_0, z_0) = P_0$$

$$\Rightarrow P_0 \in \Gamma$$

$$\gamma, S \text{ regolare} \quad \Rightarrow \quad \Gamma \text{ regolare}$$

thm[1.25,pg.19]

Consideriamo la retta r tangente alla curva Γ in P_0 , che per il thm [1.3,pg.14] ha equazione:

$$r : \frac{x - \bar{x}(t_0)}{\bar{x}'(t_0)} = \frac{y - \bar{y}(t_0)}{\bar{y}'(t_0)} = \frac{z - \bar{z}(t_0)}{\bar{z}'(t_0)}$$

Notiamo che $P_0 \in r \cap \alpha$, basta infatti sostituire le coordinate di P_0 , per vedere che sia l'equazione di r che quella di α vengono soddisfatte. Allora, affinché $r \subseteq \alpha$, basta verificare che $r \parallel \alpha$.

Il vettore normale di direzione di α ha componenti $A(u_0, v_0), B(u_0, v_0), C(u_0, v_0)$.

Il vettore di direzione di r ha componenti $\bar{x}'(t_0), \bar{y}'(t_0), \bar{z}'(t_0)$. $\alpha \parallel r \Leftrightarrow$ i loro vettori di direzione sono perpendicolari $\Leftrightarrow$ il prod. scalare dei vett. e' nullo

$\Leftrightarrow$

$$A(u_0, v_0)\bar{x}'(t_0) + B(u_0, v_0)\bar{y}'(t_0) + C(u_0, v_0)\bar{z}'(t_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}'(t_0) \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} - \bar{y}'(t_0) \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix} + \bar{z}'(t_0) \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{x}'(t_0) & \bar{y}'(t_0) & \bar{z}'(t_0) \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

E ricordando dalla dimostrazione del thm [1.25,pg.19] che

$$\bar{x}'(t_0) = x_u(u(t_0), v(t_0))u'(t_0) + x_v(u(t_0), v(t_0))v'(t_0)$$

$$\bar{y}'(t_0) = y_u(u(t_0), v(t_0))u'(t_0) + y_v(u(t_0), v(t_0))v'(t_0)$$

$$\bar{z}'(t_0) = z_u(u(t_0), v(t_0))u'(t_0) + z_v(u(t_0), v(t_0))v'(t_0)$$

si vede che la prima riga della (1) e' c.l. lineare delle altre due, e quindi il determinante e' 0.

□

Corollary 1.29. Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in G_f$, allora

$$\begin{aligned} X &\text{ e' un dominio limitato e internamente connesso, } f \in C^1(X) \\ \Rightarrow z - f(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &\text{ e' l'equazione del piano tg in } P_0 \text{ a } G_f \end{aligned}$$

Proof:

Dal thm [1.26,pg.20] segue che G_f e' una superficie regolare. Allora, dal thm [1.28,pg.21], segue che il piano tg a G_f in P_0 e'

$$A(x_0, y_0)(x - x_0) + B(x_0, y_0)(y - y_0) + C(x_0, y_0)(z - z_0) = 0 \quad (1)$$

dove $z_0 = f(x_0, y_0)$.

$$A(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 0 & f_x(x_0, y_0) \\ 1 & f_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = -f_x(x_0, y_0)$$

$$B(x_0, y_0) = - \begin{vmatrix} 1 & f_x(x_0, y_0) \\ 0 & f_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = -f_y(x_0, y_0) \quad C(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$(1) \Leftrightarrow -f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

$$(1) \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{z_0=f(x_0, y_0)} \quad z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

□

1.4.2 Area di superficie

Nota: useremo dei concetti che verranno definiti in seguito (integrali multipli, misura, etc...). Passa avanti e ritorna dopo.

Definition 1.30. Sia $T \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio limitato, misurabile e internamente connesso. Sia inoltre

$$f : T \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C^1(T)$$

Consideriamo la superficie $S = G_f = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in T\}$. Sia $\mathbb{P} = \{T_1, \dots, T_m\}$ una partizione³ di T . Sia scelto un $P_i \in T_i$, $i = 1, \dots, m$ e sia π_i il piano tangente a S in P_i . Consideriamo l'insieme

$$D_i = \{(x, y, z) \in \pi_i \mid (x, y) \in T_i\}$$

che si dimostra essere misurabile secondo Peano Jordan⁴, e sia

$$\tau = \sum_{i=1}^m \text{mis } D_i$$

Poniamo infine:

$$\text{area } S \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{|\mathbb{P}| \rightarrow 0} \tau$$

³Per la definizione di partizione di un dominio limitato e misurabile, vedi [2.1,pg.41]

⁴vedi [2,pg.38]

Proposition 1.31. Sia $T \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio limitato, misurabile e internamente connesso. Sia inoltre

$$f : T \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C^1(T)$$

$$\text{area } G_f = \iint_T \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} \, dx dy$$

Proof: Poniamoci nelle stesse condizioni della definizione [1.30,pg.22]. Sia inoltre,

$$w(x, y) = \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} : T \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$P_i = (x_i, y_i) \in T_i$$

$$Q_i = (x_i, y_i, f(x_i, y_i)) \in G_f$$

(1)1. Dim. che $\text{mis } D_i = \text{mis } T_i w(x_i, y_i)$

Sia n_i la retta normale a π_i passante per Q_i . Si puo' dimostrare che

$$\text{mis } D_i = \frac{\text{mis } T_i}{\cos(\hat{z}n_i)} \quad (1)$$

dove z e' l'asse $\vec{z}$. L'angolo $\hat{z}n_i$ e' cosi' definito:

$$\hat{z}n_i = \begin{cases} 0 & z = n_i \\ \text{angolo acuto tra } z \text{ e } n_i & z \cap n_i \neq \emptyset \\ \text{angolo acuto tra } z' \text{ e } n'_i & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove z', n'_i sono le rette parallele a z, n_i e incidenti

Calcoliamo allora $\cos(\hat{z}n_i)$:

$$\cos(\hat{z}n_i) = \frac{\vec{z} \cdot \vec{n}_i}{\|\vec{z}\| \|\vec{n}_i\|}$$

dove $\vec{z} \cdot \vec{n}_i$ e' il prodotto scalare tra un vettore di z e un vettore di n_i

Un vettore di z e' $(0, 0, 1)$. Per trovare $\vec{n}_i$, consideriamo l'equazione del piano tg in Q_1 , che dal cor [1.29,pg.22] e'

$$\begin{aligned} z - f(x_i, y_i) &= f_x(x_i, y_i)(x - x_i) + f_y(x_i, y_i)(y - y_i) \\ \Rightarrow \vec{n}_i &= (-f_x(x_i, y_i), -f_y(x_i, y_i), 1) \end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned} (0, 0, 1) \cdot (-f_x(x_i, y_i), -f_y(x_i, y_i), 1) &= 1 \\ \|\vec{z}\| &= 1 \\ \|\vec{n}_i\| &= \sqrt{1 + f_x^2(x_i, y_i) + f_y^2(x_i, y_i)} = w(x_i, y_i) \\ \cos(\hat{z}n_i) &= \frac{\vec{z} \cdot \vec{n}_i}{\|\vec{z}\| \|\vec{n}_i\|} = \frac{1}{w(x_i, y_i)} \end{aligned}$$

E quindi dalla (1)

$$\text{mis } D_i = \frac{\text{mis } T_i}{\cos(\hat{z}n_i)} = \text{mis } T_i w(x_i, y_i)$$

(1)2. La tesi da provare equivale a:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \left| \tau - \iint_T w(x, y) \, dx dy \right| < \varepsilon \quad \forall \mathbb{P} \text{ partizione di } T \text{ tale che } |\mathbb{P}| < \delta$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$

Passiamo a maggiorare $\left| \tau - \iint_T w(x, y) \, dxdy \right|$, facendo prima alcuni calcoli preliminari

$$\text{mis } T_i = \iint_{T_i} dxdy \Rightarrow \text{mis } T_i w(x_i, y_i) = w(x_i, y_i) \iint_{T_i} dxdy = \iint_{T_i} w(x_i, y_i) \, dxdy$$

$$\tau = \sum_{i=1}^m \text{mis } D_i = \sum_{i=1}^m \text{mis } T_i w(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^m \iint_{T_i} w(x_i, y_i) \, dxdy$$

$$\left| \tau - \iint_T w(x, y) \, dxdy \right| = \left| \sum_{i=1}^m \iint_{T_i} w(x_i, y_i) \, dxdy - \sum_{i=1}^m \iint_{T_i} w(x, y) \, dxdy \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^m \iint_{T_i} w(x_i, y_i) - w(x, y) \, dxdy \right| \leq \sum_{i=1}^m \left| \iint_{T_i} w(x_i, y_i) - w(x, y) \, dxdy \right| \leq$$

$$\underbrace{\leq}_{[2.13, \text{pg. 47}]} \sum_{i=1}^m \iint_{T_i} |w(x_i, y_i) - w(x, y)| \, dxdy \quad (2)$$

Studiamo la w ,

$$\begin{cases} w \text{ e' continua in } T \\ T \text{ e' chiuso e limitato} \end{cases} \Leftrightarrow T \text{ e' seq. compatto} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{[\text{AII}, 8.32, \text{pg. 88}]} w \text{ e' unif. continua in } T \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{per } \varepsilon > 0 \exists \delta' > 0 : |w(x, y) - w(x', y')| < \varepsilon \quad \forall (x, y), (x', y') \in T : d((x, y), (x', y')) < \delta' \quad (3)$$

Ponendo $\delta = \delta'$ e considerando $\mathbb{P}$ t.c. $|\mathbb{P}| < \delta$, si ha che la (3) vale in tutto

un T_i :

$$(x, y), (x', y') \in T_i \Rightarrow d((x, y), (x', y')) \leq \text{diam } T_i \quad \underbrace{\leq}_{\text{def. di ampiezza}} |\mathbb{P}| < \delta = \delta'$$

$$|w(x, y) - w(x', y')| < \varepsilon \quad \forall (x, y), (x', y') \in T_i$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{[2.12, \text{pg. 46}]} \iint_{T_i} |w(x, y) - w(x', y')| \, dxdy < \iint_{T_i} \varepsilon \, dxdy = \varepsilon \text{mis } T_i \quad (4)$$

Infine, ritornando alla (2), abbiamo

$$\left| \tau - \iint_T w(x, y) \, dxdy \right| \leq \sum_{i=1}^m \iint_{T_i} |w(x_i, y_i) - w(x, y)| \, dxdy \underbrace{\leq}_{(4)} \sum_{i=1}^m \varepsilon \text{mis } T_i = \varepsilon \sum_{i=1}^m \text{mis } T_i = \varepsilon \text{mis } T$$

allora, se come ε scegliamo $\frac{\varepsilon}{2 \text{mis } T}$, abbiamo

$$\left| \tau - \iint_T w(x, y) \, dxdy \right| \leq \frac{\varepsilon}{2 \text{mis } T} \text{mis } T = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

e quindi la tesi. $\square$

Proposition 1.32. Ponendoci sempre nelle ipotesi della definizione [1.30, pg. 22], consideriamo una rappresentazione parametrica di $S = G_f$, da cui si evince che e' regolare⁵

$$S : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D$$

dove D e' un dominio regolare limitato ad un solo contorno

⁵ S e' regolare per il thm [1.26, pg. 20]

Si ha

$$\text{area } S = \iint_D \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} \, dudv$$

dove

$$A(u, v) = \begin{vmatrix} y_u(u, v) & z_u(u, v) \\ y_v(u, v) & z_v(u, v) \end{vmatrix} \quad B(u, v) = - \begin{vmatrix} x_u(u, v) & z_u(u, v) \\ x_v(u, v) & z_v(u, v) \end{vmatrix} \quad C(u, v) = \begin{vmatrix} x_u(u, v) & y_u(u, v) \\ x_v(u, v) & y_v(u, v) \end{vmatrix}$$

Proof:

(1)1. Dim. che

$$\frac{1}{w(x(u, v), y(u, v))} = \frac{|C(u, v)|}{\sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)}} \quad \forall (u, v) \in D$$

Fissiamo $(u, v) \in D^\circ$ e sia $P = (x_0, y_0, z_0) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S$. Così' come abbiamo fatto nella dimostrazione della prop [1.31,pg.23], si ha che il piano α tangente a S in P e':

$$\alpha : z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\text{da cui si ha } \cos(\hat{z}n_i) = \frac{\vec{z} \cdot \vec{n}_i}{|\vec{z}| |\vec{n}_i|} = \frac{1}{w(x_0, y_0)} \quad (1)$$

se pero' ricaviamo α dalla rapp. param. di S , usando il thm [1.28,pg.21], abbiamo

$$\alpha : A(u, v)(x - x_0) + B(u, v)(y - y_0) + C(u, v)(z - z_0) = 0$$

$$\text{da cui } \cos(\hat{z}n_i) = \frac{|C(u, v)|}{\sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)}} \quad (2)$$

nota⁶ Allora, confrontando la (1) e (2) abbiamo

$$\frac{1}{w(x_0, y_0)} = \frac{1}{w(x(u, v), y(u, v))} = \frac{|C(u, v)|}{\sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)}} \quad (3)$$

Supponiamo adesso che $(u', v') \in F(D)$, allora prendendo nella (3) il limite per $(u, v) \rightarrow (u', v')$, e per la continuita' delle funzioni, abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{(u, v) \rightarrow (u', v')} \frac{1}{w(x(u, v), y(u, v))} &= \lim_{(u, v) \rightarrow (u', v')} \frac{|C(u, v)|}{\sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{w(x(u', v'), y(u', v'))} = \frac{|C(u', v')|}{\sqrt{A^2(u', v') + B^2(u', v') + C^2(u', v')}} \end{aligned}$$

In definitiva, la (3) vale per tutti i punti di D .

(1)2. Q.E.D.

Per la prop [1.31,pg.23] abbiamo

$$\text{area } S = \text{area } G_f = \iint_T w(x, y) \, dxdy$$

⁶stiamo considerando il valore assoluto nel coseno, perche' per definizione l'angolo $\hat{z}n_i$ e' acuto, ovvero $\in [0, \frac{\pi}{2}]$

effettuiamo il seguente cambio di variabili e utilizziamo il thm [2.39,pg.61]:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x' = x(u, v) \\ y' = y(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D \\ & \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} \right]_{(u, v)} := \begin{pmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u(u, v) & y_u(u, v) \\ x_v(u, v) & y_v(u, v) \end{pmatrix} = C(u, v) \\ & \text{area } S = \text{area } G_f = \iint_T w(x, y) \, dx dy = \iint_D w(x(u, v), y(u, v)) |C(u, v)| \, dudv = \\ & \quad \underbrace{=}_{\text{passo precedente}} \iint_D \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} \, dudv \end{aligned}$$

□

Proposition 1.33. *Le proposizioni [1.31,pg.23], [1.32,pg.24], valgono analogamente anche nel caso in cui G_f e' il grafico di f normale all'asse $\vec{x}$ o $\vec{y}$, ovvero:*

$$\begin{aligned} & \text{normale a } \vec{y} \\ & f(x, z) : T \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C^1(T) \\ & G_f = \{(x, f(x, z), z) \mid (x, z) \in T\} \\ & \text{area } G_f = \iint_T \sqrt{1 + f_x^2(x, z) + f_z^2(x, z)} \, dx dz \\ & \text{area } G_f = \iint_D \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} \, dudv \\ & \quad \text{dove } A, B, C \text{ sono relativi a una rappr. param. di } G_f \\ & \text{normale a } \vec{x} \\ & f(y, z) : T \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C^1(T) \\ & G_f = \{(f(y, z), y, z) \mid (y, z) \in T\} \\ & \text{area } G_f = \iint_T \sqrt{1 + f_y^2(y, z) + f_z^2(y, z)} \, dy dz \\ & \text{area } G_f = \iint_D \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} \, dudv \\ & \quad \text{dove } A, B, C \text{ sono relativi a una rappr. param. di } G_f \end{aligned}$$

Definition 1.34. Sia S una superficie regolare e sia

$$S : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D$$

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio regolare a uno o piu' contorni

una sua rappr. parametrica da cui si evince che e' regolare.
Per la prop [2.38,pg.61] si ha

$$D = \bigcup_{i=1}^p D_i \quad D_i \circ \cap D_j \circ = \emptyset, \quad D_i \text{ dominio regolare a un solo contorno}$$

Siano definite le seguenti superfici:

$$S_i : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D_i$$

S_i superficie regolare

tale che S_i e' il grafico, normale a un asse coordinato, di una certa funzione, cioe' $S_i = G_{f_i}$, e tale che

$$S = \bigcup_{i=1}^p S_i$$

Possiamo cosi' porre

$$\text{area } S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^p \text{area } S_i$$

Interpretazione geometrica: Le proposizioni [1.31,pg.23] e [1.32,pg.24] permettono di calcolare l'area di una superficie regolare che si puo' esprimere come grafico di una funzione f . Quest'ultima definizione permette di calcolare l'area di una **qualsiasi** superficie regolare spezzandola in superfici regolari che sono il grafico di qualche funzione.

Proposition 1.35. *Nelle ipotesi della def. [1.34,pg.26], si ha*

$$\text{area } S = \iint_D \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} \, dudv$$

Proof: Per la prop [1.33,pg.26], possiamo scrivere:

$$\text{area } S_i = \iint_{D_i} \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} \, dudv$$

Poiche' $\{D_i\}$ formano una partizione di D , possiamo sfruttare la prop di additivita', ottenendo:

$$\text{area } S = \sum_{i=1}^p \iint_{D_i} \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} \, dudv = \iint_D \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} \, dudv$$

□

1.5 Ascisse curvilinee

Definition 1.36. Possiamo pensare una curva regolare γ come se fosse una ascissa.

Sia

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

una sua rappresentazione parametrica da cui si evince che e' regolare.

Fissiamo $P_0 \in \gamma$ e sia $t_0 \in [a, b] : (x(t_0), y(t_0)) = P_0$. Prendiamo un generico punto $P = (x(t), y(t)) \in \gamma$. Se scegliamo il *verso delle t crescenti*, il vettore $\overrightarrow{P_0 P}$ sara' positivo se $t > t_0$.

Possiamo associare a P un numero reale $s(t)$, che chiameremo *ascissa curvilinea* di P :

$$s(t) = \int_{t_0}^t H(\tau) d\tau : [a, b] \longrightarrow [s(a), s(b)]$$

$s(t)$ non e' nient'altro che la lunghezza dell'arco della curva γ che ha per estremi P_0, P . Se P precede P_0 , ossia $t < t_0$, allora $s(t)$ sara' negativo (per la def. di integrale definito). Nota⁷

Proprieta' varie:

1. $s'(t) = H(t) \quad \forall t \in [a, b]$

Proof:

$H(t)$ continua in $[a, b]$, $s(t)$ e' una funzione integrale

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{thm di torricelli [AII, 1.5.2, pg. 21]}} \quad s'(t) = H(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

2. $s(t) \in C^1([a, b])$

Proof:

$s(t)$ e' continua $\in [a, b]$, $s'(t) = H(t)$ e' continua in $[a, b]$

3. $s'(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$

Proof:

γ regolare $\Rightarrow H(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$

4. $s(t)$ e' crescente in $[a, b]$

Proof:

$$s'(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b] \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{cor Lagrange}} \quad s(t) \text{ crescente}$$

5. Im $s(t) = [s(a), s(b)]$

Proof: $s(t)$ e' continua in $[a, b]$, quindi per Weierstrass ammette massimo e minimo in $[a, b]$, inoltre e' crescente, quindi

$$\min_{t \in [a, b]} s(t) = s(a)$$

$$\max_{t \in [a, b]} s(t) = s(b)$$

6. $s(t)$ e' invertibile poiche' crescente.

Denotiamo la sua inversa con $t(s) : [s(a), s(b)] \longrightarrow [a, b]$, che e' anch'essa continua e crescente poiche' inversa di funzione continua e crescente.

⁷nel caso in cui il verso fissato sia quello delle t decrescenti, poniamo

$$s(t) = \int_t^{t_0} H(\tau)$$

7. $t'(s) = \frac{1}{H(t(s))}$

Proof: Immediata conseguenza del teorema di derivazione della funzione inversa ([AI,11.3,pg.44])

8.

$$\begin{cases} x = x(t(s)) \\ y = y(t(s)) \end{cases} \quad s \in [s(a), s(b)]$$

e' un'altra rappresentazione parametrica di γ da cui si evince che γ e' regolare.

Proof: Poiche' $\text{dom } s(t) = \text{Im } t(s)$, per la proposizione [1.4,pg.1], $x = x(t(s))$, $y = y(t(s))$ e' una rappresentazione parametrica alternativa.

1.6 Curve geometriche e analitiche

LET: 1. $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A \neq \emptyset$, aperto

2. $f(x, y) : A \longrightarrow \mathbb{R}$

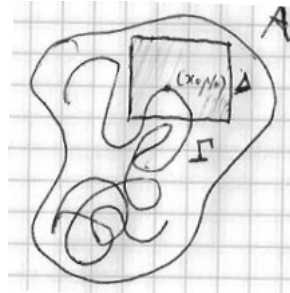
3. $(x_0, y_0) \in A$, $f(x_0, y_0) = 0$

4. $\Gamma = \{(x, y) \in A \mid f(x, y) = 0\} \subseteq A$

ovviamente $(x_0, y_0) \in \Gamma$. Poiche' Γ puo' essere un qualsiasi sottoinsieme di A , e quindi non per forza coincide con una curva piana regolare o continua o semplice, il problema che ci poniamo e' quello di trovare un conveniente intorno Δ di (x_0, y_0) t.c. $\Delta \cap \Gamma$ risulta essere il grafico di un funzione, ovvero

$$\exists \delta \in \mathbb{R} : \Delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta], \Delta \subseteq A, \Delta \cap \Gamma = G_y$$

dove $y(x) : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \longrightarrow [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$



Il teorema di Dini ci dara' una risposta.

Definition 1.37. Nelle seguenti ipotesi:

1. $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A \neq \emptyset$, aperto

2. $f(x, y) : A \longrightarrow \mathbb{R}$

3. $\varphi(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$

diamo la seguente definizione:

$\varphi(x)$ e' implicita rispetto all'equazione $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in (\alpha, \beta) \ (x, y(x)) \in A \wedge f(x, y(x)) = 0$

Theorem 1.38. di Dini.

- LET: 1. $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A \neq \emptyset$, aperto
 2. $f(x, y) : A \longrightarrow \mathbb{R}$, continua in A
 3. $(x_0, y_0) \in A$, $f(x_0, y_0) = 0$
 4. $\exists f_y(x, y)$, $\forall (x, y) \in A$
 5. $f_y(x, y)$ continua in (x_0, y_0)
 6. $f_y(x_0, y_0) \neq 0$

allora si ha

1. $\exists \delta, k > 0 : \Delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - k, y_0 + k] \subseteq A$
 2. $f_y(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \Delta$
 3. $\exists!$ funzione $y : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \longrightarrow [y_0 - k, y_0 + k]$ tale che

(a) $y(x)$ e' implicita rispetto a $f(x, y) = 0$, ovvero

$$(x, y(x)) \in A, \quad f(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

(b) $y(x)$ e' continua in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

Proof:

<1>1. Troviamo Δ

Per l'Hp 6, possiamo supporre che $f_y(x_0, y_0) > 0$.

$$\begin{cases} f_y(x_0, y_0) > 0 \\ f_y \text{ continua in } (x_0, y_0) \end{cases} \xRightarrow{\text{perm segno}} \exists \bar{\delta} > 0 : f_y(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in I((x_0, y_0), \bar{\delta}) \subseteq A \quad (1)$$

<2>1. Nota su $I((x_0, y_0), \bar{\delta}) \subseteq A$

$$A \text{ aperto} \Leftrightarrow A = A^\circ$$

$$(x_0, y_0) \in A = A^\circ \Rightarrow \exists \bar{\delta}' : I((x_0, y_0), \bar{\delta}') \subseteq A$$

quindi se la permanenza del segno ci da' un raggio $\bar{\bar{\delta}}$, bastera' scegliere $\bar{\delta} = \min\{\bar{\bar{\delta}}, \bar{\delta}'\}$ per avere la (1).

Sicuramente esiste il seguente rettangolino dentro il cerchio $I((x_0, y_0), \bar{\delta})$:

$$\exists h, k > 0 : \Delta' = [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - k, y_0 + k] \subseteq I((x_0, y_0), \bar{\delta}) \subseteq A$$

$$(1) \Rightarrow f_y(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in \Delta' \subseteq I((x_0, y_0), \bar{\delta}) \subseteq A \quad (1.1)$$

<2>2. Vediamo che $f(x_0, y_0 - k) < 0$, $f(x_0, y_0 + k) > 0$

Consideriamo la funzione $f(x_0, y) : [y_0 - k, y_0 + k] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f'(x_0, y) = f_y(x_0, y) \underset{(1.1)}{>} 0 \quad \forall y \in [y_0 - k, y_0 + k] \\ f(x, y) \text{ continua in } A \Rightarrow f(x_0, y) \text{ continua in } [y_0 - k, y_0 + k] \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{cor Lagrange}} f(x_0, y) \text{ e' crescente in } [y_0 - k, y_0 + k]$$

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad f(x_0, y) \text{ e' crescente} \Rightarrow \begin{cases} f(x_0, y) > 0 \quad \forall y \in]y_0, y_0 + k] \\ f(x_0, y) < 0 \quad \forall y \in [y_0 - k, y_0[\end{cases} \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ continua in } A \Rightarrow f \text{ continua in } (x_0, y_0 - k), (x_0, y_0 + k) \\ (2) \Rightarrow f(x_0, y_0 - k) < 0, \quad f(x_0, y_0 + k) > 0 \end{array} \right.$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{perm segno}} \left\{ \begin{array}{l} \exists \delta' > 0 : f(x, y) < 0 \quad \forall (x, y) \in I((x_0, y_0 - k), \delta') \subseteq A \quad (3.1) \\ \exists \delta'' > 0 : f(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in I((x_0, y_0 + k), \delta'') \subseteq A \quad (3.2) \end{array} \right.$$

sia $\delta > 0 : \delta < \min \{h, \delta', \delta''\}$, $\Delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - k, y_0 + k]$

$$\delta < h \Rightarrow \Delta \subseteq \Delta' \Rightarrow \forall (x, y) \in \Delta \quad f_y(x, y) > 0 \quad (3.3)$$

(1)2. Definiamo $y(x)$

Fissiamo una $\bar{x} \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, e consideriamo la funzione $f(\bar{x}, y) : [y_0 - k, y_0 + k]$.

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ continua in } A \Rightarrow f(\bar{x}, y) \text{ continua in } [y_0 - k, y_0 + k] \\ (\bar{x}, y_0 - k) \in I((x_0, y_0 - k), \delta') \underbrace{\Rightarrow}_{(3.1)} f(\bar{x}, y_0 - k) < 0 \\ (\bar{x}, y_0 + k) \in I((x_0, y_0 + k), \delta'') \underbrace{\Rightarrow}_{(3.1)} f(\bar{x}, y_0 + k) > 0 \end{array} \right.$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{esistenza zeri [AII, 8.38, pg. 91]}} \exists y(\bar{x}) \in [y_0 - k, y_0 + k] : f(\bar{x}, y(\bar{x})) = 0$$

$$f'(\bar{x}, y) = f_y(\bar{x}, y) \underbrace{> 0}_{(3.3)} \quad \forall y \in [y_0 - k, y_0 + k] \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{cor Lagrange}} f(\bar{x}, y) \text{ crescente in } [y_0 - k, y_0 + k]$$

$$\Rightarrow \exists! y(\bar{x}) \in [y_0 - k, y_0 + k] : f(\bar{x}, y(\bar{x})) = 0$$

Nasce così la funzione ben definita $y(x) : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \longrightarrow [y_0 - k, y_0 + k]$ che ad ogni $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ associa l'unico valore $y(x) \in [y_0 - k, y_0 + k]$ t.c. $f(x, y(x)) = 0$.

(1)3. Dimostriamo l'unicità di $y(x)$

Supponiamo che esista un'altra $\bar{y}(x) : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \longrightarrow [y_0 - k, y_0 + k]$ tale che $f(x, \bar{y}(x)) = 0$.

Fissiamo una $\bar{x} \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Come abbiamo visto prima, $\exists! y^* \in [y_0 - k, y_0 + k] : f(\bar{x}, y^*) = 0$, quindi necessariamente si ha

$$\bar{y}(x) = y^* = y(x)$$

(1)4. Dimostriamo che $y(x)$ è continua

Fissiamo $\bar{x} \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Supponiamo per assurdo che $y(x)$ non sia continua in $\bar{x}$, ovvero:

$$\text{non è vero che } \forall \varepsilon > 0 \exists \sigma > 0 : |y(x) - y(\bar{x})| < \varepsilon \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$$

$$\Leftrightarrow \exists \bar{\varepsilon} > 0 : \forall \sigma > 0 \exists x^* \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma] : |y(x^*) - y(\bar{x})| \geq \bar{\varepsilon} \quad (*)$$

Poiché σ è arbitrario, scegliamo $\sigma = \frac{1}{n}$. Avremo quindi,

$$\exists \bar{\varepsilon} > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [\bar{x} - \frac{1}{n}, \bar{x} + \frac{1}{n}] : |y(x_n) - y(\bar{x})| \geq \bar{\varepsilon}$$

Allora, notiamo la successione $\{x_n\}$

$$x_n \in]\bar{x} - \frac{1}{n}, \bar{x} + \frac{1}{n}[\Leftrightarrow \underbrace{\bar{x} - \frac{1}{n}}_{\rightarrow \bar{x}} \leq x_n \leq \underbrace{\bar{x} + \frac{1}{n}}_{\rightarrow \bar{x}} \xRightarrow{\text{thm del confronto}} x_n \xrightarrow{\mathbb{R}} \bar{x} \quad (4)$$

$$y(x_n) \in [y_0 - k, y_0 + k] \Rightarrow \{y(x_n)\} \text{ e' limitata} \Rightarrow \exists \{y(x_{k_n})\} : y(x_{k_n}) \xrightarrow{\mathbb{R}} \bar{y} \quad (4.1)$$

$$\bar{y} \underbrace{\in}_{[\text{AII,8.14,pg.77}]} [y_0 - k, y_0 + k] = [y_0 - k, y_0 + k] \quad (4.2)$$

$$(4) \Rightarrow x_{k_n} \xrightarrow{\mathbb{R}} \bar{x} \quad (4.3)$$

$$(4.2), (4.3) \xRightarrow{[\text{AII,8.17,pg.79}]} (x_{k_n}, y(x_{k_n})) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (\bar{x}, \bar{y}) \quad (4.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ continua in } A \\ (4.4) \end{array} \right. \xRightarrow{[\text{AII,8.31,pg.87}]} f(x_{k_n}, y(x_{k_n})) \xrightarrow{\mathbb{R}} f(\bar{x}, \bar{y})$$

$$y \text{ funz. implicita} \Rightarrow f(x_{k_n}, y(x_{k_n})) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_{k_n}, y(x_{k_n})) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \Rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

Per l'unicita' dello zero $y^* : f(x, y^*) = 0$, vista in $\langle 1 \rangle 2$, si ha:

$$\bar{y} = y^* = y(\bar{x}) \xRightarrow{(4.1)} y(x_{k_n}) \xrightarrow{\mathbb{R}} y(\bar{x}) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists v \in \mathbb{N} : \forall n > v \quad |y(x_{k_n}) - y(\bar{x})| < \varepsilon$$

il che e' assurdo contro la (*)

□

Corollary 1.39. *Nel contesto del thm di Dini ([1.38,pg.30]), supponendo che f sia differenziabile in tutto A , si ha che*

$$\exists y'(x) \wedge y'(x) = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))} \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

Proof:

Non dimostriamo che $\exists y'(x)$.

Ponendo $(x(t), y(t)) = (x, y(x))$, tutte le ipotesi del thm di derivazione di funzioni composte sono verificate (vedi [AII,9.4,pg.97]), quindi

$$f'(x, y(x)) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))y'(x)$$

$$f(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \Leftrightarrow f(x, y(x)) \text{ e' la funzione identicamente nulla} \Rightarrow D[f(x, y(x))] = 0$$

$$0 = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))y'(x)$$

$$y'(x) = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))}$$

Nota: il thm di Dini ci assicura che $f_y(x, y(x)) \neq 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

□

Definition 1.40. Sia

1. $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A \subseteq \mathbb{R}^2, A \neq \emptyset, A$ aperto
2. $f \in C^1(A)$
3. $\Gamma = \{(x, y) \in A \mid f(x, y) = 0\}$

allora, $(x_0, y_0) \in \Gamma$ si dira' *punto regolare* per $\Gamma \Leftrightarrow f_x(x_0, y_0) \neq 0 \vee f_y(x_0, y_0) \neq 0 \Leftrightarrow f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2 > 0$.

Un punto $\in \Gamma$ non regolare, si dira' *singolare*.

Corollary 1.41. *Sia*

1. $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2, A \neq \emptyset, A$ aperto
2. $f \in C^1(A)$
3. $\Gamma = \{(x, y) \in A \mid f(x, y) = 0\}$
4. $(x_0, y_0) \in \Gamma$ un punto regolare

allora

$$\exists \delta, k > 0 : \Delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - k, y_0 + k] \subseteq A$$

$\Gamma \cap \Delta = G_y$ e' una curva regolare

dove G_y e' il grafico di $y(x) : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \longrightarrow [y_0 - k, y_0 + k]$,

che e' la funzione implicita data dal thm di Dini

$$y(x_0) = y_0$$

In altre parole, questo teorema dice che se (x_0, y_0) e' un punto regolare di una curva geometrica Γ , allora si potra' trovare un suo conveniente intorno, in cui Γ e' una curva regolare.

Proof:

$$f \in C^1(A) \xRightarrow{\text{thm diff. totale [AII, 9.3, pg. 96]}} f \text{ differenziabile in } A$$

$$(x_0, y_0) \in \Gamma \Leftrightarrow f(x_0, y_0) = 0$$

$$(x_0, y_0) \text{ e' un pt. regolare} \Leftrightarrow f_x(x_0, y_0) \neq 0 \vee f_y(x_0, y_0) \neq 0$$

Supponiamo $f_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Tutte le ipotesi del thm di Dini ([1.38, pg. 30]) sono rispettate, e quindi abbiamo:

1. $\exists \delta, k > 0 : \Delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - k, y_0 + k] \subseteq A$
2. $f_y(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \Delta$
3. $\exists!$ funzione $y : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \longrightarrow [y_0 - k, y_0 + k]$ tale che
 - a. $y(x)$ e' implicita rispetto a $f(x, y) = 0$, ovvero
$$(x, y(x)) \in A, f(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$
 - b. $y(x)$ e' continua in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

Inoltre, per il cor [1.39, pg. 32], si ha

$$\exists y'(x) \wedge y'(x) = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))} \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

$\langle 2 \rangle 1$. Verifichiamo che G_y e' una curva regolare

$f \in C^1(A) \Rightarrow f_x, f_y$ continue in A

$f_x(x, y(x)), f_y(x, y(x))$ sono funz. continue, perche' composizione di f continue

$y'(x) = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))}$ e' una funzione continua (1)

$\left\{ \begin{array}{l} 3.(b) \\ (1) \end{array} \right. \Rightarrow y(x) \in C^1([x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \xRightarrow{\text{thm}[1.12, \text{pg.4}]} G_y \text{ e' una curva regolare}$

$\langle 2 \rangle$ 2. Dimostriamo che $\Delta \cap \Gamma = G_y$

$$\Delta \cap \Gamma = ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - k, y_0 + k]) \cap \{(x, y) \in A \mid f(x, y) = 0\} \underset{\Delta \subseteq A}{=} \{(x, y) \in \Delta \mid f(x, y) = 0\}$$

Poiche' $y(x)$ e' la funzione implicita per $f(x, y) = 0$, abbiamo

$$f(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \Leftrightarrow f(x, y(x)) = 0 \quad \forall (x, y(x)) \in G_y \subseteq \Delta$$

$$(x, y(x)) \in G_y \Rightarrow (x, y(x)) \in \{(x, y) \in \Delta \mid f(x, y) = 0\}$$

$$G_y \subseteq \Delta \cap \Gamma$$

D'altronde, se $(x, y) \in \{(x, y) \in \Delta \mid f(x, y) = 0\}$, per l'unicita' di $y(x)$, si ha che $y = y(x)$, e quindi $(x, y) \in G_y$. □

Definition 1.42. Nelle ipotesi del cor [1.41, pg.33], definiamo la tangente a Γ in $(x_0, y_0) \in \Gamma$, punto regolare, come la tangente alla curva regolare G_y in $(x_0, y_0) = (x_0, y(x_0))$.

Proposition 1.43. L'equazione della tangente a Γ in $(x_0, y_0) \in \Gamma$ e'

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

Proof:

Come sappiamo dall'analisi I, la tangente a G_y in $(x_0, y_0) = (x_0, y(x_0))$ e'

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \underset{\text{cor}[1.39, \text{pg.32}]}{\Leftrightarrow} y - y_0 = -\frac{f_x(x_0, y(x_0))}{f_y(x_0, y(x_0))}(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y - y_0 = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) = 0$$

□

Example 1.44. Troviamo la retta tangente a una ellisse in un suo punto.

La nostra $f(x, y) = 0$ e'

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Troviamo prima di tutto i suoi punti singolari:

$$(x, y) \text{ e' singolare} \Leftrightarrow \begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2x}{a^2} = 0 \\ \frac{2y}{b^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

quindi $(0, 0)$ e' l'unico punto singolare e inoltre

$$(0, 0) \notin \Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

Allora, possiamo applicare la prop [1.43,pg.34], prendendo $(x_0, y_0) \in \Gamma$:

$$\begin{aligned}
r : f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) &= 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) &\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) &\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \underbrace{=}_{(x_0, y_0) \in \Gamma} &= 1
\end{aligned}$$

In definitiva:

$$r : \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

1.7 Massimo e minimo vincolato

Definition 1.45. Data $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, e data $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$, con $\Gamma = \{(x, y) \in X \mid \varphi(x, y) = 0\}$, diremo che

$$\begin{aligned}
(x_0, y_0) \in \Gamma \text{ e' un punto di max relativo con vincolo } \varphi(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in I((x_0, y_0), \delta) \cap X \cap \underbrace{\Gamma}_{\Gamma \subseteq X} &= I((x_0, y_0), \delta) \cap \Gamma \\
\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in I((x_0, y_0), \delta) \cap X : \varphi(x, y) &= 0
\end{aligned}$$

E' da notare che senza l'aggiunta del vincolo $\varphi(x, y) = 0$, avremmo la definizione di max relativo data in Analisi II. In sostanza, il vincolo ci dice che (x_0, y_0) deve essere un massimo relativo, solo per i punti di $\Gamma \subseteq X$.

Equivalentemente possiamo dire che (x_0, y_0) e' un punto di massimo relativo con vincolo $\varphi(x, y) = 0$ sse e' un punto di massimo relativo per $f|_{\Gamma}$, cioe' per la restrizione di f a Γ .

Proposition 1.46. $(x_0, y_0) \in X$ punto di max relativo $\Rightarrow (x_0, y_0)$ e' un punto di max relativo con vincolo $\varphi(x, y) = 0$. Non vale il viceversa

Proof:

(1)1. Dim $\Rightarrow$

Per definizione di max rel:

$$\exists \delta > 0 : f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in I((x_0, y_0), \delta) \cap X \cap \underbrace{\Gamma}_{\Gamma \subseteq X} = I((x_0, y_0), \delta) \cap X$$

e quindi a maggior ragione

$$\exists \delta > 0 : f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in I((x_0, y_0), \delta) \cap X \cap \underbrace{\Gamma}_{\Gamma \subseteq X} = I((x_0, y_0), \delta) \cap X \cap \Gamma$$

(1)2. Dim $\Leftarrow$

Portiamo un controesempio

$$X = \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = yx^2$$

$$\varphi(x, y) = y + x^2$$

$$\Gamma = \{(x, y) \in X \mid \varphi(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = -x^2\} \quad (x_0, y_0) = (0, 0)$$

⟨2⟩1. (x_0, y_0) e' un punto di max rel con vincolo $\varphi(x, y) = 0$, anzi e' un punto di max assoluto con vincolo

Infatti,

$$\begin{aligned} f(x, y) = yx^2 \leq f(x_0, y_0) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma &\Leftrightarrow \forall (x, y) : y = -x^2 \\ &\Leftrightarrow -x^2x^2 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

che e' certamente vera.

⟨2⟩2. (x_0, y_0) non e' un punto di max

Se per assurdo lo fosse, si dovrebbe avere:

$$\exists \delta > 0 : yx^2 \leq 0 \quad \forall (x, y) \in I((x_0, y_0), \delta) \cap X = I((x_0, y_0), \delta)$$

ma basta prendere un punto $(x, y) \in I((x_0, y_0), \delta) : y > 0, x \neq 0$ che si ha l'assurdo.

□

Theorem 1.47. *Teorema fondamentale sui massimi e minimi vincolati.*

Sia

1. $X \subseteq \mathbb{R}^2, X \neq \emptyset$
2. $f, \varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$
3. $f, \varphi \in C^1(X^\circ)$
4. $\Gamma_0 = \{(x, y) \in X^\circ \mid \varphi(x, y) = 0\}$
5. $(x_0, y_0) \in \Gamma_0$ punto regolare per Γ_0
6. (x_0, y_0) punto di max o min rel per $f(x, y)$ vincolato a $\varphi(x, y) = 0$

allora

$$\exists! \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} f_x(x_0, y_0) + \lambda \varphi_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) + \lambda \varphi_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Inoltre, } \lambda = -\frac{f_y(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}$$

Proof:

Poiche' $(x_0, y_0) \in \Gamma_0$ e' punto regolare per Γ_0 , possiamo supporre che $\varphi_y(x_0, y_0) \neq 0$.

0. Supponiamo inoltre che (x_0, y_0) sia di max rel. vincolato per $f(x, y)$, ovvero che

$$\exists \sigma > 0 : f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in I((x_0, y_0), \sigma) : \varphi(x, y) = 0 \quad (0)$$

poiche' $(x_0, y_0) \in X^\circ$, possiamo scegliere σ in modo da avere $I((x_0, y_0), \sigma) \subseteq X^\circ$.

Applichiamo il thm di Dini e il cor [1.39, pg.32] alla restrizione di φ a X° , ottenendo:

1. $\exists \delta, k > 0 : \Delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - k, y_0 + k] \subseteq X^\circ$
2. $\varphi_y(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \Delta$
3. $\exists!$ funzione $y : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \longrightarrow [y_0 - k, y_0 + k]$ tale che

a. $y(x)$ e' implicita rispetto a $\varphi(x, y) = 0$, ovvero

$$(x, y(x)) \in X^\circ, \quad \varphi(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

b. $y(x)$ e' continua in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

c.

$$\exists y'(x) = -\frac{\varphi_x(x, y(x))}{\varphi_y(x, y(x))} \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

Consideriamo la funzione $F(x) = f(x, y(x)) : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \longrightarrow \mathbb{R}$. Essa e' ben definita perche' $(x, y(x)) \in G_y \subseteq \Delta$.

$\langle 2 \rangle 1$. x_0 e' un punto di massimo per $F(x)$

PROOF SKETCH: Sfruttiamo la (0): avviciniamo $(x, y(x))$ a (x_0, y_0) , in modo da rientrare nell'intorno della (0).

Consideriamo la distanza tra $(x, y(x))$ e (x_0, y_0)

$d_{\mathbb{R}^2}((x, y(x)), (x_0, y_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y(x) - y_0)^2}$ e' una funz. continua, perche' comp. di f continue

$$\lim_{x \rightarrow x_0} d_{\mathbb{R}^2}((x, y(x)), (x_0, y_0)) = d_{\mathbb{R}^2}((x_0, y(x_0)), (x_0, y_0)) \underbrace{=}_{y(x_0)=y_0} d_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), (x_0, y_0)) = 0 < \sigma$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{perm del segno}} \exists \delta_1 > 0 : d_{\mathbb{R}^2}((x, y(x)), (x_0, y_0)) < \sigma \quad \forall x \in [x - \delta_1, x + \delta_1] \subseteq [x - \delta, x + \delta]$$

e quindi

$$(x, y(x)) \in I((x_0, y_0), \sigma) \quad \forall x \in [x - \delta_1, x + \delta_1] \quad (4)$$

allora,

$$(4), (3a) \underbrace{\Rightarrow}_{(0)} f(x, y(x)) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall x \in [x - \delta_1, x + \delta_1]$$

e poiche'

$$f(x, y(x)) \leq f(x_0, y_0) \Leftrightarrow F(x) \leq F(x_0)$$

abbiamo dimostrato che x_0 e' un punto di massimo per $F(x)$.

$\langle 2 \rangle 2$. Utilizziamo il teorema di Fermat su $F(x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} f \in C^1(X^\circ) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{[\text{AII}, 9.3, \text{pg. } 96]} f \text{ differenz. in } X^\circ \\ \exists y'(x) \quad \forall x \in [x - \delta, x + \delta] \end{array} \right. \underbrace{\Rightarrow}_{[\text{AII}, 9.4, \text{pg. } 97]} \exists F'(x) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))y'(x) \quad \forall x \in [x - \delta, x + \delta] \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in]x - \delta, x + \delta[\\ x_0 \text{ pt. di max rel per } F(x) \\ \exists F'(x) \quad \forall x \in [x - \delta, x + \delta] \end{array} \right.$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{thmdiFermat}[\text{AI}, 12.1, \text{pg. } 50]} F'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_x(x_0, y(x_0)) + f_y(x_0, y(x_0))y'(x_0) = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)y'(x_0) = 0$$

A questo punto, per la (3c), possiamo espandere $y'(x)$

$$f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)y'(x_0) = f_x(x_0, y_0) - \frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}f_y(x_0, y_0)$$

$\langle 2 \rangle 3$. Q.E.D.

Ponendo

$$\lambda = -\frac{f_y(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}$$

otteniamo

$$f_x(x_0, y_0) + \lambda \varphi_x(x_0, y_0) = 0$$

che e' un punto della tesi. Verifichiamo anche il secondo:

$$f_y(x_0, y_0) + \lambda \varphi_y(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow f_y(x_0, y_0) - \frac{f_y(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}\varphi_y(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0) = 0$$

Dimostriamo che λ e' unico:

$$\exists! \lambda_1 \in \mathbb{R} : \begin{cases} f_x(x_0, y_0) + \lambda_1 \varphi_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) + \lambda_1 \varphi_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

$$f_y(x_0, y_0) + \lambda_1 \varphi_y(x_0, y_0) = 0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\varphi_y(x_0, y_0) \neq 0} \quad \lambda_1 = -\frac{f_y(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)} = \lambda$$

□

Theorem 1.48. *Metodo dei moltiplicatori di Lagrange.* Sia

1. $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$
2. $f, \varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$
3. $f, \varphi \in C^1(X^\circ)$
4. $\Gamma_0 = \{(x, y) \in X^\circ \mid \varphi(x, y) = 0\}$

si ha

(x_0, y_0) e' un punto di estremo rel per $f(x, y)$ vincolato a $\varphi(x, y) = 0$
 $\Rightarrow (x_0, y_0) \in Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$

dove

$Y_1 = \{(x, y) \in F(X) \cap X \mid \varphi(x, y) = 0\}$

$Y_2 = \{(x, y) \in \Gamma_0 \mid (x, y) \text{ singolare per } \Gamma_0 \Leftrightarrow \varphi_x(x, y) = \varphi_y(x, y) = 0\}$

$Y_3 = \left\{ (x, y) \in \Gamma_0 \mid (x, y, \lambda) \text{ soluzione di } \begin{cases} f_x(x, y) + \lambda \varphi_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) + \lambda \varphi_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \text{ , con } (x, y) \text{ regolare per } \Gamma_0, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Proof:

Analizziamo tutti i casi che si possono verificare.

(x_0, y_0) e' un punto di estremo rel per $f(x, y)$ vincolato a $\varphi(x, y) = 0$ $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{per definizione}} \varphi(x_0, y_0) = 0$

CASE: $(x_0, y_0) \in F(X)$

allora $(x_0, y_0) \in Y_1$.

CASE: $(x_0, y_0) \notin F(X)$

$$(x_0, y_0) \notin F(X), (x_0, y_0) \in X \quad \underbrace{\Rightarrow}_{X \setminus F(X) \subseteq X^\circ} \quad (x_0, y_0) \in X^\circ$$

CASE: (x_0, y_0) singolare

allora $(x_0, y_0) \in Y_2$

CASE: (x_0, y_0) regolare

Per il thm [1.47, pg. 36] si ha che $(x_0, y_0) \in Y_3$

□

Example 1.49. Un'utile applicazione del thm dei moltiplicatori e' lo studio dei massimi e minimi di $f|_{X_3}$. Dove $X_3 = F(X)$, e' l'insieme che si usa durante lo studio dei massimi e minimi assoluti (vedi Analisi II).

2 Misurabilita' secondo Jordan

Definition 2.1. Un rettangolo chiuso di $\mathbb{R}^n$, di vertici principali $a = (a_1, a_2, \dots, a_n), b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ e' un insieme del tipo:

$$\Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$$

$$a_i < b_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Il punto

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n : \quad c_i = \frac{a_i + b_i}{2} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

viene chiamato *centro* di Δ .

Con $\mathcal{R}$ indichiamo l'insieme di tutti i rettangoli chiusi di $\mathbb{R}^n$.

Definiamo la misura di Δ , come

$$\text{mis } \Delta = \prod_{i=1}^n b_i - a_i$$

Per $n = 1$, $\text{mis } \Delta$ e' la lunghezza del segmento Δ ,

per $n = 2$, $\text{mis } \Delta$ e' l'area del rettangolo Δ ,

per $n = 3$, $\text{mis } \Delta$ e' il volume del parallelepipedo Δ ,

...

Definition 2.2. Un *polirettangolo* di $\mathbb{R}^n$ e' un insieme del tipo

$$\pi = \bigcup_{i=1}^p \Delta_i$$

$$\Delta_i \in \mathcal{R} \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$\Delta_i^\circ \cap \Delta_j^\circ = \emptyset \quad \text{per } i \neq j$$

Con $\mathcal{P}$ indichiamo l'insieme di tutti i polirettangoli di $\mathbb{R}^n$.

Definiamo la misura di π :

$$\text{mis } \pi = \sum_{i=1}^p \text{mis } \Delta_i$$

questa definizione non dipende dalla particolare scelta dei rettangolini.

Proposition 2.3. *Proprieta':*

1. $\pi, \pi' \in \mathcal{P}, \quad \pi \subseteq \pi' \Rightarrow \text{mis } \pi \leq \text{mis } \pi'$
2. $\forall I_{\mathbb{R}^n}(x^*, r) \quad \exists \Delta, \Delta' \in \mathcal{R} : \quad \Delta \subseteq I_{\mathbb{R}^n}(x^*, r), \quad \Delta' \supseteq I_{\mathbb{R}^n}(x^*, r)$
3. $\forall \Delta \in \mathcal{R} \quad \text{di centro } c \quad \exists r, r' > 0 : \quad I(c, r) \subseteq \Delta, \quad I(c, r') \supseteq \Delta$

Proof:

\langle 1 \rangle 1. Dim 1.

$$\pi \subseteq \pi' \Rightarrow \pi' = \pi \cup (\pi' \setminus \pi)$$

$$\text{mis } \pi' \underbrace{=}_{(*)} \text{mis } \pi + \text{mis}(\pi' \setminus \pi) \Rightarrow \text{mis } \pi' \geq \text{mis } \pi$$

(*) per questa uguaglianza si dovrebbe dimostrare che $\pi' \setminus \pi$ e' un polirettangolo, e che quindi ha senso prendere la sua misura.

(1)2. Dim 2.

(2)1. Dim per Δ

Fissiamo $I_{\mathbb{R}^n}(x^*, r)$.

Consideriamo il seguente rettangolo Δ di centro $c = x^*$:

$$\Delta = \prod_{i=1}^n [c_i - \delta, c_i + \delta],$$

$$\text{con } \delta > 0 : \delta \sqrt{n} < r \quad (1)$$

Prendiamo un $y \in \Delta$, e dimostriamo che $y \in I_{\mathbb{R}^n}(x^*, r)$.

$$y \in \Delta \Leftrightarrow y_i \in [c_i - \delta, c_i + \delta] \Leftrightarrow |y_i - c_i| \leq \delta \quad (2)$$

$$d(c, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i - y_i)^2} \underbrace{\leq}_{(2)} \sqrt{\sum_{i=1}^n \delta^2} = \delta \sqrt{n} \underbrace{\leq}_{(1)} r$$

$$d(c, y) < r \Rightarrow y \in I_{\mathbb{R}^n}(c, r) = I_{\mathbb{R}^n}(x^*, r)$$

(2)2. Dim per Δ'

Fissiamo $I_{\mathbb{R}^n}(x^*, r)$.

Consideriamo il seguente rettangolo Δ di centro $c = x^*$:

$$\Delta = \prod_{i=1}^n [c_i - \delta, c_i + \delta],$$

$$\text{con } \delta \geq r \quad (1)$$

Prendiamo un $y \in I_{\mathbb{R}^n}(x^*, r)$, e dimostriamo che $y \in \Delta'$.

$$y \in I_{\mathbb{R}^n}(x^*, r) = I_{\mathbb{R}^n}(c, r) \Leftrightarrow d(c, y) < r \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i - y_i)^2} < r$$

$$|c_j - y_j| \underbrace{\leq}_{(*)} \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i - y_i)^2} < r \underbrace{\leq}_{(1)} \delta \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$|c_j - y_j| < \delta \quad j = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow y \in \Delta'$$

(*) per verificare, basta elevare al quadrato.

(1)3. Dim 3.

(2)1. Dim $\subseteq$

Fissiamo $\Delta \in \mathcal{R}$ di centro c :

$$\Delta = \prod_{i=1}^n [c_i - \delta_i, c_i + \delta_i],$$

$$\text{con } \delta_i > 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Sia $0 < r < \min \{\delta_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$.

Prendiamo un $y \in I(c, r)$ e dimostriamo che $y \in \Delta$.

$$y \in I(c, r) \Leftrightarrow d(c, y) < r \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i - y_i)^2} < r$$

$$|c_j - y_j| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i - y_i)^2} < r < \min \{ \delta_i \mid i = 1, 2, \dots, n \} \leq \delta_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$|c_j - y_j| < \delta_j \quad j = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow y \in \Delta$$

2. Dim $\supseteq$

Fissiamo $\Delta \in \mathcal{R}$ di centro c :

$$\Delta = \prod_{i=1}^n [c_i - \delta_i, c_i + \delta_i],$$

$$\text{con } \delta_i > 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Sia $r' > \sum_{i=1}^n \delta_i$.

Prendiamo un $y \in \Delta$ e dimostriamo che $y \in I(c, r')$.

$$y \in \Delta \Leftrightarrow |c_j - y_j| \leq \delta_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

$$d(c, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i - y_i)^2} \underset{(*)}{\leq} \sum_{i=1}^n |c_i - y_i| \underset{(1)}{\leq} \sum_{i=1}^n \delta_i < r'$$

$$d(c, y) < r' \Rightarrow y \in I(c, r')$$

(*) per verificare, basta elevare al quadrato.

□

Definition 2.4. A questo punto diamo le stesse definizioni di misurabilit  date in Analisi II (vedi [AII,2.1,pg.24]), con queste uniche differenze:

1. Stiamo lavorando in $\mathbb{R}^n$, ovvero $X \subseteq \mathbb{R}^n$
2. Stiamo lavorando con polirettangoli e non con poligoni regolari: $\mathcal{P}$ rappresenta l'insieme dei polirettangoli di $\mathbb{R}^n$
3. La possibilit  di trovare un polirettangolo inscritto, o circoscritto a un intorno $I(x, r)$ e' data dalle osservazioni viste in prop. [2.3,pg.39]

Proposition 2.5. Varranno anche le stesse propriet  della misura di Jordan (vedi [AII,2.0.5,pg.25]), con l'aggiunta della seguente propriet :

$T \subseteq \mathbb{R}^n$, dominio, limitato e misurabile, $\delta > 0$

$\Rightarrow \exists \{T_i \mid T_i \text{ dominio limitato e misurabile, } \text{diam } T_i < \delta, \quad i = 1, 2, \dots, p\} \text{ tale che}$

$$\bigcup_{i=1}^p T_i = T, \quad T_i^\circ \cap T_j^\circ = \emptyset \text{ per } i \neq j$$

In altre parole, se T e' un dominio limitato e misurabile, possiamo partizionarlo in p domini, la cui unione da' tutto T e che non hanno punti interni in comune (al massimo si incontrano nelle loro frontiere).

(Nota ⁸)

⁸diam T_i e' il diametro dell'insieme T_i (vedi [AII,8.5,pg.66])

2.1 Integrale multiplo

A questo punto possiamo definire l'integrale multiplo secondo Riemann, ripercorrendo i passi di Analisi II.

Sia $f(x) : T \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata in T , dove $T \subseteq \mathbb{R}^n$ e' un dominio limitato e misurabile ($0 < \text{mis } T < +\infty$)

Una partizione di T si indica con $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P} = \{T_i \mid T_i \text{ dominio, limitato, misurabile, } i = 1, 2, \dots, p\} \text{ tale che}$$

$$\bigcup_{i=1}^p T_i = T, \quad T_i^\circ \cap T_j^\circ = \emptyset \text{ per } i \neq j$$

Nota: $f(x)$ limitata in T vuol dire che esistono $h, k \in \mathbb{R} : h \leq f(x) \leq k \forall x \in T$.

$$|\mathbb{P}| = \text{ampiezza di } \mathbb{P} = \max \{\text{diam } T_i, \ i = 1, 2, \dots, p\}$$

Il massimo esiste: T_i e' un dominio limitato, quindi e' un insieme con punti interni e limitato, allora $0 \leq \text{mis } T_i < +\infty$.

Poiche' f e' limitata in T , lo sara' pure in T_i , cioe' anche $f|_{T_i}$ e' limitata, quindi:

$$\exists \text{ finito } m_i = \inf_{x \in T_i} f(x) = \inf \{f(x) \mid x \in T_i\}$$

$$\exists \text{ finito } M_i = \sup_{x \in T_i} f(x) = \sup \{f(x) \mid x \in T_i\}$$

Definiamo la somma inferiore e la somma superiore:

$$s(f, \mathbb{P}) = \sum_{i=1}^p m_i \text{mis } T_i \quad S(f, \mathbb{P}) = \sum_{i=1}^p M_i \text{mis } T_i$$

Al variare di $\mathbb{P}$, partizione di T , nascono i seguenti insiemi numerici:

$$A = \{s(f, \mathbb{P})\}_{\mathbb{P}} \quad B = \{S(f, \mathbb{P})\}_{\mathbb{P}}$$

A e' l'insieme numerico delle somme inferiori, e B quello delle somme superiori.

Theorem 2.6. *Dato T dominio limitato e misurabile,*

$$f : T \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ limitata in } T \Rightarrow A, B \text{ sono separati}$$

Essere separati vuol dire che

$$\forall x \in A, y \in B \quad x < y$$

Definition 2.7. Dato $T \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio limitato e misurabile, $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata in T

f e' integrabile secondo Riemann in $T \Leftrightarrow A, B$ sono separati e contigui

Essere contigui vuol dire che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A, y \in B : y - x < \varepsilon$$

L'integrale secondo Riemann e' l'elemento di separazione di A, B , e si indica con

$$\int_T f(x) dx := \sup A = \inf B$$

Se $n = 2$, si puo' usare questo simbolo:

$$\iint_T f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_T f(x) dx$$

dove $x = (x_1, x_2)$.

Theorem 2.8.

Dato $T \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio limitato e misurabile, $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$, continua in T , allora

1. f e' limitata in T
2. f e' integrabile secondo Riemann in T

Proof:

(1)1. Dim la 1

La f e' continua in T .

T dominio $\Rightarrow T$ chiuso

T e' un chiuso limitato di $\mathbb{R}^n$, quindi per il cor del teorema di Weierstrass (vedi [AII, 8.35, pg.90]) f ammette minimo e massimo assoluto:

$$\exists m = \min f(T), \quad \exists M = \max f(T)$$

Quindi f e' limitata.

(1)2. Dim la 2

f e' continua in T , allora per il teorema di Cantor-Heine (vedi [AII, 8.32, pg.88]) e' anche uniformemente continua, cioe'

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in T : d(x, y) < \delta$$

fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo $\frac{\varepsilon}{\text{mis } T}$ (che possiamo fare dato che $\text{mis } T > 0$):

$$\frac{\varepsilon}{\text{mis } T} > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{\text{mis } T} \quad \forall x, y \in T : d(x, y) < \delta \quad (*)$$

Adesso prendiamo una partizione $\overline{P}$ di T in modo tale che $|\overline{P}| < \delta$, $|\overline{P}|$ e' l'ampiezza della partizione, cioe':

$$|\overline{P}| = \max \{ \text{diam } T_i, \quad i = 1, \dots, n \} < \delta \Rightarrow \text{diam } T_i < \delta \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Consideriamo questa differenza:

$$\begin{aligned} m_i &= \inf f|_{T_i} \\ &= \min f|_{T_i} \quad [\text{per la continuita' di } f \text{ e per il thm di Weierstrass}] \\ &= f(\eta_i), \quad \eta_i \in T_i \\ M_i &= \sup f|_{T_i} \\ &= \max f|_{T_i} = f(\xi_i), \quad \xi_i \in T_i \\ \eta_i, \quad \xi_i &\text{ sono punti di minimo e di massimo} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(f, \overline{P}) - s(f, \overline{P}) &= \sum_{i=1}^p M_i \text{mis } T_i - \sum_{i=1}^p m_i \text{mis } T_i = \sum_{i=1}^p (M_i - m_i) \text{mis } T_i \\ &= \sum_{i=1}^p (f(\xi_i) - f(\eta_i)) \text{mis } T_i \quad \underbrace{\qquad}_{f(\xi_i) - f(\eta_i) > 0} = \sum_{i=1}^p |f(\xi_i) - f(\eta_i)| \text{mis } T_i \end{aligned}$$

Cerchiamo adesso di sfruttare la disuguaglianza dell'uniforme continuit :

$$\eta_i, \xi_i \in T_i \subseteq T$$

$$d(\xi_i, \eta_i) \leq \text{diam } T_i \quad [\text{dato che } \xi_i \text{ e } \eta_i \text{ sono dentro } T_i]$$

$$\text{diam } T_i < \delta \quad [\text{per quello che avevamo visto prima}]$$

$$d(\xi_i, \eta_i) < \delta$$

quindi ξ_i e η_i rispettano le condizioni della (*), perci 

$$|f(\xi_i) - f(\eta_i)| < \frac{\varepsilon}{\text{mis } T} \quad \forall i = 1, 2, \dots, p$$

maggioriamo adesso la differenza che avevamo prima considerato:

$$S(f, \overline{P}) - s(f, \overline{P}) = \sum_{i=1}^p |f(\xi_i) - f(\eta_i)| \text{mis } T_i < \sum_{i=1}^p \frac{\varepsilon}{\text{mis } T} \text{mis } T_i \underbrace{=}_{(**)} \frac{\varepsilon}{\text{mis } T} \text{mis } T = \varepsilon$$

$$S(f, \overline{P}) - s(f, \overline{P}) < \varepsilon$$

(**) $\sum_{i=1}^p \text{mis } T_i = \text{mis } T$ per la propriet  di finita additivita' (vedi [2.5, pg. 41]).

Quindi $\forall \varepsilon > 0$, riusciamo a trovare due partizioni $P_1 = P_2 = \overline{P}$ tali che $S(f, \overline{P}) - s(f, \overline{P}) < \varepsilon$. Questo vuol dire che $\{S(f, P)\}_P$, $\{s(f, P)\}_P$ sono due insiemi contigui, perci , in definitiva, f   integrabile secondo Riemann. $\square$

Example 2.9. Dato $T \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio limitato e misurabile, consideriamo una funzione costante:

$$f : T \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(T) = \{c\}$$

f essendo costante,   continua in T , perci  per il thm precedente   integrabile secondo Riemann.

Per ogni partizione $\mathbb{P}$ di p elementi, e $\forall i = 1, 2, \dots, p$, si ha

$$m_i = \inf f|_{T_i} = c$$

$$M_i = \sup f|_{T_i} = c$$

$$s(f, \mathbb{P}) = \sum_{i=1}^p m_i \text{mis } T_i = c \sum_{i=1}^p \text{mis } T_i = c \text{mis } T$$

$$S(f, \mathbb{P}) = \sum_{i=1}^p M_i \text{mis } T_i = c \sum_{i=1}^p \text{mis } T_i = c \text{mis } T$$

quindi

$$\sup A = \inf B = \int_T f(x) \, dx = c \text{mis } T$$

2.1.1 Proprieta'

Date $f, g : T \longrightarrow \mathbb{R}$, integrabili secondo Riemann in $T \subseteq \mathbb{R}^n$, dominio, limitato e misurabile. Presi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valgono le seguenti propriet 

1. Proprieta' distributiva dell'integrale esteso:

$$\begin{cases} \alpha f(x) + \beta g(x) : T \longrightarrow \mathbb{R} \text{   integrabile secondo Riemann} \\ \int_T \alpha f(x) + \beta g(x) \, dx = \alpha \int_T f(x) \, dx + \beta \int_T g(x) \, dx \end{cases}$$

2. Proprieta' di additivita': data la partizione $\mathbb{P} = \{T_1, T_2, \dots, T_p\}$ di T , si ha

$$\begin{cases} f \text{ e' integrabile in } T_1, T_2, \dots, T_p \\ \int_T f(x) dx = \int_{T_1} f(x) dx + \int_{T_2} f(x) dx + \dots + \int_{T_p} f(x) dx \end{cases}$$

2.1.2 Teorema della media

Theorem 2.10. Dato $T \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio, limitato, misurabile, data $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$, integrabile secondo Riemann, e posto

$$m = \inf f|_T \quad M = \sup f|_T$$

si ha

$$m \text{ mis } T \leq \int_T f(x) dx \leq M \text{ mis } T$$

Se inoltre f e' continua, e T e' connesso, si ha

$$\exists \xi \in T : \int_T f(x) dx = f(\xi) \text{ mis } T$$

Proof:

$\langle 2 \rangle 1$. Prima parte

Per Hp f e' integrabile $\Rightarrow f$ e' limitata $\Rightarrow \exists$ finito $M = \sup f(T)$, $\exists$ finito $m = \inf f(T)$. Inoltre

$$\int_T f(x) dx = \sup \{s(f, P)\}_P = \inf \{S(f, P)\}_P$$

e quindi

$$s(f, P_1) \leq \int_T f(x) \leq S(f, P_2) \quad \forall P_1, P_2 \text{ part. di } T$$

Consideriamo allora $P_1 = P_2 = \tilde{P} = \{T\}$ (la part. banale). Abbiamo che

$$s(f, \tilde{P}) \leq \int_T f(x) dx \leq S(f, \tilde{P})$$

Poiche' $\tilde{P}$ e' la part. banale, abbiamo che sia la somma inferiore sia quella superiore sono formate da un solo elemento:

$$s(f, \tilde{P}) = m_1 \text{ mis } T \underbrace{=}_{m=m_1} m \text{ mis } T$$

$$S(f, \tilde{P}) = M_1 \text{ mis } T \underbrace{=}_{M=M_1} M \text{ mis } T$$

allora

$$m \text{ mis } T \leq \int_T f(x) \leq M \text{ mis } T$$

Questo completa la prima parte della dim.

- $\langle 2 \rangle 2$. Seconda parte: supponiamo adesso che f sia continua e che T sia connesso.

Poiche' T e' chiuso e limitato, per il cor del thm di Weierstrass ([AII, 8.35, pg. 90])

$$M = \sup f(T) = \max f(T), \quad m = \inf f(T) = \min f(T)$$

Consideriamo

$$m \operatorname{mis} T \leq \int_T f(x) \leq M \operatorname{mis} T \Leftrightarrow \min f(T) \operatorname{mis} T \leq \int_T f(x) \leq \max f(T) \operatorname{mis} T$$

$$\min f(T) \leq \frac{1}{\operatorname{mis} T} \int_T f(x) \leq \max f(T)$$

$$\text{sia } \gamma = \frac{1}{\operatorname{mis} T} \int_T f(x) \quad [\text{che si chiama } \textit{media integrale}]$$

$$\begin{cases} T \subseteq \mathbb{R}^n \text{ e' chiuso e connesso} \\ f \text{ continua in } T \end{cases}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{cor [AII,8.40,pg.92]}} f \text{ assume tutti i valori compresi tra il min e il max } (**)$$

$$\begin{cases} \min f(T) \leq \gamma \leq \max f(T) \\ (**) \end{cases} \Rightarrow \exists \xi \in T : f(\xi) = \gamma = \frac{1}{\operatorname{mis} T} \int_T f(x) \Rightarrow \int_T f(x) = f(\xi) \operatorname{mis} T$$

□

Corollary 2.11. Dato $T \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio, limitato, misurabile, data $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$, integrabile secondo Riemann,

$$\forall x \in T \quad f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_T f(x) \, dx \geq 0$$

$$\forall x \in T \quad f(x) \leq 0 \Rightarrow \int_T f(x) \, dx \leq 0$$

Proof:

(1) 1. Dim. la 1

Poiche' almeno 0 e' un minorante di $f(T)$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow m = \inf f(T) \geq 0$$

allora per il thm della media:

$$m \operatorname{mis} T \leq \int_T f(x) \, dx$$

ma poiche' T ha punti interni ed e' limitato, $\operatorname{mis} T > 0$ e $m \geq 0$, quindi

$$0 \leq m \operatorname{mis} T \leq \int_T f(x) \, dx$$

□

Corollary 2.12. Dato $T \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio, limitato, misurabile. Date $f, g : T \longrightarrow \mathbb{R}$, integrabili secondo Riemann in T ,

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in T \Rightarrow \int_T f(x) \, dx \leq \int_T g(x) \, dx$$

Proof:

Consideriamo $\varphi(x) = f(x) - g(x) \leq 0$. Per le proprieta' [2.1.1,pg.44],

$$\int_T \varphi(x) \, dx = \int_T f(x) \, dx - \int_T g(x) \, dx$$

per il corollario [2.11,pg.46],

$$\int_T \varphi(x) \, dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_T f(x) \, dx - \int_T g(x) \, dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_T f(x) \, dx \leq \int_T g(x) \, dx$$

□

Corollary 2.13. Dato $T \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio, limitato e misurabile. Data $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$, integrabile secondo Riemann, valgono queste due proposizioni:

1. $|f(x)| : T \longrightarrow \mathbb{R}$ e' integrabile secondo Riemann

2.

$$\left| \int_T f(x) dx \right| \leq \int_T |f(x)| dx$$

Proof:

(1)1. Dimostriamo solo la 2.

Per le proprieta' del valore assoluto:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \quad \forall x \in T$$

allora integrando ogni membro, e usando il corollario [2.12,pg.46],

$$\int_T -|f(x)| dx \leq \int_T f(x) dx \leq \int_T |f(x)| dx$$

che per la proprieta' distributiva:

$$-\int_T |f(x)| dx \leq \int_T f(x) dx \leq \int_T |f(x)| dx$$

e per la proprieta' del valore assoluto

$$\left| \int_T f(x) dx \right| \leq \int_T |f(x)| dx$$

□

2.2 Cilindroidi a tre dimensioni

Le definizioni, i teoremi e le dimostrazioni dei cilindroidi di $\mathbb{R}^3$ sono l'analogo dei rettangoloidi di $\mathbb{R}^2$ (vedi [AII,2.1,pg.26]).

Definition 2.14. Dato $T \subseteq \mathbb{R}^2$, dominio, misurabile, limitato. Data $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$, limitata in T , con $f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in T$, definiamo il *cilindroide* di f relativo alla *base* T :

$$C(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

In sostanza, $C(f)$ e' la porzione dello spazio che sta' sotto il grafico di $f(x, y)$. Nota che $f(x, y) \geq 0$

Proposition 2.15. $C(f)$ e' limitato.

Proof: T e' limitato, quindi possiamo trovare un rettangolo Δ' di $\mathbb{R}^2$ che lo contenga. Allora, basta considerare il parallelepipedo che ha per base Δ' e altezza $M > \sup f|_T$ (il sup e' finito perche' f e' limitata.):

$$\Delta = \Delta' \times [0, M]$$

Si verifica subito che $\Delta \supseteq C(f)$. Poiche' il parallelepipedo corrisponde ad un rettangolo di $\mathbb{R}^3$, per le prop. dei rettangoli (vedi [2.3,pg.39]) esiste un intorno I di $\mathbb{R}^3$. Quindi

$$I \supseteq \Delta \supseteq C(f) \Rightarrow C(f) \text{ e' limitato}$$

□

Theorem 2.16.

$$\begin{cases} T \subseteq \mathbb{R}^2, \text{ dominio, misurabile, limitato} \\ f : T \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ continua} \\ f(x, y) \geq 0 \forall (x, y) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(f) \text{ e' misurabile} \\ \text{mis } C(f) = \iint_T f(x, y) dx dy \end{cases}$$

2.3 Insieme normale

Definition 2.17. Dato $T \subseteq \mathbb{R}^2$, dominio, misurabile, limitato. Data $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : T \longrightarrow \mathbb{R}$, con $g(x, y) \geq f(x, y) \forall (x, y) \in T$. Definiamo l'*insieme normale* di f, g rispetto al piano $z = 0$:

$$C(f, g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T, f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$$

In altre parole, $C(f, g)$ e' l'insieme dei punti compresi tra il grafico di g (che sta' sopra) e il grafico di f .

Definiamo l'*insieme normale* di f, g rispetto al piano $x = 0$:

$$C(f, g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T, f(y, z) \leq x \leq g(y, z)\}$$

Lemma 2.18. Sia dato $T \subseteq \mathbb{R}^2$, dominio limitato e misurabile.

Indicando con G_f il grafico della funzione $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$, continua in T :

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T, z = f(x, y)\}$$

valgono le seguenti proposizioni:

1. $G_f^\circ = \emptyset$
2. G_f e' misurabile secondo Jordan e $\text{mis } G_f = 0$

Theorem 2.19.

$$\begin{cases} T \subseteq \mathbb{R}^2, \text{ dominio, limitato e misurabile.} \\ f, g : T \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue in } T \\ g(x, y) \geq f(x, y) \forall (x, y) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1. C(f, g) \text{ e' misurabile} \\ 2. \text{mis } C(f, g) = \iint_T g(x, y) - f(x, y) dx dy \end{cases}$$

Proof:

(1)1. Dimostriamo il thm nel caso in cui $f(x, y) \geq 0 \forall (x, y) \in T$

Osserviamo che

$$g(x, y) \geq f(x, y) \forall (x, y) \in T \Rightarrow C(f) \subseteq C(g) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \text{mis } C(f) \leq \text{mis } C(g) \quad [\text{propr. di isotonia, vedi [2.5,pg.41]}]$$

$$g(x, y) \geq f(x, y) \geq 0 \forall (x, y) \in T \quad (2)$$

$$C(f, g) = [C(g) \setminus C(f)] \cup G_f \quad (3)$$

$$G_f^\circ = \emptyset \quad [\text{per il lemma [2.18,pg.48]}]$$

$$\text{mis } G_f = 0 \quad [\text{per lo stesso lemma}]$$

Per la (2) e per la continuita' di f, g , applichiamo il thm [2.16,pg.48] su f, g :

$$\text{mis } C(f) = \iint_T f(x, y) dx dy$$

$$\text{mis } C(g) = \iint_T g(x, y) dx dy$$

$C(f), C(g)$ sono misurabili, allora dalla (1) e (3) e per le varie proprietà della misura (vedi [2.5,pg.41]), si ha:

$$\text{mis } C(f, g) = \text{mis}[C(g) \setminus C(f)] \cup G_f = \text{mis}[C(g) \setminus C(f)] + \underbrace{\text{mis } G_f}_{=0} = \text{mis } C(g) - \text{mis } C(f)$$

$$= \iint_T g(x, y) \, dx dy - \iint_T f(x, y) \, dx dy = \iint_T g(x, y) - f(x, y) \, dx dy$$

(1)2. Dimostriamo il caso $f(x, y) < 0$ per qualche $(x, y) \in T$

Trasliamo f, g in modo da avere $G_f, G_g \geq 0$, per poi applicare il thm [2.16,pg.48]:
 $m = \min f(T)$ [che esiste perché f è continua]

$$f(x, y) < 0 \text{ per qualche } (x, y) \in T \Rightarrow m < 0$$

$$f_1(x, y) = f(x, y) - m$$

$$g_1(x, y) = g(x, y) - m$$

$$m \leq f(x, y) \, \forall (x, y) \in T \Rightarrow f(x, y) - m \geq 0 \, \forall (x, y) \in T$$

$$g(x, y) \geq f(x, y) \, \forall (x, y) \in T \Rightarrow g(x, y) - m \geq f(x, y) - m \geq 0 \, \forall (x, y) \in T$$

A questo punto possiamo applicare i risultati del passo (1)1: $T(f_1, g_1)$ è misurabile, e inoltre

$$\text{mis } T(f_1, g_1) = \iint_T g_1(x, y) - f_1(x, y) \, dx dy =$$

$$= \iint_T g(x, y) - m - f(x, y) + m \, dx dy = \iint_T g(x, y) - f(x, y) \, dx dy$$

Poiché $T(f_1, g_1)$ è una traslazione di $C(f, g)$, per la quinta proprietà della misura (vedi [2.5,pg.41]), si ha:

$$\text{mis } C(f, g) = \text{mis } T(f_1, g_1)$$

□

Theorem 2.20.

$$\left\{ \begin{array}{l} T, T' \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ domini limitati e misurabili} \\ T' \subseteq T \\ f(x, y) : T \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua in } T \\ f(x, y) \geq 0 \, \forall (x, y) \in T \end{array} \right. \Rightarrow \iint_{T'} f(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_T f(x, y) \, dx \, dy$$

si può provare che questo teorema vale anche in $\mathbb{R}^n$

Proof:

Siano C, C' i cilindri relativi a f rispetto alla base T, T'

$$T' \subseteq T \Rightarrow C' \subseteq C \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{prop. di isotonia}} \quad \text{mis } C' \leq \text{mis } C \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{thm}[2.16,pg.48]} \quad \iint_{T'} f(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_T f(x, y) \, dx \, dy$$

□

2.4 Formule di riduzione

Proposition 2.21. Formula di riduzione per integrali doppi

Siano $\alpha(x), \beta(x) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue in $[a, b]$ con $\alpha(x) < \beta(x) \, \forall x \in]a, b[$. Questa ipotesi assicura che $\alpha(a) \leq \beta(a)$, $\alpha(b) \leq \beta(b)$ (nota ⁹)

⁹ infatti, basta prendere limite per $x \rightarrow a^+$ e poi per $x \rightarrow b^-$ nella disuguaglianza $\alpha(x) < \beta(x) \, \forall x \in]a, b[$.

Sia

$$T = T(\alpha, \beta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

ovvero, T e' l'insieme normale di α, β rispetto all'asse delle x e di base $[a, b]$ (vedi analisi II).

Si dimostra che T e' un dominio limitato e misurabile di $\mathbb{R}^2$.

Allora, data la funzione

$$f(x, y) : T \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua in } T$$

vale la seguente formula:

$$\iint_T f(x, y) dx dy \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$$

dove

$$H(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$$

$$H(x) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

e' una funzione reale continua definita nel seguente modo:

$$H(\bar{x}) = \begin{cases} \int_{\alpha(\bar{x})}^{\beta(\bar{x})} f(\bar{x}, y) dy & \bar{x} \in]a, b[\\ 0 & \alpha(a) = \beta(a) \\ \int_{\alpha(\bar{x})}^{\beta(\bar{x})} f(\bar{x}, y) dy & \alpha(a) < \beta(a) \\ 0 & \alpha(b) = \beta(b) \\ \int_{\alpha(\bar{x})}^{\beta(\bar{x})} f(\bar{x}, y) dy & \alpha(b) < \beta(b) \end{cases} \quad \bar{x} = a \quad \Leftrightarrow \quad H(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \alpha(\bar{x}) = \beta(\bar{x}) \\ \int_{\alpha(\bar{x})}^{\beta(\bar{x})} f(\bar{x}, y) dy & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nota: $\bar{x}$ rappresenta la x fissata. $f(\bar{x}, y)$ e' quindi una funzione nella y definita in $[\alpha(\bar{x}), \beta(\bar{x})]$.

Nei casi in cui $\alpha(a) = \beta(a)$ (o $\alpha(b) = \beta(b)$), abbiamo che $f(\bar{x}, y)$ resta definita solo nel punto $\alpha(a)$ (o $\alpha(b)$). Ecco perche' non possiamo piu' considerare il suo integrale definito e poniamo $H(a) = 0$ (o $H(b) = 0$).

Interpretazione geometrica: supponiamo che $\alpha(x), \beta(x), f(x, y) \geq 0$ nei loro intervalli di definizione. Fissiamo un $\bar{x} \in [a, b]$. $H(\bar{x})$ e' l'area del trapezoide che risulta essere l'intersezione del piano tridimensionale $x = \bar{x}$ con il cilindroide $C(f)$. Variando le $\bar{x} \in [a, b]$ stiamo percio' sezionando $C(f)$ con i piani $x = \bar{x}$. Di ogni sezione, stiamo calcolando l'area. A questo punto sommiamo tutte queste infinite aree con l'ultimo integrale in $[a, b]$.

Analogamente, se T e' un insieme normale rispetto all'asse y :

$$\alpha(y), \beta(y) : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$T(\alpha, \beta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d], \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$$

abbiamo

$$\iint_T f(x, y) dx dy \stackrel{\text{def}}{=} \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right) dy \stackrel{\text{def}}{=} \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

Lemma 2.22. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio limitato, allora

$$X \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ dominio limitato} \Rightarrow \begin{cases} \exists \text{ finito } M = \sup \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in X\} \\ \exists \text{ finito } m = \inf \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in X\} \\ m < M \end{cases}$$

Vale un risultato analogo per $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

Proof:

(1)1. X limitato $\Rightarrow \exists$ finito m, M

$$\begin{aligned} X \text{ limitato} &\xRightarrow{[2.3, \text{pg. } 39]} \exists \Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] : X \subseteq \Delta \\ &\Rightarrow \begin{cases} \exists \text{ finito } M = \sup \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in X\} \leq b_2 \\ \exists \text{ finito } m = \inf \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in X\} \geq a_2 \end{cases} \end{aligned}$$

(1)2. X dominio $\Rightarrow \exists P = (x_0, y_0) \in X^\circ$

$$X \text{ dominio} \Rightarrow X \neq \emptyset, X \subseteq D(X^\circ)$$

allora se prendiamo un $x \in X \subseteq D(X^\circ)$, per la def. di derivato abbiamo:

$$\forall r > 0 \quad I(x, r) \cap X^\circ \setminus \{x\} \neq \emptyset \xRightarrow{\text{fissato } r} \exists P \in X^\circ$$

(1)3. Dimostriamo che $(x, m) \in X \Rightarrow (x, m) \in F(X)$

Per la prop [TOP, 1.8, pg. 18] vista in topologia, abbiamo:

$$X \text{ dominio} \Rightarrow X \text{ chiuso} \xRightarrow{[TOP, 1.8, \text{pg. } 18]} X = F(X) \cup X^\circ$$

$$(x, m) \in X \Rightarrow (x, m) \in F(X) \vee (x, m) \in X^\circ$$

Se per assurdo $(x, m) \in X^\circ$, si ha

$$(x, m) \in X^\circ \Rightarrow \exists r > 0 : I((x, m), r) \subseteq X$$

Sia $\varepsilon : 0 < \varepsilon < r$, allora si ha

$$(x, m - \varepsilon) \in I((x, m), r) \subseteq X \Rightarrow \inf \{y \mid (x, y) \in X\} \leq m - \varepsilon \Leftrightarrow m \leq m - \varepsilon \Leftrightarrow 0 \geq \varepsilon$$

Assurdo. Quindi $(x, m) \in F(X)$.

(1)4. Q.E.D.

$$P = (x_0, y_0) \in X^\circ \subseteq X$$

Se per assurdo $y_0 = m$, allora, per quanto abbiamo visto nel passo precedente, avremo:

$$(x_0, y_0) \in F(X)$$

ma questo e' assurdo, perche $F(X) \cap X^\circ = \emptyset$.

Quindi $y_0 \neq m$.

Allora,

$$m = \inf \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in X\} \Rightarrow m \leq y_0 \xRightarrow{y_0 \neq m} m < y_0$$

e in definitiva:

$$m < y_0 \leq M \Rightarrow m < M$$

□

Proposition 2.23. Formula di riduzione per integrali tripli per sezione

Consideriamo $X \subseteq \mathbb{R}^3$ dominio limitato e misurabile e la funzione

$$f(x, y, z) : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua in } X$$

Per il thm [2.8,pg.43],

$$\exists \iiint_X f(x, y, z) \, dx dy dz$$

Inoltre, per il lemma [2.22,pg.51] si ha

$$\begin{aligned} \exists \text{ finito } M &= \sup \{z \in \mathbb{R} \mid (x, y, z) \in X\} \\ \exists \text{ finito } m &= \inf \{z \in \mathbb{R} \mid (x, y, z) \in X\} \\ m &< M \end{aligned}$$

possiamo perciò considerare l'intervallo $[m, M]$.

Preso $\bar{z} \in [m, M]$ definiamo la sezione di X di piede z :

$$\begin{aligned} X_{\bar{z}} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, \bar{z}) \in X\} = \pi(\alpha_{\bar{z}} \cap X) \\ \text{con } \alpha_z &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \bar{z}\} \\ \pi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \pi(x, y, z) = (x, y) \end{aligned}$$

il altre parole $X_{\bar{z}}$ e' la proiezione della sezione di X tramite il piano $z = \bar{z}$.
Supponiamo che

1. $\forall z \in]m, M[\quad X_z$ e' un dominio misurabile
2. X_m e' un dominio misurabile $\vee X_m = \{(x, y)\}$
3. X_M e' un dominio misurabile $\vee X_M = \{(x', y')\}$

Poiche' f e' continua in X , la funzione di due variabili $f(x, y, \bar{z})$, e' continua in $X_{\bar{z}}$, $\bar{z} \in]m, M[$, inoltre $X_{\bar{z}}$ e' un dominio misurabile, per l'ipotesi (1.), ed e' anche limitato in quanto proiezione di un sottoinsieme di X . Quindi, per il thm [2.8,pg.43]

$$\exists \iint_{X_{\bar{z}}} f(x, y, \bar{z}) \, dx dy \quad (2)$$

Analogamente, se $\bar{z} = m$ e X_m e' un dominio misurabile, si ha la (2).

Definiamo la seguente funzione:

$$\varphi(\bar{z}) = \begin{cases} \iint_{X_{\bar{z}}} f(x, y, \bar{z}) \, dx dy & \bar{z} \in]m, M[\\ \begin{cases} 0 & X_m = \{(x, y)\} \\ \iint_{X_m} f(x, y, m) \, dx dy & X_m \text{ dominio misurabile} \end{cases} & \bar{z} = m \\ \begin{cases} 0 & X_M = \{(x, y)\} \\ \iint_{X_M} f(x, y, M) \, dx dy & X_M \text{ dominio misurabile} \end{cases} & \bar{z} = M \end{cases}$$

$$\varphi(\bar{z}) : [m, M] \longrightarrow \mathbb{R}$$

se φ e' continua, si puo' dimostrare che

$$\iiint_X f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_m^M \varphi(\bar{z}) \, dz$$

Per convenzione si usano i seguenti simboli:

$$\begin{aligned} \iint_{X_{\bar{z}}} f(x, y, \bar{z}) \, dxdy &\stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\bar{z}) \quad \forall \bar{z} \in [m, M] \\ \int_m^M dz \iint_{X_z} f(x, y, z) \, dxdy &\stackrel{\text{def}}{=} \int_m^M \left(\iint_{X_z} f(x, y, z) \, dxdy \right) dz \end{aligned}$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\iiint_X f(x, y, z) \, dxdydz = \int_m^M dz \iint_{X_z} f(x, y, z) \, dxdy$$

Valgono formule analoghe per il sezionamento con il piano $y = \bar{y}$ oppure $x = \bar{x}$:

$$\iiint_X f(x, y, z) \, dxdydz = \int_{m'}^{M'} dx \iint_{X_x} f(x, y, z) \, dydz$$

oppure

$$\iiint_X f(x, y, z) \, dxdydz = \int_{m''}^{M''} dy \iint_{X_y} f(x, y, z) \, dxdz$$

Proposition 2.24. Formula di riduzione per proiezione per integrali tripli

Sia $T \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio limitato e misurabile,

$\alpha(x, y), \beta(x, y) : T \longrightarrow \mathbb{R}$ continue in T e $\alpha(x, y) < \beta(x, y) \quad \forall (x, y) \in T^\circ$.

Queste ipotesi garantiscono che $\alpha(x, y) \leq \beta(x, y) \quad \forall (x, y) \in F(T)$ (nota ¹⁰).

Sia

$X = T(\alpha, \beta)$ dominio normale rispetto all'asse z , di base T

$$X = T(\alpha, \beta) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T \quad \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$$

Supponiamo $f(x, y, z) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in X .

Allora, sia definita la funzione

$$\begin{aligned} H(\bar{x}, \bar{y}) &= \begin{cases} 0 & \alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \beta(\bar{x}, \bar{y}) \\ \int_{\alpha(\bar{x}, \bar{y})}^{\beta(\bar{x}, \bar{y})} f(\bar{x}, \bar{y}, z) \, dz & \text{altrimenti} \end{cases} \\ H(x, y) &: T \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

questa definizione ha senso perche'

$$\alpha(\bar{x}, \bar{y}) \neq \beta(\bar{x}, \bar{y}) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{per Hp}} \alpha(\bar{x}, \bar{y}) < \beta(\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow \exists [\alpha(\bar{x}, \bar{y}), \beta(\bar{x}, \bar{y})]$$

$$\begin{cases} f \text{ continua in } X \\ (\bar{x}, \bar{y}) \in T \end{cases} \Rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}, z) : [\alpha(\bar{x}, \bar{y}), \beta(\bar{x}, \bar{y})] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua} \Rightarrow \exists \int_{\alpha(\bar{x}, \bar{y})}^{\beta(\bar{x}, \bar{y})} f(\bar{x}, \bar{y}, z) \, dz$$

Si puo' dimostrare che $H(\bar{x}, \bar{y})$ e' continua in T e che

$$\iiint_X f(x, y, z) \, dxdydz = \iint_T H(x, y) \, dxdy \stackrel{\text{def}}{=} \iint_T dxdy \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) \, dz$$

¹⁰basta infatti prendere il limite per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ nella disugliananza di prima, per ogni $(x_0, y_0) \in F(T)$

Questa e' la formula di riduzione per proiezione rispetto al piano $z = 0$. Analogamente valgono le formule rispetto agli altri piani:

$$\begin{aligned}\iiint_X f(x, y, z) \, dx dy dz &= \iint_{T'} dy dz \int_{\alpha(y, z)}^{\beta(y, z)} f(x, y, z) \, dx \\ \iiint_X f(x, y, z) \, dx dy dz &= \iint_{T''} dx dz \int_{\alpha(x, z)}^{\beta(x, z)} f(x, y, z) \, dy\end{aligned}$$

2.5 Solido di rotazione

Proposition 2.25. Sia data una funzione $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$. Facendo ruotare G_f attorno all'asse $\vec{x}$ otteniamo un dominio limitato e misurabile di rotazione:

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid d((x, y, z), \vec{x}) \leq |f(x)|, \, x \in [a, b]\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{y^2 + z^2} \leq |f(x)|, \, x \in [a, b]\}$$

Il volume di tale dominio e'

$$\text{mis } T = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

Proof: Procediamo per sezione¹¹:

$$T_{\vec{x}} = \pi_x(T \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \vec{x}\}) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 \leq f(\vec{x})^2\}$$

$$\text{mis } T_x = \pi f(x)^2 \quad T_x \text{ e' un cerchio di raggio } f(x)$$

$$\text{mis } T = \iiint_T dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{T_x} dy dz = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

□

2.6 Baricentro e momento

Definition 2.26. Dato T dominio di $\mathbb{R}^2$ limitato e misurabile, si definisce il suo baricentro P_0 :

$$\begin{aligned}P_0 &= (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \\ x_0 &= \frac{\iint_T x \, dx \, dy}{\text{mis } T}, \quad y_0 = \frac{\iint_T y \, dx \, dy}{\text{mis } T}\end{aligned}$$

Definition 2.27. Dato X dominio di $\mathbb{R}^3$ limitato e misurabile, si definisce il suo baricentro P_0 :

$$\begin{aligned}P_0 &= (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \\ x_0 &= \frac{\iiint_X x \, dx \, dy \, dz}{\text{mis } X}, \quad y_0 = \frac{\iiint_X y \, dx \, dy \, dz}{\text{mis } X}, \quad z_0 = \frac{\iiint_X z \, dx \, dy \, dz}{\text{mis } X}\end{aligned}$$

Se consideriamo la densita' di massa variabile, espressa dalla funzione

$$\mu(x, y, z) : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

¹¹ $\pi(x, y, z) = (y, z)$

avremo

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$$

$$x_0 = \frac{\iiint_X x \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{M}, \quad y_0 = \frac{\iiint_X y \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{M}, \quad z_0 = \frac{\iiint_X z \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{M}$$

$$M = \iiint_X \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \text{ massa totale}$$

Se $\mu(X) = \{1\}$, si ricava la definizione data prima.

Proposition 2.28. *Sia X dominio di $\mathbb{R}^n$. Se X e' simmetrico rispetto all'iperpiano coordinato $\{x_i = 0\}$, ovvero*

$$(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \in X \Rightarrow (y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, -y_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \in X$$

allora $P_i = 0$, dove P e' il baricentro di X .

Proof: Diamo la dimostrazione per $n = 2$, supponendo che X sia simmetrico rispetto all'asse $\{x = 0\}$.

Si ha

$$X = X_1 \cup X_2 = \underbrace{\{(x, y) \in X \mid x \geq 0\}}_{X_1} \cup \underbrace{\{(-x, y) \in X \mid (x, y) \in X_1\}}_{X_2}$$

$$X_1^\circ \cap X_2^\circ = \emptyset$$

$$P_0 = \frac{\iint_X x \, dx}{\text{mis } X}$$

$$\iint_X x \, dx = \iint_{X_1} x \, dx + \iint_{X_2} x \, dx = \iint_{X_1} x \, dx + \iint_{X_2} -(-x) \, dx = \iint_{X_1} x \, dx + \iint_{X_1} -x \, dx = 0$$

□

Definition 2.29. Dato X dominio di $\mathbb{R}^3$ limitato e misurabile, si definisce il suo momento di inerzia I rispetto ad una retta r , o ad un punto Q detto polo, il seguente numero reale non negativo:

$$I = \iiint_X \delta^2(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$\delta(P) = d(P, Q) : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad \vee \quad \delta(P) = d(P, r) : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

Se consideriamo la densita' di massa variabile, espressa dalla funzione

$$\mu(x, y, z) : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

avremo

$$I = \iiint_X \delta^2(x, y, z) \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Example 2.30. In particolare il momento di inerzia rispetto all'asse $\vec{x}$ e':

$$d((x, y, z), \vec{x}) = \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$I_{\vec{x}} = \iiint_X y^2 + z^2 \, dx \, dy \, dz$$

rispetto agli altri assi:

$$I_{\vec{y}} = \iiint_X x^2 + z^2 \, dx dy dz$$

$$I_{\vec{z}} = \iiint_X y^2 + x^2 \, dx dy dz$$

rispetto all'origine:

$$I_O = \iiint_X x^2 + y^2 + z^2 \, dx dy dz$$

Usando la prop. distributiva degli integrali, si ha:

$$I_O = \frac{1}{2} (I_{\vec{x}} + I_{\vec{y}} + I_{\vec{z}})$$

Example 2.31. Calcoliamo il baricentro (x_0, y_0, z_0) della semisfera non negativa usando la formula di riduzione per proiezione rispetto al piano $z = 0$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, z \geq 0\}$$

$$T = \text{proiezione di } S \text{ su } z = 0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

$$\alpha(x, y) = 0, \beta(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \quad \forall (x, y) \in T$$

$$S = X = T(\alpha, \beta) \text{ di base } T$$

In sostanza, fin qui, abbiamo scritto S come un dominio normale di $\mathbb{R}^3$ rispetto all'asse z , e di base T . α, β sono continue in T e vale

$$\alpha(x, y) = 0 < \beta(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \quad \forall (x, y) \in T^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (0, 0)) < r\}$$

$$\alpha(x, y) = 0 = \beta(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \quad \forall (x, y) \in F(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (0, 0)) = r\}$$

$$\langle 0 \rangle 1. \text{ Calcoliamo } x_0 = \frac{\iint_X x \, dx \, dy \, dz}{\text{mis } X} = \frac{\iint_X x \, dx \, dy \, dz}{\frac{2}{3}\pi r^3}$$

$$f(x, y, z) = x : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

Applichiamo la formula di riduzione:

$$\iiint_X f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_T dx dy \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} x \, dz = \iint_T x \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \, dx dy =$$

$$\underbrace{\quad}_{\text{formula di cambiamento polare (vedi [2.40, pg. 62])}} \iint_D \rho^2 \cos \vartheta \sqrt{r^2 - \rho^2} \, d\vartheta d\rho =$$

$$D = [0, 2\pi] \times [0, r]$$

$$\underbrace{\quad}_{\text{formula di riduz. int. doppi}} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^r \rho^2 \cos \vartheta \sqrt{r^2 - \rho^2} \, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \, d\vartheta \underbrace{\int_0^r \rho^2 \sqrt{r^2 - \rho^2} \, d\rho}_{=k \in \mathbb{R}} = k \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \, d\vartheta =$$

$$= k [\cos \vartheta]_0^{2\pi} = 0$$

Nota: abbiamo potuto dire che l'integrale sottosegnato e' uguale a un $k \in \mathbb{R}$ perche' in esso figuravano solo variabili in ρ , e l'integrale era in $d\rho$.

Quindi $x_0 = 0$

(0)2. Analogamente si vede che $y_0 = 0$

(0)3. Calcoliamo z_0

In questo caso

$$f(x, y, z) = z : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \iiint_X f(x, y, z) \, dx dy dz &= \iint_T dx dy \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} z \, dz = \frac{1}{2} \iint_T r^2 - x^2 - y^2 \, dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D (r^2 - \rho^2) \rho \, d\vartheta d\rho = -\frac{1}{4} \iint_D -2\rho(r^2 - \rho^2) \, d\vartheta d\rho = \\ &\quad D = [0, 2\pi] \times [0, r] \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^r -2\rho(r^2 - \rho^2) \, d\rho = -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\vartheta \left[\frac{(r^2 - \rho^2)^2}{2} \right]_0^r = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} r^4 \, d\vartheta = \frac{\pi}{4} r^4 \end{aligned}$$

Quindi,

$$z_0 = \frac{\frac{\pi}{4} r^4}{\frac{2}{3} \pi r^3} = \frac{3}{8} \pi r$$

In definitiva

$$(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, \frac{3}{8} \pi r)$$

Example 2.32. Calcoliamo il momento di inerzia della sfera rispetto all'origine.

$$\begin{aligned} X &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r\} \\ I_O &= \iiint_X x^2 + y^2 + z^2 \, dx dy dz \end{aligned}$$

Utilizziamo la formula di passaggio a coordinate sferiche vedi [2.46,pg.69]:

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 \\
D &= [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, r] \\
\iiint_X f(x, y, z) \, dx dy dz &= \iiint_D f(\rho \cos \vartheta \sin \varphi, \rho \sin \vartheta \sin \varphi, \rho \cos \varphi) \rho^2 |\sin \varphi| \, d\vartheta d\varphi d\rho = \\
&= \iiint_D ((\rho \cos \vartheta \sin \varphi)^2 + (\rho \sin \vartheta \sin \varphi)^2 + (\rho \cos \varphi)^2) \rho^2 |\sin \varphi| \, d\vartheta d\varphi d\rho = \\
&\stackrel{\text{formula [2.23,pg.51]}}{=} \int_0^r d\rho \iint_{D_\rho} \rho^4 (\cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) |\sin \varphi| \, d\vartheta d\varphi = \\
&\quad \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi = \sin^2 \varphi (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) = \sin^2 \varphi \\
&\quad \varphi \in [0, \pi] \Rightarrow \sin \varphi = |\sin \varphi| \\
D_\rho &= \text{sezione di piede } \rho = [0, 2\pi] \times [0, \pi] = \Delta \quad \forall \rho \in [0, r] \\
&= \int_0^r \rho^4 \, d\rho \iint_{\Delta} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \sin \varphi \, d\vartheta d\varphi = \int_0^r \rho^4 \, d\rho \iint_{\Delta} \sin \varphi \, d\vartheta d\varphi = \\
&= \int_0^r \rho^4 \, d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi = \\
&= \int_0^r \rho^4 \, d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta [-\cos \varphi]_0^\pi = \\
&= 2 \int_0^r \rho^4 \, d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta = \\
&= 4\pi \int_0^r \rho^4 \, d\rho = 4\pi \frac{r^5}{5} = \frac{4\pi}{5} r^5
\end{aligned}$$

Example 2.33. Calcoliamo il momento di inerzia della sfera rispetto all'asse $\vec{x}$:

$$\begin{aligned}
X &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r\} \\
I_{\vec{x}} &= \iiint_X y^2 + z^2 \, dx dy dz
\end{aligned}$$

Come nell'esempio precedente, utilizziamo la formula di passaggio a coordinate sferiche vedi [2.46,pg.69]:

$$\begin{aligned}
\iiint_X y^2 + z^2 \, dx dy dz &= \iiint_D ((\rho \sin \varphi \sin \vartheta)^2 + \rho^2 \cos^2 \varphi) \rho^2 \sin \varphi = \\
&= \int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\pi \rho^4 (\sin^3 \varphi \sin^2 \vartheta + \sin \varphi \cos^2 \varphi) \, d\varphi = \\
&= \int_0^r \rho^4 \, d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\pi \sin^3 \varphi \sin^2 \vartheta + \sin \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \quad (1)
\end{aligned}$$

Calcoliamo l'ultimo integrale:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^3 \varphi \sin^2 \vartheta + \sin \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi &= \int_0^\pi \sin^3 \varphi \sin^2 \vartheta \, d\varphi + \int_0^\pi \sin \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi = \\
&\int_0^\pi \sin \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi = \left[-\frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_0^\pi = \frac{2}{3} \quad (*) \\
\int_0^\pi \sin^3 \varphi \sin^2 \vartheta &= \sin^2 \vartheta \int_0^\pi \sin^3 \varphi \, d\varphi = \\
&\int_0^\pi \sin^3 \varphi \, d\varphi = \int_0^\pi \sin \varphi (1 - \cos^2 \varphi) \, d\varphi = \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi - \int_0^\pi \sin \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \\
&\stackrel{(*)}{=} \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi - 2 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\
&= \frac{4}{3} \sin^2 \vartheta \\
&= \frac{4}{3} \sin^2 \vartheta + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Ritorniamo all'integrale principale:

$$\begin{aligned}
(1) &= \int_0^r \rho^4 \, d\rho \int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{3} \sin^2 \vartheta + \frac{2}{3} \right) d\vartheta \\
&\int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{3} \sin^2 \vartheta + \frac{2}{3} \right) d\vartheta = \frac{4}{3} \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta \, d\vartheta + \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} \, d\vartheta = \\
&= \frac{4}{3} \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta \, d\vartheta + \frac{4}{3} \pi = \\
&\int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{2} [\vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta]_0^{2\pi} = \pi \\
&= \frac{8}{3} \pi \\
&= \frac{8}{3} \pi \int_0^r \rho^4 \, d\rho = \frac{8}{15} r^5
\end{aligned}$$

Quindi

$$I_{\vec{x}} = \frac{8}{15} r^5$$

analogamente si vede che

$$I_{\vec{y}} = I_{\vec{z}} = I_{\vec{x}} = \frac{8}{15} r^5$$

Example 2.34. Rassicuriamoci sull'esattezza dei calcoli usando la formula vista

in [2.30,pg.55]:

$$\begin{aligned}
 I_O &= \frac{1}{2} (I_{\vec{x}} + I_{\vec{y}} + I_{\vec{z}}) \\
 I_O &\stackrel{[2.32,pg.57]}{=} \frac{4\pi}{5} r^5 \\
 I_{\vec{y}} &= I_{\vec{z}} = I_{\vec{x}} = \frac{8}{15} r^5 \\
 \frac{4\pi}{5} r^5 &= \left(3 \frac{8}{15} r^5 \right) \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

2.7 Domini regolari

Theorem 2.35. *Teorema di Jordan.*

Sia γ una curva generalmente regolare, semplice e chiusa

$\Rightarrow \exists!$ dominio $T \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato e internamente connesso tale che $F(T) = \gamma$

Questo teorema e' facilmente intuibile ma difficilmente dimostrabile: il teorema dice che se disegniamo nel piano una curva chiusa, che non si interseca, e che sia continua, allora la curva delimita quella porzione del piano T , che si trova "dentro" la curva.

Definition 2.36. Il dominio T associato a γ si chiama *dominio regolare ad un solo contorno* di γ .

γ si chiama *contorno* di T

I punti di T° si dicono punti interni a γ

I punti di $\text{ext } T$ si dicono punti esterni a γ

Remark 2.1. $T(\alpha, \beta)$ e' un dominio regolare ad un solo contorno. Dove $T(\alpha, \beta)$ e' il dominio normale rispetto all'asse delle x o delle y , definito in [2.4,pg.49]

Remark 2.2. Dato $T \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio limitato e intern. connesso,

$F(T) = \gamma$ curva gen. reg. semp. e chiusa $\Rightarrow T$ e' il dominio regolare di γ

infatti, per il thm di Jordan,

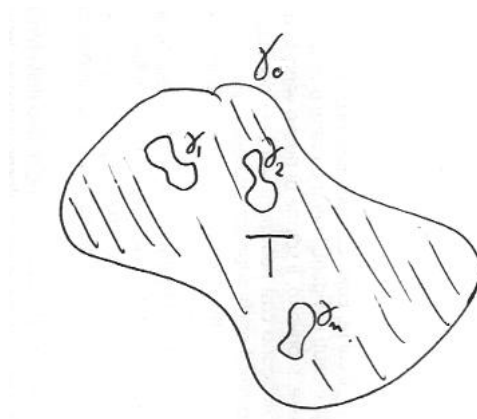
$\exists! T'$ dominio limit. intern. connesso tale che $F(T') = \gamma$

ma un tale dominio e' proprio T , quindi per l'unicita' di T' si ha $T = T'$. E poiche' T' e' per def. un dominio regolare, anche T lo e'.

Definition 2.37. Siano date $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$, curve generalmente regolari, semplici e chiuse tali che

$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ sono interne a γ_0
 γ_2 e' esterna a γ_1
 γ_3 e' esterna a γ_2, γ_1
 $\dots$
 γ_n e' esterna a $\gamma_{n-1}, \gamma_{n-2}, \dots, \gamma_1$

dove con “interno” ed “esterno” sono usati secondo la definizione [2.36,pg.60]. Il dominio T dei punti del piano non esterni a γ_0 e non interni a $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ si chiama *dominio piano regolare* ad $n + 1$ *contorni*. γ_0 si dice *contorno esterno*.



In poche parole, stiamo delimitando con la curva γ_0 una porzione del piano, e questa porzione del piano la stiamo “bucando”, ovvero la stiamo privando dei punti del piano interni alle varie curve $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$.

Proposition 2.38. *Dato T dominio piano regolare ad uno o piu' contorni, allora*

1. T e' internamente connesso
- 2.

$$T = \bigcup_{i=1}^m T_i$$

$$T_i^\circ \cap T_j^\circ = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

dove $m \in \mathbb{N}$ e ogni T_i e' un dominio regolare a un solo contorno, normale, rispetto all'asse x o all'asse y .

3. T e' misurabile secondo Jordan.

Theorem 2.39.

1. D dominio piano regolare ad un solo contorno

2.

$$\varphi(u, v), \psi(u, v) : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi, \psi \in C^1(D)$$

$$\det \left[\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right]_{(u, v)} \neq 0 \quad \forall (u, v) \in D$$

$$\left[\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right]_{(u, v)} := \begin{pmatrix} \varphi_u(u, v) & \varphi_v(u, v) \\ \psi_u(u, v) & \psi_v(u, v) \end{pmatrix} \text{ chiamata matrice Jacobiana}$$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \quad (u, v) \in D\}$$

$$f(x, y) : T \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua in } T$$

la relazione $(x, y) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$ stabilisce una relazione biunivoca fra $F(T)$ e $F(D)$

allora

1. T e' un dominio regolare a un solo contorno

$$2. \quad \iint_T f(x, y) \, dx dy = \iint_D f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \det \left[\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right]_{(u, v)} \right| du dv$$

questa e' la cosiddetta formula di cambio di variabili per integrali doppi.

□

Proposition 2.40. Siano $r, R \in \mathbb{R}$, $0 < r < R$, allora in ognuno dei seguenti casi,

Corona circolare non negativa di centro $(0, 0)$ e raggi r, R

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, \quad y \geq 0\}, \quad D = \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \theta \leq \pi, \quad r \leq \rho \leq R\}$$

Corona circolare non positiva di centro $(0, 0)$ e raggi r, R

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, \quad y \leq 0\}, \quad D = \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi \leq \theta \leq 2\pi, \quad r \leq \rho \leq R\}$$

Corona circolare di centro $(0, 0)$ e raggi r, R

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}, \quad D = \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad r \leq \rho \leq R\}$$

Cerchio non negativo di centro $(0, 0)$ e raggio R

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, \quad y \geq 0\}, \quad D = \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \rho \leq R\}$$

Cerchio non positivo di centro $(0, 0)$ e raggio R

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, \quad y \leq 0\}, \quad D = \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq R\}$$

Cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio R

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}, \quad D = \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq R\}$$

Cerchio di centro $(0, R)$ e raggio R

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - R)^2 + y^2 \leq R^2\}, \quad D = \left\{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq 2R \cos \theta\right\}$$

vale la seguente formula:

$$\iint_T f(x, y) \, dx dy = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\theta d\rho$$

dove $f(x, y) : T \longrightarrow \mathbb{R}$ e' una funzione continua in T .

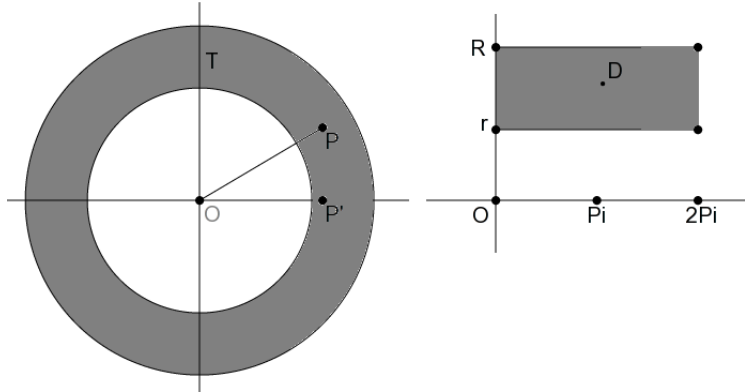


Figure 1: Corona circolare di centro $O = (0, 0)$ e raggi r, R . θ e' l'angolo $P\hat{O}P'$, mentre ρ e' la distanza OP . T e' la corona circolare, mentre D e' il dominio che viene usato nella formula.

Proof:

(1) $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$, $D = \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \theta \leq \pi, r \leq \rho \leq R\}$

Cerchiamo di applicare il teorema [2.39,pg.61].

Usiamo le coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad (*)$$

Definendo le funzioni

$$\varphi(\theta, \rho) = \rho \cos \theta : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\psi(\theta, \rho) = \rho \sin \theta : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

possiamo intendere T come:

$$T = \{(\varphi(\theta, \rho), \psi(\theta, \rho)) \in \mathbb{R}^2 \mid (\theta, \rho) \in D\}$$

D lo possiamo intendere come il rettangolo

$$D = [0, \pi] \times [r, R]$$

e da qui si capisce facilmente che e' un dominio piano regolare ad un solo contorno (vedi figura [2,pg.64]).

$\varphi, \psi \in C^1(D)$.

Calcoliamo il determinante della matrice Jacobiana:

$$\det \left[\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\theta, \rho)} \right]_{(\theta, \rho)} = \det \begin{pmatrix} \varphi_\theta(\theta, \rho) & \varphi_\rho(\theta, \rho) \\ \psi_\theta(\theta, \rho) & \psi_\rho(\theta, \rho) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\rho \sin \theta & \cos \theta \\ \rho \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} = -\rho(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = -\rho$$

e poiche' $\rho \in [r, R]$, ed $r > 0$, il determinante e' $\neq 0$.

Grazie alla (*), esiste una corrispondenza biunivoca tra $F(T), F(D)$, infatti:

$F(D)$ e' composta dai segmenti del rettangolo

al segmento $\{0\} \times [r, R]$ di $F(D)$ corrisponde il segmento di $F(T)$ giacente sull'asse x positiva.

al segmento $\{\pi\} \times [r, R]$ di D corrisponde il segmento di $F(T)$ giacente sull'asse x negativa.

al segmento $[0, \pi] \times \{r\}$ di D corrisponde l'arco piu' piccolo di $F(T)$.

al segmento $[0, \pi] \times \{R\}$ di D corrisponde l'arco piu' grande di $F(T)$.

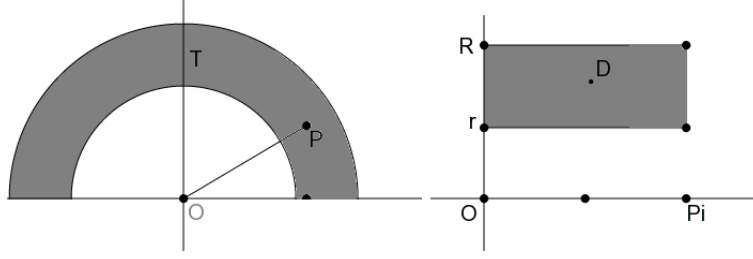


Figure 2: Corona non negativa di centro (0,0)

Allora, tutte le ipotesi del teorema [2.39,pg.61] sono rispettate e quindi

$$\iint_T f(x, y) \, dxdy = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\theta d\rho$$

$$\langle 1 \rangle 2. \, T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, \, y \leq 0\}, \, D = \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi \leq \theta \leq 2\pi, \, r \leq \rho \leq R\}$$

Si procede come nel passo precedente, la differenza sostanziale risiede in

$$D = [\pi, 2\pi] \times [r, R]$$

$$\langle 1 \rangle 3. \, T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}, \, D = \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, \, r \leq \rho \leq R\}$$

In questo caso non possiamo applicare direttamente il teorema [2.39,pg.61] perche' non vi e' piu' corrispondenza biunivoca tra $F(T)$ e $F(D)$: come prima al segmento $\{0\} \times [r, R]$ di $F(D)$ corrisponde il segmento di T giacente sull'asse x positiva, quest'ultimo segmento pero' non e' piu' contenuto in $F(T)$.

Poniamo allora

$$T' = T \cap \{y \geq 0\}, \, D' = [0, \pi] \times [r, R]$$

$$T'' = T \cap \{y \leq 0\}, \, D'' = [\pi, 2\pi] \times [r, R]$$

Ovvero T' e' la corona non negativa vista prima e D' e' il suo dominio relativo T'' e' la corona non positiva vista prima e D'' e' il suo dominio relativo.

E' chiaro che

$$T'^{\circ} \cap T''^{\circ} = \emptyset, \, T' \cup T'' = T$$

$$D'^{\circ} \cap D''^{\circ} = \emptyset, \, D' \cup D'' = D$$

e quindi per le proprieta' degli integrali (vedi [2.1.1,pg.44]), abbiamo

$$\iint_T f(x, y) \, dxdy = \iint_{T'} f(x, y) \, dxdy + \iint_{T''} f(x, y) \, dxdy$$

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\theta d\rho = \iint_{D'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\theta d\rho + \iint_{D''} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\theta d\rho$$

Su T' , T'' possiamo applicare quanto visto prima, e quindi

$$\iint_{T'} f(x, y) \, dxdy = \iint_{D'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\theta d\rho$$

$$\iint_{T''} f(x, y) \, dxdy = \iint_{D''} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\theta d\rho$$

In conclusione,

$$\iint_T f(x, y) \, dxdy = \iint_{T'} f(x, y) \, dxdy + \iint_{T''} f(x, y) \, dxdy =$$

$$= \iint_{D'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\theta d\rho + \iint_{D''} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\theta d\rho = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\theta d\rho$$

$$\langle 2 \rangle 1. \, T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, \, y \geq 0\}, \, D = \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \theta \leq \pi, \, 0 \leq \rho \leq R\}$$

In questo caso, poiche' $0 \leq \rho \leq R$, il determinante Jacobiano e' zero quando $\rho = 0$, quindi non possiamo applicare direttamente il teorema [2.39,pg.61].

(3)1. Consideriamo allora il cerchio come una corona circolare il cui raggio interno tende a 0 e dimostriamo cosi' la formula.

Sia

$$T'_r = \{x^2 + y^2 \leq r^2\}, \quad D'_r = [0, \pi] \times [0, r]$$

$$T''_r = \{r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}, \quad D''_r = [0, \pi] \times [r, R]$$

e' chiaro che

$$T'_r \cap T''_r = \emptyset, \quad T'_r \cup T''_r = T$$

$$D'_r \cap D''_r = \emptyset, \quad D'_r \cup D''_r = D$$

allora per la proprieta' di additivita' (vedi [2.1.1,pg.44]),

$$\iint_T f(x, y) \, dxdy = \iint_{T'_r} f(x, y) \, dxdy + \iint_{T''_r} f(x, y) \, dxdy$$

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\theta d\rho = \iint_{D'_r} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\theta d\rho + \iint_{D''_r} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\theta d\rho \quad (2)$$

poiche' T''_r e' una semicorona circolare non negativa, possiamo applicare ad esso la formula:

$$\iint_{T''_r} f(x, y) \, dxdy = \iint_{D''_r} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\theta d\rho$$

allora

$$\iint_{T''_r} f(x, y) \, dxdy = \iint_{D''_r} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\theta d\rho$$

$$\stackrel{(2)}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\theta d\rho - \iint_{D'_r} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\theta d\rho$$

$$\iint_T f(x, y) \, dxdy = \iint_{T'_r} f(x, y) \, dxdy + \iint_{T''_r} f(x, y) \, dxdy =$$

$$= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\theta d\rho + \iint_{T'_r} f(x, y) \, dxdy - \iint_{D'_r} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\theta d\rho \quad (3)$$

(4)1. Dimostriamo che per $r \rightarrow 0^+$ anche $\iint_{T'_r} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\theta d\rho \rightarrow 0$

T'_r e' un dominio limitato e misurabile, allora per la prop [2.13,pg.47], e per il thm della media, segue:

$$0 \leq \left| \iint_{T'_r} f(x, y) \, dxdy \right| \leq \iint_{T'_r} |f(x, y)| \, dxdy \stackrel{(o)}{\leq} \text{mis } T'_r \max_{(x, y) \in T'_r} |f(x, y)| \stackrel{(oo)}{\leq} \frac{\pi r^2}{2} \max_{(x, y) \in T} |f(x, y)|$$

$$0 \leq \left| \iint_{T'_r} f(x, y) \, dxdy \right| \leq \frac{\pi r^2}{2} \max_{(x, y) \in T} |f(x, y)|$$

prendendo il limite per $r \rightarrow 0^+$, per il thm del confronto

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left| \iint_{T'_r} f(x, y) \, dxdy \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow 0^+} \iint_{T'_r} f(x, y) \, dxdy = 0$$

(o) possiamo usare direttamente il max al posto del sup perche' f e' continua.

(oo) Di certo $\max f / T'_r \leq \max f / T$. Essendo T'_r una semicirconferenza, $\text{mis } T'_r = \frac{\pi r^2}{2}$.

(4)2. Dimostriamo che per $r \rightarrow 0^+$ anche $\iint_{D'_r} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\theta d\rho$

Poniamo $F(\theta, \rho) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho$.

Procedendo come nel passo precedente, abbiamo:

$$0 \leq \left| \iint_{D'_r} F(\theta, \rho) d\rho d\theta \right| \leq \iint_{D'_r} |F(\theta, \rho)| d\rho d\theta \underbrace{\leq}_{(o)} \max F / D'_r \text{ mis } D'_r \underbrace{\leq}_{(oo)} \max F / T \pi r$$

$$0 \leq \left| \iint_{D'_r} F(\theta, \rho) d\rho d\theta \right| \leq \max F / T \pi r$$

prendendo il limite per $r \rightarrow 0^+$, per il thm del confronto

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left| \iint_{D'_r} F(\theta, \rho) d\rho d\theta \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow 0^+} \iint_{D'_r} F(\theta, \rho) d\rho d\theta = 0$$

(oo) mis $D'_r = \pi r$

Allora prendendo il limite nella (3) abbiamo

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\theta d\rho$$

(1)4. Il caso del cerchio si dimostra analogamente a quello della corona: si sfrutta la proprieta' di additivita' degli integrali

□

Example 2.41. Calcoliamo il volume della sfera.

Sia

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, z \geq 0\}$$

la semisfera non negativa di raggio r .

Esprimiamo S con una funzione: ricavandoci la z non negativa, abbiamo:

$$f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} : T \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\} \text{ cerchio di raggio } r \text{ e centro } (0, 0)$$

allora

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in T\} = C(f)$$

$$S = C(f)$$

Poiche' f e' continua e non negativa in T e T e' un dominio limitato e misurabile, allora per il thm [2.16,pg.48] si ha

$$\text{mis } S = \text{mis } C(f) = \iint_T f(x, y) dx dy$$

Poiche' T e' un cerchio di raggio r e centro $(0, 0)$, possiamo usare la formula [2.40,pg.62]:

$$D = [0, 2\pi] \times [0, r]$$

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\theta d\rho$$

D e' un dominio normale:

$$\alpha(\theta) = 0, \beta(\theta) = r \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

$$D = \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha(\theta) \leq \rho \leq \beta(\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]\}$$

Allora, per la formula di riduzione [2.21,pg.49], abbiamo

$$\begin{aligned}
\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\theta d\rho &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho = \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \rho \sqrt{r^2 - (\rho \cos \theta)^2 - (\rho \sin \theta)^2} \, d\rho = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \rho \sqrt{r^2 - \rho^2} \, d\rho = \\
&\stackrel{\text{moltiplicando e dividendo per } -2}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r -\frac{1}{2} (-2\rho) (r^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} \, d\rho = \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \left[-\frac{1}{2} \frac{(r^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^r = \int_0^{2\pi} d\theta \left[-\frac{1}{3} (r^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^r = \int_0^{2\pi} d\theta \left[-\frac{1}{3} (r^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} (r^2 - 0)^{\frac{3}{2}} \right] = \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \left[0 + \frac{1}{3} r^3 \right] = \frac{1}{3} r^3 \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{3} r^3 \cdot 2\pi = \frac{2}{3} \pi r^3
\end{aligned}$$

e poiche' questo e' il volume della semisfera, quello della sfera e':

$$\frac{4}{3} \pi r^3$$

Definition 2.42. Dominio regolare di $\mathbb{R}^3$ normale rispetto a $z = 0$

Sia

1. $T \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio regolare
2. sia $\alpha, \beta(x, y) : T \longrightarrow \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in C^2(T)$
3. $\alpha(x, y) < \beta(x, y) \quad \forall (x, y) \in T^\circ$
4. $X = T(\alpha, \beta)$ di base $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$

X viene chiamato *dominio regolare di $\mathbb{R}^3$ normale rispetto a $z = 0$*

Analogamente si definiscono i domini regolari normali rispetto a $y = 0$ e $x = 0$.

Definition 2.43.

$$X \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ e' un dominio regolare} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} X = \bigcup_{i=1}^n X_i$$

con X_i dominio regolare normale rispetto a un piano coordinato

Nota: X e' un dominio limitato e misurabile perche' unione di domini limitati e misurabili.

Theorem 2.44.

1. $D \subseteq \mathbb{R}^3$ dominio regolare

2.

$$\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w) : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in C^1(D)$$

$$\det \left[\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u, v, w)} \right]_{(u, v, w)} \neq 0 \quad \forall (u, v, w) \in D$$

$$\left[\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u, v, w)} \right]_{(u, v, w)} \quad \text{matrice Jacobiana del terzo ordine}$$

$$X = \{(\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w)) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v, w) \in D\}$$

$$f(x, y, z) : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua in } X$$

la relazione $(x, y, z) = (\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w))$ e' una relazione biunivoca fra $F(X)$ e $F(D)$

allora

1. X e' un dominio regolare di $\mathbb{R}^3$, ed e' quindi limitato e misurabile

$$\begin{aligned} 2. \quad & \iiint_X f(x, y, z) \, dx dy dz \\ &= \iiint_D f(\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w)) \left| \det \left[\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u, v, w)} \right]_{(u, v, w)} \right| \, du dv dw \end{aligned}$$

questa e' la cosiddetta formula di cambio di variabili per integrali tripli.

□

Proposition 2.45. Siano $h > 0, 0 < r < R$, allora in ognuno dei seguenti casi:

Semicorona cilindrica di centro $(0, 0)$, raggi r, R e altezza h

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, \, y \geq 0, \, 0 \leq z \leq h\}, \quad D = [0, \pi] \times [r, R] \times [0, h]$$

Corona cilindrica di centro $(0, 0)$, raggi r, R e altezza h

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, \, 0 \leq z \leq h\}, \quad D = [0, 2\pi] \times [r, R] \times [0, h]$$

Cilindro di centro $(0, 0)$, raggio R e altezza h

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, \, 0 \leq z \leq h\}, \quad D = [0, 2\pi] \times [0, R] \times [0, h]$$

vale la seguente formula:

$$\iiint_X f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_D f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, z) \rho \, d\vartheta d\rho dz$$

dove $f(x, y, z) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e' una funzione continua in X .

Proof:

(1)1. $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, \, y \geq 0, \, 0 \leq z \leq h\}$

X puo' essere visto come l'insieme di semicorone circolari ognuna ad altezza

$0 \leq z \leq h$.

Adoperiamo le coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = z \end{cases} \quad (*)$$

che sono sostanzialmente le coordinate polari dotate di altezza.
Cerchiamo di applicare il teorema [2.44,pg.67], con

$$\begin{cases} \varphi_1(\rho, \vartheta, z) = \rho \cos \vartheta \\ \varphi_2(\rho, \vartheta, z) = \rho \sin \vartheta \\ \varphi_3(\rho, \vartheta, z) = z \end{cases} \quad (\rho, \vartheta, z) \in D$$

$$D = [0, \pi] \times [r, R] \times [0, h]$$

Abbiamo:

$$X = \{(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, z) \mid (\rho, \vartheta, z) \in D\}$$

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in C^1(D)$$

$$\begin{vmatrix} -\rho \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ \rho \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho \neq 0$$

La relazione (*) e' biunivoca tra $F(D)$ e $F(X)$, infatti: $F(D)$ e' la superficie del parallelepipedo D . Ad ogni faccia di D corrisponde una faccia della semicorona circolare X , ad esempio alla faccia $[0, \pi] \times [r, R] \times \{0\}$ corrisponde la semicorona circolare che sta' alla base di X .

Per il thm [2.44,pg.67] possiamo quindi affermare:

$$\iiint_X f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_D f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, z) \rho \, d\vartheta d\rho dz$$

□

Proposition 2.46. *Nei seguenti casi*

Corona sferica intersecata con il primo ottante dello spazio e con l'esterno del cono $x^2 + y^2 = z^2$

$$X = \{r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, \, x, y, z \geq 0, \, x^2 + y^2 \geq z^2\}$$

$$D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \times [r, R]$$

Corona sferica intersecata con il primo ottante dello spazio

$$D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [r, R]$$

Corona sferica

$$D = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [r, R]$$

Sfera

$$D = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, R]$$

si ha

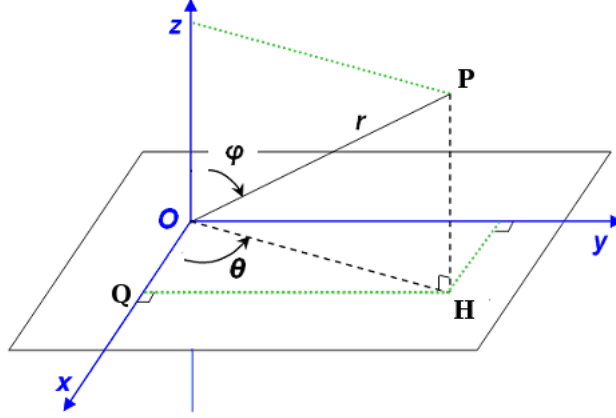
$$\iiint_X f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_D f(\rho \cos \vartheta \sin \varphi, \rho \sin \vartheta \sin \varphi, \rho \cos \varphi) \rho^2 |\sin \varphi| \, d\vartheta d\varphi d\rho$$

con $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in X

Proof: Basta usare le coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

φ si chiama *colatitudine* P , mentre ϑ *longitudine* di P . ρ e' il modulo del vettore OP .



e procedere come nel precedente esempio applicando il thm [2.44,pg.67], osservando che l'angolo del cono e' $\frac{\pi}{4}$ e quindi φ varia tra $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$, e che il determinante Jacobiano e'

$$-\rho^2 \sin \varphi$$

□

3 Integrale improprio

Definition 3.1. Sia $T \subseteq \mathbb{R}^n$, $f(x) : T \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $T \setminus E_f$, e non in E_f , dove $E_f \subseteq T$ e' un insieme finito.

I punti di E_f si chiamano *punti singolari*

Diremo che f e' *generalmente continua* in T

Definition 3.2. Sia $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ generalmente continua in T , con $T \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio misurabile. Sia

$$\mathcal{F}(T) = \{B \subseteq T \setminus E_f \mid \text{dominio limitato e misurabile}\}$$

l'insieme di tutti i domini di $T \setminus E_f$ limitati e misurabili.

f e' impropriamente integrabile secondo Riemann in $T \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists$ finito $\sup_{B \in \mathcal{F}(T)} \int_B |f(x)| dx$

Questa definizione e' ben posta perche' f essendo continua in $T \setminus E_f$, e' anche continua in ogni $B \in \mathcal{F}(T)$ e quindi esiste il suo integrale di Riemann in B .

Theorem 3.3. Se

1. $T \subseteq \mathbb{R}^n$ e' un dominio e misurabile
2. f, g sono generalmente continue in T , con $E = E_f = E_g$, ovvero hanno gli stessi punti singolari
3. $|g(x)| \leq |f(x)| \quad \forall x \in T \setminus E$
4. f impropriamente integrabile in T

allora

g e' impropriamente integrabile in T

Proof:

sia $B \in \mathcal{F}(T)$

f, g generalmente continue in $T \Rightarrow f, g$ continue in $B \subseteq T \setminus E \Rightarrow f, g$ integrabili in B

$$\begin{aligned} \begin{cases} f, g \text{ integrabili in } B \\ |g(x)| \leq |f(x)| \forall x \in B \subseteq T \setminus E \end{cases} &\Rightarrow \int_B |g(x)| dx \leq \int_B |f(x)| dx \leq \sup_{B \in \mathcal{F}(T)} \int_B |f(x)| dx = k \underbrace{\in}_{f \text{ improp. integr.}} \mathbb{R} \\ \int_B |g(x)| dx \leq k \quad \forall B \in \mathcal{F}(T) &\Rightarrow \sup_{B \in \mathcal{F}(T)} \int_B |g(x)| < +\infty \end{aligned}$$

□

Definition 3.4. Sia $T \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio misurabile e $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ generalmente continua in T .

Supponiamo che f sia impropriamente integrabile in T .

CASE: f e' non negativa in $T \setminus E_f$, ovvero $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in T \setminus E_f$

In questo caso, porremo:

$$\int_T f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{B \in \mathcal{F}(T)} \int_B |f(x)| dx$$

CASE: f e' di segno variabile

Poniamo

$$\int_T f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_T f_+(x) dx - \int_T f_-(x) dx = \int_T \frac{|f(x)| + f(x)}{2} dx - \int_T \frac{|f(x)| - f(x)}{2} dx$$

dove gli integrali al secondo membro sono integrali impropri.

Proof:

(1)1. Dimostriamo che queste definizioni hanno senso

⟨2⟩1. $f(x)$ non negativa

Poiche' f e' impropriamente integrabile in T , per definizione, il sup e' finito, quindi $\int_T f(x) dx$ e' un numero reale.

⟨2⟩2. $f(x)$ di segno variabile

Siano date le seguenti funzioni:

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} = \max(f(x), 0)$$

$$f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} = -\min(f(x), 0)$$

definite in $T \setminus E_f$. Si ha che:

$$0 \leq f_{\pm}(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in T \setminus E_f \quad (1)$$

infatti:

$$0 \leq f_+(x) \Leftrightarrow -f(x) \leq |f(x)| \text{ vera per le prop. del val. ass.}$$

$$0 \leq f_-(x) \Leftrightarrow f(x) \leq |f(x)|$$

$$f_+(x) \leq |f(x)| \Leftrightarrow f(x) \leq |f(x)|$$

$$f_-(x) \leq |f(x)| \Leftrightarrow -f(x) \leq |f(x)|$$

⟨3⟩1. Dimostriamo che $f_{\pm}$ sono impropriamente integrabili in T sfruttando il thm [3.3,pg.70]

Poiche' $f(x)$ e' improp. integrabile in T , anche $|f(x)|$ lo e' (segue immediatamente dalla definizione).

Vediamo che $E_{f_{\pm}} = E_f$:

Sia $P \in E_{f_{\pm}}$, se per ass. $P \notin E_f \Rightarrow f$ continua in $P \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)|$ continua in $P \Rightarrow f_{\pm}$ continua in $P \Rightarrow P \notin E_{f_{\pm}}$ assurdo

Sia $P \in E_f \Rightarrow P \notin T \setminus E_f \Rightarrow f_{\pm}$ non definita in P e quindi non continua in $P \Rightarrow P \in E_{f_{\pm}}$

Allora,

$$\begin{cases} |f(x)| \text{ generalmente continua e improp. integrabile in } T \\ |f_{\pm}(x)| \leq |f(x)| \quad \forall x \in T \setminus E \\ E_{f_{\pm}} = E_f \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f_{\pm}(x) \text{ improp. int. in } T$$

thm[3.3,pg.70]

Poiche' $f_{\pm}$ sono non negative, si applica la prima definizione, quindi ha senso considerare:

$$\int_T f_+(x) dx \text{ e } \int_T f_-(x) dx$$

□

Proposition 3.5. *La definizione di integrale improprio in T e' una generalizzazione dell'integrale di Riemann, infatti, se f e' continua in T e T e' limitato, allora le definizioni coincidono.*

Proof: Supponiamo f continua in T , ovvero f e' generalmente continua in T e $E_f = \emptyset$. Supponiamo che f sia impropriamente integrabile in T

CASE: f non negativa in $T \setminus E_f = T$

Per def di int. improp. si ha:

f continua $\Rightarrow T \setminus E_f = T$

$$\begin{cases} T \text{ dominio misurabile e limitato} \\ T \subseteq T = T \setminus E_f \end{cases} \Rightarrow T \in \mathcal{F}(T) \Rightarrow \int_T f(x) dx \leq \sup_{B \in \mathcal{F}(T)} \int_B f(x) dx$$

$$\begin{cases} B \subseteq T \\ f(x) \geq 0 \quad \forall x \in T \end{cases} \Rightarrow \int_B f(x) dx \leq \int_T f(x) dx \quad \forall B \in \mathcal{F}(T) \Rightarrow \sup_{B \in \mathcal{F}(T)} \int_B f(x) dx \leq \int_T f(x) dx$$

$$\int_T f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{B \in \mathcal{F}(T)} \int_B f(x) dx = \int_T f(x) dx$$

CASE: f di segno variabile

Avevamo gia' visto che

$$\int_T f_+(x) dx \text{ e } \int_T f_-(x) dx$$

sono integrali impropri. Ma $f_{\pm}$ sono funzioni non negative e inoltre continue in T , perche' $f, |f|$ sono continue in T . Allora, per quanto visto nel passo precedente, i loro integrali impropri coincidono con gli integrali. Ecco, che possiamo usare la proprieta' di additivita':

$$\begin{aligned} \int_T f(x) dx &\stackrel{\text{def}}{=} \int_T f_+(x) dx - \int_T f_-(x) dx = \\ &= \int_T \frac{|f(x)| + f(x)}{2} dx - \int_T \frac{|f(x)| - f(x)}{2} dx = \int_T \frac{|f(x)| + f(x) - |f(x)| + f(x)}{2} dx = \int_T f(x) dx \end{aligned}$$

□

Definition 3.6. Sia $T \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio misurabile e $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ generalmente continua in T .

La successione $\{T_n\}$ di domini limitati e misurabili t.c.

1. $T_n \subseteq T \setminus E_f \quad \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \{T_n\} \subseteq \mathcal{F}(T)$
2. $T_n \subseteq T_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
3. $H \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, $H \subseteq T \setminus E_f \Rightarrow \exists v \in \mathbb{N} : H \subseteq T_n \quad \forall n > v$

la diremo *successione di domini invadenti*.

La proprieta' 3. si chiama *proprietà di invadenza*. limitato.

Proposition 3.7. *Nelle ipotesi della precedente definizione:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{mis } T_n = \text{mis } T$$

Theorem 3.8.

$$\left\{ \begin{array}{l} T \subseteq \mathbb{R}^n \text{ dominio misurabile} \\ f : T \longrightarrow \mathbb{R} \text{ generalmente continua in } T \\ \{T_n\} \text{ successione di domini invadenti} \\ f \text{ impropriamente integrabile in } T \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{T_n} f(x) dx = \int_T f(x) dx$$

Nota: gli integrali su T_n sono degli integrali usuali, perche' f e' continua in $T_n \subseteq T \setminus E_f$ e T_n e' limitato. Invece, l'integrale al secondo membro e' un integrale improprio.

Nota: Questo teorema e' utile per calcolare effettivamente l'integrale improprio: se f e' impropriamente integrabile, basta trovare una opportuna successione invadente e calcolare il limite.

Theorem 3.9. *Teorema della media per integrali impropri.*

$$\left\{ \begin{array}{l} T \subseteq \mathbb{R}^n \text{ dominio misurabile} \\ f : T \longrightarrow \mathbb{R} \text{ generalmente continua in } T \\ f \text{ limitata in } T \setminus E_f \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1. f \text{ e' impropriamente integrabile in } T \\ 2. m \text{ mis } T \leq \int_T f(x) dx \leq M \text{ mis } T \end{array} \right.$$

dove $m = \inf_{x \in T \setminus E_f} f(x)$, $M = \sup_{x \in T \setminus E_f} f(x)$

Proof:

(1)1. Dim 1.

$$B \in \mathcal{F}(T)$$

$$f \text{ e' impropriamente integrabile in } T \Rightarrow f \text{ continua in } B \subseteq T \setminus E_f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)| \text{ e' continua in } B \Rightarrow \exists \int_B |f(x)| dx$$

$$f \text{ limitata in } B \subseteq T \setminus E_f \Rightarrow |f(x)| \leq L \quad \forall x \in B \Rightarrow \int_B |f(x)| dx \leq \int_B L dx = L \text{ mis } B \leq$$

$$\underbrace{\leq}_{B \subseteq T} L \text{ mis } T \quad \forall B \in \mathcal{F}(T)$$

$$\int_B |f(x)| dx \leq L \text{ mis } T \quad \forall B \in \mathcal{F}(T) \Rightarrow \sup_{B \in \mathcal{F}(T)} \int_B |f(x)| dx \leq L \text{ mis } T < +\infty$$

e quindi f e' impropriamente integrabile in T .

(1)2. Dim 2.

Consideriamo una successione di domini invadenti $\{T_n\}$. Si ha

$$f \text{ continua in } T \setminus E_f \xRightarrow{T_n \subseteq T \setminus E_f} \Rightarrow f \text{ continua in } T_n \quad (1)$$

$$\begin{cases} f \text{ continua in } T_n \\ T_n \text{ dominio limitato e misurabile} \end{cases} \Rightarrow \exists \int_{T_n} f(x) dx$$

$$\xRightarrow{\text{thm della media [2.1.2,pg.45]}} m_n \text{ mis } T_n \leq \int_{T_n} f(x) dx \leq M_n \text{ mis } T_n$$

$$\text{dove } m_n = \inf_{x \in T_n} f(x), \quad M_n = \sup_{x \in T_n} f(x)$$

$$T_n \subseteq T \setminus E_f \subseteq T \Rightarrow m_n \geq m, \quad M_n \leq M \Rightarrow m \text{ mis } T_n \leq m_n \text{ mis } T_n \leq \int_{T_n} f(x) dx \leq M_n \text{ mis } T_n \leq M \text{ mis } T_n$$

$$m \text{ mis } T_n \leq \int_{T_n} f(x) dx \leq M \text{ mis } T_n$$

allora, prendendo i limiti per $n \rightarrow +\infty$, e usando la prop. [3.7,pg.73] e il thm [3.8,pg.73], si ha:

$$m \text{ mis } T \leq \int_T f(x) dx \leq M \text{ mis } T$$

che e' la tesi.

□

3.1 Integrale generalizzato

Studieremo l'integrabilita' secondo Riemann per funzioni generalmente continue.

Definition 3.10. Sia $T \subseteq \mathbb{R}^n$, dominio misurabile, e $f : T \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \text{ e' generalmente integrabile} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f \text{ e' impropriamente integrabile} \\ T \text{ e' limitato} \end{cases}$$

Poiche' gli integrali generalizzati sono un caso particolare di quelli impropri, tutti i teoremi degli integrali impropri valgono anche per quelli generalizzati.

Theorem 3.11. Condizione di integrabilita'.

Dato $T \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio limitato e misurabile,
 f generalmente continua in T , con $E_f = \{P_0\}$

$$\exists h, \alpha \in \mathbb{R} : h > 0, \quad 0 < \alpha < n \text{ tale che } |f(x)| \leq \frac{h}{(d_e(x, P_0))^\alpha} \quad \forall x \in T \setminus \{P_0\}$$

$$\Rightarrow f \text{ e' generalmente integrabile in } T$$

Proof:

$$f(x) \text{ gen. cont.} \Rightarrow |f(x)| \text{ gen. cont.}$$

$$H(P) = \frac{h}{(d_e(P, P_0))^\alpha} \quad \forall P \in T \setminus \{P_0\}$$

$$|f(x)| \leq H(x) \quad \forall x \in T \setminus \{P_0\}$$

Allora, per il thm [3.3,pg.70], basta dimostrare che $H(x)$ e' generalmente integrabile in T per ottenere la tesi.

⟨2⟩1. Dimostriamo che $H(x)$ e' generalmente integrabile in T .

PROOF SKETCH: Quello che faremo e' considerare un $B \in \mathcal{F}(T)$,

trovare una corona circolare che includa B , in modo tale da poter usare le formule per le coordinate polari nel calcolo di $\int_B H(x) dx$.

Fatto cio', vedremo che $\int_B H(x) dx$ e' minore di una certa costante indipendente da B . Quindi il $\sup_{B \in \mathcal{F}(T)} \int_B H(x) dx$ sara' finito, e la tesi acquisita.

T limitato $\Rightarrow \exists R > 0 : I(P_0, R) \supseteq T$

$B \in \mathcal{F}(T) \Rightarrow B$ dominio $\Rightarrow B$ chiuso

$\begin{cases} B \text{ chiuso} \\ \{P_0\} = E_f \Rightarrow P_0 \notin B \end{cases} \Rightarrow d(B, \{P_0\}) > 0$,infatti, se per ass. $d(B, \{P_0\}) = 0$
 $\underbrace{\Rightarrow}_{[\text{CII}, 3.2, \text{pg. } 37]} P_0 \in B$ assurdo

$d(B, \{P_0\}) > 0 \Rightarrow 0 < \inf \{d(b, P_0) \mid b \in B\}$
 allora scelto $0 < r < \inf \{d(b, P_0) \mid b \in B\}$, si ha
 $I(P_0, r) \cap B = \emptyset$ (1)

Infine notiamo che

$B \subseteq T \subseteq I(P_0, R) \Rightarrow r < R$

infatti, se per assurdo $r \geq R \Rightarrow I(P_0, r) \supseteq I(P_0, R) \supseteq T \supseteq B \Rightarrow I(P_0, r) \cap B = B$ assurdo contro (1)

Consideriamo allora la corona circolare di raggi r, R e centro P_0 :

$$C = \{P \in \mathbb{R}^n \mid r \leq d_e(P, P_0) \leq R\}$$

Si ha che $B \subseteq C$, infatti,

$$P \in B \subseteq I(P_0, R) \Rightarrow d(P, P_0) < R$$

$$(1) \Rightarrow P \notin I(P_0, r) \Rightarrow d(P, P_0) \geq r$$

allora, per le proprieta' degli integrali (vedi [2.20, pg. 49]), si ha

$$B \subseteq C \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{thm}[2.20, \text{pg. } 49]} \int_B H(x) dx \leq \int_C H(x) dx$$

⟨3⟩1. Calcoliamo $\int_C H(x) dx$

Dimostriamo per $n = 2$, ovvero ci poniamo in $\mathbb{R}^2$.

Trasliamo gli assi cartesiani in modo tale che P_0 diventi l'origine, o in altre parole, trasliamo C in O :

Sia $P_0 = (x_0, y_0)$

$$\begin{cases} x - x_0 = \bar{x} \\ y - y_0 = \bar{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \bar{x} + x_0 \\ y = \bar{y} + y_0 \end{cases}$$

Utilizziamo la formula di cambiamento di variabile (vedi [2.39,pg.61]):

$$\begin{cases} x = \varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} + x_0 \\ y = \psi(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y} + y_0 \end{cases}$$

$C' =$ la corona C traslata $= \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid r \leq d_e((\bar{x}, \bar{y}), (0, 0)) \leq R\}$

Il det. Jacobiano e' $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$$\int_C H(x, y) \, dxdy = \int_{C'} H(\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0) \, d\bar{x}d\bar{y} \quad \underbrace{=}_{C' \text{ e' simmetrica}} = 2 \int_{C'_+} H(\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0) \, d\bar{x}d\bar{y}$$

con $C'_+ = C' \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$

$$2 \int_{C'_+} H(\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0) \, d\bar{x}d\bar{y} \quad \underbrace{=}_{\text{formule polari [2.40,pg.62]}} = 2 \int_D H(\rho \cos \vartheta + x_0, \rho \sin \vartheta + y_0) \rho \, d\vartheta d\rho =$$

$$= 2h \int_D \frac{1}{\left(\sqrt{(\rho \cos \vartheta + x_0 - x_0)^2 + (\rho \sin \vartheta + y_0 - y_0)^2}\right)^\alpha} \rho \, d\vartheta d\rho = 2h \int_D \rho^{1-\alpha} \, d\vartheta d\rho =$$

$$\underbrace{=}_{D=[0,\pi] \times [r,R]} 2h \int_0^\pi d\vartheta \int_r^R \rho^{1-\alpha} \, d\rho = 2h \int_0^\pi \left[\frac{\rho^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right]_r^R d\vartheta =$$

$$= \frac{2h\pi}{2-\alpha} (R^{2-\alpha} - r^{2-\alpha})$$

$$\int_C H(x, y) \, dxdy = \frac{2h\pi}{2-\alpha} (R^{2-\alpha} - r^{2-\alpha}) \quad \underbrace{\leq}_{r < R, \alpha < 2} \frac{2h\pi}{2-\alpha} R^{2-\alpha} = k$$

Quindi abbiamo dimostrato che

$$\forall B \in \mathcal{F}(T) \quad \int_B H(x) \, dx \leq \int_C H(x) \, dx \leq k$$

dove k dipende solo da R , quindi non dipende da B . Percio':

$$\sup_{B \in \mathcal{F}(T)} \int_B H(x) \, dx \leq k < +\infty$$

□

Theorem 3.12. *Criterio di non integrabilita'.*

Dato $T \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio limitato e misurabile,
 f generalmente continua in T , con $E_f = \{P_0\}$

$$\exists h, \alpha \in \mathbb{R} : h > 0, \alpha \geq n \text{ tale che } |f(x)| \geq \frac{h}{(d_e(x, P_0))^\alpha} \quad \forall x \in T \setminus \{P_0\}$$

$\Rightarrow f$ **non** e' generalmente integrabile in T

Proof:

Poniamo

$$H(P) = \frac{h}{(d_e(P, P_0))^\alpha} \quad \forall P \in T \setminus \{P_0\}$$

(1)1. Dimostriamo per $n = 2$

CASE: $\alpha > 2$

Supponiamo per assurdo che f sia generalmente integrabile, allora

$$\frac{h}{(d_e(P, P_0))^\alpha} = \left| \frac{h}{(d_e(P, P_0))^\alpha} \right| \leq |f(x, y)| \quad \forall (x, y) \in T \setminus E_f$$

$$\stackrel{\text{thm}[3.3, \text{pg.70}]}{\Rightarrow} \frac{h}{(d_e(P, P_0))^\alpha} \text{ e' generalmente integrabile}$$

Poiche' T e' un dominio, possiede punti interni. Supponiamo che $P_0 \in T^\circ$. E' allora lecito considerare un cerchio $I(P_0, R) \subseteq T$.

Sia $r > 0$: $I(P_0, r) \subsetneq I(P_0, R - \varepsilon)$, dove $\varepsilon > 0$ e' tale che $r < R - \varepsilon$, e sia infine C la corona circolare di centro P_0 e raggi r, R :

$$C = \{P \in \mathbb{R}^n \mid r \leq d_e(P, P_0) \leq R - \varepsilon\}$$

$$C \subseteq I(P_0, R) \subseteq T$$

$$\begin{cases} C \subseteq T \\ P_0 \notin C \\ C \text{ e' un dominio limitato e misurabile} \end{cases} \Rightarrow C \in \mathcal{F}(T)$$

$$C \in \mathcal{F}(T) \Rightarrow \int_C H(x, y) \, dxdy \leq \sup_{B \in \mathcal{F}(T)} \int_B H(x, y) \, dxdy \quad (1)$$

Calcoliamo allora $\int_C H(x, y) \, dxdy$: ripercorrendo la stessa parte della dimostrazione del teorema [3.11, pg.74] che riguardava l'integrabilita' di $H(x)$ (alla fine del passo <3>.1), arriviamo a:

$$\int_C H(x, y) \, dxdy = \frac{2h\pi}{2-\alpha} (R^{2-\alpha} - r^{2-\alpha}) = 2h\pi \left(\frac{R^{2-\alpha} - r^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right)$$

stavolta pero' $\alpha > 2$ e quindi

$$\int_C H(x, y) \, dxdy = 2h\pi \left(\frac{R^{2-\alpha} - r^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right) = 2h\pi \left(\frac{\frac{1}{r^{\alpha-2}} - R^{2-\alpha}}{\alpha-2} \right)$$

e prendendo i limiti per $r \rightarrow 0$ abbiamo

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_C H(x, y) \, dxdy = +\infty$$

e quindi prendendo i limiti nella (1) deduciamo che il sup non e' finito, e questo e' in contrasto con l'ipotesi che $H(x, y)$ sia integrabile: assurdo.

CASE: $\alpha = 2$

Procediamo come prima. In questo caso si arriva pero' a:

$$\int_C H(x, y) \, dxdy = 2h\pi \log \frac{R}{r}$$

e anche in questo caso prendendo il limite per $r \rightarrow 0$ si arriva all'assurdo.

Resta solo da dimostrare il caso in cui $P_0 \in F(T)$. $\square$

3.2 Integrale illimitato

Studieremo l'integrabilita' secondo Riemann per funzioni continue definite in T non limitato.

Definition 3.13. Sia $T \subseteq \mathbb{R}^n$, dominio misurabile, e $f : T \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \text{ e' illimitatamente integrabile} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f \text{ e' impropriamente integrabile} \\ f \text{ e' continua in } T, \text{ ovvero } E_f = \emptyset \\ T \text{ e' } \mathbf{non} \text{ limitato} \end{cases}$$

Poiche' gli integrali illimitati sono un caso particolare di quelli impropri, tutti i teoremi degli integrali impropri valgono anche per quelli illimitati.

Theorem 3.14. Condizione di integrabilita'.

Dato $T \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio non limitato e misurabile,
 f continua in T ,

$\exists h, \alpha, \bar{r} \in \mathbb{R} : h, \bar{r} > 0, \alpha > n$, tale che

$$|f(x)| \leq \frac{h}{(d_e(x, O))^\alpha} \quad \forall x \in T \setminus I(O, \bar{r})$$

$$\Rightarrow f \text{ e' illimitatamente integrabile in } T$$

dove con O indichiamo l'origine di $\mathbb{R}^n$, ovvero $(0, 0, \dots, 0)$, con d_e la distanza euclidea, e con $I(O, r)$ un intorno di raggio r di O .

Proof:

Poniamo $H(P) = \frac{h}{(d_e(P, O))^\alpha}$

(1)1. Dimostriamo il thm in $\mathbb{R}^2$, supponendo che $I(O, \bar{r}) \not\subseteq T$

Procediamo in modo analogo alla dimostrazione del thm [3.11,pg.74].

Consideriamo $B \in \mathcal{F}(T)$. Sia $P_0 = O$. Poiche' $O \notin T$, $P_0 \notin B$.

Poiche' B e' limitato, $\exists R > 0 : I(P_0, R) \supseteq B$

Poiche' B e' chiuso, come visto nella dim. del thm [3.11,pg.74], $\exists r > 0 : I(P_0, r) \cap B = \emptyset$.

Sia allora C la corona circolare di centro P_0 con raggi r, R . C contiene B .

Poiche' $\alpha > 2$, cosi' come fatto nella dim del thm [3.12,pg.76], arriviamo a:

$$\int_C H(x, y) \, dxdy = 2h\pi \left(\frac{\frac{1}{r^{\alpha-2}} - \frac{1}{R^{\alpha-2}}}{\alpha - 2} \right)$$

allora, prendendo i limiti per $r \rightarrow \bar{r}$ e per $R \rightarrow +\infty$, abbiamo:

$$\lim_{r \rightarrow \bar{r}, R \rightarrow +\infty} \int_C H(x, y) \, dxdy = 2h\pi \frac{1}{(\alpha - 2)\bar{r}^{\alpha-2}} = k \in \mathbb{R}$$

k e' indipendente da B .

$$B \subseteq C \Rightarrow \int_B H(x, y) \, dxdy \leq \int_C H(x, y) \, dxdy \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{prendendo i limiti}} \int_B H(x, y) \, dxdy \leq k$$

In conclusione, per l'arbitrarieta' di B abbiamo dimostrato che

$$\forall B \in \mathcal{F}(T) \quad \int_B H(x, y) \, dxdy \leq k$$

e quindi

$$\sup_{B \in \mathcal{F}(T)} \int_B H(x, y) \, dxdy \leq k$$

quindi $H(x, y)$ e' illimitatamente integrabile in T .

(1)2. Q.E.D.

$$\begin{cases} |f(x)| \leq H(x) = |H(x)| \quad \forall x \in T \\ H(x) \text{ illimitatamente integrabile in } T \end{cases} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{thm}[3.3,pg.70]} f \text{ e' illimitatamente integrabile in } T$$

□

Theorem 3.15. Criterio di non integrabilita'.

Dato $T \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio non limitato e misurabile,

f continua in T ,

$\exists h, \alpha, \bar{r} \in \mathbb{R} : h, \bar{r} > 0, 0 < \alpha \leq n$, tale che

$$|f(x)| \geq \frac{h}{(d_e(x, O))^\alpha} \quad \forall x \in T \setminus I(O, \bar{r})$$

$\Rightarrow f$ **non** e' illimitatamente integrabile in T

4 Integrali curvilinei

Definition 4.1. In $\mathbb{R}^3$ (ma analogamente in $\mathbb{R}^n$), sia

1. γ una curva sghemba regolare
- 2.

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

una sua rappresentazione parametrica da cui si evince che e' regolare

3. $f : \gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in γ

allora definiamo l'*integrale curvilineo* esteso alla curva regolare γ della funzione f :

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds \stackrel{\text{def}}{=} \int_{[a, b]} f(x(t), y(t), z(t)) H(t) dt$$

dove $H(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$

L'integrale a II membro esiste perche' la funzione integranda e' composizione e prodotto di funzioni continue.

Si puo' dimostrare che l'integrale a II membro e' indipendente dalla scelta della rappresentazione parametrica di γ .

Proposition 4.2. Valgono alcune proprieta' degli integrali estesi. Sia

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

di rappresentazione parametrica regolare e sia $f : \gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in γ .

1. Prop. di additivita': preso un $c \in]a, b[$ e considerando le curve

$$\begin{aligned} \gamma_1 : (x(t), y(t), z(t)) \quad t \in [a, c] \\ \gamma_2 : (x(t), y(t), z(t)) \quad t \in [c, b] \end{aligned}$$

la cui unione e' γ , si ha

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds = \int_{\gamma_1} f(x, y, z) ds + \int_{\gamma_2} f(x, y, z) ds$$

2. Prop. distributiva:

$$\int_{\gamma} \alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z) ds = \alpha \int_{\gamma} f(x, y, z) ds + \beta \int_{\gamma} g(x, y, z) ds$$

dove $f, g : \gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ sono continue in γ .

3. Teorema della media:

$$ml(\gamma) \leq \int_{\gamma} f(x, y, z) ds \leq Ml(\gamma)$$

dove

$l(\gamma)$ e' la lunghezza di γ , che essendo regolare, per il thm [1.15,pg.7] e'

$$l(\gamma) = \int_{[a,b]} H(t) dt = \int_{[a,b]} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

$$m = \min f(\gamma), \quad M = \max f(\gamma)$$

Proof: Le prime due proprieta' si dimostrano immediatamente rifacendosi alla definizione e alle proprieta' degli integrali estesi.

Dimostriamo il teorema della media.

Per definizione di m e M abbiamo

$$m \leq f(x(t), y(t), z(t)) \leq M$$

$$mH(t) \leq f(x(t), y(t), z(t))H(t) \leq MH(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

da cui usando la proprieta' [AII,1.20,pg.16] degli integrali estesi, che deriva dal thm della media degli integrali estesi, si ha:

$$\int_{[a,b]} mH(t) dt \leq \int_{[a,b]} f(x(t), y(t), z(t))H(t) dt \leq \int_{[a,b]} MH(t) dt$$

$$m \int_{[a,b]} H(t) dt \leq \int_{\gamma} f(x, y, z) ds \leq M \int_{[a,b]} H(t) dt$$

$$ml(\gamma) \leq \int_{\gamma} f(x, y, z) ds \leq Ml(\gamma)$$

□

Definition 4.3. In $\mathbb{R}^3$ (ma analogamente in $\mathbb{R}^n$), sia

1. γ una curva sghemba generalmente regolare, oppure generalmente regolare e chiusa

2.

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ curve regolari t.c.

$$\bigcup_{i=1}^n \gamma_i = \gamma$$

$$\gamma_i \cap \gamma_j \subseteq \{C_{i-1}, C_i, C_{j-1}, C_j\} \quad \text{per } i \neq j$$

C_{i-1}, C_i sono gli estremi di γ_i

C_{j-1}, C_j sono gli estremi di γ_j

ovvero, γ_i, γ_j hanno in comune al piu' i loro estremi

una sua rappresentazione parametrica da cui si evince che e' gen. reg. oppure gen. reg. chiusa. Poiche' γ e' gen. reg., le varie γ_i esistono per definizione.

3. $f : \gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in γ

allora definiamo l'*integrale curvilineo* esteso alla curva generalmente regolare γ della funzione f :

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds \stackrel{\text{def}}{=} \oint_{\gamma} f(x, y, z) ds \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(x, y, z) ds$$

Questo integrale appena definito si chiama anche *circuitazione* di f su γ . Si puo' dimostrare che e' indipendente dalla particolare scelta delle varie γ_i .

Proposition 4.4. *Valgono le stesse proprieta' viste in [4.2, pg. 79]*

4.1 Baricentro e momento curvilinei

Definition 4.5. Data Γ curva sghemba, generalmente regolare semplice oppure generalmente regolare semplice e chiusa, si definisce il suo baricentro P_0 :

$$\begin{aligned} P_0 &= (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \\ x_0 &= \frac{\int_{\gamma} x dx dy}{l(\gamma)} \\ y_0 &= \frac{\int_{\gamma} y dx dy}{l(\gamma)} \\ z_0 &= \frac{\int_{\gamma} z dx dy}{l(\gamma)} \end{aligned}$$

dove $l(\gamma)$ e' la lunghezza di γ che esiste perche' essa e' rettificabile. Se consideriamo la densita' di massa variabile, espressa dalla funzione

$$\mu(x, y, z) : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

avremo

$$\begin{aligned} P_0 &= (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \\ x_0 &= \frac{\int_{\gamma} x \mu(x, y, z) dx dy dz}{M} \\ y_0 &= \frac{\int_{\gamma} y \mu(x, y, z) dx dy dz}{M} \\ z_0 &= \frac{\int_{\gamma} z \mu(x, y, z) dx dy dz}{M} \\ M &= \int_{\gamma} \mu(x, y, z) dx dy dz \text{ massa totale} \end{aligned}$$

Se $\mu(X) = \{1\}$, si ricava la definizione data prima.

Definition 4.6. Data Γ curva sghemba, generalmente regolare semplice oppure generalmente regolare semplice e chiusa, si definisce il suo momento di inerzia rispetto ad una retta r , o ad un punto Q detto polo, il seguente numero reale non negativo:

$$I = \int_{\gamma} \delta^2(x, y, z) \, dx dy dz$$

$$\delta(P) = d(P, Q) : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad \vee \quad \delta(P) = d(P, r) : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

Se consideriamo la densita' di massa variabile, espressa dalla funzione

$$\mu(x, y, z) : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

avremo

$$I = \int_{\gamma} \delta^2(x, y, z) \mu(x, y, z) \, dx dy dz$$

Example 4.7. In particolare il momento di inerzia rispetto all'asse $\vec{x}$ e':

$$d((x, y, z), \vec{x}) = \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$I_{\vec{x}} = \int_{\gamma} y^2 + z^2 \, dx dy dz$$

rispetto agli altri assi:

$$I_{\vec{y}} = \int_{\gamma} x^2 + z^2 \, dx dy dz$$

$$I_{\vec{z}} = \int_{\gamma} y^2 + x^2 \, dx dy dz$$

rispetto all'origine:

$$I_O = \int_{\gamma} x^2 + y^2 + z^2 \, dx dy dz$$

Usando la prop. distributiva degli integrali curvilinei, si ha:

$$I_O = \frac{1}{2} (I_{\vec{x}} + I_{\vec{y}} + I_{\vec{z}})$$

5 Forme differenziali lineari

Definition 5.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, $\Omega \neq \emptyset$, aperto.

La seguente espressione,

$$X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz$$

che indichiamo brevemente con ω , si chiama *forma differenziale lineare* in Ω , nelle variabili X, Y, Z . Dove X, Y, Z sono le seguenti funzioni:

$$X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Stabiliamo che

$$\omega \text{ e' di classe } C^k(\Omega) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} X, Y, Z \in C^k(\Omega)$$

e infine

$$\omega \text{ e' esatta o integrabile } \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists F(x, y, z) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } \begin{cases} \exists F_x(x, y, z) = X(x, y, z) \\ \exists F_y(x, y, z) = Y(x, y, z) \\ \exists F_z(x, y, z) = Z(x, y, z) \end{cases} \quad \forall (x, y, z) \in \Omega$$

F si chiama *primitiva* della forma differenziale ω .

Analogamente si possono ridare queste definizioni in $\mathbb{R}^n$.

Proposition 5.2. *Sia ω una forma differenziale lineare esatta in Ω . Si ha*

$$\begin{cases} F(x, y, z) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ e' una primitiva di } \omega \\ \exists c \in \mathbb{R} : G(x, y, z) = F(x, y, z) + c \end{cases} \Rightarrow G, F \text{ sono primitive di } \omega \text{ in } \Omega$$

o equivalentemente

$$F(x, y, z) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ e' una primitiva di } \omega \Rightarrow F(x, y, z) + c \text{ e' una primitiva di } \omega$$

Il viceversa vale pero' sotto opportune ipotesi.

Proof:

(1)1. La proposizione e' diretta conseguenza della definizione e delle proprieta' di derivazione: $D_x[F(x, y, z) + c] = F_x(x, y, z)$. Diamo perciò un controesempio per vedere che il viceversa non vale .

Sia

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$$

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = \frac{x}{y} : T \longrightarrow \mathbb{R}$$

e consideriamola come la primitiva di una forma differenziale ω : calcoliamo quindi le sue derivate parziali per trovare $X(x, y), Y(x, y)$:

$$X(x, y) = F_x(x, y) = \frac{1}{y} : T \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$Y(x, y) = F_y(x, y) = -\frac{x}{y^2} : T \longrightarrow \mathbb{R}$$

Un'altra primitiva di ω e' la funzione

$$G(x, y) = \begin{cases} F(x, y) + 1 & (x, y) \in \Omega_1 \\ F(x, y) + 2 & (x, y) \in \Omega_2 \end{cases}$$

G e F non differiscono di una costante, infatti,

$$G(x, y) - F(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in \Omega_1$$

$$G(x, y) - F(x, y) = 2 \quad \forall (x, y) \in \Omega_2$$

□

Proposition 5.3. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, $\Omega \neq \emptyset$, Ω aperto, e inoltre Ω internamente connesso, e data ω forma differenziale lineare esatta in Ω , si ha

$$\begin{cases} F(x, y, z) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ e' una primitiva di } \omega \\ \exists c \in \mathbb{R} : G(x, y, z) = F(x, y, z) + c \end{cases} \Leftrightarrow G, F \text{ sono primitive di } \omega \text{ in } \Omega$$

Quindi, in questo caso, l'insieme di tutte e' sole le primitive di ω e':

$$\int \omega = \int X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz \stackrel{\text{def}}{=} \{F(x, y, z) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

dove $F(x, y, z)$ e' una qualsiasi primitiva di ω .

Proof:

(1)1. L'implicazione $\Rightarrow$ e' stata gia' vista nella prop. [5.2,pg.83]. Dimostriamo il viceversa.

$$F \text{ primitiva di } \omega \text{ in } \Omega \Rightarrow \begin{cases} \exists F_x(x, y, z) = X(x, y, z) \\ \exists F_y(x, y, z) = Y(x, y, z) \\ \exists F_z(x, y, z) = Z(x, y, z) \end{cases} \quad \forall (x, y, z) \in \Omega$$

d'altronde, le derivate di $G(x, y, z)$ sono le stesse di $F(x, y, z)$, ovvero G ed F hanno lo stesso gradiente, allora

$$\begin{cases} \text{grad} F(x, y, z) = \text{grad} G(x, y, z) \forall (x, y, z) \in \Omega \\ \Omega \text{ aperto non vuoto internamente connesso} \end{cases} \xRightarrow{\text{cor [AII,9.9,pg.103]}} \exists c \in \mathbb{R} : F(x, y, z) - G(x, y, z) = c \text{ in } \Omega$$

□

Proposition 5.4. Sia Ω un aperto e sia ω una f.d.l esatta in Ω e sia ω di classe $C^0(\Omega)$.

F e' una primitiva di $\omega \Rightarrow F$ e' differenziabile in Ω

Proof:

Ω di classe $C^0(\Omega) \Leftrightarrow X, Y, Z \in C^0(\Omega)$ (*)

$$F \text{ primitiva di } \omega \text{ in } \Omega \Rightarrow \begin{cases} \exists F_x(x, y, z) = X(x, y, z) \\ \exists F_y(x, y, z) = Y(x, y, z) \\ \exists F_z(x, y, z) = Z(x, y, z) \end{cases} \quad \forall (x, y, z) \in \Omega \xRightarrow{(*)} F_x, F_y, F_z \in C^0(\Omega)$$

$$\xRightarrow{[AII,9.3,pg.96]} F \text{ e' differenziabile in } \Omega$$

□

Example 5.5.

$$\int \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + c$$

Example 5.6. Esempio di forma differenziale lineare non esatta.

$$\omega = ydx + 0dy, \quad \Omega = \mathbb{R}^2$$

Supponiamo per assurdo che $F(x, y)$ sia una primitiva di ω , allora

$$\begin{cases} F_x(x, y) = y \\ F_y(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{xy}(x, y) = 1 \\ F_{yx}(x, y) = 0 \end{cases}$$

Ma per il thm sull'invertibilit  dell'ordine di derivazione di Schwartz (vedi [AII, 9.1, pg. 93]), si ha:

$$F_{xy}(x, y) = F_{yx}(x, y) \Leftrightarrow 1 = 0$$

assurdo. □

5.1 Integrale curvilineo della f.d.l.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, $\Omega \neq \emptyset$, aperto, e siano X, Y, Z le seguenti funzioni:

$$X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

continue in Ω , ovvero $X, Y, Z \in C^0(\Omega)$.

La forma diff. lin. ω

$$\omega = X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz$$

e' quindi di classe $C^0(\Omega)$.

Definition 5.7. γ regolare

Sia

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

la rappresentazione parametrica da cui si evince che γ e' una curva sghemba regolare. Supponiamo inoltre che $\gamma \subseteq \Omega$, allora poniamo

$$\begin{aligned} (\gamma) \int_A^B \omega &= (\gamma) \int_A^B X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b [X(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + Z(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt \end{aligned}$$

dove $A = (x(a), y(a), z(a))$, $B = (x(b), y(b), z(b))$ sono gli estremi di γ

Definition 5.8. γ generalmente regolare semplice

Sia

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

la rappresentazione parametrica da cui si evince che γ e' una curva sghemba generalmente regolare e semplice. Supponiamo che $\gamma \subseteq \Omega$.

Essendo γ generalmente regolare, esistono $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ curve regolari tali che

$$\gamma = \bigcup_{i=1}^r \gamma_i$$

allora poniamo

$$(\gamma) \int_A^B \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^r (\gamma_i) \int_{C_{i-1}}^{C_i} \omega$$

dove $A = (x(a), y(a), z(a))$, $B = (x(b), y(b), z(b))$ sono gli estremi di γ
 C_{i-1} , C_i sono gli estremi di γ_i

Definition 5.9. γ generalmente regolare semplice chiusa

Sia

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

la rappresentazione parametrica da cui si evince che γ e' una curva sghemba generalmente regolare semplice e chiusa. Supponiamo che $\gamma \subseteq \Omega$.

Essendo γ generalmente regolare, esistono $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ curve regolari tali che

$$\gamma = \bigcup_{i=1}^r \gamma_i$$

Stavolta pero' $A = B$. Scegliamo allora un verso di percorrenza, ad esempio quello delle t crescenti, e poniamo

$$\int_{+\gamma} \omega = \int_{+\gamma} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^r (\gamma_i) \int_{C_{i-1}}^{C_i} \omega$$

dove il vettore $\overrightarrow{C_{i-1}C_i}$ e' positivo secondo il verso fissato su γ

$$C_0 = C_r$$

Proposition 5.10. *Proprieta' di additivita'.*

Nelle ipotesi della definizione [5.8,pg.85], o della [5.9,pg.86], preso un punto $C = (x(c), y(c), z(c))$, $c \in]a, b[$, si ha

$$(\gamma) \int_A^B \omega = (\gamma_1) \int_A^C \omega + (\gamma_2) \int_C^B \omega$$

dove $\gamma_1 = \{(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in [a, c]\}$, $\gamma_2 = \{(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in [c, b]\}$

Proposition 5.11. *Sia ω una forma diff. lin. in Ω , nei coefficienti X, Y, Z . Si ha*

$$\begin{cases} \omega \text{ di classe } C^0(\Omega) \\ \omega \text{ esatta} \\ \gamma \subseteq \Omega \text{ curva gen. reg. semp. di estremi } A, B \end{cases} \Rightarrow (\gamma) \int_A^B \omega = F(B) - F(A)$$

dove $F(x, y, z) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e' una qualsiasi primitiva di ω .

Proof:

(1)1. Supponiamo inizialmente che γ si regolare

Sia $\gamma = \{(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in [a, b]\}$ una rapp. param. da cui si evince che γ e' regolare. Quindi

$$B = (x(b), y(b), z(b)), A = (x(a), y(a), z(a))$$

$$x, y, z \in C^1([a, b]) \Rightarrow x, y, z \text{ sono derivabili in } [a, b] \quad (1)$$

$$\omega \text{ esatta} \Rightarrow \exists F(x, y, z) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ primitiva di } \omega \Rightarrow \begin{cases} \exists F_x(x, y, z) = X(x, y, z) \\ \exists F_y(x, y, z) = Y(x, y, z) \\ \exists F_z(x, y, z) = Z(x, y, z) \end{cases} \quad \forall (x, y, z) \in \Omega \quad (2)$$

$$\begin{cases} \omega \text{ di classe } C^0(\Omega) \\ \omega \text{ esatta} \end{cases} \xRightarrow{\text{[5.4,pg.84]}} F \text{ differenziabile in } \Omega \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (\gamma) \int_A^B \omega &= \int_a^b [X(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + Z(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt = \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_a^b [F_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \dots + F_z(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt = \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_a^b D[F(x(t), y(t), z(t))] dt = F(x(b), y(b), z(b)) - F(x(a), y(a), z(a)) = F(B) - F(A) \end{aligned}$$

(*) Per il thm di derivazione di funzioni composte (vedi [AII,9.4,pg.97]). Per la (1) e (3) e poiche' $\gamma \subseteq \Omega$, le ipotesi sono rispettate.

(1)2. Supponiamo adesso che γ sia gen. reg. semp.

Essendo γ generalmente regolare, esistono $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ curve regolari tali che

$$\gamma = \bigcup_{i=1}^r \gamma_i$$

Siano C_{i-1}, C_i , gli estremi di ogni curva γ_i , dove $C_0 = A, C_r = B$

ω esatta $\Rightarrow \exists F$ primitiva di ω in Ω

$$(\gamma) \int_A^B \omega = \sum_{i=1}^r (\gamma_i) \int_{C_{i-1}}^{C_i} \omega \stackrel{\text{passo prec.}}{=} \sum_{i=1}^r F(C_i) - F(C_{i-1}) \stackrel{\text{somma telescopica}}{=} F(C_r) - F(C_0) = F(B) - F(A) \quad \square$$

Theorem 5.12. *Criterio I per l'esattezza di ω*

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, non vuoto, aperto e **internamente connesso**.

Sia ω una forma diff. lin. nei coefficienti X, Y, Z e di classe $C^0(\Omega)$. Si ha

ω e' esatta in $\Omega \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall P_0, P_1 \in \Omega : P_0 \neq P_1 \quad \exists k \in \mathbb{R} : (\gamma) \int_{P_0}^{P_1} \omega = k \quad \forall \gamma \subseteq \Omega \text{ curva gen. reg. semplice di estremi } P_0, P_1$$

Proof:

(1)1. Dim $\Rightarrow$

ω esatta $\Rightarrow \exists F$ primitiva di ω in Ω

$$(\gamma) \int_{P_0}^{P_1} \omega \stackrel{\text{prop [5.11,pg.86]}}{=} F(P_1) - F(P_0) = k \in \mathbb{R}$$

e ovviamente k non dipende da γ .

Nota: l'esistenza di γ e' garantita dal fatto che Ω sia internamente connesso:

infatti, esiste almeno una poligonale di punti terminali P_0, P_1 .

(1)2. Dim $\Leftarrow$

Dobbiamo dimostrare che ω e' esatta, ovvero dobbiamo trovare una sua primitiva. Sia fissato $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ e sia definita la seguente funzione

$$F(P_1) = \begin{cases} 0 & P_1 = P_0 \\ (\gamma) \int_{P_0}^{P_1} \omega & P_1 \neq P_0 \end{cases} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

dove $\gamma \subseteq \Omega$ curva gen. reg. semplice di estremi P_0, P_1

Per Hp $F(P_1)$ non dipende dalla particolare scelta di γ .

Dimostriamo che F e' la primitiva cercata, ovvero dimostriamo che

$$\begin{cases} \exists F_x(P_1) = X(P_1) \\ \exists F_y(P_1) = Y(P_1) \\ \exists F_z(P_1) = Z(P_1) \end{cases} \quad \forall P_1 \in \Omega \quad (*)$$

Distinguiamo due casi

CASE: $P_0 = P_1$

Dimostriamo la (*) solo per F_x .

$$F_x(P_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{F(x, y_1, z_1) - F(x_1, y_1, z_1)}{x - x_1} \underset{P_0 = P_1}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x, y_0, z_0) - \overbrace{F(P_0)}^{=0}}{x - x_0} \underset{P = (x, y_0, z_0) \neq P_1}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(P)}{x - x_0} =$$

$$\underset{(**)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\gamma) \int_{P_0}^P \omega}{x - x_0}$$

(**) Poiche' stiamo considerando il limite, e' lecito supporre $P \neq P_1 = P_0$ e quindi $x \neq x_0$.

Possiamo anche supporre che

$$P_0 \in \Omega \text{ aperto} \Rightarrow \exists \delta_0 > 0 : I(P_0, \delta_0) \subseteq \Omega$$

supponiamo $x \in]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0[$ cosi' da avere

$$P, P_0 \in I(P_0, \delta_0) \subseteq \Omega \Rightarrow \overrightarrow{PP_0} \subseteq \Omega$$

fatto questo, come curva γ scegliamo proprio il segmento $\overrightarrow{PP_0}$, di rappresentazione parametrica

$$\gamma = \overrightarrow{PP_0} : \begin{cases} x = t \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

$$a = \min \{x_0, x\}, \quad b = \max \{x_0, x\} \quad (1)$$

quindi dalla (*) abbiamo

$$F_x(P_1) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\gamma) \int_{P_0}^P \omega}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_a^b X(t, y_0, z_0) dt}{x - x_0} \underset{\text{thm della media } (**)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{X(\xi, y_0, z_0)(b - a)}{x - x_0} =$$

$$\underset{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{X(\xi, y_0, z_0)|x - x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} X(\xi, y_0, z_0) \quad (2)$$

(**) X e' continua perche' ω e' di classe $C^0(\Omega)$.

Chiaramente per $x \rightarrow x_0$ si ha che $\xi \rightarrow x_0$, infatti, supponiamo per fissare

le idee che $x > x_0$, allora $[a, b] = [x_0, x]$, si ha
 $\xi \in [a, b] = [x_0, x] \Rightarrow x_0 \leq \xi \leq x \Rightarrow x_0 \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \xi \leq x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \xi = x_0$
per $x \rightarrow x_0$

Quindi, poiche' X e' continua, dalla (2) abbiamo

$$F_x(P_1) = \lim_{x \rightarrow x_0} X(\xi, y_0, z_0) = X(x_0, y_0, z_0) = X(P_1)$$

CASE: $P_0 \neq P_1$

$$P_1 \in \Omega \text{ aperto} \Rightarrow \exists \delta'_1 > 0 : I(P_1, \delta'_1) \subseteq \Omega$$

$$\delta_1 = \min \{ \delta'_1, d(P_1, P_0) \}$$

supponiamo $x \in]x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1[\setminus \{x_1\}$ cosi' da avere

$$P = (x, y_1, z_1), P_1 \in I(P_1, \delta_1) \subseteq \Omega \Rightarrow s = \overrightarrow{PP_1} \subseteq \Omega \quad (1')$$

Per la scelta di δ_1 si ha che $P_0 \notin I(P_1, \delta_1)$.

$$F_x(P_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{F(x, y_1, z_1) - F(x_1, y_1, z_1)}{x - x_1} = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{(\gamma') \int_{P_0}^P \omega - (\gamma) \int_{P_0}^{P_1} \omega}{x - x_1}$$

Cerchiamo adesso di sfruttare la proprieta' di additivita' (vedi [5.10, pg.86]) per semplificare gli integrali al numeratore. Per Hp possiamo scegliere liberamente sia γ' sia γ , allora

sia $\gamma' = s \cup \gamma$

dove $s = \overrightarrow{PP_1}$ e' il segmento di estremi P, P_1

γ e' una curva gen. reg. semplice di estremi P_0, P_1 , tale che $\gamma \cap s = P_1$, $\gamma \subseteq \Omega$ (2')

(1'), (2') $\Rightarrow \gamma' \subseteq \Omega$, γ' gen. reg. semplice di estremi P_0, P

$$s : \begin{cases} x = t \\ y = y_1 \\ z = z_1 \end{cases} \quad t \in [x_1, x]$$

L'esistenza di γ e' assicurata dall'interna connessione di Ω .

Ritorniamo la rapporto incrementale:

$$F_x(P_1) \underset{\text{vedi [5.10, pg.86]}}{=} \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{(\gamma) \int_{P_0}^{P_1} \omega + (s) \int_{P_1}^P \omega - (\gamma) \int_{P_0}^{P_1} \omega}{x - x_1} = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{(s) \int_{P_1}^P \omega}{x - x_1} = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{\int_{x_1}^x X(t, y_1, z_1) dt}{x - x_1}$$

A questo punto procediamo come nel passo precedente:

$$F_x(P_1) \underset{\text{thm della media}}{=} \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{X(\xi, y_1, z_1)(x - x_1)}{x - x_1} = \lim_{x \rightarrow x_1} X(\xi, y_1, z_1) = X(x_1, y_1, z_1)$$

□

Proposition 5.13. *Il teorema [5.12, pg.87] e' utile per il calcolo dell'integrale $(\gamma) \int_{P_0}^{P_1} \omega$. Infatti, nelle Hp del thm, non importa piu' chi sia γ , e quindi possiamo scegliere arbitrariamente una γ' , che sia gen. reg. semplice e di estremi P_0, P_1 . Ovviamente, sceglieremo quella piu' semplice possibile. Fatto cio', avremo:*

$$(\gamma) \int_{P_0}^{P_1} \omega = (\gamma') \int_{P_0}^{P_1} \omega$$

Da cio' discende il seguente risultato:

se ω e' esatta e γ e' una curva gen. reg. semplice e di estremi P_0, P_1 , si ha:

$$(\gamma) \int_{P_0}^{P_1} \omega \underset{(*)}{=} \int_{a_1}^{b_1} X(t, y_0, z_0) dt + \int_{a_2}^{b_2} Y(x_1, t, z_0) dt + \int_{a_3}^{b_3} Y(x_1, y_1, t) dt$$

dove

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad P_1 = (x_1, y_1, z_1)$$

$$a_1 = \min\{x_0, x_1\}, \quad b_1 = \max\{x_0, x_1\}$$

$$a_2 = \min\{y_0, y_1\}, \quad b_2 = \max\{y_0, y_1\}$$

$$a_3 = \min\{z_0, z_1\}, \quad b_3 = \max\{z_0, z_1\}$$

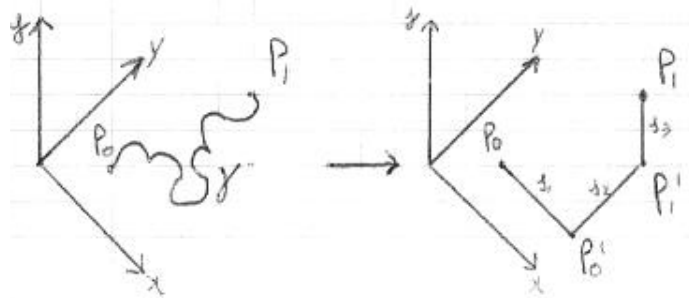
Proof: Come curva γ' possiamo prendere il segmento $\overrightarrow{P_0 P_1}$, oppure una qualsiasi poligonale. Una poligonale che puo' rivelarsi utile e' $\gamma' = s_1 \cup s_2 \cup s_3$, dove s_1, s_2, s_3 sono i segmenti:

$$s_1 = \overrightarrow{P_0 P'_0}, \quad s_2 = \overrightarrow{P'_0 P'_1}, \quad s_3 = \overrightarrow{P'_1 P_1}$$

$$P'_0 = (x_1, y_0, z_0), \quad P'_1 = (x_1, y_1, z_0)$$

Con questa scelta abbiamo:

$$(\gamma) \int_{P_0}^{P_1} \omega = (\gamma') \int_{P_0}^{P_1} \omega \underset{[5.10, pg. 86]}{=} (s_1) \int_{P_0}^{P'_0} \omega + (s_2) \int_{P'_0}^{P'_1} \omega + (s_3) \int_{P'_1}^{P_1} \omega \quad (*)$$



e poiche' le rappr. param. di s_1, s_2, s_3 sono

$$a_1 = \min\{x_0, x_1\}, \quad b_1 = \max\{x_0, x_1\}$$

$$a_2 = \min\{y_0, y_1\}, \quad b_2 = \max\{y_0, y_1\}$$

$$a_3 = \min\{z_0, z_1\}, \quad b_3 = \max\{z_0, z_1\}$$

$$s_1 : \begin{cases} x = t \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases} \quad t \in [a_1, b_1], \quad s_2 : \begin{cases} x = x_1 \\ y = t \\ z = z_0 \end{cases} \quad t \in [a_2, b_2], \quad s_3 : \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \\ z = t \end{cases} \quad t \in [a_3, b_3]$$

per definizione avremo:

$$\begin{aligned}
(s_1) \int_{P_0}^{P'_0} \omega &= \int_{a_1}^{b_1} X(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + Z(x(t), y(t), z(t))z'(t) dt = \\
&= \int_{a_1}^{b_1} X(t, y_0, z_0) dt \\
(s_2) \int_{P'_0}^{P'_1} \omega &= \int_{a_2}^{b_2} Y(x_1, t, z_0) dt \\
(s_3) \int_{P'_0}^{P'_1} \omega &= \int_{a_3}^{b_3} Y(x_1, y_1, t) dt \\
(\gamma') \int_{P_0}^{P_1} \omega &\underset{(*)}{=} \int_{a_1}^{b_1} X(t, y_0, z_0) dt + \int_{a_2}^{b_2} Y(x_1, t, z_0) dt + \int_{a_3}^{b_3} Y(x_1, y_1, t) dt
\end{aligned}$$

□

Proposition 5.14. *Nelle stesse ipotesi del thm [5.12,pg.87], e fissato $P_0 \in \Omega$ si ha*

$$\omega \text{ e' esatta} \Rightarrow F(P) = \begin{cases} 0 & P = P_0 \\ (\gamma) \int_{P_0}^P \omega & P \neq P_0 \end{cases} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ e' una primitiva di } \omega$$

dove $\gamma \subseteq \Omega$ curva gen. reg. semplice di estremi P_0, P

Proof: Segue dal thm [5.12,pg.87] e dalla dimostrazione del secondo passo dello stesso thm.

Theorem 5.15. *Criterio I' per l'esattezza di ω*

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, non vuoto, aperto e internamente connesso.

Sia ω una forma diff. lin. nei coefficienti X, Y, Z e di classe $C^0(\Omega)$. Si ha

$$\begin{aligned}
\omega \text{ e' esatta in } \Omega &\Leftrightarrow \forall \gamma \subseteq \Omega \quad \int_{+\gamma} \omega = 0 \\
&\text{dove } \gamma \text{ e' una curva gen. reg. semplice chiusa} \\
\omega \text{ e' esatta in } \Omega &\Leftrightarrow \forall \Sigma \subseteq \Omega \quad \int_{+\Sigma} \omega = 0 \\
&\text{dove } \Sigma \text{ e' una poligonale semplice e chiusa}
\end{aligned}$$

Osservazione: questo teorema e' utile per dimostrare che una f.d.l e' non esatta: basta trovare una $\gamma \subseteq \Omega$ gen. reg. semplice chiusa tale che $\int_{+\gamma} \omega \neq 0$.

Proof:

(1)1. Dim $\Rightarrow$

Sia γ una curva gen. reg. semplice chiusa. Fissiamo $A \neq B \in \gamma$. Per la prop. di additivita' (vedi [5.10,pg.86]):

$$\begin{aligned}
\int_{+\gamma} \omega &= (\gamma_1) \int_A^B \omega + (\gamma_2) \int_B^A \omega \\
&\text{dove } \gamma_1 \cup \gamma_2 = \gamma, \quad \gamma_1 \cap \gamma_2 = \{A, B\} \\
&\gamma_1 \text{ di estremi } A, B, \quad \gamma_2 \text{ di estremi } B, A \\
&\gamma_1, \gamma_2 \text{ curve gen. reg. semplici}
\end{aligned}$$

Poiche' ω e' esatta e poiche' $A, B \in \gamma \subseteq \Omega$, e per il thm [5.12,pg.87]

$$(\gamma_1) \int_A^B \omega = k = (\gamma_2) \int_A^B \omega = -(\gamma_2) \int_B^A \omega$$

$$\int_{+\gamma} \omega = (\gamma_1) \int_A^B \omega + (\gamma_2) \int_B^A \omega = (\gamma_1) \int_A^B \omega - (\gamma_1) \int_A^B \omega = 0$$

(1)2. Dim $\Leftarrow$. Daremo solo uno schizzo di dimostrazione. I passi segnati con (!) sono quelli che non sono stati dimostrati.

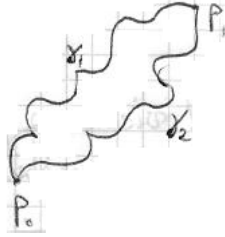
Dimostriamo che

$\forall P_0, P_1 \in \Omega : P_0 \neq P_1 \exists k \in \mathbb{R} : (\gamma) \int_{P_0}^{P_1} \omega = k \quad \forall \gamma \subseteq \Omega$ curva gen. reg. semplice di estremi P_0, P_1
cosi' dal thm [5.12,pg.87] seguira' la tesi.

Fissiamo P_0, P_1 , e siano $\gamma_1, \gamma_2 \subseteq \Omega$ due curve gen. reg. semplici rispettivamente di estremi P_0, P_1 e P_1, P_0 , che esistono perche' Ω e' internamente connesso. Distinguiamo due casi.

CASE: $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{P_0, P_1\}$, ovvero γ_1, γ_2 hanno in comune al piu' gli estremi

Se consideriamo $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, avremo una curva gen. reg. semplice e chiusa. Infatti, e' semplice perche' γ_1, γ_2 non hanno punti a comune oltre agli estremi. E' gen. regolare perche' unione di curve gen. reg. Ed e' chiusa perche' non esistono estremi.



Allora, per Hp

$$\int_{+\gamma} \omega = 0 \quad (*)$$

e per la proprieta' di additivita' (vedi [5.10,pg.86]):

$$\int_{+\gamma} \omega \stackrel{\text{additivita'}}{=} (\gamma_1) \int_{P_0}^{P_1} \omega + (\gamma_2) \int_{P_1}^{P_0} \omega \stackrel{(*)}{=} 0$$

$$(\gamma_1) \int_{P_0}^{P_1} \omega = -(\gamma_2) \int_{P_1}^{P_0} \omega = (\gamma_2) \int_{P_0}^{P_1} \omega$$

CASE: $\gamma_1 \cap \gamma_2 \supset \{P_0, P_1\}$

In questo caso

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \stackrel{(!)}{=} \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_j \cup s_1 \cup \dots \cup s_k$$

dove Γ_i e' una curva gen. reg. semplice e chiusa

$\Gamma_i = \delta_i \cup \delta'_i$, con $\delta_i \subseteq \gamma_1$, $\delta'_i \subseteq \gamma_2$

δ_i, δ'_i curve gen. regolari semplici di estremi D_{i-1}, D_i e D_i, D_{i-1}

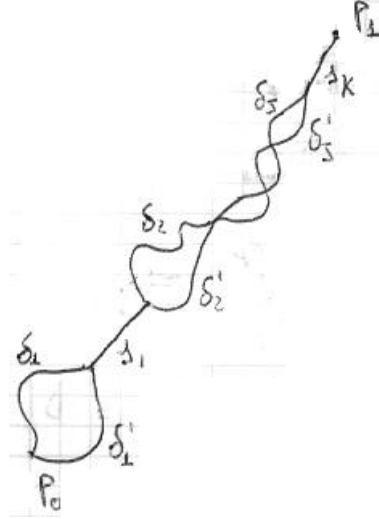
e s_i sono segmenti e inoltre

$$\gamma_1 = \delta_1 \cup \dots \cup \delta_j \cup s_1 \cup \dots \cup s_k$$

δ_i, s_k hanno al piu' gli estremi in comune

$$\gamma_2 = \delta'_1 \cup \dots \cup \delta'_j \cup s_1 \cup \dots \cup s_k$$

δ'_i, s_k hanno al piu' gli estremi in comune



e quindi per l'additivita' (vedi [5.10,pg.86]) (!):

$$(\gamma_1) \int_{P_0}^{P_1} \omega = \sum_{i=1}^j (\delta_i) \int_{D_{i-1}}^{D_i} \omega + \sum_{i=1}^k (s_i) \int_{S_{i-1}}^{S_i} \omega$$

$$(\gamma_2) \int_{P_0}^{P_1} \omega = \sum_{i=1}^j (\delta'_i) \int_{D_{i-1}}^{D_i} \omega + \sum_{i=1}^k (s_i) \int_{S_{i-1}}^{S_i} \omega$$

dove S_{i-1}, S_i sono gli estremi del segmento s_i .

Per quanto visto nel passo precedente abbiamo che

$$\begin{cases} \delta_i \cap \delta_{i'} = \{D_{i-1}, D_i\} \\ \delta_i, \delta_{i'} \text{ gen. reg. semplici, contenute in } \Omega \end{cases} \xRightarrow{\text{passo precedente}} (\delta_i) \int_{D_{i-1}}^{D_i} \omega = (\delta'_i) \int_{D_{i-1}}^{D_i} \omega$$

$$\sum_{i=1}^j (\delta_i) \int_{D_{i-1}}^{D_i} \omega = \sum_{i=1}^j (\delta'_i) \int_{D_{i-1}}^{D_i} \omega$$

e quindi

$$\sum_{i=1}^j (\delta_i) \int_{D_{i-1}}^{D_i} \omega + \sum_{i=1}^k (s_i) \int_{S_{i-1}}^{S_i} \omega = \sum_{i=1}^j (\delta'_i) \int_{D_{i-1}}^{D_i} \omega + \sum_{i=1}^k (s_i) \int_{S_{i-1}}^{S_i} \omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\gamma_1) \int_{P_0}^{P_1} \omega = (\gamma_2) \int_{P_0}^{P_1} \omega$$

□

Definition 5.16. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, non vuoto, aperto.

Sia ω una forma differenziale lineare in Ω nei coefficienti X, Y, Z .

$$\omega \text{ rispetta le condizioni di simmetria } \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \exists X_y(x, y), X_z(x, y), Y_x(x, y), Y_z(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega \\ \exists Z_x(x, y), Z_y(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega \\ X_y = Y_x \\ Y_z = Z_y \\ Z_x = X_z \end{cases}$$

dove $X_y, Y_x, Y_z, Z_y, Z_x, X_z$ sono le varie derivate parziali prime. Analogamente, se ω e' a due variabili X, Y :

$$\omega \text{ rispetta le condizioni di simmetria } \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \exists X_y(x, y), Y_x(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega \\ X_y = Y_x \end{cases}$$

Infine,

$$\omega \text{ e' chiusa in } \Omega \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \omega \in C^1(\Omega) \\ \text{valgono le condizioni di simmetria per } \omega \end{cases}$$

Theorem 5.17. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, non vuoto, aperto.

Sia ω una forma diff. lin. nei coefficienti X, Y, Z e di classe $C^1(\Omega)$. Si ha

$$\omega \text{ e' esatta in } \Omega \Rightarrow \omega \text{ e' chiusa in } \Omega$$

Non vale il viceversa.

Proof:

(1)1. Dim $\Rightarrow$

$$\omega \text{ esatta in } \Omega \Rightarrow \begin{cases} \exists F_x(x, y, z) = X(x, y, z) \\ \exists F_y(x, y, z) = Y(x, y, z) \\ \exists F_z(x, y, z) = Z(x, y, z) \end{cases} \quad \forall (x, y, z) \in \Omega \Leftrightarrow \begin{cases} F_x = X \\ F_y = Y \\ F_z = Z \end{cases}$$

$$\omega \text{ di classe } C^1(\Omega) \Rightarrow X, Y, Z \in C^1(\Omega) \Leftrightarrow F_x, F_y, F_z \in C^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow \exists F_{xy}, F_{yx}, F_{xz}, F_{zx}, F_{zy}, F_{yz} \text{ e' sono continue in } \Omega$$

$$\begin{cases} F_x = X \\ F_y = Y \\ F_z = Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{xy} = X_y \\ F_{yx} = Y_x \end{cases} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Schwartz [AII,9.1,pg.93]}} \quad F_{xy} = F_{yx} \Leftrightarrow X_y = Y_x$$

analogamente si hanno le altre uguaglianze.

(1)2. Dimostriamo che non vale il viceversa

Consideriamo

$$\omega = \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy \quad \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

$$X(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$Y(x, y) = \frac{-x}{x^2 + y^2} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X_y(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = Y_x(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

⟨2⟩1. ω non e' esatta

Cerchiamo di usare il thm [5.15,pg.91].

Scegliamo

$$\gamma = \text{circonferenza}((0,0),1) : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$A = (0, 1), \quad B = (1, 0)$$

Per la prop. di additivita' (vedi [5.10,pg.86]):

$$\int_{+\gamma} \omega = (\gamma_1) \int_A^B \omega + (\gamma_2) \int_B^A \omega$$

$$\text{dove } \gamma_1 = \{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\}, \quad \gamma_2 = \{(\cos t, \sin t) \mid t \in [\pi, 2\pi]\}$$

$$\begin{aligned} (\gamma) \int_A^B \omega &= \int_0^\pi X(\cos t, \sin t)(-\sin t) + Y(\cos t, \sin t) \cos t \, dt = \\ &= \int_0^\pi \frac{-\sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} + \frac{-\cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \, dt = \int_0^\pi -1 \, dt = -\pi \end{aligned}$$

$$(\gamma) \int_B^A \omega = -\pi$$

$$\int_{+\gamma} \omega = (\gamma_1) \int_A^B \omega + (\gamma_2) \int_B^A \omega = -2\pi \neq 0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{thm [5.15,pg.91]}} \quad \omega \text{ e' non esatta}$$

□

Theorem 5.18. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, non vuoto, aperto.

Sia ω una forma diff. lin. nei coefficienti X, Y, Z . Si ha

$$\begin{cases} \omega \text{ e' chiusa in } \Omega \\ \Omega \text{ e' convesso rispetto ad un punto } P \in \Omega \end{cases} \Rightarrow \omega \text{ e' esatta in } \Omega$$

Questo e' l'inverso del thm [5.17,pg.94], con l'aggiunta dell'ipotesi di convessita'¹²

Nel caso in cui ω e' a due variabili X, Y , allora possiamo sostituire l'ipotesi della convessita' con quella della semplice connessione (che e' piu' debole):

$$\begin{cases} \omega \text{ e' chiusa in } \Omega \\ \Omega \text{ e' semplicemente connesso} \end{cases} \Rightarrow \omega \text{ e' esatta in } \Omega$$

Proof:

⟨1⟩1. Dimostriamo solo il caso di due variabili

Poiche'

$$\Omega \text{ semp. connesso} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{[\text{AII}, 8.2, \text{pg.74}]} \quad \Omega \text{ intern. connesso}$$

Ω aperto

$$\omega \text{ chiusa} \Rightarrow \omega \in C^1(\Omega) \subseteq C^0(\Omega)$$

possiamo usare il thm [5.15,pg.91]. Sia allora $\Sigma \subseteq \Omega$ una poligonale semplice chiusa, dimostriamo che

$$\int_{+\Sigma} \omega = \int_{+\Sigma} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = 0$$

¹²per la definizione di insieme convesso vedi [AII, 8.7.2, pg.75]

Consideriamo π , il poligono tale che $F(\pi) = \Sigma$. Poniamo

$$T = \pi$$

$$f(x, y) = Y(x, y) \quad \forall (x, y) \in \pi$$

$$g(x, y) = -X(x, y) \quad \forall (x, y) \in \pi$$

Si ha

$$\omega \text{ semp. conn.} \Rightarrow \pi \subseteq \Omega$$

$$\omega \in C^1(\Omega) \Rightarrow X, Y \in C^1(\Omega) \xRightarrow{\pi \subseteq \Omega} X, Y \in C^1(\pi) \Rightarrow f, g \in C^1(\pi)$$

Possiamo allora applicare il thm di Stocks [5.21,pg.97], ottenendo:

$$\begin{aligned} \iint_T f_x(x, y) + g_y(x, y) \, dx dy &= \int_{+F(T)} -g(x, y) dx + f(x, y) dy \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \iint_\pi Y_x(x, y) - X_y(x, y) \, dx dy = \int_{+\Sigma} X(x, y) dx + Y(x, y) dy \Leftrightarrow \\ &\quad \omega \text{ chiusa} \Rightarrow X_y = Y_x \\ &\Leftrightarrow \iint_\pi 0 \, dx dy = \int_{+\Sigma} w \Leftrightarrow \int_{+\Sigma} w = 0 \end{aligned}$$

□

5.1.1 Integrale di frontiera

Definition 5.19. Sia $T \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio regolare ad uno o piu' contorni.

Definiamo il verso di percorrenza positivo su un contorno, come quello adottato da un osservatore che si muove lungo il contorno e che lascia alla sua sinistra i punti interni di T .

Sia ω una f.d.l. in due variabili X, Y in $F(T)$, e $\omega \in C^1(F(T))$.

Se T e' ad un solo contorno, ovvero $F(T) = \gamma$, curva piana gen. reg. semp. chiusa, definiamo

$$\int_{+F(T)} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_{+\gamma} \omega$$

Se invece, T e' ad $n+1$ contorni, con γ_0 contorno esterno e $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ contorni interni, definiamo

$$\int_{+F(T)} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_{+\gamma_0} \omega - \sum_{i=1}^n \int_{+\gamma_i} \omega$$

Theorem 5.20. di Gauss. Sia $T \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio regolare ad uno o piu' contorni.

Sia $f(x, y) : T \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \exists f_x(x, y) \quad \forall (x, y) \in T^\circ \\ \exists g : T \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continua in } T \text{ tale che } g|_{T^\circ} = f_x \quad (*) \end{cases} \Rightarrow \iint_T f_x(x, y) \, dx dy = \int_{+F(T)} 0 dx + f(x, y) dy$$

$$\begin{cases} \exists f_y(x, y) \quad \forall (x, y) \in T^\circ \\ \exists g : T \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continua in } T \text{ tale che } g|_{T^\circ} = f_y \end{cases} \Rightarrow \iint_T f_y(x, y) \, dx dy = \int_{+F(T)} -f(x, y) dx + 0(x, y) dy$$

Nota: la condizione () si enuncia dicendo che f_x e' continua in T .*

Theorem 5.21. *di Stocks (o del flusso, o della divergenza).*

Sia $T \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio regolare ad uno o piu' contorni.

Sia $f, g(x, y) : T \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists f_x(x, y) \quad \forall (x, y) \in T^\circ \\ f_x \text{ continua in } T \\ \exists g_y(x, y) \quad \forall (x, y) \in T^\circ \\ g_y \text{ continua in } T \end{array} \right. \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{thm di Gauss}} \quad \iint_T f_x(x, y) + g_y(x, y) \, dxdy = \int_{+F(T)} -g(x, y)dx + f(x, y)dy$$

Proposition 5.22. *Sia $T \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio regolare ad uno o piu' contorni. Si ha*

$$\text{mis } T = \frac{1}{2} \int_{+F(T)} -ydx + xdy$$

Proof: Appliciamo il thm di Stocks [5.21,pg.97], usando

$$f(x, y) = x$$

$$g(x, y) = y$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \iint_T 1 + 1 \, dxdy &= \int_{+F(T)} -ydx + xdy \Leftrightarrow 2 \iint_T dxdy = \int_{+F(T)} -ydx + xdy \\ &\Leftrightarrow 2 \text{mis } T = \int_{+F(T)} -ydx + xdy \end{aligned}$$

□

Example 5.23. Siano dati $0 \leq \vartheta_1 < \vartheta_2 \leq 2\pi$, e sia

$$f : [\vartheta_1, \vartheta_2] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \in C^1([\vartheta_1, \vartheta_2])$$

$$f(\vartheta) > 0 \quad \forall \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$$

$$T : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2], \quad 0 \leq \rho \leq f(\vartheta)$$

$$T = \{(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \mid \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2], \quad 0 \leq \rho \leq f(\vartheta)\}$$

T in coordinate polari si esprime come:

$$T : \left\{ 0 \leq \rho \leq f(\vartheta) \quad \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2] \right.$$

Vale la seguente identita':

$$\text{mis } T = \text{area } T = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} f(\vartheta)^2 \, d\vartheta$$

Ad esempio, scegliendo la funzione costante $f(\vartheta) = r$, T diventa il settore circolare di angolo $\vartheta_2 - \vartheta_1$ e raggio r , la sua area e':

$$\text{area } T = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r^2 \, d\vartheta = \frac{r^2(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{2}$$

e infatti, scegliendo $\vartheta_1 = 0, \vartheta_2 = 2\pi$, otteniamo l'area di tutto cerchio.

Proof:

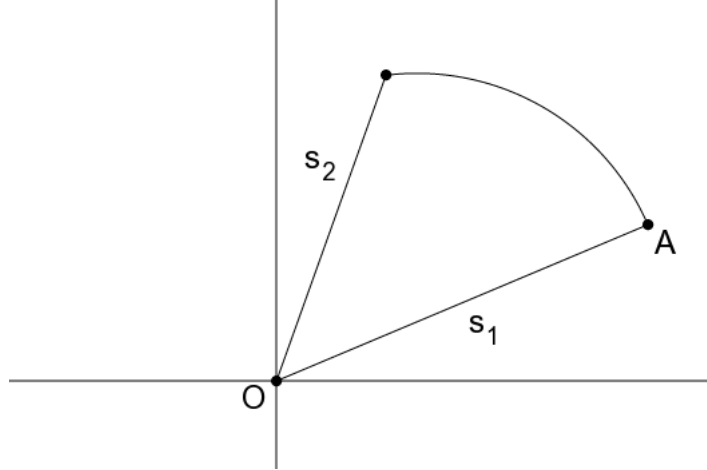
⟨1⟩1. Dimostriamo l'identita'

⟨2⟩1. T e' un dominio regolare a un solo contorno.

Bastera' dimostrare che $F(T)$ e' una curva gen. reg. semplice chiusa.

CASE: Supponiamo intanto che $0 < \vartheta_1 < \vartheta_2 < 2\pi$.

Si ha che



$$F(T) = s_1 \cup s_2 \cup \gamma$$

dove s_1, s_2 sono rispettivamente i segmenti OA, OB (vedi figura), ovvero:

$$s_1 : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta_1 \\ y = \rho \sin \vartheta_1 \end{cases} \quad \rho \in [0, f(\vartheta_1)]$$

$$s_2 : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta_2 \\ y = \rho \sin \vartheta_2 \end{cases} \quad \rho \in [0, f(\vartheta_2)]$$

γ e' invece la curva,

$$\gamma : \begin{cases} x = x(\vartheta) = f(\vartheta) \cos \vartheta \\ y = y(\vartheta) = f(\vartheta) \sin \vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$$

Poiche' s_1, s_2 sono segmenti, e quindi curve regolari, basta dimostrare che pure γ e' una curva regolare.

⟨4⟩1. γ e' una curva regolare

1. Poiche' $f \in C^1([\vartheta_1, \vartheta_2])$, e' chiaro che $x(\vartheta), y(\vartheta) \in C^1([\vartheta_1, \vartheta_2])$.

2.

$$x'^2(\vartheta) + y'^2(\vartheta) > 0 \quad \forall \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2] \quad ?$$

$$x'(\vartheta) = f'(\vartheta) \cos \vartheta - f(\vartheta) \sin \vartheta$$

$$y'(\vartheta) = f'(\vartheta) \sin \vartheta + f(\vartheta) \cos \vartheta$$

$$x'^2(\vartheta) + y'^2(\vartheta) = f'^2(\vartheta) \cos^2 \vartheta + f^2(\vartheta) \sin^2 \vartheta - 2f'(\vartheta)f(\vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta +$$

$$+ f'^2(\vartheta) \sin^2 \vartheta + f^2(\vartheta) \cos^2 \vartheta + 2f'(\vartheta)f(\vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta =$$

$$= f'^2(\vartheta)(\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) + f^2(\vartheta)(\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) = f'^2(\vartheta) + f^2(\vartheta) \underbrace{>}_{f(\vartheta) > 0 \quad \forall \vartheta} 0 \quad \forall \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$$

3. Dimostriamo che e' semplice, ovvero che la funzione

$$g : [\vartheta_1, \vartheta_2] \longrightarrow \gamma$$

$$g(\vartheta) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta)$$

e' iniettiva.

$$\begin{aligned} g(\vartheta) = g(\vartheta') &\Rightarrow \begin{cases} f(\vartheta) \cos \vartheta = f(\vartheta') \cos \vartheta' \\ f(\vartheta) \sin \vartheta = f(\vartheta') \sin \vartheta' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\vartheta)^2 \cos^2 \vartheta = f(\vartheta')^2 \cos^2 \vartheta' \\ f(\vartheta)^2 \sin^2 \vartheta = f(\vartheta')^2 \sin^2 \vartheta' \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(\vartheta)^2 \cos^2 \vartheta + f(\vartheta)^2 \sin^2 \vartheta = f(\vartheta')^2 \cos^2 \vartheta' + f(\vartheta')^2 \sin^2 \vartheta' \Rightarrow f(\vartheta)^2 = f(\vartheta')^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} f(\vartheta) \cos \vartheta = f(\vartheta) \cos \vartheta' \\ f(\vartheta) \sin \vartheta = f(\vartheta) \sin \vartheta' \end{cases} \xRightarrow{f(\vartheta) > 0} \begin{cases} \cos \vartheta = \cos \vartheta' \\ \sin \vartheta = \sin \vartheta' \end{cases} \xRightarrow{\vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2] \subseteq [0, 2\pi]} \vartheta = \vartheta' \end{aligned}$$

Quindi g e' iniettiva.

Abbiamo visto che s_1, s_2, γ sono curve regolari, e poiche' $F(T) = s_1 \cup s_2 \cup \gamma$, si verifica facilmente¹³ che $F(T)$ e' una curva gen. regolare semplice e chiusa.

CASE: Supponiamo adesso che $\vartheta_1 = 0, \vartheta_2 = 2\pi$

In questo caso non esistono i segmenti s_1, s_2 , quindi $F(T) = \gamma$.

Abbiamo cosi' visto che T e' un dominio regolare ad un solo contorno. Allora, possiamo applicare la proposizione [5.22,pg.97], ottenendo:

$$\text{mis } T = \text{area } T = \frac{1}{2} \int_{+F(T)} -ydx + xdy$$

Il verso di percorrenza di $F(T)$ e' in questo caso quello antiorario, quindi

$$\int_{+F(T)} -ydx + xdy = (s_1) \int_O^A -ydx + xdy + (\gamma) \int_A^B -ydx + xdy + (s_2) \int_B^O -ydx + xdy$$

<2>2. Calcoliamo $(s_1) \int_O^A -ydx + xdy$

$$\begin{aligned} (s_1) \int_O^A -ydx + xdy &= \int_0^{f(\vartheta_1)} -\rho \sin \vartheta_1 D[\rho \cos \vartheta_1] + \rho \cos \vartheta_1 D[\rho \sin \vartheta_1] \quad d\rho = \\ &= \int_0^{f(\vartheta_1)} -\rho \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 + \rho \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1 = \int_0^{f(\vartheta_1)} 0 = 0 \end{aligned}$$

<2>3. Analogamente per s_2

In questo caso bisogna pero' fare attenzione al verso di percorrenza di s_2 .

La rapp. param. di s_2 che abbiamo usato in precedenza e':

$$s_2 : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta_2 \\ y = \rho \sin \vartheta_2 \end{cases} \quad \rho \in [0, f(\vartheta_2)] \quad (*)$$

In questa rappresentazione, il verso di percorrenza e' quello da O a B .

Noi pero' dobbiamo calcolare $(s_2) \int_B^O -ydx + xdy$ che richiede il verso di percorrenza opposto. Ma allora per le proprieta' note:

$$(s_2) \int_B^O -ydx + xdy = -(s_2) \int_O^B -ydx + xdy$$

Quindi possiamo calcolare $(s_2) \int_O^B$ usando la rapp. param. (*) e poi prendendo l'opposto ricavare $(s_2) \int_B^O$.

In questo caso pero' facendo i conti otteniamo comunque:

$$(s_2) \int_B^O -ydx + xdy = 0$$

¹³dalla figura e' immediato

Quindi, non importa se i segmenti s_1, s_2 esistano o meno.

2)4. Calcoliamo $(\gamma) \int_A^B -ydx + xdy$

$$\begin{aligned} (\gamma) \int_A^B -ydx + xdy &= \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} -f(\vartheta) \sin \vartheta D[f(\vartheta) \cos \vartheta] + f(\vartheta) \cos \vartheta D[f(\vartheta) \sin \vartheta] d\vartheta = \\ &= \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} -f(\vartheta) \sin \vartheta (f'(\vartheta) \cos \vartheta - f(\vartheta) \sin \vartheta) + f(\vartheta) \cos \vartheta (f'(\vartheta) \sin \vartheta + f(\vartheta) \cos \vartheta) d\vartheta = \\ &= \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} f^2(\vartheta) (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) d\vartheta = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} f^2(\vartheta) d\vartheta \end{aligned}$$

In definitiva:

$$\text{mis } T = \text{area } T = \frac{1}{2} \int_{+F(T)} -ydx + xdy = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} f^2(\vartheta) d\vartheta$$

□

6 Equazioni differenziali ordinarie

Definition 6.1. Sia dato $X \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$, con $n \geq 1$ e

$$\begin{aligned} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) &: X \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) &\in X \end{aligned}$$

La formula

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

indica un *equazione ordinaria* di ordine $n \geq 1$, nell'equazione incognita $y(x)$.

Sia data $y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$y(x) \text{ e' una soluzione di (1)} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \exists y^{(i)}(x), \text{ derivata } i\text{-esima di } y(x) \text{ calcolata in } x & \forall x \in (\alpha, \beta) \quad \forall i = 1, \dots, n \\ (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in X & \forall x \in (\alpha, \beta) \\ F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 & \forall x \in (\alpha, \beta) \end{cases}$$

L'*integrale generale* di (1) e' l'insieme di tutte le sue soluzioni.

Risolvere l'equazione ordinaria (1) vuol dire trovare tutti gli elementi dell'integrale generale.

Se

$$\begin{aligned} B &\subseteq \mathbb{R}^{n+1} \\ X &= B \times \mathbb{R} \\ f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) &: B \longrightarrow \mathbb{R} \\ F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) &= f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) - y^{(n)} \end{aligned}$$

allora, l'equazione (1)

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) - y^{(n)} = 0$$

si indica con

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = y^{(n)}$$

e si chiama *equazione ordinaria in forma normale*.

6.1 Problema di Cauchy

Definition 6.2. Sia data un'equazione ordinaria di ordine n in forma normale:

$$\begin{aligned} B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}, \quad y^{(n)} &\in \mathbb{R} \\ f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) : B &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) &= y^{(n)} \quad (2) \end{aligned}$$

e sia $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in B$, chiamato *punto iniziale*.
Il problema di Cauchy consiste nel trovare soluzioni $y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ di (2) tali che

$$\begin{aligned} x_0 &\in (\alpha, \beta) \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

e si indica con il simbolo:

$$\begin{cases} f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = y^{(n)} \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (3)$$

Theorem 6.3. Nelle ipotesi della def [6.2, pg. 101], e sotto le seguenti ipotesi:

1. f continua in B
2. f e' Lipschitziana, ovvero (vedi [AII, 8.11, pg. 87]),

$$\exists L > 0 : |f(P) - f(Q)| \leq Ld(P, Q) \quad \forall P, Q \in B$$

dove $d(P, Q)$ e' la distanza euclidea tra P, Q .

Anzi, al posto di quest'ultima ipotesi, si puo' usare una ipotesi piu' debole:

$$\exists L > 0 : |f(P) - f(Q)| \leq Ld(P, Q) \quad \forall P, Q \in B : P_1 = Q_1$$

dove P_1 e' la prima componente del vettore P .

si ha la seguente tesi $\forall \underbrace{(\alpha, \beta)}_{\text{intervallo}} : x_0 \in (\alpha, \beta)$ si ha

$$y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ soluzione del prob. di Cauchy (3)} \Rightarrow y(x) \text{ e' unica}$$

Proof:

(1)1. Dimostriamo il thm nel caso $n = 1$

Supponiamo per assurdo che

$\exists y_1(x), y_2(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ soluzioni del problema di Cauchy, tali che $y_1 \neq y_2$

Quindi

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= y_0 = y_2(x_0) \\ y'_1(x) &= f(x, y_1(x)) \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \\ y'_2(x) &= f(x, y_2(x)) \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \end{aligned}$$

Notiamo che

$$\begin{cases} y_1 \neq y_2 \\ y_1(x_0) = y_2(x_0) \end{cases} \Rightarrow \exists x_1 \neq x_0 : y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$$

Continuiamo il resto della dimostrazione supponendo $x_1 > x_0$.
 Per Hp f e' continua in B , e quindi per la prop [6.7,pg.103], y_1, y_2 sono soluzioni del problema di Volterra:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_2(t)) dt$$

e prendendo la differenza:

$$y_1(x) - y_2(x) = \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) dt$$

e prendendone il valore assoluto:

$$|y_1(x) - y_2(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| dt \quad (1)$$

L'ipotesi di Lipschitzianita' e':

$$|f(x, y) - f(x, y')| \leq L\sqrt{(y - y')^2} = L|y - y'| \quad \forall (x, y), (x, y') \in B$$

e poiche' $(x, y_1(t)), (x, y_2(t)) \in B$ (essendo soluzioni), possiamo maggiorare la (1), ottenendo:

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq \int_{x_0}^x L|y_1(t) - y_2(t)| dt \quad (1.1)$$

Poiche' $y_1(t) - y_2(t)$ e' una funzione continua in $[x_0, x_1]$, per il thm di Weierstrass (vedi [AII,8.34,pg.89]), esiste il suo massimo M :

$$\exists M = \max_{t \in [x_0, x_1]} |y_1(t) - y_2(t)|$$

Allora possiamo ancora maggiorare la (1.1) ottenendo

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq \int_{x_0}^x LM dt = LM(x - x_0) \quad (1.2) \quad \forall x \in [x_0, x_1]$$

<2>1. Dimostriamo che

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq M \frac{(L(x - x_0))^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Procediamo per induzione, la cui base e' gia' stata dimostrata con la (1.2).

Supponiamo che sia vera per n . Allora, usando la (1.1) abbiamo

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_2(x)| &\leq \int_{x_0}^x L|y_1(t) - y_2(t)| dt \leq \underbrace{\int_{x_0}^x LM \frac{(L(x - x_0))^n}{n!} dt}_{\text{Hp induttiva}} = \\ &= \frac{L^{n+1}M}{n!} \left[\frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} \right] = M \frac{(L(x - x_0))^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Percio' abbiamo

$$0 \leq |y_1(x) - y_2(x)| \leq M \frac{(L(x - x_0))^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Prendendo il limite per $n \rightarrow \infty$ (vedi [AII,6.3,pg.57]) e usando il thm del confronto, otteniamo

$$|y_1(x) - y_2(x)| = 0 \Leftrightarrow y_1(x) = y_2(x) \quad \forall x \in [x_0, x_1]$$

ma questo e' assurdo perche' $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$. □

Theorem 6.4. Nelle ipotesi della def [6.2,pg.101], e sotto le seguenti ipotesi:

1. f continua in B

si ha

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } \exists y(x) : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ soluzione del prob. di Cauchy (3)}$$

Theorem 6.5. Nelle ipotesi della def [6.2,pg.101], e sotto le seguenti ipotesi:

1. $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ intervallo qualsiasi
2. $B = (a, b) \times \mathbb{R}^n$
3. f continua in B
4. $\forall [c, d] \subseteq (a, b)$ f e' Lipschitziana in $[c, d] \times \mathbb{R}^n$, ovvero

$$\exists L > 0 : |f(P) - f(Q)| \leq Ld(P, Q) \quad \forall P, Q \in [c, d] \times \mathbb{R}^n$$

in realta', si puo' usare un ipotesi piu' debole:

$$\exists L > 0 : |f(P) - f(Q)| \leq Ld(P, Q) \quad \forall P, Q \in [c, d] \times \mathbb{R}^n : P_1 = Q_1$$

si ha

$$\exists! y(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ soluzione del prob. di Cauchy (3)}$$

Definition 6.6. Problema di Volterra..

Sia dato $B \subseteq \mathbb{R}^2$, $B \neq \emptyset$, $f(x, y) : B \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in B , con $(x_0, y_0) \in B$.

Data $y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$y(x) \text{ e' soluzione del problema di Volterra} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_0 \in (\alpha, \beta) \\ y(x) \text{ e' continua in } (\alpha, \beta) \\ G_y \subseteq B \Leftrightarrow (x, y(x)) \in B \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \\ y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \end{cases}$$

Proposition 6.7. Se f e' continua in B , allora l'integrale generale del problema di Volterra coincide con quello del problema di Cauchy di ordine 1, con punto iniziale (x_0, y_0) .

Proof:

(1)1. Sia $y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ soluzione del problema di Cauchy, dimostriamo che e' soluzione del problema di Volterra.

Poiche' $y(x)$ e' soluzione del problema di Cauchy, si ha

$$\begin{cases} \exists y'(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \\ (x, y(x)) \in B \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \quad (1) \\ y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \quad (2) \\ x_0 \in (\alpha, \beta) \\ y(x_0) = y_0 \quad (3) \end{cases}$$

Essendo y derivabile in (α, β) e' ivi continua.

$G_y \subseteq B$ deriva dalla (1).

Dalla (2), preso $x \in (\alpha, \beta)$ e integrando ambo i membri (operazione lecita perche' i due membri sono funzioni continue) otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x y'(t) dt &= \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y(x) - y(x_0) &= \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \underbrace{\Leftrightarrow}_{(3)} y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \end{aligned}$$

(1)2. Sia adesso $y(x)$ una soluzione di Volterra

Poiche' y, f sono funzioni continue, $f(x, y(x))$ e' continua in (α, β) , e quindi per il thm di Torricelli,

$$\int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

e' una primitiva di $f(t, y(t))$ ed e' quindi derivabile in (α, β) . Allora anche $y(x)$, che per Hp e' tale che

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

e' derivabile in (α, β) e in particolare la sua derivata e'

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

Infine,

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t)) dt = y_0$$

□

6.2 Equazioni di ordine uno

Definition 6.8. Data $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}^2$, $B \neq \emptyset$, consideriamo l'equazione differenziale ordinaria di ordine 1 in forma normale:

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

Per $n = 1$, la definizione di soluzione di (1) si puo' cosi' esprimere: una funzione $y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ e' una soluzione $\Leftrightarrow$

1. $G_y \subseteq B$
2. $\exists y'(x) \wedge y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

dove $G_y = \{(x, y(x)) \mid x \in (\alpha, \beta)\}$ e' il grafico di y , e si chiama anche *linea integrale*.

Il problema di Cauchy di ordine 1 e' del tipo:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con $(x_0, y_0) \in B$.

6.2.1 A variabili separate

Definition 6.9. Un'equazione differenziale di primo ordine del tipo

$$y' = f(x, y) = X(x)Y(y)$$

con

$$X : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ continua in } (a, b)$$

$$Y : (c, d) \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ continua in } (c, d)$$

$$f : (a, b) \times (c, d) \longrightarrow \mathbb{R}$$

si dice a variabili separate.

Lemma 6.10. Data una funzione $y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in (α, β) , si ha

$$0 \notin \text{Im } y \Rightarrow \text{Im } y > 0 \vee \text{Im } y < 0$$

*Nota: da ora in poi, useremo la seguente convenzione:
data la funzione $y(x) : X \longrightarrow \mathbb{R}$, e preso $k \in \mathbb{R}$*

$$\text{Im } y > k \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x' \in \text{Im } y \quad x' > k \Leftrightarrow \forall x \in X \quad y(x) > k$$

Analogamente per $\geq, <, \leq, =$.

Proof: Se per assurdo $\exists x_0, x_1 \in (\alpha, \beta) : y(x_0)y(x_1) < 0$ allora poiche' y e' continua, per il thm dell'esistenza degli zeri, si avrebbe $\exists \xi \in (\alpha, \beta) : y(\xi) = 0$, assurdo contro ipotesi. $\square$

Proposition 6.11. Le soluzioni dell'equazione a variabili separate si dividono in tre classi:

Classe 1 :

$$\begin{aligned} y &: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \\ y(x) &= h \in (c, d) \quad \forall x \in (a, b) \\ \text{tale che } Yy(x) &= Y(h) = 0 \end{aligned}$$

Classe 2 :

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &\subseteq (a, b), \quad y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Yy(x) \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \\ y(x) &\text{ sara' del tipo } y(x) = H(F(x) + k) \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \\ G &\text{ primitiva di } \frac{1}{Y(y)} \text{ in } \text{Im } y(x), H \text{ inversa di } G, F \text{ primitiva di } X(x) \text{ in } (\alpha, \beta) \end{aligned}$$

Classe 3 :

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &\subseteq (a, b), \quad y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \exists x_0, x_1 \in (\alpha, \beta) : Yy(x_0) = 0, Yy(x_1) \neq 0 \\ y(x) &\text{ sara' del tipo :} \end{aligned}$$

$$y(x) = \begin{cases} \dots \\ y_1(x) & \forall x \in (\alpha_1, \beta_1) \\ y_2(x) & \forall x \in (\alpha_2, \beta_2) \\ \dots \end{cases}$$

$$\text{con } \beta_i = \alpha_{i+1}$$

$$y_{2k} : (\alpha_{2k}, \beta_{2k}) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ soluzione di I classe}$$

$$y_{2k+1} : (\alpha_{2k+1}, \beta_{2k+1}) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ soluzione di II classe}$$

In pratica, $y(x)$ risulta l'unione di soluzioni di I classe e soluzioni di II classe, inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \alpha_{2k+1}^+} Yy(x) = 0 \vee \lim_{x \rightarrow \beta_{2k+1}^-} Yy(x) = 0$$

Proof:

(1)1. Verifichiamo che le funzioni di classe 1 sono delle soluzioni

Dobbiamo verificare che:

$$1. G_y \subseteq (a, b) \times (c, d)$$

$$2. \exists y'(x) \wedge y'(x) = f(x, y(x)) = X(x)Y(y(x)) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

La 1. e' vera per costruzione di $y(x)$. La 2.:

$$y'(x) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

$$f(x, y(x)) = X(x)Y(y(x)) = X(x)Y(h) = X(x)0 = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

(1)2. Mostriamo che ogni soluzione di seconda classe e' del tipo $y(x) = H(F(x) + k)$

Supponiamo che $y(x) : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ sia una soluzione di seconda classe.

Ovvero, supponiamo che

$$1. G_y \subseteq (a, b) \times (c, d)$$

$$2. \exists y'(x) \wedge y'(x) = f(x, y(x)) = X(x)Y(y(x)) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

$$3. Y(y(x)) \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

allora

$$1. \Rightarrow (\gamma, \delta) := \text{Im } y(x) \subseteq (c, d) \quad (1.1)$$

$$(1.1), 3. \Rightarrow Y(y) \neq 0 \quad \forall y \in (\gamma, \delta)$$

$$\Rightarrow Y(y) > 0 \quad \forall y \in (\gamma, \delta) \vee Y(y) < 0 \quad \forall y \in (\gamma, \delta)$$

[6.10, pg. 105]

$$2., 3. \Rightarrow \frac{y'(x)}{Y(y(x))} = X(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \quad (2.1)$$

$X(x)$ continua in $(\alpha, \beta) \subseteq (a, b) \Rightarrow \exists F(x)$ primitiva di $X(x)$ in (α, β)

$Y(y)$ continua in $(\gamma, \delta) \subseteq (c, d)$, (3.1) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{Y(y)} \text{ e' continua e } \frac{1}{Y(y)} > 0 \forall y \in (\gamma, \delta) \vee \frac{1}{Y(y)} < 0 \forall y \in (\gamma, \delta) \quad (3.2)$$

$$\Rightarrow \exists G(y) \text{ primitiva di } \frac{1}{Y(y)} \text{ in } (\gamma, \delta)$$

$$D[G(y(x))] = \frac{y'(x)}{Y(y(x))} \underset{(2.1)}{=} X(x) = D[F(x)] \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{R} : G(y(x)) = F(x) + k \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \quad (2.2)$$

cor Lagrange

e' anche vero che

$$D[G(y)] = \frac{1}{Y(y)}, \quad (3.2) \Rightarrow G(y) \text{ e' tutta crescente o decrescente in } (\gamma, \delta)$$

$$\Rightarrow G(y) \text{ e' invertibile in } (\gamma, \delta)$$

Sia $H(x)$ la sua inversa

$$(2.2) \Rightarrow H(G(y(x))) = H(F(x) + k) \Leftrightarrow y(x) = H(F(x) + k) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

(1)3. Classe 3

Supponiamo che $y(x)$ sia una soluzione di classe tre, ovvero $y(x)$ e' soluzione dell'equazione differenziale, e inoltre:

$$(\alpha, \beta) \subseteq (a, b), \quad y(x) : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \exists x_0, x_1 \in (\alpha, \beta); \quad Y(y(x_0)) = 0, \quad Y(y(x_1)) \neq 0$$

Poiche' $x_0 \neq x_1$, esistono due casi: $x_0 < x_1$, $x_1 < x_0$.

CASE: $x_0 < x_1$

Consideriamo l'insieme

$$A = \{x \in [x_0, x_1[\mid Yy(x) = 0\} \subseteq [x_0, x_1[\Rightarrow A \text{ limitato superiormente, } \sup A \in [x_0, x_1]$$

$$x_0 \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$$

Sia $x_2 = \sup A$

CASE: $Yy(x_2) > 0$

Poiche' Yy e' composizione di funzioni continue, e' una funzione continua, quindi per la permanenza del segno:

$$\exists \delta > 0 : Yy(x) > 0 \quad \forall x \in]x_2 - \delta, x_2 + \delta[$$

$$x_2 = \sup A \Rightarrow \exists \bar{x} \in A : x_2 \geq \bar{x} > x_2 - \delta \Rightarrow \bar{x} \in]x_2 - \delta, x_2 + \delta[\Rightarrow Yy(\bar{x}) > 0$$

$$\bar{x} \in A \Leftrightarrow Yy(\bar{x}) = 0$$

assurdo. Quindi questo caso non puo' verificarsi.

CASE: $Yy(x_2) < 0$

Analogamente al precedente.

Quindi $Yy(x_2) = 0$ e' l'unico caso ammissibile.

$$x_2 \in A \Leftrightarrow Yy(x_2) = 0$$

$$\Rightarrow x_2 \neq x_1 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{x_2 = \sup A} x_2 < x_1$$

La restrizione di $y(x)$ in $]x_2, x_1]$, e' continua in $]x_2, x_1]$ perche' lo e' $y(x)$ in (α, β) dato che e' ivi derivabile.

$$\lim_{x \rightarrow x_2^+} Yy(x) = Yy(x_2) = 0 \quad (*)$$

notiamo anche che

$$x > x_2 = \sup A \Rightarrow x \notin A \Leftrightarrow Yy(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow Yy(x) \neq 0 \quad \forall x \in]x_2, x_1]$$

quindi, $y(x)$ e' in effetti un prolungamento di una funzione di classe 2, che rispetta la condizione (*).

CASE: $x_1 < x_0$

Basta procedere in modo analogo a prima, considerando

$$B = \{x \in]x_1, x_0] \mid Yy(x) = 0\}$$

$$x_3 = \inf B$$

e avremo

$$x_3 \in A \Leftrightarrow Yy(x_3) = 0$$

$$y/[x_1, x_3[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_3^-} Yy(x) = Yy(x_3) = 0 \quad (**)$$

$$x < x_3 = \inf B \Rightarrow x \notin A \Leftrightarrow Yy(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow Yy(x) \neq 0 \quad \forall x \in [x_1, x_3[$$

quindi, $y(x)$ e' un prolungamento di una funzione di classe 2, che rispetta la condizione (**).

□

Example 6.12. Risolviamo la seguente equazione differenziale:

$$y' = |y|$$

che possiamo intendere come un'equazione differenziale a variabili separate:

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y) = X(x)Y(y) \\X(x) &= 1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ continua in } \mathbb{R} \\Y(y) &= |y| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ continua in } \mathbb{R} \\f(x, y) &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

(1)1. Troviamo le soluzioni di classe 1

Cerchiamo i punti y in cui $Y(y) = 0$:

$$Y(y) = 0 \Leftrightarrow |y| = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

allora la soluzione e'

$$y(x) = 0$$

(1)2. Troviamo le soluzioni di classe 2

Supponiamo di aver trovato $y(x)$. Poiche' e' di classe 2:

$$1. G_y \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$2. \exists y'(x) \wedge y'(x) = f(x, y(x)) = X(x)Y(y(x)) = |y(x)| \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

$$3. Y(y(x)) \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

allora

$$3. \Rightarrow |y(x)| \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \Leftrightarrow y(x) \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

$$\Rightarrow y(x) > 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \vee y(x) < 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \quad (3.1)$$

y e' continua perche' deriv.

Per quanto abbiamo visto in [6.11,pg.105], essa sara' del tipo:

$$y(x) = H(F(x) + k) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

$$G \text{ primitiva di } \frac{1}{Y(y)}, H \text{ inversa di } G, F \text{ primitiva di } X(x)$$

ovvero

$$F(x) \in \int X(x) dx = \int 1 dx = x + c$$

$$\text{scegliamo } F(x) = x \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

$$G(y) \in \int \frac{1}{Y(y)} dy = \int \frac{1}{|y|} dy = \log |y| + c$$

$$G(y) := \log |y| \quad \forall y \in \text{Im } y(x)$$

a questo punto, per la (4.1) possiamo distiguere due casi:

CASE: $y(x) < 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

$$G(y) = \log -y$$

$$H(x) = -e^x$$

allora,

$$y(x) = H(F(x) + k) = -e^{x+k} : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Fissiamo una $k \in \mathbb{R}$ e verifichiamo che effettivamente $-e^{x+k}$ e' una soluzione:

$$1. G_y \subseteq \mathbb{R}^2$$

e' vero

$$2. \exists y'(x) \wedge y'(x) = f(x, y(x)) = X(x)Y(y(x)) = |y(x)| \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

$$y'(x) = -e^{x+k}$$

$$|y(x)| = e^{x+k}$$

No!

quindi in questo caso non ci sono soluzioni.

CASE: $y(x) > 0 \forall x \in (\alpha, \beta)$

$$G(y) = \log y$$

$$H(x) = e^x$$

allora,

$$y(x) = H(F(x) + k) = e^{x+k} : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Fissiamo una $k \in \mathbb{R}$ e verifichiamo che effettivamente e^{x+k} e' una soluzione:

$$1. G_y \subseteq \mathbb{R}^2$$

e' vero

$$2. \exists y'(x) \wedge y'(x) = f(x, y(x)) = X(x)Y(y(x)) = |y(x)| \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

$$y'(x) = e^{x+k}$$

$$|y(x)| = e^{x+k}$$

$$\Rightarrow y'(x) = f(x, y(x))$$

quindi in questo caso, per ogni k otteniamo una soluzione.

Poiche' e^{x+k} e' definita in tutto $\mathbb{R}$, possiamo porre $(\alpha, \beta) = \mathbb{R}$, e otterremo effettivamente le soluzioni.

(1)3. Troviamo le soluzioni di classe 3

Se $y(x)$ e' una soluzione di classe 3 allora deve essere un prolungamento di e^{x+k} , e si deve avere:

$$\lim_{x \rightarrow \beta_1^-} Yy(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \beta_1^-} |e^{x+k}| = 0$$

ma questo e' assurdo perche' $e^{x+k} \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

□

6.2.2 Omogenee

Data $g(t) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, continua in (a, b) ,

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1)$$

si dice equazione differenziale di tipo omogeneo di I ordine.

Proposition 6.13. *L'integrale generale della (1) e'*

$$I_g = \{y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R} \mid y(x) = xz(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)\}$$

dove $z(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ e' soluzione dell'eq. diff. a variabili separate

$$z' = \frac{1}{x}(g(z) - z) \quad (1.1)$$

Proof: Intanto la (1) si puo' intendere come

$$y' = f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$f : B \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, \frac{y}{x} \in (a, b) \right\}$$

La (1.1) si puo' intendere come,

$$z' = \bar{f}(x, z) = \frac{1}{x}(g(z) - z)$$

$$\bar{f} : B' \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$B' = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, z \in (a, b) \} = \mathbb{R}^* \times (a, b)$$

Dobbiamo dimostrare che $I = I_g$, dove I e' l'insieme di tutte le soluzioni di (1).

(1)1. Prendiamo una $y(x) \in I$ e dimostriamo che $y(x) \in I_g$

Supponiamo che $y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Poiche' $y(x)$ e' una soluzione, si ha

$$1. \quad G_y \subseteq B \Leftrightarrow (x, y(x)) \in B \forall x \in (\alpha, \beta) \Leftrightarrow \frac{y(x)}{x} \in (a, b), \quad x \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \\ \Rightarrow 0 \notin (\alpha, \beta)$$

$$2. \quad \exists y'(x) \wedge y'(x) = f(x, y(x)) = g\left(\frac{y(x)}{x}\right) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Sia $z(x) = \frac{y(x)}{x} : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$. E' ben definita perche' $0 \notin (\alpha, \beta)$.

$$\begin{aligned} \exists z'(x) &= \frac{y'(x)x - y(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \left(y'(x) - \frac{y(x)}{x} \right) \underbrace{=}_{2.} \frac{1}{x} \left(g\left(\frac{y(x)}{x}\right) - \frac{y(x)}{x} \right) = \\ &= \frac{1}{x} (g(z(x)) - z(x)) \end{aligned}$$

E poiche'

$$\frac{y(x)}{x} \in (a, b), \quad x \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \Leftrightarrow G_z \subseteq \mathbb{R}^* \times (a, b) = B'$$

si ha che $z(x)$ e' una soluzione della (1.1)

(1)2. Prendiamo una $y(x) \in I_g$ e dimostriamo che $y(x) \in I$

$$y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y(x) \in I_g \Leftrightarrow y(x) = xz(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

dove $z(x)$ e' soluzione di (1.1) $\Leftrightarrow$

$$1. \quad G_z \subseteq B' = \mathbb{R}^* \times (a, b) \Leftrightarrow (x, z(x)) \in \mathbb{R}^* \times (a, b) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

$$\Rightarrow 0 \notin (\alpha, \beta) \Rightarrow \left(y(x) = xz(x) \Rightarrow z(x) = \frac{y(x)}{x} \right) \quad (3)$$

$$2. \quad \exists z'(x) \wedge z'(x) = \bar{f}(x, z(x)) = \frac{1}{x}(g(z(x)) - z(x)) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Poiche' la (1.1) e' un'equazione a variabili separate, possiamo trovare la soluzione $z(x)$ grazie alla prop. [6.11,pg.105].(nota ¹⁴)

¹⁴Qui stiamo sfruttando la continuita' di $g(t)$

Vogliamo dimostrare che $y(x)$ e' soluzione della (1.1),

$$\begin{aligned}\exists y'(x) = D[xz(x)] &= z(x) + xz'(x) \underbrace{=}_{(2)} z(x) + x \left(\frac{1}{x} (g(z(x)) - z(x)) \right) = \\ &= z(x) + g(z(x)) - z(x) = g(z(x)) \underbrace{=}_{(3)} g\left(\frac{y(x)}{x}\right) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)\end{aligned}$$

E poiche'

$$\frac{y(x)}{x} = z(x) \in (a, b), \quad x \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \Leftrightarrow G_y \subseteq B$$

si ha che $y(x)$ e' una soluzione della (1).

□

6.2.3 Lineari

Date $a(x), f(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, continue in (a, b) ,

$$y' = -a(x)y + f(x) \quad (1)$$

e' un'equazione differenziale lineare di primo ordine.

$$y' = -a(x)y \quad (2)$$

e' un'equazione differenziale lineare omogenea di primo ordine.

Proposition 6.14. *L'integrale generale della (2) e'*

$$I_g = \left\{ y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R} \mid y(x) = ke^{-A(x)} \quad k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \subseteq (a, b) \right\}$$

dove $A(x)$ e' una primitiva di $a(x)$

Proof: La (2) si puo' intendere come

$$y' = f(x, y) = X(x)Y(y) = -a(x)y$$

$$X(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad X(x) = -a(x)$$

$$Y(y) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Y(y) = y$$

$$f(x, y) : B \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$B = (a, b) \times \mathbb{R}$$

ovvero e' una equazione a variabili separate.

Sia I l'insieme di tutte le soluzioni di (2). Dimostriamo che $I = I_g$.

(1) 1. $I \subseteq I_g$

Sia $y(x) \in I$, $y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$, ovvero

$$1. \quad G_y \subseteq B \Leftrightarrow x \in (a, b) \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$$

$$2. \quad \exists y'(x) = -a(x)y(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Se $a(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$, allora, tutte e sole le soluzioni sono le funzioni costanti.

Supponiamo $a(x) \neq 0$ per qualche $x \in (a, b)$.

Poiche' la (2) e' un'equazione a variabili separate, possiamo studiarla utilizzando la prop. [6.11, pg.105].

(2) 1. Troviamo le soluzioni di classe 1

Cerchiamo i punti y in cui $Y(y) = 0$:

$$Y(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

allora la soluzione e'

$$y(x) = 0$$

In questo caso $y(x) \in I_g$ scegliendo $k = 0$.

⟨2⟩2. Troviamo le soluzioni di classe 2

Supponiamo che $y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ sia di classe 2, allora

$$Y(y(x)) = y(x) \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \quad (2.1)$$

Poiche' $y(x)$ e' derivabile, e' anche continua. Allora, $y(x)$ e' tutta positiva o tutta negativa:

$$y(x) \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$



$$y(x) > 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \quad \vee \quad y(x) < 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \quad (2.2)$$

y e' continua perche' deriv.

Per quanto abbiamo visto in [6.11,pg.105], essa sara' del tipo:

$$(\alpha, \beta) \subseteq (a, b), \quad y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

$$y(x) = H(F(x) + k) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

$$G \text{ primitiva di } \frac{1}{Y(y)} = \frac{1}{y} \text{ in } \text{Im } y(x),$$

$$H \text{ inversa di } G \text{ in } \text{Im } y(x), F \text{ primitiva di } X(x) = -a(x) \text{ in } (\alpha, \beta)$$

$$G(y) = \log |y|, \quad F(x) = -A(x), \quad \text{con } A(x) \text{ primitiva di } a(x)$$

per la (2.2) dobbiamo distinguere due casi:

CASE: $y(x) > 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

$$G(y) = \log |y| = \log y$$

$$H(z) = e^z$$

$$y(x) = H(F(x) + k) = e^{-A(x)+c} = e^{-A(x)} e^c \underset{k=e^c \neq 0}{=} k e^{-A(x)} \Rightarrow y(x) \in I_g$$

CASE: $y(x) < 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

$$G(y) = \log |y| = \log -y$$

$$H(z) = -e^z$$

$$y(x) = H(F(x) + c) = -e^{-A(x)+c} = -e^{-A(x)} e^c \underset{k=-e^c \neq 0}{=} k e^{-A(x)} \Rightarrow y(x) \in I_g$$

Quindi in entrambi i casi $y(x) \in I_g$

⟨2⟩3. Non esistono soluzioni di classe 3

Se per assurdo esiste $y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ soluzione di classe 3, allora si ha

$y(x) : (\alpha, \beta)$ e' un prolungamento di una soluzione $\bar{y}(x) : (\alpha_1, \beta_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe 2 e inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \alpha_1^+} Y y(x) = 0 \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow \beta_1^-} Y y(x) = 0$$

Poiche' $\bar{y}$ e' di classe 2, sara' del tipo:

$$\bar{y}(x) = k e^{-A(x)}, \quad \text{con } k \neq 0$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow \alpha_1^+} Y(\bar{y}(x)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha_1^+} k e^{-A(x)} = 0$$

ma questo e' assurdo, perche' $A(x)$ e' continua in (α, β) (essendo una primitiva), e quindi non puo' tendere a $+\infty$, per $x \rightarrow \alpha_1^+$, e inoltre $k \neq 0$.

Analogamente si vede che anche

$$\lim_{x \rightarrow \beta_1^-} Y(\bar{y}(x)) \neq 0$$

quindi e' assurdo che $y(x)$ sia una soluzione di classe 3.

Concludendo: tutte le soluzioni di classe 1, 2 sono contenute in I_g , soluzioni di classe di 3 non esistono, quindi $I \subseteq I_g$.

(1)2. Dimostriamo che $I_g \subseteq I$

Sia $y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$, un elemento di I_g , ovvero

$$y(x) = ke^{-A(x)}$$

$$G_y \subseteq (\alpha, \beta) \times \mathbb{R} \subseteq (a, b) \times \mathbb{R} = B$$

$$y'(x) = D \left[ke^{-A(x)} \right] = -a(x)ke^{-A(x)} = -a(x)y(x)$$

quindi $y(x)$ e' effettivamente una soluzione di (2).

□

Proposition 6.15. *L'integrale generale della (1) e'*

$$e^{-A(x)} \int e^{A(t)} f(t) dt$$

tenendo presente che l'integrale indefinito e' un insieme di primitive.

Proof:

(1)1. Utilizzando i teoremi che vedremo in seguito, si ha una immediata dimostrazione

Per la prop. [6.14,pg.111] $e^{-A(x)}$ e' una soluzione di (2). Il determinante Wroskiano, di (2) e'

$$W(x) = |e^{-A(x)}| \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Quindi, $\{e^{-A(x)}\}$ e' un sist. fondamentale di soluzioni della (2). Allora, per la prop. [6.25,pg.130],

$$I = \left\{ Y(x) + ke^{-A(x)} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

dove I e' l'integrale generale della (1) e $Y(x)$ e' una soluzione della (1). Per la prop. [6.26,pg.131], possiamo scegliere:

$$Y(x) = \gamma_1(x)y_1(x) = e^{-A(x)} \int_{x_0}^x \frac{f(t)W_{1,1}(t)}{W(t)} dt = e^{-A(x)} \int_{x_0}^x \frac{f(t)}{W(t)} dt = e^{-A(x)} \int_{x_0}^x f(t)e^{A(t)} dt$$

Quindi

$$\begin{aligned} I &= \left\{ e^{-A(x)} \int_{x_0}^x f(t)e^{A(t)} dt + ke^{-A(x)} \mid k \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ e^{-A(x)} \left(\int_{x_0}^x f(t)e^{A(t)} dt + k \right) \mid k \in \mathbb{R} \right\} = e^{-A(x)} \int f(t)e^{A(t)} dt \end{aligned}$$

(1)2. Dimostriamo, senza usare teoremi aggiuntivi, che l'integrale generale e' il seguente insieme:

$$I'_g = \left\{ Y(x) + ce^{-A(x)} : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

dove $Y(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ e' una particolare soluzione della (1). In altre parole, una soluzione della (1) e' la somma di una soluzione della (1) e di una soluzione della (2).

La (1) si puo' intendere come

$$y' = f(x, y) = -a(x)y + f(x)$$

$$f(x, y) : B \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$B = (a, b) \times \mathbb{R}$$

(3)1. Dimostriamo che presa $z(x) = Y(x) + ce^{-A(x)} \in I'_g$, allora $z(x) \in I'$

Essendo $Y(x)$ una soluzione della (1), si ha

$$Y'(x) = -a(x)Y(x) + f(x) \quad \forall x \in (a, b) \quad (1.1)$$

$$G_z \subseteq B$$

$$z'(x) = D[Y(x) + ce^{-A(x)}] = Y'(x) - a(x)ce^{-A(x)} = -a(x)Y(x) + f(x) - a(x)ce^{-A(x)} =$$

$$= -a(x)(Y(x) + ce^{-A(x)}) + f(x) = -a(x)z(x) + f(x)$$

quindi $z(x)$ e' proprio una soluzione di (1).

(3)2. Dimostriamo il viceversa, ovvero:

$$z(x) \in I' \Rightarrow z(x) \in I'_g \Leftrightarrow \Leftrightarrow \exists \bar{c} \in \mathbb{R} : z(x) = Y(x) + \bar{c}e^{-A(x)}$$

Prendiamo una soluzione $z(x)$.

La tesi equivale a dimostrare che

$$\exists \bar{c} \in \mathbb{R} : z(x) - Y(x) = \bar{c}e^{-A(x)} \quad \Leftrightarrow \quad z(x) - Y(x) \text{ e' soluzione della (2)}$$

prop.[6.14, pg. 111]

Poiche' $z(x), Y(x)$ sono soluzioni di (1), $\forall x \in (a, b)$ abbiamo

$$z'(x) = -a(x)z(x) + f(x)$$

$$Y'(x) = -a(x)Y(x) + f(x)$$

allora

$$D[z(x) - Y(x)] = z'(x) - Y'(x) = -a(x)z(x) + f(x) + a(x)Y(x) - f(x) = -a(x)(z(x) - Y(x))$$

e quindi $z(x) - Y(x)$ e' una soluzione della (2).

(2)1. A questo punto troviamo una particolare $Y(x)$ soluzione di (1)

Supponiamo che $Y(x) = g(x)e^{-A(x)}$ sia una soluzione della (1), dove g e' derivabile in (a, b) , allora da una parte

$$Y'(x) = -a(x)Y(x) + f(x) = -a(x)g(x)e^{-A(x)} + f(x)$$

e dall'altra

$$Y'(x) = D[g(x)e^{-A(x)}] = g'(x)e^{-A(x)} - a(x)e^{-A(x)}g(x)$$

quindi

$$-a(x)g(x)e^{-A(x)} + f(x) = g'(x)e^{-A(x)} - a(x)e^{-A(x)}g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g'(x)e^{-A(x)} \Leftrightarrow g'(x) = e^{A(x)}f(x)$$

Essendo $g(x)$ derivabile, e quindi continua, in (a, b) , per il teorema di Torricelli

$$g(x) = \int_{x_0}^x e^{A(t)}f(t) dt + \bar{c}$$

$$\text{con } x_0 \in (a, b), \quad \bar{c} \in \mathbb{R}$$

Possiamo a questo punto chiederci se

$$Y(x) = g(x)e^{-A(x)} = e^{-A(x)} \left(\int_{x_0}^x e^{A(t)}f(t) dt + \bar{c} \right)$$

sia una soluzione della (1). In effetti, lo e':

$$Y'(x) = g'(x)e^{-A(x)} - a(x)e^{-A(x)}g(x) = e^{A(x)}f(x)e^{-A(x)} - a(x)e^{-A(x)}g(x) =$$

$$= -a(x)e^{-A(x)}g(x) + f(x) = -a(x)Y(x) + f(x)$$

Al variare di $\bar{c} \in \mathbb{R}$ otteniamo infinite soluzioni. Scegliamo allora quella con $\bar{c} = 0$:

$$Y(x) = g(x)e^{-A(x)} = e^{-A(x)} \int_{x_0}^x e^{A(t)} f(t) dt$$

⟨2⟩2. Q.E.D.

Abbiamo in precedenza visto che l'integrale generale della (1) è:

$$I'_g = \left\{ Y(x) + ce^{-A(x)} : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

adesso conosciamo anche una $Y(x)$, quindi

$$I'_g = \left\{ e^{-A(x)} \left(\int_{x_0}^x e^{A(t)} f(t) dt + c \right) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

che in forma compatta possiamo scrivere come:

$$e^{-A(x)} \int e^{A(t)} f(t) dt$$

□

6.2.4 Di Bernoulli

Date $a(x), f(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continue in (a, b) , $m \in \mathbb{R}$, la seguente

$$y' = -a(x)y + f(x)y^m \quad (1)$$

è l'equazione differenziale di Bernoulli.

Consideriamo l'equazione lineare¹⁵

$$\begin{aligned} z' &= (1-m)(-a(x)z + f(x)) \Leftrightarrow z' = -a_1(x)z + f_1(x) \quad (2) \\ a_1(x) &= (1-m)a(x) \\ f_1(x) &= (1-m)f(x) \end{aligned}$$

Siano dati i seguenti insiemi

I = integrale generale di (1)

$$I_{\geq} = \{y(x) \in I \mid \operatorname{Im} y \geq 0\}, \quad I_{>} = \{y(x) \in I \mid \operatorname{Im} y > 0\}, \quad I_{\leq}, \quad I_{<}$$

Z = integrale generale di (2)

$$Z_{\geq} = \{z(x) \in Z \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}, \quad Z_{>} = \{z(x) \in Z \mid \operatorname{Im} z > 0\}, \quad Z_{\leq}, \quad Z_{<}$$

$$I_0 = \left\{ y(x) \in \mathbb{R}^{(\alpha, \beta)} \mid \operatorname{Im} y = 0 \right\} \quad \text{ovvero, l'insieme delle funzioni identicamente nulle}$$

$$I_1 = \left\{ z(x)^{\frac{1}{1-m}} \mid z(x) \in Z_{>} \right\}$$

$$I_2 = \left\{ -z(x)^{\frac{1}{1-m}} \mid z(x) \in Z_{>} \right\}$$

$$I_3 = \left\{ -(-z(x))^{\frac{1}{1-m}} \mid z(x) \in Z_{<} \right\}$$

Distinguiamo i seguenti casi:

CASE: $m = 0, 1$

Si ritorna ad un'equazione differenziale lineare, vedi [6.14,pg.111].

CASE: $m \notin \{0, 1\}$

¹⁵ che sappiamo risolvere per quanto visto in [6.2.3,pg.111]

CASE: $m \notin \mathbb{Z}$ $I_{>} = I_1$

CASE: $0 < m < 1$ $I = I_{\geq}$

$I \supseteq I_0 \cup I_1$

Quindi, in questo caso, non conosciamo a priori tutto I , ovvero sappiamo che le funzioni in $I_0 \cup I_1$ sono soluzioni, ma potrebbero essercene anche altre. In particolare, poichè $I = I_{\geq}$, potrebbero esistere soluzioni $y(x)$ tali che $0 \in \text{Im } y$.

CASE: $m > 1$

CASE: $m < 0$ $I = I_0 \cup I_1$

CASE: $m \in \mathbb{Z}$ $I = I_{\geq} = I_{>} = I_1$

CASE: m dispari $I = I_{>} \cup I_{<} \cup I_0$

CASE: $m \geq 3$ $I_{<} = I_2$

CASE: $m \leq -1$ $I = I_0 \cup I_1 \cup I_2$

CASE: m pari $I = I_1 \cup I_2$

CASE: $m \geq 2$ $I_{<} = I_3$

CASE: $m \leq -2$ $I = I_0 \cup I_1 \cup I_3$

$$I = I_1 \cup I_3$$

Proof:

CASE: $m \notin \{0, 1\}$

⟨2⟩1. Dim. che $I_{>} = I_1$

Sia $y(x) \in I_{>}$, cioè

$$y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y(x) > 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

⟨3⟩1. Dimostriamo che $y(x) \in I_1$

Poniamo $z(x) = y(x)^{1-m} \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$. E' una posizione lecita perchè $y(x)$ e' positiva, e quindi ha senso anche se $1 - m < 0$.

Si ha subito che

$$y(x) \in I_{>} \Rightarrow \text{Im } z > 0$$

Poiche' $y(x)$ e' soluzione della (1), abbiamo

$$G_y \subseteq B$$

$$\exists y'(x) = -a(x)y(x) + f(x)y(x)^m \quad (*)$$

$z(x)$ e' derivabile perche' composizione di funzioni derivabili:

$$z'(x) = (1-m)y(x)^{-m}y'(x) \underbrace{=}_{(*)} (1-m)y(x)^{-m}(-a(x)y(x) + f(x)y(x)^m) =$$

$$= - \underbrace{(1-m)a(x)}_{a_1(x)} \underbrace{y(x)^{1-m}}_{z(x)} + \underbrace{(1-m)f(x)}_{f_1(x)} = -a_1(x)z(x) + f_1(x)$$

$$z'(x) = -a_1(x)z(x) + f_1(x) \Rightarrow z(x) \in Z$$

Quindi

$$z(x) \in Z, \text{ Im } z > 0 \Rightarrow z(x) \in Z_{>}$$

Infine,

$$z(x) = y(x)^{1-m} \underbrace{\Leftrightarrow}_{(!)} y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-m}}$$

(!) Operazione lecita perche' $y(x)$ e' positiva.

Abbiamo cosi' provato che $y(x) \in I_1$.

$\langle 3 \rangle 2$. Prendiamo $y(x) \in I_1$ e dimostriamo che $y(x) \in I_{>}$

$$y(x) \in I_1 \Rightarrow \begin{cases} y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-m}} \\ z(x) \in Z_{>} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\text{Im } y > 0$$

$$z'(x) = -a_1(x)z(x) + f_1(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \quad (**)$$

Calcoliamo $y'(x)$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{1-m} z(x)^{\frac{1}{1-m}-1} z'(x) \underbrace{=}_{(**)} \\ &= \frac{1}{1-m} z(x)^{\frac{1}{1-m}-1} (-a_1(x)z(x) + f_1(x)) \underbrace{=}_{\text{espandendo } a_1, f_1} \\ &= \frac{1}{1-m} z(x)^{\frac{1}{1-m}-1} (-(1-m)a(x)z(x) + (1-m)f(x)) \underbrace{=}_{\text{moltiplicando}} \\ &= -a(x)z(x)^{\frac{1}{1-m}} + f(x)z(x)^{\frac{1}{1-m}-1} = \\ &= -a(x)z(x)^{\frac{1}{1-m}} + f(x)z(x)^{\frac{m}{1-m}} = \\ &= -a(x)y(x) + f(x)y(x)^m \end{aligned}$$

$$y'(x) = -a(x)y(x) + f(x)y(x)^m \Rightarrow y(x) \in I$$

Quindi

$$y(x) \in I, \text{ Im } y > 0 \Rightarrow y(x) \in I_{>}$$

che e' quello che volevamo dimostrare.

$\langle 2 \rangle 2$. Lemma 1.

$$m < 0 \vee m > 1 \Rightarrow I \setminus I_0 = I_{>} \cup I_{<}$$

Dimostriamo intanto che $0 \notin \text{Im } y$.

Se $m < 0$, si ha $B \subseteq (a, b) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$, perche' m e' negativo e quindi y^m non sarebbe un'operazione lecita: $0^m = \frac{1}{0^{-m}}$ non avrebbe senso. Allora, $I_0 = \emptyset$ e inoltre

$$y(x) \in I \Rightarrow G_y \subseteq B \subseteq (a, b) \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \text{Im } y \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow 0 \notin \text{Im } y$$

Supponiamo adesso $m > 1$ e sia $y(x) \in I \setminus I_0$, ovvero $y(x)$ e' una soluzione non identicamente nulla di (1).

Supponiamo per assurdo che $0 \in \text{Im } y$. Allora,

$$y(x) \in I \Rightarrow y'(x) = -a(x)y(x) + f(x)y(x)^m \stackrel{(**)}{=} y(x) \underbrace{(-a(x) + f(x)y(x)^{m-1})}_{-b_1(x)} = -b_1(x)y(x)$$

quindi $y(x)$ e' soluzione della

$$y' = -b_1(x)y \quad (3)$$

che e' un'equazione differenziale lineare omogenea, quindi la $y(x)$ per la prop [6.14,pg.111] e' del tipo

$$y(x) = ke^{-B_1(x)} \quad k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

$k \neq 0$ perche' altrimenti $y \in I_0$, contro ipotesi.

$$0 \in \text{Im } y \Rightarrow \exists x_0 : ke^{-B_1(x_0)} = 0$$

assurdo.

Nota: abbiamo bisogno di supporre $m > 1$ perche' se $m < 1$, allora $m-1 < 0$ e non avrebbe senso considerare $y(x)^{m-1} = \frac{1}{y(x)^{1-m}}$ dato che $0 \in \text{Im } y$. Quindi non avremmo potuto mettere in evidenza in (**)

Infine,

$$y(x) \in I \Rightarrow \exists y'(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow y(x) \text{ e' continua in } (\alpha, \beta)$$

$$\begin{cases} y(x) \text{ continua in } (\alpha, \beta) \\ 0 \notin \text{Im } y \end{cases} \stackrel{[6.10, \text{pg.105}]}{\Rightarrow} \text{Im } y > 0 \vee \text{Im } y < 0$$

e quindi $y(x) \in I_{>} \cup I_{<}$

Per l'arbitrarieta' di $y(x)$ si ha $I \setminus I_0 \subseteq I_{>} \cup I_{<}$ e poiche' per definizione vale la $\supseteq$, abbiamo cosi' dimostrato l'uguaglianza.

_____ (fine lemma) _____

CASE: $m \notin \mathbb{Z}$

$\langle 3 \rangle 1$. Dim. che $I = I_{\geq}$

L'insieme B di definizione della (1) e'

$$B = (a, b) \times [0, +\infty[$$

infatti dobbiamo tenere conto degli intervalli di definizione di $a(x), f(x)$ e del fatto che, essendo m non intero, y^m e' definito solo per y non negative.

Quindi, presa $y(x) \in I$, si ha

$$y(x) \in I \Rightarrow G_y \subseteq B = (a, b) \times [0, +\infty[\Rightarrow y(x) \in I_{\geq}$$

Quindi $I \subseteq I_{\geq}$, e poiche' per definizione $I \supseteq I_{\geq}$ si ha la tesi.

CASE: $0 < m < 1$

$\langle 4 \rangle 1$. Dim. che $I \supseteq I_0 \cup I_1$

Per definizione.

CASE: $m > 1$

$\langle 4 \rangle 1$. Dim. che $I = I_0 \cup I_1$

$\langle 5 \rangle 1$. Dim $\subseteq$

Sia $y(x) \in I$. Se $y(x) \in I_0$, non abbiamo nulla da dimostrare. Supponiamo che $y(x) \notin I_0$. Dimostriamo che $y(x) \in I_1$.

$$\begin{cases} y(x) \in I \setminus I_0 \\ m > 1 \end{cases} \xRightarrow[\text{Lemma 1.}]{} \in I_{>} \cup I_{<} \quad (*)$$

Ma poiche' $I = I_{\geq}$, si ha

$$y(x) \in I \xRightarrow[m \notin \mathbb{Z}]{} I_{\geq} \Rightarrow y(x) \notin I_{<}$$

$$\xRightarrow{(*)} y(x) \in I_{>} \xRightarrow[m \notin \{0,1\}]{} I_1$$

$\langle 5 \rangle 2$. Dim $\supseteq$

Per definizione.

CASE: $m < 0$

$\langle 4 \rangle 1$. Dim. che $I = I_1$

$I_1 \subseteq I$ e' vero per definizione.

Si ha che $B = (a, b) \times]0, +\infty[$, ovvero stiamo escludendo lo zero, perche' essendo m negativo, $y^m = \frac{1}{y^{-m}}$.

Quindi non esistono soluzioni identicamente nulle, ovvero $I_0 = \emptyset$. Infine,

$$y(x) \in I \Rightarrow G_y \subseteq B \Rightarrow \text{Im } y \subseteq]0, +\infty[\Rightarrow \text{Im } y > 0 \Rightarrow y(x) \in I_{>} \xRightarrow[m \notin \{0,1\}]{} I_1$$

CASE: $m \in \mathbb{Z}$

$\langle 3 \rangle 1$. Dim. che $I = I_{<} \cup I_{>} \cup I_0$

L'inclusione $\supseteq$ si ha per definizione. Si ha

$$m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\} \Rightarrow m \geq 2 \vee m \leq -1 \Rightarrow m > 1 \vee m < 0$$

Per il lemma 1. si ha quindi

$$m > 1 \vee m < 0 \xRightarrow[\text{lemma 1.}]{} I \setminus I_0 \subseteq I_{<} \cup I_{>}$$

e quindi la tesi.

CASE: m dispari

$\langle 4 \rangle 1$. Dim. che $I_{<} = I_2$

Si procede analogamente alla dimostrazione $I_{>} = I_1$. Elenchiamo solo le differenze: nel primo passo si ha le differenze del primo passo

$$m \text{ dispari} \Rightarrow 1 - m \text{ pari} \quad (d.1)$$

$$\begin{cases} y(x) \in I_{<} \\ z(x) = y(x)^{1-m} \end{cases} \xRightarrow[(d.1)]{} \text{Im } z > 0$$

$$z(x) = y(x)^{1-m} \xRightarrow[y(x) \in I_{<}]{} -z(x)^{\frac{1}{1-m}} = y(x)$$

nel secondo passo si ha:

$$\text{Im } y < 0$$

$$y'(x) = a(x)z(x)^{\frac{1}{1-m}} - f(x)z(x)^{\frac{m}{1-m}} =$$

$$= a(x)(-y(x)) - f(x)(-y(x))^m \xRightarrow[m \text{ dispari}]{} = -a(x)y(x) + f(x)y(x)^m$$

CASE: $m \geq 3$

$\langle 5 \rangle 1$. Dim. che $I = I_0 \cup I_1 \cup I_2$

$$I \underset{m \in \mathbb{Z}}{=} I_{>} \cup I_{<} \cup I_0 \underset{m \notin \{0,1\}, m \text{ dispari}}{=} I_1 \cup I_2 \cup I_0$$

CASE: $m \leq -1$

$\langle 5 \rangle 1$. Dim. che $I = I_1 \cup I_2$

Poiche' m e' negativo, le funzioni nulle non sono soluzioni (al solito, non avrebbe senso 0^m), quindi $I_0 = \emptyset$. Allora,

$$I \underset{m \in \mathbb{Z}}{=} I_{>} \cup I_{<} \cup I_0 \underset{I_0 = \emptyset}{=} I_{>} \cup I_{<} \underset{m \notin \{0,1\}, m \text{ dispari}}{=} I_1 \cup I_2$$

CASE: m pari

$\langle 4 \rangle 1$. Dim. che $I_{<} = I_3$

Si procede analogamente alla dimostrazione $I_{>} = I_1$. Elenchiamo solo le differenze: nel primo passo si ha le differenze del primo passo

m pari $\Rightarrow 1 - m$ dispari (p.1)

$$\begin{cases} y(x) \in I_{<} \\ z(x) = y(x)^{1-m} \end{cases} \underset{(p.1)}{\Rightarrow} \text{Im } z < 0$$

$$z(x) = y(x)^{1-m} \Leftrightarrow -z(x) = -y(x)^{1-m} \underset{m \text{ dispari}}{=} (-y(x))^{1-m} \underset{\text{Im } -y, \text{Im } -z > 0}{\Rightarrow} (-z(x))^{\frac{1}{1-m}} = -y(x)$$

nel secondo passo si ha:

$$\text{Im } y < 0, \quad y(x) = -(-z(x))^{\frac{1}{1-m}}$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= a(x)(-z(x))^{\frac{1}{1-m}} + f(x)(-z(x))^{\frac{m}{1-m}} = \\ &= a(x)(-y(x)) + f(x)(-y(x))^m \underset{m \text{ pari}}{=} -a(x)y(x) + f(x)y(x)^m \end{aligned}$$

CASE: $m \geq 2$

$\langle 5 \rangle 1$. Dim. che $I = I_0 \cup I_1 \cup I_3$

$$I \underset{m \in \mathbb{Z}}{=} I_{>} \cup I_{<} \cup I_0 \underset{m \notin \{0,1\}, m \text{ pari}}{=} I_1 \cup I_3 \cup I_0$$

CASE: $m \leq -2$

$\langle 5 \rangle 1$. Dim. che $I = I_1 \cup I_3$

Poiche' m e' negativo, le funzioni nulle non sono soluzioni (al solito, non avrebbe senso 0^m), quindi $I_0 = \emptyset$. Allora,

$$I \underset{m \in \mathbb{Z}}{=} I_{>} \cup I_{<} \cup I_0 \underset{I_0 = \emptyset}{=} I_{>} \cup I_{<} \underset{m \notin \{0,1\}, m \text{ pari}}{=} I_1 \cup I_3$$

□

6.3 Equazioni lineari

Definition 6.16. Sia data la seguente equazione differenziale:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

dove

$$B = (a, b) \times \mathbb{R}^n$$

$$f : B \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = -a_1(x)y^{(n-1)} - a_2(x)y^{(n-2)} - \dots - a_{n-1}(x)y' - a_n(x)y + g(x)$$

$$a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

che possiamo indicare con

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = g(x) \quad (1)$$

La (1) si chiama *equazione differenziale lineare* in (a, b) , di ordine n , completa, di coefficienti $a_1(x), \dots, a_n(x)$ e termine noto $g(x)$. L'equazione *omogenea* associata alla (1) e'

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (2)$$

Proposition 6.17. Siano date le seguenti $m \geq 1$ equazioni diff. lineari in (a, b) :

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = g_i(x) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

Se $y_1, y_2, \dots, y_m : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ sono rispettivamente soluzioni delle equazioni (1), allora la funzione

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \dots + k_m y_m(x)$$

e' soluzione dell'equazione differenziale

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = k_1 g_1(x) + k_2 g_2(x) + \dots + k_m g_m(x) \quad (3)$$

e questo per ogni scelta di $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{R}$.

Proof: Procediamo per induzione.

(1)1. Base dell'induzione: $m = 1$

Per $m = 1$ abbiamo $y(x) = k_1 y_1(x)$, e inoltre l'equazione (3) diventa:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = k_1 g_1(x) \quad (3.1)$$

Poiche'

$$y^{(j)}(x) = k_1 y_1^{(j)}(x) \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

sostituendo $y(x)$ nella (3.1), si ha:

$$k_1 y_1^{(n)}(x) + k_1 a_1(x) y_1^{(n-1)}(x) + \dots + k_1 a_{n-1}(x) y_1^{(1)}(x) + k_1 a_n(x) y_1(x) = k_1 g_1(x) \Leftrightarrow$$

$$y_1^{(n)}(x) + a_1(x) y_1^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x) y_1^{(1)}(x) + a_n(x) y_1(x) = g_1(x)$$

e quest'ultima uguaglianza e' vera perche' $y_1(x)$ e' soluzione dell'equazione:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y^{(1)} + a_n(x)y = g_1(x) \quad (3.2)$$

(1)2. Supponiamo la tesi vera per $m - 1$ e dimostriamo per m

Poiche' la tesi e' vera per $m - 1$ si ha che la funzione

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_{m-1} y_{m-1}(x)$$

e' soluzione dell'equazione differenziale

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = k_1 g_1(x) + k_2 g_2(x) + \cdots + k_{m-1} g_{m-1}(x)$$

ovvero, si ha la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} & \left(k_1 y_1^{(n)}(x) + k_2 y_2^{(n)}(x) + \cdots + k_{m-1} y_{m-1}^{(n)}(x) \right) + \\ & + a_1(x) \left(k_1 y_1^{(n-1)}(x) + k_2 y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + k_{m-1} y_{m-1}^{(n-1)}(x) \right) + \\ & + \cdots + \\ & + a_n(x) (k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_{m-1} y_{m-1}(x)) = \\ & = k_1 g_1(x) + k_2 g_2(x) + \cdots + k_{m-1} g_{m-1}(x) \quad (*) \end{aligned}$$

Poiche', per quanto visto nel passo precedente, la funzione $k_m y_m(x)$ e' soluzione della equazione con termine noto $k_m g_m(x)$, si ha

$$k_m y_m^{(n)}(x) + a_1(x) k_m y_m^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x) k_m y_m^{(1)}(x) + a_n(x) k_m y_m(x) = k_m g_m(x) \quad (**)$$

Allora sommando membro a membro la (*) con la (**) si ha:

$$\begin{aligned} & \left(k_1 y_1^{(n)}(x) + k_2 y_2^{(n)}(x) + \cdots + k_m y_m^{(n)}(x) \right) + \\ & + a_1(x) \left(k_1 y_1^{(n-1)}(x) + k_2 y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + k_m y_m^{(n-1)}(x) \right) + \\ & + \cdots + \\ & + a_n(x) (k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_m y_m(x)) = \\ & = k_1 g_1(x) + k_2 g_2(x) + \cdots + k_m g_m(x) \quad (4) \end{aligned}$$

E poiche'

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_m y_m(x)$$

$$D^{(j)}[y(x)] = k_1 y_1^{(j)}(x) + k_2 y_2^{(j)}(x) + \cdots + k_m y_m^{(j)}(x)$$

Per la (4) si ha che $y(x)$ e' soluzione dell'equazione

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = k_1 g_1(x) + k_2 g_2(x) + \cdots + k_m g_m(x)$$

□

Proposition 6.18. *Sia data la seguente equazione diff. lineare omogenea in (a, b) :*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (2)$$

Se $y_1, y_2, \dots, y_m : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ sono tutte soluzioni della (2), allora la funzione

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_m y_m(x)$$

e' ancora soluzione della (2), e questo per ogni scelta di $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{R}$.

Proof: Basta applicare la prop [6.17,pg.121]. scegliendo $g_i(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \forall i = 1, \dots, m$. □

Lemma 6.19. *Sia data la seguente funzione reale:*

$$M(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{bmatrix} : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dove $a_{ij}(x)$ sono tutte funzioni reali derivabili in (a, b) . In altre parole M e' il determinante di una matrice formata da funzioni.

Si ha

$$M'(x) = \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \dots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \dots & a'_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \dots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Proof: Procediamo per induzione su n

(1)1. $n = 1$

$$M(x) = |a_{11}(x)| = a_{11}(x)$$

$$M'(x) = a'_{11}(x)$$

quindi la base e' vera.

(1)2. Supponiamo che la tesi sia vera per $n - 1$ e dimostriamola per n

Poniamo

$$M'(x)_1 := \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \dots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$M'(x)_2 := \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \dots & a'_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$\dots$$

$$M'(x)_n := \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \dots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

La tesi che dobbiamo dimostrare e':

$$M'(x) = \sum_{i=1}^n M'(x)_i$$

Per il teorema di Laplace, sviluppando $M(x)$ lungo la prima riga, abbiamo

$$M(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{1i}(x) N_{1i}(x)$$

dove $N_{1i}(x)$ e' il determinante del minore complementare di posto $(1, i)$, ed e' quindi una matrice $n - 1 \times n - 1$. La derivata prima di $M(x)$ e' quindi

$$M'(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a'_{1i}(x) N_{1i}(x) + (-1)^{1+i} a_{1i}(x) N'_{1i}(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a'_{1i}(x) N_{1i}(x) + \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{1i}(x) N'_{1i}(x) \quad (1)$$

Sempre per Laplace si ha

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a'_{1i}(x) N_{1i}(x) = \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \dots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} = M'(x)_1$$

Quindi sostituendo nella (1) abbiamo

$$M'(x) = M'(x)_1 + \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{1i}(x) N'_{1i}(x) \quad (1.1)$$

Per definizione si ha

$$N_{1i}(x) = \begin{vmatrix} a_{2i_1}(x) & a_{2i_2}(x) & \dots & a_{2i_{n-1}}(x) \\ a_{3i_1}(x) & a_{3i_2}(x) & \dots & a_{3i_{n-1}}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ni_1}(x) & a_{ni_2}(x) & \dots & a_{ni_{n-1}}(x) \end{vmatrix}$$

$$\text{con } i_k = \begin{cases} k & k < i \\ k+1 & k \geq i \end{cases}$$

Poiche' $N_{1i}(x)$ e' una matrice $n-1 \times n-1$, per l'Hp induttiva abbiamo:

$$N'_{1i}(x) = \begin{vmatrix} a'_{2i_1}(x) & a'_{2i_2}(x) & \dots & a'_{2i_{n-1}}(x) \\ a_{3i_1}(x) & a_{3i_2}(x) & \dots & a_{3i_{n-1}}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ni_1}(x) & a_{ni_2}(x) & \dots & a_{ni_{n-1}}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{2i_1}(x) & a_{2i_2}(x) & \dots & a_{2i_{n-1}}(x) \\ a'_{3i_1}(x) & a'_{3i_2}(x) & \dots & a'_{3i_{n-1}}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ni_1}(x) & a_{ni_2}(x) & \dots & a_{ni_{n-1}}(x) \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{2i_1}(x) & a_{2i_2}(x) & \dots & a_{2i_{n-1}}(x) \\ a_{3i_1}(x) & a_{3i_2}(x) & \dots & a_{3i_{n-1}}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{ni_1}(x) & a'_{ni_2}(x) & \dots & a'_{ni_{n-1}}(x) \end{vmatrix} = N'_{1i}(x)_2 + N'_{1i}(x)_3 + \dots + N'_{1i}(x)_n$$

dove abbiamo posto

$$N'_{1i}(x)_j := \begin{vmatrix} a_{2i_1}(x) & a_{2i_2}(x) & \dots & a_{2i_{n-1}}(x) \\ a_{3i_1}(x) & a_{3i_2}(x) & \dots & a_{3i_{n-1}}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j-1,i_1}(x) & a_{j-1,i_2}(x) & \dots & a_{j-1,i_{n-1}}(x) \\ a'_{ji_1}(x) & a'_{ji_2}(x) & \dots & a'_{ji_{n-1}}(x) \\ a_{j+1,i_1}(x) & a_{j+1,i_2}(x) & \dots & a_{j+1,i_{n-1}}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ni_1}(x) & a_{ni_2}(x) & \dots & a_{ni_{n-1}}(x) \end{vmatrix}$$

Con queste posizioni abbiamo:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{1i}(x) N'_{1i}(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{1i}(x) N'_{1i}(x)_2 + \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{1i}(x) N'_{1i}(x)_3 + \dots +$$

$$+ \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{1i}(x) N'_{1i}(x)_n \quad (2)$$

Consideriamo la prima sommatoria:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{1i}(x) N'_{1i}(x)_2 = \\
& = a_{11}(x) \begin{vmatrix} a'_{22}(x) & a'_{23}(x) & \dots & a'_{2n}(x) \\ a_{32}(x) & a_{33}(x) & \dots & a_{3n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2}(x) & a_{n3}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \\
& + a_{12}(x) \begin{vmatrix} a'_{21}(x) & a'_{23}(x) & a'_{24}(x) & \dots & a'_{2n}(x) \\ a_{31}(x) & a_{33}(x) & a_{34}(x) & \dots & a_{3n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n3}(x) & a_{n4}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \dots + \\
& + a_{1n}(x) \begin{vmatrix} a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \dots & a'_{2,n-1}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & \dots & a_{3,n-1}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{n,n-1}(x) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

che e' proprio lo sviluppo di Laplace, secondo la prima riga, del determinante:

$$M'(x)_2 = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \dots & a'_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

e quindi

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{1i}(x) N'_{1i}(x)_2 = M'(x)_2$$

procedendo analogamente si arriva a:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{1i}(x) N'_{1i}(x)_j = M'(x)_j, \quad j = 2, 3, \dots, n$$

Allora sostituendo nella (2) abbiamo

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{1i}(x) N'_{1i}(x) = M'(x)_2 + M'(x)_3 + \dots + M'(x)_n \quad (3)$$

Infine, dalla (1.1) arriviamo a:

$$M'(x) = M'(x)_1 + \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{1i}(x) N'_{1i}(x) \underbrace{=}_{(3)} M'(x)_1 + M'(x)_2 + M'(x)_3 + \dots + M'(x)_n$$

che e' la tesi. □

Proposition 6.20. *Sia data la seguente equazione diff. lineare omogenea in (a, b) :*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (2)$$

e siano $y_1, \dots, y_n : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ sue soluzioni¹⁶.

¹⁶nota: sono esattamente in numero n

Definita la seguente funzione $(a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^{n,n}$:

$$\overline{W}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & \dots & y_n^{(1)}(x) \\ y_1^{(2)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \dots & y_n^{(2)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

e definita la funzione

$$W(x) = \det \overline{W}(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

chiamata determinante Wroskiano relativo a $y_1, \dots, y_n$. Si ha:

$$W'(x) = -a_1(x)W(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

Se poi $a_1, \dots, a_n$ sono funzioni continue in (a, b) , allora scelto un arbitrario $x_0 \in (a, b)$, si ha

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x a_1(t) dt} \quad \forall x \in (a, b)$$

Quest'ultima viene chiamata formula di Liouville.

Proof:

(1)1. Dim 1.

E' chiaro che tutte le funzioni in $\overline{W}(x)$ sono derivabili in (a, b) , allora usando il lemma [6.19,pg.122], calcoliamo $W(x)$:

$$\begin{aligned} W(x) = & \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & \dots & y_n^{(1)}(x) \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & \dots & y_n^{(1)}(x) \\ y_1^{(2)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \dots & y_n^{(2)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & \dots & y_n^{(1)}(x) \\ y_1^{(2)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \dots & y_n^{(2)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \dots + \\ & + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & \dots & y_n^{(1)}(x) \\ y_1^{(2)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \dots & y_n^{(2)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & \dots & y_n^{(1)}(x) \\ y_1^{(2)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \dots & y_n^{(2)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

i primi $n-1$ addendi sono tutti nulli perche' hanno due righe uguali, quindi

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & \dots & y_n^{(1)}(x) \\ y_1^{(2)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \dots & y_n^{(2)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \quad (3)$$

poiche' $y_i(x)$ e' soluzione della (2), si ha

$$y_i^{(n)}(x) = -a_1(x)y_i^{(n-1)}(x) - \dots - a_n(x)y_i(x)$$

sostituendo in (3), abbiamo

$$\begin{aligned}
 W(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1^{(1)}(x) & \dots & y_n^{(1)}(x) \\ y_1^{(2)}(x) & \dots & y_n^{(2)}(x) \\ \dots & & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ -a_1(x)y_1^{(n-1)}(x) - \dots - a_n(x)y_1(x) & \dots & -a_1(x)y_n^{(n-1)}(x) - \dots - a_n(x)y_n(x) \end{vmatrix} \stackrel{\text{prop. determ.}}{=} \\
 &= \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1^{(1)}(x) & \dots & y_n^{(1)}(x) \\ y_1^{(2)}(x) & \dots & y_n^{(2)}(x) \\ \dots & & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ -a_1(x)y_1^{(n-1)}(x) & \dots & -a_1(x)y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1^{(1)}(x) & \dots & y_n^{(1)}(x) \\ y_1^{(2)}(x) & \dots & y_n^{(2)}(x) \\ \dots & & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ -\sum_{i=2}^n a_i(x)y_1^{(n-i)}(x) & \dots & -\sum_{i=2}^n a_i(x)y_n^{(n-i)}(x) \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

il secondo addendo e' nullo perche' l'ultima riga e' combinazione lineare delle prime $n-1$ righe, quindi

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1^{(1)}(x) & \dots & y_n^{(1)}(x) \\ y_1^{(2)}(x) & \dots & y_n^{(2)}(x) \\ \dots & & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ -a_1(x)y_1^{(n-1)}(x) & \dots & -a_1(x)y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = -a_1(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1^{(1)}(x) & \dots & y_n^{(1)}(x) \\ y_1^{(2)}(x) & \dots & y_n^{(2)}(x) \\ \dots & & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = -a_1(x)W(x)$$

(1)2. Dim 2.

Supponiamo adesso che $a_1, \dots, a_n$ siano funzioni continue in (a, b) , allora la relazione

$$W'(x) = -a_1(x)W(x)$$

mostra che $W(x)$ e' soluzione dell'equazione differenziale omogenea di primo grado:

$$y' = -a_1(x)y \quad (*)$$

Per quanto abbiamo visto in [6.14, pg. 111], l'integrale generale della (*) e'

$$\left\{ y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R} \mid y(x) = ke^{-A_1(x)} \quad \forall x \in (\alpha, \beta), \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

dove $A_1(x)$ e' una primitiva di $a_1(x)$. Quindi, poiche' $W(x)$ e' una soluzione, appartiene all'integrale generale:

$$\exists k \in \mathbb{R} : W(x) = ke^{-A_1(x)}$$

$$a_1(x) \text{ continua in } (a, b) \quad \stackrel{\text{thm Torricelli}}{\Rightarrow} \quad A_1(x) = \int_{x_0}^x a_1(t) dt$$

dove x_0 e' un numero arbitrario in (a, b) .

Concludendo:

$$W(x) = ke^{-\int_{x_0}^x a_1(t) dt}$$

$$W(x_0) = ke^{-\int_{x_0}^{x_0} a_1(t) dt} = ke^0 = k$$

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x a_1(t) dt}$$

□

Proposition 6.21. Sia data la seguente equazione diff. lineare omogenea in (a, b) :

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (2)$$

Con $a_1, \dots, a_n$ funzioni continue in (a, b) . Siano $y_1, \dots, y_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sue soluzioni. Sia $W(x)$ il determinante Wroskiano relativo ad esse. Si ha

1. $\exists x_0 \in (a, b) : W(x_0) \neq 0 \Leftrightarrow W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
2. $\exists x_0 \in (a, b) : W(x_0) = 0 \Leftrightarrow W(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$

Nel caso 1. diremo che le soluzioni $y_1, \dots, y_n$ sono indipendenti, e che l'insieme $\{y_1, \dots, y_n\}$ e' un sistema fondamentale di soluzioni della (2).

Proof:

(1)1. Dim 1.

Per la formula di Liouville [6.20,pg.125], si ha

$$W(x) \neq 0 \Leftrightarrow W(x_0) e^{\int_{x_0}^x a_1(t) dt} \neq 0 \quad \Leftrightarrow_{e^x > 0 \quad \forall x} W(x_0) \neq 0$$

□

Lemma 6.22. Siano $a_1(x), \dots, a_n(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue in (a, b) , e sia $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in (a, b) \times \mathbb{R}^n$, allora

$\exists!$ soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad y^{(2)}(x_0) = y_0^{(2)}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Proof: Cerchiamo di utilizzare il teorema [6.5,pg.103].

In questo caso abbiamo:

$$B = (a, b) \times \mathbb{R}^n$$

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = -a_1(x)y^{(n-1)} - \dots - a_{n-1}(x)y' - a_n(x)y$$

f e' continua in (a, b) perche' lo sono le funzioni $a_i(x)$.

Fissiamo un intervallo $[c, d] \subseteq (a, b)$ e presi due punti

$$P = (x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}), \quad Q = (x, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n-1)}) \in [c, d] \times \mathbb{R}^n$$

consideriamo la differenza

$$\Delta = |f(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}) - f(x, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n-1)})|$$

si ha

$$\begin{aligned} \Delta &= |-a_1(x)y_1^{(n-1)} - \dots - a_{n-1}(x)y_1' - a_n(x)y_1 + a_1(x)y_2^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y_2' + a_n(x)y_2| = \\ &= |a_1(x)(y_2^{(n-1)} - y_1^{(n-1)}) + \dots + a_{n-1}(x)(y_2' - y_1') + a_n(x)(y_2 - y_1)| \leq \\ &\leq |a_1(x)||y_2^{(n-1)} - y_1^{(n-1)}| + \dots + |a_{n-1}(x)||y_2' - y_1'| + |a_n(x)||y_2 - y_1| \quad (1) \end{aligned}$$

Poiche' $a_i(x)$ sono funzioni continue, e $[c, d]$ e' chiuso e limitato, per il thm di Weierstrass, si ha che

$$\exists M_i = \max_{x \in [c, d]} a_i(x) \quad i = 1, \dots, n$$

prendendo $M = \max M_1, \dots, M_n$, possiamo continuare a migliorare Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &\leq M|y_2^{(n-1)} - y_1^{(n-1)}| + \dots + M|y_2' - y_1'| + M|y_2 - y_1| = \\ &= M(|y_2^{(n-1)} - y_1^{(n-1)}| + \dots + |y_2' - y_1'| + |y_2 - y_1|) \leq \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \sqrt{n}M \sqrt{(y_2^{(n-1)} - y_1^{(n-1)})^2 + \dots + (y_2' - y_1')^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{n}Md(P, Q) \end{aligned}$$

(*) abbiamo applicato la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz (vedi [AII,8.1,pg.62]).

Ponendo $L = \sqrt{n}M$, per l'arbitrarieta' di P e Q , le ipotesi del thm [6.5,pg.103] sono verificate, e quindi si ha la tesi. □

Proposition 6.23. Siano $a_1(x), \dots, a_n(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue in (a, b) , e sia data l'equazione diff. lineare omogea

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (2)$$

allora, esistono

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

soluzioni indipendenti di (2).

Proof: Fissiamo un arbitrario $x_0 \in (a, b)$, e poniamo

$$(y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0) = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

Per il lemma [6.22, pg.128], si ha che esiste un'unica soluzione $y_1(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 = 1, \quad y'(x_0) = y'_0 = 0, \quad y^{(2)}(x_0) = y^{(2)}_0 = 0, \quad \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}_0 = 0 \end{cases}$$

Quindi $y_1(x)$ e' anche soluzione dell'equazione (2).

In modo analogo, ponendo

$$(y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0) = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

esiste un'unica soluzione $y_2(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 = 0, \quad y'(x_0) = y'_0 = 1, \quad y^{(2)}(x_0) = y^{(2)}_0 = 0, \quad \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}_0 = 0 \end{cases}$$

Così procedendo troviamo $y_1(x), \dots, y_n(x)$ soluzioni di (2) in (a, b) , tali che

$$(y_1(x), y_1^{(1)}(x), \dots, y_1^{(n-1)}(x)) = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$(y_2(x), y_2^{(1)}(x), \dots, y_2^{(n-1)}(x)) = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

...

$$(y_n(x), y_n^{(1)}(x), \dots, y_n^{(n-1)}(x)) = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

Allora, il determinante Wroskiano di $y_1, \dots, y_n$ e' proprio il determinante della matrice identica e quindi

$$W(x) = 1 \neq 0 \Rightarrow y_1, \dots, y_n \text{ sono soluzioni indipendenti}$$

□

Proposition 6.24. Siano $a_1(x), \dots, a_n(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue in (a, b) , e sia data l'equazione diff. lineare omogea

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (2)$$

Siano inoltre $y_1(x), \dots, y_n(x)$ sue soluzioni indipendenti.

Allora, il suo integrale generale e' il seguente insieme:

$$\{k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \dots + k_n y_n(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \mid k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}\}$$

Proof: Denotiamo con I' l'insieme della tesi e con I l'integrale generale della (2).

(1) 1. Dim. $I \supseteq I'$

Sia $y(x) \in I'$, ovvero

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \dots + k_n y_n(x)$$

allora per la prop. [6.18, pg.122] si ha che $y(x) \in I$

(1) 2. Dim. $I \subseteq I'$

Sia $y(x) \in I$ e fissiamo $x_0 \in (a, b)$.

Consideriamo la funzione

$$\varphi(x) = k_1 y_1(x) + \cdots + k_n y_n(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

dove le costanti k_i sono incognite che determiniamo in questo modo:

$$\text{imponiamo che } \varphi^{(j)}(x_0) = y^{(j)}(x_0) \quad \forall j = 0, \dots, n-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 y_1(x_0) + \cdots + k_n y_n(x_0) = y(x_0) \\ k_1 y_1^{(1)}(x_0) + \cdots + k_n y_n^{(1)}(x_0) = y^{(1)}(x_0) \\ k_1 y_1^{(2)}(x_0) + \cdots + k_n y_n^{(2)}(x_0) = y^{(2)}(x_0) \\ \cdots \\ k_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + k_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) \end{cases} \quad (*)$$

la (*) e' un sistema in n equazioni e n incognite, e la matrice dei coefficienti e' proprio il determinante Wroskiano. Allora,

$$y_1, \dots, y_n \text{ indipendenti} \Rightarrow W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow W(x_0) \neq 0 \xRightarrow{\text{Cramer}} \exists! \text{ soluzione } (\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n)$$

Per la prop. [6.18,pg.122], $\varphi(x)$ e' ancora soluzione della (2).

Quindi, sia la φ che la $y(x)$ sono soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \\ y(x_0) = y(x_0), \quad y'(x_0) = y'(x_0), \quad y^{(2)}(x_0) = y^{(2)}(x_0), \quad \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

Ma per il thm [6.5,pg.103], la soluzione a tale problema e' unica, quindi

$$y(x) = \varphi(x) = \bar{k}_1 y_1(x) + \cdots + \bar{k}_n y_n(x) \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow y(x) \in I'$$

□

Proposition 6.25. Siano $a_1(x), \dots, a_n(x), f(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continue in (a, b) e sia data la seguente equazione differenziale completa in (a, b) :

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

Se $y_1(x), \dots, y_n(x)$ sono soluzioni indipendenti della sua omogenea

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (2)$$

e se $Y(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ e' una soluzione della (1), allora l'integrale generale della (1) e' il seguente insieme:

$$\{Y(x) + k_1 y_1(x) + \cdots + k_n y_n(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \mid k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}\}$$

Proof: Detoniamo con I' l'insieme della tesi e con I l'integrale generale della (1).

(1)1. Dim. $I' \subseteq I$

Sia

$$\varphi(x) = Y(x) + k_1 y_1(x) + \cdots + k_n y_n(x) \in I'$$

Sia $0(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione nulla. $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ sono soluzioni della (2) e quindi anche dell'equaz. diff.

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0(x)$$

$Y(x)$ e' soluzione della (1). Per la prop. [6.17,pg.121] si ha che la funzione

$Y(x) + k_1 y_1(x) + \cdots + k_n y_n(x)$ e' soluzione dell'equazione

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) + k_1 0(x) + k_2 0(x) + \cdots + k_n 0(x) = f(x)$$

ovvero e' soluzione della (1). Quindi $\varphi(x) \in I$

(1)2. Dim $I \subseteq I'$

Sia $y(x) \in I$. Sempre per la prop. [6.18,pg.122], la funzione $y(x) - Y(x)$ e' soluzione della (2), e quindi per il thm [6.24,pg.129] si ha

$$\exists k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R} : y(x) - Y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \dots + y_n(x)$$

Quindi $y(x) \in I'$

□

Proposition 6.26. *Metodo di variazione delle costanti.*

Siano $a_1(x), \dots, a_n(x), f(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continue in (a, b) e sia data la seguente equazione differenziale completa in (a, b) :

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

Se $y_1(x), \dots, y_n(x)$ sono soluzioni indipendenti della sua omogenea

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (2)$$

Una particolare soluzione di (1) e' la funzione

$$y(x) = \gamma_1(x)y_1(x) + \gamma_2(x)y_2(x) + \dots + \gamma_n(x)y_n(x)$$

con

$$\gamma_i(x) = \int_{x_0}^x \frac{f(t)W_{ni}(t)}{W(t)} dt + c_i \quad \forall x \in (a, b)$$

dove $W_{ni}(x)$ e' il complemento algebrico di posto (n, i) della matrice Wroskiana relativa alle soluzioni $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$,
 x_0 e' un qualsiasi reale $\in (a, b)$ e infine c_i e' un qualsiasi reale $\in \mathbb{R}$.

Nota ¹⁷, ¹⁸.

Proof: Poiche' $y_i(x)$ e' soluzione dell'omogenea, si ha

$$y_i^{(n)}(x) + a_1(x)y_i^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)y_i'(x) + a_n(x)y_i(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b), \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (3)$$

¹⁷la funzione integrale $\gamma_i(x)$ e' ben definita perche' $a_1, \dots, a_n, f$ sono funzioni continue.

¹⁸la prop. [6.25,pg.130] permette di conoscere tutte le altre soluzioni di (1).

Inoltre,

$$\gamma_1'(x) = \frac{f(t)W_{n1}(t)}{W(t)} dt = \frac{f(x)(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_2^{(1)}(x) & \dots & y_n^{(1)}(x) \\ y_2^{(2)}(x) & \dots & y_n^{(2)}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \end{vmatrix}}{W(x)} =$$

$$\underbrace{=}_{\text{Laplace}} \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ 0 & y_2^{(1)}(x) & \dots & y_n^{(1)}(x) \\ 0 & y_2^{(2)}(x) & \dots & y_n^{(2)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ f(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}{W(x)}$$

$$\gamma_2'(x) = \frac{f(t)W_{n2}(t)}{W(t)} dt = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 & y_3(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1^{(1)}(x) & 0 & y_3^{(1)}(x) & \dots & y_n^{(1)}(x) \\ y_1^{(2)}(x) & 0 & y_3^{(2)}(x) & \dots & y_n^{(2)}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & 0 & y_3^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & f(x) & y_3^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}{W(x)}$$

...

$$\gamma_n'(x) = \frac{f(t)W_{nn}(t)}{W(t)} dt = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_{n-1}(x) & 0 \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(1)}(x) & 0 \\ y_1^{(2)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(2)}(x) & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-2)}(x) & 0 \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & f(x) \end{vmatrix}}{W(x)}$$

Quindi $\gamma_i'(x)$ e' dato dal rapporto tra il determinante della matrice Wroskiana in cui e' stata sostituita la i -esima colonna con la colonna e $W(x)$

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

e questo $\forall x \in (a, b)$. Inoltre, poiche' $y_1, \dots, y_n$ sono indipendenti, abbiamo $W(x) \neq 0$. Allora, fissata una x , per la regola di Cramer, possiamo interpretare

la colonna

$$Y = \begin{pmatrix} \gamma_1'(x) \\ \gamma_2'(x) \\ \vdots \\ \gamma_n'(x) \end{pmatrix}$$

come la soluzione del sistema

$$\overline{W}(x)X = C$$

ovvero, si ha

$$\begin{aligned} \overline{W}(x)Y = C &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & \dots & y_n^{(1)}(x) \\ y_1^{(2)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \dots & y_n^{(2)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1'(x) \\ \gamma_2'(x) \\ \vdots \\ \gamma_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y_1(x)\gamma_1'(x) + y_2(x)\gamma_2'(x) + \dots + y_n(x)\gamma_n'(x) = 0 \\ y_1^{(1)}(x)\gamma_1'(x) + y_2^{(1)}(x)\gamma_2'(x) + \dots + y_n^{(1)}(x)\gamma_n'(x) = 0 \\ \dots \\ y_1^{(n-2)}(x)\gamma_1'(x) + y_2^{(n-2)}(x)\gamma_2'(x) + \dots + y_n^{(n-2)}(x)\gamma_n'(x) = 0 \\ y_1^{(n-1)}(x)\gamma_1'(x) + y_2^{(n-1)}(x)\gamma_2'(x) + \dots + y_n^{(n-1)}(x)\gamma_n'(x) = f(x) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i(x)\gamma_i'(x) = 0 \\ \sum_{i=1}^n y_i^{(1)}(x)\gamma_i'(x) = 0 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n y_i^{(n-2)}(x)\gamma_i'(x) = 0 \\ \sum_{i=1}^n y_i^{(n-1)}(x)\gamma_i'(x) = f(x) \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Calcoliamo ora le derivate di $y(x)$:

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(x)y_i(x)$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= D \left[\sum_{i=1}^n \gamma_i(x)y_i(x) \right] = \sum_{i=1}^n (\gamma_i'(x)y_i(x) + \gamma_i(x)y_i'(x)) = \sum_{i=1}^n \gamma_i'(x)y_i(x) + \sum_{i=1}^n \gamma_i(x)y_i'(x) = \\ &\underbrace{= 0}_{(*)} + \sum_{i=1}^n \gamma_i(x)y_i'(x) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(x)y_i'(x) \end{aligned}$$

$$y^{(2)}(x) = D \left[\sum_{i=1}^n \gamma_i(x)y_i'(x) \right] = \sum_{i=1}^n \gamma_i'(x)y_i'(x) + \sum_{i=1}^n \gamma_i(x)y_i^{(2)}(x) \underbrace{=}_{(*)} \sum_{i=1}^n \gamma_i(x)y_i^{(2)}(x)$$

...

$$y^{(n-1)}(x) = D \left[\sum_{i=1}^n \gamma_i(x)y_i^{(n-2)}(x) \right] = \sum_{i=1}^n \gamma_i'(x)y_i^{(n-2)}(x) + \sum_{i=1}^n \gamma_i(x)y_i^{(n-1)}(x) \underbrace{=}_{(*)} \sum_{i=1}^n \gamma_i(x)y_i^{(n-1)}(x)$$

$$y^{(n)}(x) = D \left[\sum_{i=1}^n \gamma_i(x)y_i^{(n-1)}(x) \right] = \sum_{i=1}^n \gamma_i'(x)y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^n \gamma_i(x)y_i^{(n)}(x) \underbrace{=}_{(*)} f(x) + \sum_{i=1}^n \gamma_i(x)y_i^{(n)}(x)$$

Calcoliamo il primo membro della (1) sostituendo $y(x)$ e le derivate appena

trovate:

$$\begin{aligned}
& y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x) = \\
& = \left(f(x) + \sum_{i=1}^n \gamma_i(x)y_i^{(n)}(x) \right) + a_1(x) \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i(x)y_i^{(n-1)}(x) \right) + \cdots + a_n(x) \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i(x)y_i(x) \right) = \\
& = f(x) + \sum_{i=1}^n \gamma_i(x) \left(y_i^{(n)}(x) + a_1(x)y_i^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)y_i(x) \right) \underbrace{=}_{(3)} f(x) + \sum_{i=1}^n \gamma_i(x)0 = f(x)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x) = f(x)$$

e per l'arbitrarietà di x , abbiamo che $y(x)$ è una soluzione della (1). $\square$

6.3.1 Con coeff. costanti

Proposition 6.27. *Sia data la seguente equazione differenziale lineare omogenea*

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0 \quad (2')$$

dove $a_1, \dots, a_n$ sono funzioni reali costanti, definite in tutto $\mathbb{R}$:

$$a_i(x) = a_i \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

allora,

$$y(x) = e^{\lambda x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e' soluzione della (2')} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \text{ e' soluzione dell'equazione algebrica } \xi^n + a_1\xi^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\xi + a_n = 0 \text{ nell'incognita } \xi$$

Quest'ultima equazione si chiama equazione caratteristica della (2').

Proof:

(1)1. Dim. $\Leftrightarrow$

Calcoliamo le derivate di $y(x)$:

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y^{(2)}(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

...

$$y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$$

Supponiamo che $y(x)$ sia soluzione, allora

$$y^{(n)}(x) + a_1y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}y'(x) + a_ny(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^n e^{\lambda x} + a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \cdots + a_n e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda x} (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}} \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

$\square$

Proposition 6.28. *Consideriamo l'equazione (2') vista in [6.27, pg. 134].*

Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sono soluzioni reali e distinte dell'equazione (2'), allora l'insieme

$$\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

è un sistema fondamentale della (2').

Proof: Abbiamo già visto che $e^{\lambda_i x}$ è soluzione della (2'). Resta quindi da vedere se $W(x) \neq 0$.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} \quad \text{mettiamo in evidenza } \underbrace{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}}_{=}$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

quest'ultimo determinante si chiama *determinante di Cauchy-Vandermonde*, la cui risoluzione è nota, per cui

$$W(x) = e^{x(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)} \prod_{r > s} (\lambda_r - \lambda_s)$$

Poiché le radici sono a due a due distinte si ha che

$$\lambda_r - \lambda_s \neq 0 \quad \forall r > s$$

e quindi, essendo l'esponenziale sempre positivo, si ha che $W(x) \neq 0$. $\square$

Proposition 6.29. Consideriamo l'equazione (2') vista in [6.27, pg.134]. Se λ è una radice di molteplicità 2, allora le funzioni

$$e^{\lambda x}, \quad x e^{\lambda x}$$

sono soluzioni della (2').

Proof: Per quanto abbiamo visto nella prop. [6.27, pg.134], $e^{\lambda x}$ è soluzione della (2').

Calcoliamo le derivate dell'altra funzione:

$$D[xe^{\lambda x}] = e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}$$

$$D^{(2)}[xe^{\lambda x}] = \lambda e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x} = 2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x}$$

$$D^{(3)}[xe^{\lambda x}] = 2\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda^3 x e^{\lambda x} = 3\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda^3 x e^{\lambda x}$$

...

$$D^{(n)}[xe^{\lambda x}] = n\lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \lambda^n x e^{\lambda x}$$

E sostituendo nella (2') abbiamo

$$n\lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \lambda^n x e^{\lambda x} + a_1 ((n-1)\lambda^{n-2} e^{\lambda x} + \lambda^{n-1} x e^{\lambda x}) + \dots + a_{n-1} (e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}) + a_n x e^{\lambda x} =$$

$$= e^{\lambda x} (n\lambda^{n-1} + a_1(n-1)\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + e^{\lambda x} x (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n) =$$

$$\underbrace{=}_{\text{ponendo } a_0=1} e^{\lambda x} \left(\sum_{i=1}^n a_{n-i} i \lambda^{i-1} + x \sum_{i=0}^n a_{n-i} \lambda^i \right) \quad (3)$$

Poiché λ è una radice dell'equaz. caratteristica si ha

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_{n-i} \lambda^i = 0 \quad (4)$$

Sia $P(\xi) = 0$ l'equazione caratteristica, ovvero $P(\xi)$ è il polinomio a primo membro dell'equazione. Si ha

$$\lambda \text{ radice di molteplicità } 2 \text{ di } P(\xi) = 0 \Rightarrow P'(\lambda) = 0$$

ovvero λ è anche una radice di $P'(\xi) = 0$. Quindi,

$$P'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow n\lambda^{n-1} + a_1(n-1)\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-2}2\lambda + a_{n-1} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_{n-i} i \lambda^{i-1} = 0 \quad (5)$$

Allora sostituendo (4), (5) in (3) si ha la tesi, ovvero $xe^{\lambda x}$ e' soluzione della (2') in $\mathbb{R}$. $\square$

Theorem 6.30. *Sia data la seguente equazione differenziale lineare omogenea*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (2')$$

dove $a_1, \dots, a_n$ sono funzioni reali costanti.
Sia

$$\xi^n + a_1 \xi^{n-1} + \dots + a_{n-1} \xi + a_n = 0 \quad (eq)$$

la sua equazione caratteristica.
Siano

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$$

sono tutte le soluzioni reali distinte di (eq), rispettivamente di molteplicita'

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$$

e siano

$$\alpha_1 \pm i\beta_1, \alpha_2 \pm i\beta_2, \dots, \alpha_s \pm i\beta_s$$

ognuna di molteplicita'

$$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$$

allora, il seguente insieme e' un sistema fondamentale di soluzioni della (2'):

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{\mu_1-1} e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, x^2 e^{\lambda_2 x}, \dots, x^{\mu_2-1} e^{\lambda_2 x}, \\ \vdots \\ e^{\lambda_r x}, xe^{\lambda_r x}, x^2 e^{\lambda_r x}, \dots, x^{\mu_r-1} e^{\lambda_r x}, \\ \\ e^{\alpha_1 x} \cos(\beta_1 x), e^{\alpha_1 x} \sin(\beta_1 x), xe^{\alpha_1 x} \cos(\beta_1 x), xe^{\alpha_1 x} \sin(\beta_1 x), x^2 e^{\alpha_1 x} \cos(\beta_1 x), x^2 e^{\alpha_1 x} \sin(\beta_1 x), \dots \\ \dots, x^{\rho_1-1} e^{\alpha_1 x} \cos(\beta_1 x), x^{\rho_1-1} e^{\alpha_1 x} \sin(\beta_1 x), \\ e^{\alpha_2 x} \cos(\beta_2 x), e^{\alpha_2 x} \sin(\beta_2 x), xe^{\alpha_2 x} \cos(\beta_2 x), xe^{\alpha_2 x} \sin(\beta_2 x), x^2 e^{\alpha_2 x} \cos(\beta_2 x), x^2 e^{\alpha_2 x} \sin(\beta_2 x), \dots \\ \dots, x^{\rho_2-1} e^{\alpha_2 x} \cos(\beta_2 x), x^{\rho_2-1} e^{\alpha_2 x} \sin(\beta_2 x), \\ \vdots \\ e^{\alpha_s x} \cos(\beta_s x), e^{\alpha_s x} \sin(\beta_s x), xe^{\alpha_s x} \cos(\beta_s x), xe^{\alpha_s x} \sin(\beta_s x), x^2 e^{\alpha_s x} \cos(\beta_s x), x^2 e^{\alpha_s x} \sin(\beta_s x), \dots \\ \dots, x^{\rho_s-1} e^{\alpha_s x} \cos(\beta_s x), x^{\rho_s-1} e^{\alpha_s x} \sin(\beta_s x) \end{array} \right.$$

Proof: Dimostriamo solo per $n = 2$. La (2') diventa

$$y^{(2)} + a_1 y' + a_2 y = 0$$

l'equazione caratteristica e'

$$\xi^2 + a_1 \xi + a_2 = 0$$

che e' una equazione di secondo grado, e il suo discriminante e'

$$\Delta = a_1^2 - 4a_2$$

CASE: $\Delta > 0$

Le uniche radici della (2') sono due radici reali distinte di molteplicità 1.

Allora, per quanto visto in [6.28,pg.134] si ha la tesi.

CASE: $\Delta = 0$

Si ha un'unica radice reale λ di molteplicità 2. Quindi per quanto abbiamo visto in [6.29,pg.135], $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$ sono soluzioni. Dobbiamo però controllare che siano indipendenti:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x} + \lambda xe^{\lambda x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ \lambda & 1 + \lambda x \end{vmatrix} = e^{2\lambda x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

CASE: $\Delta < 0$

Abbiamo due radici complesse coniugate fra loro:

$$\alpha \pm i\beta$$

Notiamo che

$$\alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \Rightarrow \beta \neq 0$$

<2>1. Verifichiamo che $e^{\alpha x} \cos \beta x$ è soluzione della (2')

$$\begin{aligned} D[e^{\alpha x} \cos \beta x] &= \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta \sin \beta x e^{\alpha x} = e^{\alpha x} (\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) \\ D^{(2)}[e^{\alpha x} \cos \beta x] &= \alpha e^{\alpha x} (\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) + e^{\alpha x} (-\alpha \beta \sin \beta x - \beta^2 \cos \beta x) = \\ &= e^{\alpha x} (\alpha^2 \cos \beta x - 2\alpha \beta \sin \beta x - \beta^2 \cos \beta x) \end{aligned}$$

E sostituendo nella (2') abbiamo:

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} (\alpha^2 \cos \beta x - 2\alpha \beta \sin \beta x - \beta^2 \cos \beta x) + a_1 (e^{\alpha x} (\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x)) + a_2 e^{\alpha x} \cos \beta x &= \\ = e^{\alpha x} (\alpha^2 \cos \beta x - 2\alpha \beta \sin \beta x - \beta^2 \cos \beta x + a_1 \alpha \cos \beta x - a_1 \beta \sin \beta x + a_2 \cos \beta x) &= \\ = e^{\alpha x} (\cos \beta x (\alpha^2 - \beta^2 + a_1 \alpha + a_2)) - \sin \beta x (2\alpha \beta + a_1 \beta) & (*) \end{aligned}$$

Poiché $\alpha + i\beta$ è soluzione della (2'), si ha

$$(\alpha + i\beta)^2 + a_1(\alpha + i\beta) + a_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^2 - \beta^2 + a_1 \alpha + a_2) + i(2\alpha \beta + a_1 \beta) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 + a_1 \alpha + a_2 = 0 \\ 2\alpha \beta + a_1 \beta = 0 \end{cases}$$

E usando queste ultime due relazioni annulliamo la (*). Quindi, $e^{\alpha x} \cos \beta x$ è una soluzione di (2').

<2>2. Analogamente si vede che $e^{\alpha x} \sin \beta x$ è una soluzione di (2')

<2>3. Dimostriamo che $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$ sono indipendenti.

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta \sin \beta x e^{\alpha x} & \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta \cos \beta x e^{\alpha x} \end{vmatrix} = \\ &= e^{2\alpha x} \begin{vmatrix} \cos \beta x & \sin \beta x \\ \alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x & \alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x \end{vmatrix} = \\ &= e^{2\alpha x} \begin{vmatrix} \cos \beta x & \sin \beta x \\ \alpha \cos \beta x & \alpha \sin \beta x \end{vmatrix} + e^{2\alpha x} \begin{vmatrix} \cos \beta x & \sin \beta x \\ -\beta \sin \beta x & \beta \cos \beta x \end{vmatrix} = \\ &= 0 + e^{2\alpha x} (\beta \cos^2 \beta x + \beta \sin^2 \beta x) = \underbrace{\beta e^{2\alpha x}}_{\beta \neq 0} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

Proposition 6.31. Sia data la seguente equazione completa a coeff. costanti:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (1')$$

con $f(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Sia

$$\xi^n + a_1 \xi^{n-1} + \dots + a_{n-1} \xi + a_n = 0 \quad (eq)$$

la sua equazione caratteristica.

Se

$$f(x) = e^{\alpha x} (Q_1(x) \cos(\beta x) + Q_2(x) \sin(\beta x)) \quad \forall x \in (a, b)$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $Q_1(x), Q_2(x) \in \mathbb{R}[x]$, allora si ha

CASE: se $\alpha + i\beta$ e' una radice di (eq) di molteplicita' μ , allora

una soluzione particolare della (1') e'

$$y(x) = x^\mu e^{\alpha x} (P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x)$$

dove $P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{R}[x]$, tale che

$$\deg P_1(x) = \deg P_2(x) = \max \{ \deg Q_1(x), \deg Q_2(x) \}$$

(nota ¹⁹)

CASE: se $\alpha + i\beta$ **non** e' una radice di (eq), allora

una soluzione particolare della (1') e' la stessa di prima ma con $\mu = 0$, ovvero

$$y(x) = e^{\alpha x} (P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x)$$

Se $\beta = 0$, allora la situazione si semplifica in:

$$f(x) = e^{\alpha x} Q_1(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\alpha + i\beta \text{ radice di (eq)} \Rightarrow y(x) = x^\mu e^{\alpha x} P_1(x)$$

$$\alpha + i\beta \text{ **non** e' radice di (eq)} \Rightarrow y(x) = e^{\alpha x} P_1(x)$$

6.3.2 Algoritmo risolutivo

Proposition 6.32. Siano $a_1(x), \dots, a_n(x), f(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continue in (a, b) e sia data la seguente equazione differenziale completa in (a, b) :

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

Per trovare il suo integrale generale si procede cosi':

1. Consideriamo la sua omogenea associata

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (2)$$

2. Si trovano le n soluzioni indipendenti $y_1(x), \dots, y_n(x)$ della (2)

(a) Se $a_1(x), \dots, a_n(x)$ sono funzioni costanti, allora si considera l'equazione caratteristica

$$\xi^n + a_1 \xi^{n-1} + \dots + a_{n-1} \xi + a_n = 0$$

e si applica il teorema [6.30, pg. 136].

¹⁹ $\deg F(x)$ indica il grado del polinomio $F(x)$

- (b) Altrimenti, non e' ancora noto un algoritmo per trovare un sistema fondamentale di soluzioni per (2).
3. Si trova una soluzione particolare $Y(x)$ della (1)
- (a) Se $a_1(x), \dots, a_n(x)$ sono funzioni costanti, allora si applica la prop. [6.31,pg.137]
- (b) Altrimenti si applica il metodo di variazione delle costanti: [6.26,pg.131]
4. Per la prop. [6.25,pg.130], l'integrale generale della (1) e'
- $$\{Y(x) + k_1 y_1(x) + \dots + k_n y_n(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \mid k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}\}$$

7 *

Index

*, 139

A variabili separate, 103

Algoritmo risolutivo, 137

Area di superficie, 22

Ascisse curvilinee, 27

Baricentro e momento, 54

Baricentro e momento curvilinei, 80

cilindroide, 47

Cilindroidi a tre dimensioni, 47

Con coeff. costanti, 133

condizioni di simmetria, 92

curva

continua, 2

continua semplice, 3

continua semplice chiusa, 3

di classe C^1 , 5

generalmente regolare, 4

piana, 1

regolare, 4

sghemba, 1

curva tracciata su S , 19

Curve geometriche e analitiche, 29

determinante Cauchy-Vandermonde,
134

determinante Wroskiano, 125

Di Bernoulli, 114

Domini regolari, 59

dominio regolare di R_{tre} , 66

dominio regolare normale di R_{tre} ,
66

equazione caratteristica, 133

Equazioni di ordine uno, 103

Equazioni differenziali ordinarie, 99

Equazioni lineari, 120

Esempi di curve, 5

Forme differenziali lineari, 81

formula di Liouville, 125

Formule di riduzione, 49

insieme

normale, 48

Insieme normale, 48

Integrale curvilineo della f.d.l., 84

Integrale di frontiera, 95

Integrale generalizzato, 73

Integrale illimitato, 76

Integrale improprio, 69

Integrale multiplo, 42

Integrali curvilinei, 78

isotonia, 41

linea integrale, 103

Lineari, 110

lunghezza curva, teorema, 7

Lunghezza di una curva, 6

Massimo e minimo vincolato, 35

Misurabilita' secondo Jordan, 39

moltiplicatori di Lagrange, 38

Omogenee, 108

Piano tangente, 20

Problema di Cauchy, 100

problema di Volterra, 102

Proprieta', 44

punto regolare, 32

punto singolare, 32

Retta tangente ad una curva, 14

rettangolo di R_n , 39

rettangoloide, 47

rettificabile, 6

Superficie, 16

tangente

curva, 14

punto regolare, 34

superficie, 20

Teorema della media, 45

teorema di Dini, 30

Teoria delle curve piane, 1

thm di gauss, 95

thm di Stocks, 96

thm fondamentale max-min vinco-
lati, 36

thmdidini, 30

trapezoide, 47