Calcolo II

AlpT (@freaknet.org)

July 12, 2007

Contents

1 Integrali indefiniti

1.1 Derivate notevoli

$D[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$ $\qquad D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$D[kf(x)] = kf'(x)$ $\qquad D\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

$Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ $\qquad Da^x = a^x \log_e a$

$D\log_a x = \dfrac{1}{x}\log_a e$ $\qquad D\ln x = \dfrac{1}{x}$

$D\sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $\qquad D\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$D\sin x = \cos x$ $\qquad D\cos x = -\sin x$

$\sin'' x = -\sin x,\ \ \sin''' x = -\cos x,\ \ \sin^{(4)} x = \sin x$

$D\tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$ $\qquad D\cot x = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$

$D\,[\arcsin y] = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ $\qquad D\,[\arccos y] = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

$D\,[\arctan y] = \dfrac{1}{1+y^2}$ $\qquad D\,[\mathrm{arccot}\ y] = -\dfrac{1}{1+y^2}$

$D\,[\mathrm{arsinh}\, y] = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$

1.1.1 Integrali indefiniti immediati

(*) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c, \quad \alpha \neq -1, x>0, \alpha\in\mathbb{R}$ $\qquad$ (0) $\int \frac{1}{x}dx = \int x^{-1}dx = \log|x|+c, \quad x\neq 0$
(1) $\int [f(x)]^\alpha f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$ $\qquad$ (2) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)|+c$
(*) $\int e^x dx = e^x + c$ $\qquad$ (*) $\int 0dx = c$
(*) $\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)}+c$
(*) $\int \sin x dx = -\cos x + c$ $\qquad$ (*) $\int \cos x dx = \sin x + c$
(3) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$ $\qquad$ (4) $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\,\mathrm{cotan}\, x + c$

(0) $\frac{1}{x}$ e' continua in $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ e quindi ammette primitiva. La sua primitiva in $]-\infty,0[$ e' $\log -x$, invece in $]0,+\infty[$ e' $\log x$, quindi in definitiva una sua primitiva e' sempre $\log|x|$
(1) con $\alpha \neq -1$, f derivabile nel suo intervallo di definizione e $f(x)>0$
(2) con f derivabile nel suo intervallo di definizione e $f(x)\neq 0$
(3) stiamo considerando le primitive in ogni $(a,b)\subseteq \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$
(4) stiamo considerando le primitive in ogni $(a,b)\subseteq \mathbb{R}\setminus\{\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

1.1.2 Integrali indefiniti vari

- $\int \arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}$
- $\int \arccos(x)\,dx = x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}$
- $\int \arctan(x)\,dx = x\arctan(x)-1/2,\ \ln\left(1+x^2\right)$

- $\int \tan(x)\,dx = -ln(cos(x))$
- $\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x$

1.2 Integrazione per decomposizione

1.

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx \quad \text{[formula di bisez.]}$$
$$= \int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2}\cos 2x dx = \frac{1}{2}\int 1 dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx$$
$$= \frac{1}{2}\{x + c_1\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin 2x}{2} + c_2\right\} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(2\sin x\cos x) + c$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x\cos x + c = \frac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + c$$

2.

$$\int \sin^2 x dx = \int (1-\cos^2 x) dx = \int 1 - \int \cos^2 x = \{x + c_1\} - \left\{\frac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + c_2\right\}$$
$$= x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x\cos x = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + c$$

3.

$$\int \log x\, dx = \int \underbrace{\log x}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)}\, dx$$
$$= x\log x - \int \frac{1}{x} x dx = x(\log x - 1) + c \quad \forall x \in [0,\infty]$$

4.

$$\int \arcsin x\, dx = \int \underbrace{\arcsin x}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)}\, dx$$

$f(x)$ e' definita in $[-1,1]$ ed e' li' continua (e quindi dotata di primitiva) non e' pero' derivabile in $-1, 1$, quindi calcoleremo le primitive in $]-1,1[$:

$$\int \arcsin x\, dx = x\arcsin x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x\, dx$$
$$= x\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$
$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int -2x(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}\, dx$$
$$\int [f(x)]^\alpha f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad f(x) > 0,\ \alpha \neq -1$$
$$= x\arcsin x + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + c = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

Si verifica (usando la definizione di derivata) che $D[x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}] = \arcsin x$ anche in $-1, 1$, quindi in definitiva:

$$\int \arcsin x \; dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \;\; \forall x \in [-1, 1]$$

5.
$$\int \arccos x \; dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c \;\; \forall x \in [-1, 1]$$

6.
$$\begin{aligned}
\int \arctan x \; dx &= \int \arctan x \cdot 1 \; dx \\
&= x \arctan x - \int \frac{1}{1+x^2} x \; dx \\
&= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \; dx \\
&= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \; dx \\
\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \log |f(x)| + c \\
&= x \arctan x - \frac{1}{2} \log |1+x^2| + c \\
&= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c
\end{aligned}$$

1.3 Integrazione per sostituzione

1. Calcoliamo

$$\int \frac{1}{\sin x} dx$$

Sappiamo che

$$\frac{1}{\sin x} :]-\infty, +\infty[\setminus \{k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ovvero:

$$\frac{1}{\sin x} : \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k\pi, (k+1)\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$$

Inoltre $\frac{1}{\sin x}$ e' anche continua in ogni intervallo del tipo $]k\pi, (k+1)\pi[$, e quindi, sempre in questi intervalli, ammette primitiva. Limitiamoci allora a $]0,\pi[$:

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\left[\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})\right]$$

$$f[\varphi(x)] = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}},\quad \varphi'(x) = \frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2}),\quad \varphi(x) = \tan\frac{x}{2} :]0,\pi[\longrightarrow \mathbb{R},\quad f(y) = \frac{1}{y}$$

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int f[\varphi(x)]\varphi'(x) = \left[\int f(y)dy\right]_{y=\varphi(x)}$$

$$= [\log|y|+c]_{y=\varphi(x)} = \log|\varphi(x)|+c = \log|\tan\frac{x}{2}|+c = \log\tan\frac{x}{2}+c$$

[il val. ass. lo togliamo perche' siamo in $]0,\pi[$

2. Calcoliamo $\int\sqrt{1-x^2}$. Scegliamo $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\varphi(t) = \sin t$ e $\psi(x) = \arcsin x$. $f(x)$ e' continua in $[-1,1]$ e quindi ivi dotata di primitiva, $\varphi(t) : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ e' ivi invertibile e derivabile, con $cod\varphi(t) \subseteq [-1,1]$. Possiamo quindi applicare la seconda formula di sostituzione:

$$\int\sqrt{1-x^2}\ dx = \left[\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt\right]_{t=\psi(x)} = \left[\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\ dt\right]_{t=\psi(x)} =$$

$$\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \quad \text{[stiamo lavorando in } [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \text{ quindi } \cos t > 0\text{]}$$

$$= \left[\int\cos^2 t\ dt\right]_{t=\psi(x)} = \left[\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)+c\right] \quad \text{[per la formula di } \int\cos^2 t\ dt \text{ che conoscevamo gia']}$$

$$= \frac{1}{2}(\arcsin x + x\cos\arcsin x)+c = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-\sin^2\arcsin x})+c$$

$$= \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})+c$$

3. $\int\tan(x)\,dx = -ln(cos(x))$

Proof:

$$\int\tan(x)\,dx = \int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = \int\frac{\sqrt{1-(\cos(x))^2}}{\cos(x)}dx$$

$$u = \cos(x)\,,\quad dx = \frac{d}{du}\arccos(u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\int\frac{\sqrt{1-(\cos(x))^2}}{\cos(x)}dx = \int -u^{-1}du = -\int u^{-1}du = -\ln(\cos(x))$$

1.4 Integrali razionali

Prima di tutto troviamo una formula per calcolare questo integrale:

$$I_n = \int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\ dx$$

Cominciamo con I_1:

$$I_1 = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^1}\ dx = \int \frac{1}{a^2(\frac{x^2}{a^2}+1)}\ dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{a}\frac{1}{(\frac{x^2}{a^2}+1)}\ dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$$

Calcoliamo adesso I_{n-1}:

$$\begin{aligned}
I_{n-1} &= \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\ dx \\
&= \int \underbrace{1}_{g'(x)}\underbrace{(x^2+a^2)^{1-n}}_{f(x)}\ dx \\
&\quad D[(x^2+a^2)^{1-n}] = (1-n)(x^2+a^2)^{-n}2x \\
&= x(x^2+a^2)^{1-n} - \int (1-n)(x^2+a^2)^{-n}2xx\ dx \\
&= x(x^2+a^2)^{1-n} + 2(n-1)\int (x^2+a^2)^{-n}x^2\ dx \\
&= x(x^2+a^2)^{1-n} + 2(n-1)\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\ dx \\
&= x(x^2+a^2)^{1-n} + 2(n-1)\int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^n} - \frac{a^2}{(x^2+a^2)^n}\ dx \\
&= x(x^2+a^2)^{1-n} + 2(n-1)\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{a^2}{(x^2+a^2)^n}\ dx \\
&= x(x^2+a^2)^{1-n} + 2(n-1)I_{n-1} - 2(n-1)a^2 I_n \\
I_{n-1} &= x(x^2+a^2)^{1-n} + 2(n-1)I_{n-1} - 2(n-1)a^2 I_n \\
I_{n-1}(3-2n) &- \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} = -2(n-1)a^2 I_n \\
-I_{n-1}(3-2n) &+ \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} = 2(n-1)a^2 I_n \\
I_n &= \frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right]
\end{aligned}$$

Adesso arriviamo al sodo: vogliamo cercare di calcolare questo integrale:

$$\int \frac{A(x)}{B(x)}\ dx, \qquad A(x), B(x) \in \mathbb{R}[x],\ \deg A(x) = m,\ \deg B(x) = n$$

supponiamo che $B(x)$ sia monomico e $n < m$, applichiamo allora la divisione tra polinomi:

$$\int \frac{A(x)}{B(x)}\ dx = \int Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}\ dx,\ \ \deg R(x) < n$$

$\int Q(x)\ dx$ lo sappiamo calcolare dato che e' un semplice polinomio.
$\int \frac{R(x)}{B(x)}\ dx$ rientra invece nel caso in cui il numeratore ha grado inferiore al denominatore.

Supponiamo che

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$$

siano le radici reali di $B(x)$ rispettivamente di molteplicita'

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$$

supponiamo inoltre che

$$\beta_1 + i\gamma_1, \beta_2 + i\gamma_2, \ldots, \beta_s + i\gamma_s$$

siano meta' delle radici complesse di $B(x)$ (le altre sono coniugate poiche' stiamo lavorando in $\mathbb{R}[x]$) rispettivamente di molteplicita'

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$$

quindi abbiamo $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i + 2\sum_{i=1}^{n} \mu_i = n$.
Possiamo scrivere

$$(\beta_j + i\gamma_j)(\beta_j + i\gamma_j) = x^2 + p_j x + q_j$$

Si puo' dimostrare che:

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{h=1}^{\lambda_j} \frac{a_{jh}}{(x - \alpha_j)^h} + \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{A_{ik}x + B_{ik}}{(x^2 + p_i x + q_i)^k}$$

dove $x^2 + px + q = (\beta_j + i\gamma_j)(\beta_j + i\gamma_j)$ e' un polinomio irriducibile in $\mathbb{R}[x]$ e quindi con $\Delta < 0$, e a_{jh}, A_{ik}, B_{ik} sono delle costanti.
Imponendo l'uguaglianza tra il polinomio del numeratore del primo membro e quello del numeratore del secondo membro, si risolve un sistema, ottenendo cosi' tutte le costanti a_{jh}, A_{ik}, B_{ik}.
Giunti a questo punto bastera' integrare ogni pezzo del secondo membro. Anal-

izziamo i suoi singoli pezzi:

$$\int \frac{a}{(x-\alpha)}\ dx = a\log|x-\alpha| + c$$

$$\int \frac{a}{(x-\alpha)^k}\ dx = a\int (x-\alpha)^{-k}\ dx = a\frac{(x-\alpha)^{1-k}}{1-k} + c$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)}\ dx = A\int \frac{x}{(x^2+px+q)}\ dx + B\int \frac{1}{(x^2+px+q)}\ dx$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)}\ dx + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{1}{(x^2+px+q)}\ dx$$

$$= \frac{A}{2}\log|x^2+px+q| + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{1}{(x^2+px+q)}\ dx$$

$$= \frac{A}{2}\log|x^2+px+q| + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}\ dx$$

$$t = x+\frac{p}{2} \quad a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}} = \sqrt{\frac{4q-p^2}{4}} = \sqrt{-\Delta} \quad -\Delta > 0 \text{ perche' } x^2+px+q \text{ ha } \Delta < 0$$

$$= \frac{A}{2}\log(x^2+px+q) + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\left[\int \frac{1}{t^2+a^2}\ dt\right]_{t=x+\frac{p}{2}}$$

togliamo il val. ass. dato che $x^2+px+q > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\int \frac{1}{t^2+a^2}\ dt$ sappiamo calcolarlo con la formula che abbiamo visto prima

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\ dx = A\int \frac{x}{(x^2+px+q)^k}\ dx + B\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}\ dx$$

$$= \frac{A}{2}\int (2x+p)(x^2+px+q)^{-k}\ dx + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{1}{\left((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^k}\ dx$$

$$t = x+\frac{p}{2} \quad a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}} = \sqrt{\frac{4q-p^2}{4}} = \sqrt{-\Delta} \quad -\Delta > 0 \text{ perche' } x^2+px+q \text{ ha } \Delta < 0$$

$$= \frac{A}{2}\frac{(x^2+px+q)^{1-k}}{1-k} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\left[\int \frac{1}{(t^2+a^2)^k}\ dt\right]_{t=x+\frac{p}{2}}$$

$\int \frac{1}{(t^2+a^2)^k}\ dt$ sappiamo calcolarlo con la formula che abbiamo visto prima

1.5 Integrali irrazionali

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\ dx$$

dove R e' una funzione razionale.
In parole povere: quello che si cerca di fare e' ricondurre ax^2+bx+c a una somma/differenza di due quadrati del tipo $(x+\alpha)^2 \pm k^2$. Dopodiche' si sostituisce $x+\alpha$ con $\sin(t)$ oppure $\sinh(t)$ oppure $\cosh(t)$, in modo tale da ricondursi a una identita' fondamentale trigonometrica.
Piu' in dettaglio: distiguiamo 3 casi.

CASE: $a < 0$

Poiche' il radicale deve avere senso, imponiamo che $ax^2 + bx + c \geq 0$, si ha che
$$\begin{cases} ax^2 + bx + c \geq 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta > 0$$

Scriviamo $ax^2 + bx + c$ in modo opportuno:
$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$
$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) =$$
$$y = x + \frac{b}{2a}, \quad k = \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \quad \text{nota } k \text{ e' } > 0$$
$$= a(y^2 - k^2) = -a(k^2 - y^2)$$

Passiamo a calcolare l'integrale e applichiamo la sostituzione con $y = x + \frac{b}{2a}$:
$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx = \left[\int R\left(y - \frac{b}{2a}, \sqrt{-a}\sqrt{k^2 - y^2}\right)\, dy\right]_{y = x + \frac{b}{2a}}$$

Adesso applichiamo una nuova sostituzione con
$$y = k\sin t, \quad y' = k\cos t, \quad t = \arcsin\frac{y}{k}$$

abbiamo:
$$= \left[\int R\left(k\sin t - \frac{b}{2a}, \sqrt{-a}\sqrt{k^2 - k^2\sin^2 t}\right) k\cos t\, dt\right]_{t = \arcsin\frac{y}{k}} =$$
$$\sqrt{k^2 - k^2\sin^2 t} = k\sqrt{1 - \sin^2 t} = k\cos t$$
$$= \left[\int R\left(k\sin t - \frac{b}{2a}, \sqrt{-a}k\cos t\right) k\cos t\, dt\right]_{t = \arcsin\frac{y}{k}}$$

CASE: $a > 0, \ \Delta > 0$

Si procede analogamente:
$$y = x + \frac{b}{2a}, \quad k = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$ax^2 + bx + c = a(y^2 - k^2)$$
$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx = \left[\int R\left(y - \frac{b}{2a}, \sqrt{a}\sqrt{y^2 - k^2}\right)\, dy\right]_{y = x + \frac{b}{2a}}$$

Adesso per dar senso a $\sqrt{y^2 - k^2}$ dobbiamo distinguire due casi.

CASE: $y \in [k, +\infty[$

Per la seconda sostituzione poniamo
$$y = k\cosh t, \quad y' = k\sinh t, \quad t = \operatorname{arcosh}\frac{y}{k}$$

cosi' abbiamo:
$$= \left[\int R\left(k\cosh t - \frac{b}{2a}, \sqrt{a}\sqrt{k^2\cosh^2 t - k^2}\right) k\sinh t\, dt\right]_{t = \operatorname{arcosh}\frac{y}{k}} =$$
$$\sqrt{k^2\cosh^2 t - k^2} = k\sqrt{\cosh^2 t - 1} = k\sinh t$$
$$= \left[\int R\left(k\cosh t - \frac{b}{2a}, \sqrt{a}k\sinh t\right) k\sinh t\, dt\right]_{t = \operatorname{arcosh}\frac{y}{k}}$$

CASE: $y \in]-\infty, -k]$

Per la seconda sostituzione poniamo

$$y = -k\cosh t, \;\; y' = -k\sinh t, \;\; t = \operatorname{arcosh}\frac{-y}{k}$$

cosi' abbiamo:

$$= \left[\int -R\left(-k\cosh t - \frac{b}{2a}, \sqrt{a}k\sinh t\right) k\sinh t \; dt\right]_{t=\operatorname{arcosh}\frac{-y}{k}}$$

Case: $a > 0, \Delta < 0$

Procedendo come abbiamo fatto fin'ora:

$$y = x + \frac{b}{2a}, \quad k = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right) = a(y^2 + k^2)$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \; dx = \left[\int R\left(y - \frac{b}{2a}, \sqrt{a}\sqrt{y^2 + k^2}\right) \; dy\right]_{y=x+\frac{b}{2a}}$$

Per la seconda sostituzione poniamo

$$y = k\sinh t, \;\; y' = k\cosh t, \;\; t = \operatorname{arsinh}\frac{y}{k}$$

cosi' abbiamo:

$$= \left[\int R\left(k\sinh t - \frac{b}{2a}, \sqrt{a}\sqrt{k^2\sinh^2 t + k^2}\right) k\cosh t \; dt\right]_{t=\operatorname{arsinh}\frac{y}{k}} =$$

$$\sqrt{k^2\sinh^2 t + k^2} = k\sqrt{\sinh^2 t + 1} = k\cosh t$$

$$= \left[\int R\left(k\sinh t - \frac{b}{2a}, \sqrt{a}k\cosh t\right) k\cosh t \; dt\right]_{t=\operatorname{arsinh}\frac{y}{k}}$$

1.6 Integrali vari

$$\int x^m(a + bx^n)^p \; dx, \;\; m, n, p \in \mathbb{Q}$$

Case: $p \in \mathbb{Z}$

Si effettua la sostituzione: $x = t^r, \;\; r = mcm(m, n)$

Case: $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}, \; p \notin \mathbb{Z}$

Si effettua la sostituzione: $a + bx^n = t^s$, dove s e' il denominatore di p.

Case: $p + \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$

Si effettua la sostituzione: $\frac{a+x^n}{x^m} = t^s$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) \; dx$$

Si effettua la sostituzione con:

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}$$

$$x = \frac{b - dt^n}{ct^n - a}$$

$$x' = \frac{(ad - bc)nt^{n-1}}{(ct^n - a)^2}$$

e si ottiene:

$$= \left[\int R\left(\frac{b-dt^n}{ct^n-a}, t\right) \frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(ct^n-a)^2}\, dt \right]_{t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}$$

2 Serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots, \quad a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$$

viene chiamata *serie numerica*.
La *somma parziale* di posto n e' definita come:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Il carattere della serie dipende equivalea al carattere della successione $\{s_n\}$ che puo' essere

- convergente a un limite $S \in \mathbb{R}$, chiamato somma della serie
- divergente a $\pm\infty$
- oscillante

2.1 Assoluta convergenza

La serie si dice *assolutamente convergente* quando la serie dei suoi valori assoluti e' convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ass. conv.} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ convergente}$$

Theorem 2.1.

$$\textit{assolutamente conv.} \Rightarrow \textit{conv.}$$

Proof:
Usiamo il criterio di Cauchy (vedi thm [2.3,pg.15]), per dimostrare la tesi, ovvero mostriamo che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon\ \forall n > v\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, per Hp:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ convergente } \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{per Cauchy}}$$

$$\Leftrightarrow\ \exists v' \in \mathbb{N} : ||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}|| < \varepsilon\ \forall n > v\ \forall k \in \mathbb{N}$$

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon\ \forall n > v'$$

Quindi la tesi e' dimostrata con $v = v'$

□

Example 2.1. di serie conv. ma non ass. conv.

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

e' convergente per quanto visto nell'esempio [2.3,pg.26], ma non e' ass. conv. poiche' la serie dei valori assoluti e' la serie armonica.

Example 2.2. Esempio di serie di funzioni non ass. conv. ma unif. conv.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x$$

dove ogni funzione e' definita in $[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.
Non e' ass. conv., infatti fissato un $x \neq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big| \frac{(-1)^{n-1}}{n} x \Big| = |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Proviamo che e' unif. conv. usando il criterio di cauchy, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists v = v(\varepsilon) : \; |\frac{(-1)^n}{n} x + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x + \cdots + \frac{(-1)^{n+p-1}}{n} x| < \varepsilon \; \forall n > v \; \forall p \in \mathbb{N} \; \forall x \in [-1,1]$$

Poiche' $x \in [-1,1]$ si ha

$$\begin{aligned} &|\frac{(-1)^n}{n} x + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x + \cdots + \frac{(-1)^{n+p-1}}{n} x| < \varepsilon \; \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \; |x|| \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots + \frac{(-1)^{n+p-1}}{n}| < \varepsilon \; \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \; |\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots + \frac{(-1)^{n+p-1}}{n}| < \varepsilon \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato nell'exp [2.3,pg.26] che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, quindi per il criterio di Cauchy di convergenza delle serie numeriche (vedi [2.3,pg.15]) abbiamo

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v \in \mathbb{N} : \; |\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots + \frac{(-1)^{n+p-1}}{n}| < \varepsilon \; \forall n > v \; \forall p \in \mathbb{N}$$

quindi la tesi e' acquisita

2.2 Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

si chiama serie armonica. Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \longrightarrow +\infty$$

Proof:
$\langle 1 \rangle$1. Dimostrazione 1
Osserviamo che

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = s_{n+1}$$

La serie $\{s_n\}$ e' crescente, e quindi non oscillante.
$\langle 2 \rangle$1. Dim. che l'estratta $s_{2^m} \longrightarrow +\infty$
$\langle 3 \rangle$1. Dimostriamo che $s_{2^m} > \frac{m+1}{2}$

Per induzione.
Base $m = 1$:
$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1 = \frac{m+1}{2}$$
Hp: $s_{2^m} > \frac{m+1}{2}$ e' vera
Ts:
$$s_{2^{m+1}} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^m}}_{> \frac{m+1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2^m+1} + \dots + \frac{1}{2^{m+1}}}_{> \underbrace{\frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} + \dots + \frac{1}{2^{m+1}}}_{2^m \text{ volte}}} > \frac{m+1}{2} + \frac{2^m}{2^{m+1}} = \frac{(m+1)+1}{2}$$
Poiche' $\frac{m+1}{2} \longrightarrow \infty$, anche $s_{2^m} \longrightarrow \infty$.
Poiche' $\{s_{2^m}\}$ e' un'estratta di $\{s_n\}$, si ha $s_n \longrightarrow \infty$. $\square$

⟨1⟩2. Dimostrazione 2
Osservando che
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e \;\forall n \in \mathbb{N}$$
abbiamo
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \;\Rightarrow\; n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 \;\Rightarrow\; \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}$$
allora maggioriamo s_n:
$$s_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > (\log 2 - \log 1) + (\log 3 - \log 2) + \dots + (\log(n+1) - \log n) = \log(n+1) - \log 1 = \log(n+1)$$
ovvero $s_n > \log(n+1)$. Poiche' $\log(n+1) \longrightarrow \infty$, si ha che $s_n \longrightarrow \infty$ $\square$

2.3 Serie di Mengoli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Proof:
Osserviamo che
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
allora
$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$
$$\lim s_n = \lim \frac{n}{n+1} = 1$$

2.4 Serie geometrica

Serie geometrica di ragione $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Case: $x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + 1 + \dots + 1 + \dots = +\infty$$

Case: $x \neq 1$

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \;\Leftrightarrow\; (1-x)s_n = (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) \;\Leftrightarrow\; (1-x)s_n = 1 - x^n$$

$$\Leftrightarrow\; s_n = \frac{1-x^n}{1-x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & -1 < x < 1 \\ +\infty & x > 1 \\ \nexists \text{ (e' oscillante)} & x \le -1 \end{cases}$$

CASE: $x < -1$

La serie non e' assolutamente convergente:

$$|s_n| = \frac{|1-x^n|}{|1-x|} \ge \frac{||1| - |x|^n|}{|1-x|} = \frac{|1-|x|^n|}{|1-x|} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|1-|x|^n|}{|1-x|} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |s_n| = +\infty$$

2.5 Serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad \text{fissato } x \in \mathbb{R}$$

si ha che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \begin{cases} \text{converge} & x \in]1, +\infty[\\ \text{diverge a } +\infty & x \in]-\infty, 1] \end{cases}$$

Proof: [1]

CASE: $x = 1$

Questa e' la serie armonica semplice, quindi diverge a $+\infty$

CASE: $x = 0$

$1 + \cdots + 1 \ldots,$, quindi diverge a $+\infty$

CASE: $x < 0$

$\lim \frac{1}{n^x} = \lim n^{-x} = +\infty$, quindi per il thm [2.2,pg.15], la serie non converge.
Poiche' $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ e' a termini positivi, divergera' a $+\infty$.

CASE: $0 < x < 1$

$$x < 1 \Rightarrow n^x \le n$$

$$n^x \le n \Leftrightarrow \frac{1}{n^x} \ge \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{criterio del confronto}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = +\infty$$

Quindi, come prima, la serie diverge a $+\infty$.

CASE: $x = 2$

Consideriamo la serie resto di posto 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

[1] useremo varie volte il criterio del confronto (vedi [2.10,pg.17]) e il criterio di Raabe (vedi [2.7,pg.21])

e il suo termine generale $\frac{1}{(n+1)^2}$, si ha

$$(n+1)^2 \geq n(n+1) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{e' la serie di mengoli, che converge}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{converge per il criterio del confronto}$$

CASE: $x > 2$

$$\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, come abbiamo visto prima, converge, quindi per il criterio del confronto, anche $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ converge.

CASE: $1 < x < 2$

Usiamo il cor del criterio di Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{\frac{1}{n^x}}{\frac{1}{(n+1)^x}} - 1 \right) = \lim \frac{(n+1)^x - n^x}{n^{x-1}}$$

$$n+1 = n(1+\frac{1}{n})$$

$$= \lim \frac{(1+\frac{1}{n})^x n^x - n^x}{n^{x-1}} = \lim \frac{n+1)^x - 1}{n^{-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^x - 1}{\frac{1}{n}} = x \quad \text{e' il lim. notevole}$$

Poiche' $x > 1$, per il cor del criterio di Raabe, la serie converge.

2.6 Serie resto

Sia $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots \quad (2)$$

e' chiamata serie resto di posto k, poiche' e' in sostanza la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ priva dei primi k.

Queste due serie hanno lo stesso carattere, inoltre

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = S - s_k$$

dove $S = \lim s_n$. Con t_n indichiamo le somme parziali di $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$.

Proof:

Basta notare che

$$t_n = s_{k+n} - s_k$$

Quindi se s_n converge, per il thm delle successioni estratte, anche s_{k+n} converge, e quindi pure t_n.

Se t_n converge, s_{k+n} converge. Poiche' s_{k+n} e' un estratta del tipo s_{c+n}, con

c costante, anche s_n converge. Infine

$$t_n = s_{k+n} - s_k$$

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_{k+n} - s_k = \lim_{n\to\infty} s_{k+n} - \lim_{n\to\infty} s_k = S - s_k$$

$\square$

Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n : \quad \exists v \in \mathbb{N} : \ \forall n > v \ b_n = a_n$$

allora per quanto detto prima

$$\sum_{n=v+1}^{\infty} b_n = S - s_v$$

dove $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e s_v e' la somma parziale di posto v. Quindi, la serie A e la serie B definitivamente uguale a A, hanno lo stesso carattere.

2.7 Criteri di convergenza

Theorem 2.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{converge} \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Proof:

$\langle 1\rangle 1.$ Dim $\Rightarrow$

Per Hp $s_n \longrightarrow S$

$$a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$$

$$s_{n+1} \longrightarrow S, \ \ s_n \longrightarrow S \ \Rightarrow \ a_{n+1} \longrightarrow 0$$

$\langle 1\rangle 2.$ Dim $\not\Leftarrow$

$\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ ma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Theorem 2.3. *Criterio di convergenza di Cauchy per le serie numeriche.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ \textit{converge} \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \exists v \in \mathbb{N} : \ |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon \ \forall n > v \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Proof:

$\langle 1\rangle 1.$ Dim $\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ \text{converge} \ \Rightarrow \ \{s_n\} \text{ converge} \ \Rightarrow \ \{s_n\} \ \text{ soddisfa la cond. di Cauchy per succ:}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v \in \mathbb{N} : \ \forall p, q > v \ |s_p - s_q| < \varepsilon$$

Fissiamo $n > v, \ q = n, \ p = n + k$ con un qualsiasi k libero, allora

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| = |s_{n+k} - s_n| = |s_p - s_q| < \varepsilon$$

$\langle 1\rangle 2.$ Dim $\Leftarrow$

Dobbiamo dimostrare che $\{s_n\}$ converge, ovvero che soddisfa la condizione di Cauchy per succ.:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v \in \mathbb{N} : \ \forall p, q > v \ |s_p - s_q| < \varepsilon$$

Per Hp:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v' \in \mathbb{N} : \ |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon \ \forall n > v' \ \forall k \in \mathbb{N} \ \ (1)$$

Allora, ponendo $v = v'$,

CASE: $p = q$

$$|s_p - s_q| = 0 < \varepsilon$$

CASE: $p > q$

$$|s_p - s_q| = |a_{q+1} + \cdots + a_p| < \varepsilon \text{ per la (1), dove } n = q,\ k = p - n$$

CASE: $p < q$

$$|s_p - s_q| = |s_q - s_p| = |a_{p+1} + \cdots + a_q| < \varepsilon \text{ per la (1), dove } n = p,\ k = q - n$$

□

2.8 Serie somma

Sommiamo due serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

Come primo risultato abbiamo che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge ad } A \wedge \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge a } B \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \ \text{ converge a } A + C$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty \ \oplus \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \pm\infty \right) \vee \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \pm\infty \right) \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \pm\infty$$

Nota [2]. Per il caso in cui una diverge a $+\infty$ e l'altra $-\infty$, non si puo' dire nulla a priori.
Infine, dato $\lambda \in \mathbb{R}$, abbiamo:

$$\lambda = 0 \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = 0$$

$$\lambda > 0 \ \wedge \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \pm\infty$$

$$\lambda < 0 \ \wedge \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \mp\infty$$

2.9 Serie a termini non negativi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

si dice a termini non negativi $\Leftrightarrow$

$$\forall n \in \mathbb{N} \ a_n \geq 0$$

[2] con $\oplus$ indichiamo lo XOR

Theorem 2.4. *Una serie a termini non negativi (converge)* $\vee$ *(diverge a* $+\infty$*).*

Proof:
Basta osservare che

$$s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \Rightarrow s_{n+1} \geq s_n$$

ovvero $\{s_n\}$ e' non decrescente.

□

2.10 Criterio del confronto

Date due serie a termini non negativi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

con $0 \leq a_n \leq b_n \; \forall n \in \mathbb{N}$,

$\{s_n\}$ non decrescente , $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge a T $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a S, con $S \leq T$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$

Proof:
$\langle 1 \rangle$1. Dimostriamo il primo caso.

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n \leq b_1 + \cdots + b_n = t_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge } \Rightarrow t_n \leq \sup\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} = T \in \mathbb{R}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; s_n \text{ non decr, } \;\; s_n \leq T \Rightarrow \{s_n\} \text{ converge}$$

□

2.11 Criterio del rapporto

Data una serie a termini positivi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \; a_n > 0$$

si ha

$$\exists 0 \leq h < 1 : \frac{a_n + 1}{a_n} \leq h \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge a } +\infty$$

Proof:

⟨1⟩1. Dim. il punto 1

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le h,\ a_n > 0 \ \Leftrightarrow\ a_{n+1} \le h a_n \le h^2 a_{n-1}\ (1)$$

⟨2⟩1. Dim per induzione che $a_{n+1} \le h^n a_1$:

$$a_{(n+1)+1} \underbrace{\le}_{\text{per la (1)}} h a_{n+1} \underbrace{\le}_{\text{per la Hp induttiva}} h^{n+1} a_1 \ \Rightarrow\ a_{n+2} \le h^{n+1} a_1$$

⟨2⟩2. Q.E.D.

$$\sum_{n=1}^{\infty} h^n a_1 = a_1 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} h^n}_{\text{serie geom.}},\ 0 \le h < 1 \ \Rightarrow\ a_1 \sum_{n=1}^{\infty} h^n \text{ converge}$$

Allora, da $a_{n+1} \le a_1 h^n$, per il criterio del confronto, deduciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

⟨1⟩2. Dim. il punto 2

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1,\ a_n > 0 \ \Leftrightarrow\ a_{n+1} \ge a_n \Rightarrow s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{>0} > s_n$$

La successione $\{s_n\}$ e' quindi crescente, a termini positivi, e quindi diverge a $+\infty$.

□

Corollary 2.5. *Avendo la serie a termini positivi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$$

si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} l < 1 \ \Rightarrow\ \textit{la serie converge} \\ l > 1 \ \vee\ l = +\infty \ \Rightarrow\ \textit{la serie diverge a } +\infty \\ l = 1 \ \Rightarrow\ \textit{caso dubbio: puo' convergere o divergere} \end{cases}$$

Proof:

⟨1⟩1. Dim il caso $l < 1$

$l < 1 \ \Rightarrow\ \exists h \in \mathbb{R} :\ l < h < 1$

Per la permanenza del segno:

$$\exists v \in \mathbb{N} :\ \forall n > v\ \frac{a_{n+1}}{a_n} < h$$

Allora, per il criterio del rapporto, la serie resto

$$\sum_{n=v+1}^{\infty} a_n$$

converge. Per il thm sulle serie resto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge pure.

⟨1⟩2. Dim il caso $l > 1 \ \vee\ l = +\infty$

Sempre per la permanenza del segno[3]:

$$\exists v \in \mathbb{N}: \ \forall n > v \ \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

quindi per il criterio del rapporto, la serie resto

$$\sum_{n=v+1}^{\infty} a_n$$

diverge a $+\infty$. Per il thm sulle serie resto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

diverge a $+\infty$ pure.

⟨1⟩3. Dimostriamo che si ha un caso dubbio in $l = 1$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, ma

$$\lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1 = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}$$

□

2.12 Criterio della radice

Data una serie a termini non negativi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \ a_n \geq 0$$

si ha

$$\exists 0 \leq h < 1 : \ \sqrt[n]{a_n} \leq h \ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ converge}$$

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ diverge a } +\infty$$

Proof:

⟨1⟩1. Punto 1

$$\sqrt[n]{a_n} \leq h \ \Leftrightarrow \ a_n \leq h^n$$

h^n e' il termine generale della serie geometrica di ragione h.

$$h \in [0, 1[\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} h^n \text{ converge}$$

Per il criterio del confronto, converge pure la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

⟨1⟩2. Punto 2

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \ \Leftrightarrow \ a_n \geq 1$$

e quindi diverge a $+\infty$.

Corollary 2.6. *Avendo la serie a termini non negativi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

[3] nel caso $l = +\infty$, abbiamo che $\forall k > 0 \ \exists v \in \mathbb{N}: \ \forall n > v \ \frac{a_{n+1}}{a_n} > k$, allora fissiamo $k = 1$

si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} l < 1 \;\Rightarrow\; \textit{la serie converge} \\ l > 1 \;\vee\; l = +\infty \;\Rightarrow\; \textit{la serie diverge a } +\infty \\ l = 1 \;\Rightarrow\; \textit{caso dubbio: puo' convergere o divergere} \end{cases}$$

La dimostrazione e' analoga a quella del cor [2.5,pg.18].

2.13 Criterio di Raabe

Data una serie a termini positivi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\; a_n > 0$$

si ha

$$\exists h > 1 :\; n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq h\; \forall n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1\; \forall n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge a } +\infty$$

Proof:
⟨1⟩1. Punto 1

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq h \;\Leftrightarrow\; n(a_n - a_{n+1}) \geq h a_{n+1} \;\Leftrightarrow\; n a_n - n a_{n+1} - a_{n+1} \geq h a_{n+1} - a_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow\; n a_n - (n+1) a_{n+1} \geq (h-1) a_{n+1} \;\Leftrightarrow a_{n+1} \leq \frac{n a_n - (n+1) a_{n+1}}{h-1} \quad (*)$$

⟨2⟩1. Dim che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n - (n+1) a_{n+1}}{h-1}$ converge

$$t_n = \frac{a_1 - 2a_2}{h-1} + \frac{2a_2 - 3a_3}{h-1} + \cdots + \frac{n a_n - (n+1) a_{n+1}}{h-1} = \frac{a_1 - (n+1) a_{n+1}}{h-1}$$
$$= \frac{a_1}{h-1} - \frac{(n+1) a_{n+1}}{h-1} \leq \frac{a_1}{h-1}$$

Quindi $\{t_n\}$ e' una successione limitata da $\frac{a_1}{h-1}$. Dalla $(*)$, notiamo che e' anche a termini positivi, quindi converge.

⟨2⟩2. Q.E.D.

Per il criterio del confronto, da

$$a_{n+1} \leq \frac{n a_n - (n+1) a_{n+1}}{h-1}$$

deduciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

⟨1⟩2. Punto 2

$$
\begin{aligned}
& n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \leq 1 \;\Leftrightarrow\; n(a_n-a_{n+1}) \leq a_{n+1} \;\Leftrightarrow\; na_n \leq (1+n)a_{n+1} \\
& \Leftrightarrow\; (1+n)a_{n+1} \geq na_n \;\geq (n-1)a_{n-1} \geq \cdots \geq 1 \cdot a_1 \\
& \Rightarrow\; a_{n+1} \geq \frac{a_1}{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{n+1} = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty \;\text{ e' la serie armonica} \\
& \Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = +\infty \;\text{ [crit. del confronto]}
\end{aligned}
$$

□

Corollary 2.7. *Data una serie a termini positivi:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\; a_n > 0$$

si ha

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \begin{cases} l < 1 \;\vee\; l = -\infty \;\Rightarrow\; \textit{la serie diverge a } -\infty \\ l > 1 \;\vee\; l = +\infty \;\Rightarrow\; \textit{la serie converge} \\ l = 1 \;\Rightarrow\; \textit{caso dubbio: puo' convergere o divergere} \end{cases}$$

La dimostrazione e' analoga a quella del cor [2.5,pg.18].

2.14 Criterio di Abel

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e' convergente, e se la successione numerica $\{b_n\}$ e' pure convergente, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ e' convergente.

2.15 Criterio del rapporto migliorato

Data due serie a termini positivi:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\; a_n > 0 \\
& \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\; b_n > 0
\end{aligned}
$$

tali che

$$\exists v \in \mathbb{N} : \;\; \forall n > v \;\; \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

allora

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

2.16 Criterio del confronto del limite

Date due serie a termini non negativi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geq 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\ b_n \geq 0 \qquad (2)$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c, \quad 0 < c < +\infty \Rightarrow \text{ (1) e (2) convergono } \vee \text{ (1) e (2) divergono}$$

Proof:

Supponiamo che b_n converga, e supponiamo per assurdo che a_n non converga. Allora, per il thm [2.2,pg.15], si ha

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = k \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty \text{ assurdo}$$

Supponiamo che b_n diverga, e supponiamo per assurdo che a_n non diverga (e quindi converge essendo una serie a termini non negativi). Allora, per il thm [2.2,pg.15], si ha

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = k \neq 0, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \text{ assurdo}$$

□

2.17 Criterio dell'integrale

Se $f(x) : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ e' una funzione positiva non crescente, allora $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ e $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ hanno lo stesso carattere.

2.18 Serie commutativa

Sia $r : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una permutazione (una mappa biunivoca), le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b_n = a_{r(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

hanno lo stesso carattere, e se convergono, hanno la stessa somma.

Proof:

$a_{r(i)} \leq s_{r(i)} = a_{r(i)} + a_{r(i)-1} + \cdots + a_1$

$$a_{r(i)} + a_{r(j)} \leq s_{\max\{r(i),r(j)\}} = \begin{cases} a_{r(i)} + a_{r(i)-1} + \cdots + a_{r(j)} + \cdots + a_1 & r(i) > r(j) \\ a_{r(j)} + a_{r(j)-1} + \cdots + a_{r(i)} + \cdots + a_1 & r(j) > r(i) \end{cases}$$

...

Let: $m = \max\{r(1), \ldots, r(n)\}$

$t_n = b_1 + \cdots + b_n = a_{r(1)} + \cdots + a_{r(n)} \leq a_1 + \cdots + a_m = s_m$

s_n e' crescente $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{s_n\} = S$

$s_n \leq S\ \forall n \in \mathbb{N}$

$t_n \leq s_m \leq S\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow t_n$ e' limitata $\Rightarrow t_n$ (essendo a termini non neg) converge

Per il viceversa si procede in modo analogo, considerando il $\min\{r(1), \ldots, r(n)\}$.
Inoltre,

$$t_n \leq S \; \forall n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; T \leq S$$
$$s_n \leq T \; \forall n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; S \leq T$$
$$T = S$$

□

Theorem 2.8. *Per una qualunque serie vale il seguente fatto:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ e' ass. conv.} \;\Rightarrow\; \text{ vale la prop. commutativa per serie}$$

Ovvero, se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e' ass. conv, allora una sua qualsiasi permutazione di indici, da' una serie con lo stesso carattere e somma.*

2.19 Serie associativa

A partire dalla serie

$$(1) \;\; a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$$

associamo i suoi termini, ottenendo una nuova serie

$$(2) \;\; (a_1+\cdots+a_{k_1})+(a_{k_1+1}+\cdots+a_{k_2})+(a_{k_2+1}+\cdots+a_{k_3})+\cdots+(a_{k_{n-1}+1}+\cdots+a_{k_n})+\cdots = b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n+\ldots$$

ovvero

$$b_n = a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n}$$

con $\{k_n\}$ successione di numeri naturali.

Theorem 2.9.

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \;\Rightarrow\; \exists \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S$$

Proof:
Le somme parziali di (2) sono
$t_n = b_1 + \cdots + b_n = (a_1 + \cdots + a_{k_1}) + \cdots + (a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n}) = s_{k_n}$
quindi la successione $\{t_n\} = \{s_{k_n}\}$ e e' un'estratta di $\{s_n\}$. Poiche' le estratte hanno lo stesso limite delle loro successioni, si ha la tesi.
$\langle 1 \rangle$1. Non vale il viceversa
Prendiamo ad esempio $\{k_n\} = \{2n\}$ e come prima serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

l'associata diventa:

$$(-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \ldots$$

Quindi quest'ultima converge, ma la prima no.

□

2.20 Serie a segni alterni

La serie

$$(1) \;\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \;\; a_{2n+1} \geq 0, \; a_{2n} \leq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$$

si chiama serie alternante.

Theorem 2.10. *Sia la* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie alternante con almeno un termine non nullo, allora*

$$\{|a_n|\} \text{ non decrescente} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ oscillante}$$

Proof:

Poiche' $\{|a_n|\}$ e' a termini non neg, $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{|a_n|\} > 0$, inoltre poiche' e' non decr.

$\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{|a_n|\} > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ la (1) non converge

⟨2⟩1. Supponiamo per assurdo che (1) diverga a $+\infty$

Consideriamo l'estratta $\{s_{2n}\}$,

$$s_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{\underbrace{a_{2n+1}}_{\geq 0}}_{\text{perche' } a_{2n+1} \text{ e' di posto dispari}} + \underbrace{a_{2n+2}}_{\leq 0} = s_{2n} + \underbrace{\underbrace{|a_{2n+1}| - |a_{2n+2}|}_{\leq 0}}_{\text{la serie } \{|a_n|\} \text{ e' non decr.}} \leq s_{2n}$$

$\Rightarrow \{s_{2n}\}$ e' non cresc. $\Rightarrow \lim s_{2n} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} s_{2n} < +\infty$

$\lim s_{2n} < +\infty$

Assurdo, perche' per Hp $\lim s_n = +\infty$.

⟨2⟩2. Supponiamo per assurdo che (1) diverga a $-\infty$

Consideriamo l'estratta $\{s_{2n}\}$,

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + \underbrace{a_{2n}}_{\leq 0} + \underbrace{a_{2n+1}}_{\geq 0} = s_{2n} + \underbrace{-|a_{2n}| + |a_{2n+2}|}_{\geq 0} \geq s_{2n-1}$$

$\Rightarrow \{s_{2n+1}\}$ e' non decr. $\Rightarrow \lim s_{2n+1} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} s_{2n+1} > -\infty$

$\lim s_{2n+1} > -\infty$

Assurdo, perche' per Hp $\lim s_n = -\infty$.

Theorem 2.11. *Criterio di Leibniz*

LET: (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie alternante con almeno un termine non nullo*

$\{|a_n|\}$ *non crescente*

allora

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \text{la (1) converge e }, \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S, \quad |S - s_n| \leq |a_{n+1}| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| \neq 0 \Rightarrow \text{la (1) e' oscillante}$$

Proof:

Come nella precedente dimostrazione:

$$s_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{a_{2n+1}}_{\geq 0} + \underbrace{a_{2n+2}}_{\leq 0} = s_{2n} + \underbrace{\underbrace{|a_{2n+1}| - |a_{2n+2}|}_{\geq 0}}_{\text{la serie } \{|a_n|\} \text{ e' non cres.}} \geq s_{2n}$$

$\Rightarrow \{s_{2n}\}$ e' non decresc.

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + \underbrace{a_{2n}}_{\leq 0} + \underbrace{a_{2n+1}}_{\geq 0} = s_{2n} + \underbrace{-|a_{2n}| + |a_{2n+2}|}_{\leq 0} \leq s_{2n-1}$$

$\Rightarrow \{s_{2n+1}\}$ e' non cresc.

$\langle 2 \rangle 1.$ Dimostriamo che $\{s_{2n}\}, \{s_{2n-1}\}$ sono separati

Ovvero, dimostriamo che

$$\forall p, q \in \mathbb{N}\ s_{2p} \le s_{2q-1}$$

CASE: $p = q$

$$s_{2p} = s_{2p-1} + \underbrace{a_{2p}}_{\le 0} \le s_{2p-1} = s_{2q-1}$$

CASE: $p > q$

$$\{s_{2n+1}\} \text{ non cresc. } \Rightarrow\ s_{2q-1} \ge s_{2p-1} \ge s_{2p-1} + \underbrace{a_{2p}}_{\le 0} = s_{2p}$$

$s_{2p} \le s_{2q-1}$

CASE: $p < q$

$p < q\ \Leftrightarrow\ p \le q - 1 = t$

$\{s_{2n}\}$ non decresc. $\Rightarrow\ s_p \le s_t \le s_t + \underbrace{a_{2t+1}}_{\ge 0} = s_{2t+1} = s_{2(q-1)+1} = s_{2q-1}$

$s_{2p} \le s_{2q-1}$

Ricapitolando i due insiemi sono separati, ovvero

$$S := \sup_{n\in\mathbb{N}}\{2p\} \le \inf_{n\in\mathbb{N}}\{2q-1\} =: T$$

e anche

$$s_{2n} \le S \le T \le s_{2n-1}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ (*)$$

$\langle 2 \rangle 2.$ Dimostriamo non diverge, supponendo per assurdo che diverga a $+\infty$ e poi supponendo per assurdo che diverga a $-\infty$

Se diverge a $+\infty$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty\ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty} s_{2n} = +\infty = S \le T \quad \text{per la (*)}$$

Questo e' assurdo, perche' T, che e' l'inf, non puo' essere $\ge$ di $+\infty$.

Se diverge a $-\infty$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = -\infty\ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty} s_{2n-1} = -\infty = T \ge S \quad \text{per la (*)}$$

Questo e' assurdo, perche' S, che e' il sup, non puo' essere $\le$ di $-\infty$.

$\langle 2 \rangle 3.$ Dimostriamo che per $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$ la (1) converge e che

CASE: $n \in \mathbb{N}$, pari

$s_n \le S \le T \le s_{n+1}$

$S \le s_{n+1}\ \Leftrightarrow\ \underbrace{S - s_n}_{\ge 0} \le \underbrace{s_{n+1} - s_n}_{\ge 0}\ \Rightarrow\ |S - s_n| + |s_{n+1} - s_n| \ge 0$

$|S - s_n| \le |s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}|$

$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0\ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty} |a_{n+1}| = 0\ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty} |s_{n+1} - s_n| = 0$

$0 \le |S - s_n| \le |s_{n+1} - s_n|\ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty} |S - s_n| = 0$ [thm del confronto]

$\lim_{n\to+\infty} s_n = S$

CASE: $n \in \mathbb{N}$, dispari

$p = q,\ 2p = n+1 \ \Rightarrow\ 2q-1 = n$

$s_{n+1} \leq S \leq T \leq s_n$

$S \leq s_n \ \Leftrightarrow\ \underbrace{S - s_{n+1}}_{\geq 0} \leq \underbrace{s_n - s_{n+1}}_{\geq 0} \ \Rightarrow\ |S - s_{n+1}| + |s_n - s_{n+1}| \geq 0$

$|S - s_{n+1}| \leq |s_n - s_{n+1}| = |s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}|$

$\lim_{n\to+\infty} |a_{n+1}| = 0 \ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0 \ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty} |s_n - s_{n+1}| = 0$

$0 \leq |S - s_{n+1}| \leq |s_n - s_{n+1}| \ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty} |S - s_{n+1}| = 0$ [thm del confronto]

$\lim_{n\to+\infty} s_{n+1} = S \ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty} s_n = S$

□

Example 2.3. Per la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n},\quad x \in \mathbb{R}\ \ (1)$$

si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = \begin{cases} \text{ass. convergente} & -1 < x < 1 \\ \text{convergente} & x = -1 \\ \text{div a } +\infty & x \geq 1 \\ \nexists & x < -1 \end{cases}$$

Ovviamente per $x = 0$ converge a 0 Vediamo se e' ass. conv per $x \neq 0$, utilizzando il criterio del rapp.:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\frac{x^n}{n+1}|}{|\frac{x^{n-1}}{n}|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{|x|^n}{n+1}}{\frac{|x|^{n-1}}{n}} = \lim_{n\to+\infty} |x| \frac{n}{n+1} = |x|$$

allora distinguiamo i vari casi:

Case: $|x| < 1 \ \Leftrightarrow\ -1 < x < 1$

la serie dei valori assoluti converge, quindi la (1) e' ass. conv., e quindi anche convergente.

Case: $x > 1$

Criterio del rapporto sulla (1):

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{x^n}{n+1}}{\frac{x^{n-1}}{n}} = x > 1$$

quindi la (1) diverge a $+\infty$

Case: $x = 1$

Si ha la serie armonica, e quindi la (1) diverge a $+\infty$

Case: $x = -1$

e' a segni alterni, e per il criterio di Leibniz:

$$\lim_{n\to+\infty} |\frac{(-1)^n}{n+1}| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

quindi e' convergente.

Case: $x < -1$

e' sempre a segni alterni. Determiniamo la monotonia di

$$\{|\frac{x^{n-1}}{n}|\} = \{\frac{|x|^{n-1}}{n}\}$$

per poi applicare il thm [2.10,pg.24]

$$\frac{|x|^n}{n+1} <> \frac{|x|^{n-1}}{n}$$

$$n|x|^n <> (n+1)|x|^{n-1}$$

$$|x| <> \frac{n+1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1 < \lim_{n\to+\infty} |x| = |x| = -x \quad \text{[per Hp x¡ -1]}$$

$$\exists v \in \mathbb{N} : \ \forall n > v \ \frac{n+1}{n} < |x|$$

$$|x| > \frac{n+1}{n} \ \Leftrightarrow \ \frac{|x|^n}{n+1} > \frac{|x|^{n-1}}{n}$$

ovvero la serie e' non decrescente. Per il thm [2.10,pg.24], la serie (1) e' oscillante.

Example 2.4. Consideriamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ \ a_{2n+1} = \frac{1}{n}, \ a_{2n+2} = -\log\frac{n+1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

⟨1⟩1. Dim che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n+2} = \lim_{n\to+\infty} -\log\frac{n+1}{n} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

⟨1⟩2. Dim che $\{|a_n|\}$ e' non crescente

Sia

$$\varphi(x) = \log x : [n, n+1] \longrightarrow \mathbb{N}$$

per il teorema di lagrange

$$\exists c \in [n, n+1] : \ f'(c) = \frac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n} = \log\frac{n+1}{n} = f'(c) = \frac{1}{c}$$

$$n \leq c \leq n+1 \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{n} \geq \frac{1}{c} \geq \frac{1}{n+1} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{n+1} \leq \log\frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{n} \ \Leftrightarrow \ |a_{2(n+1)+1}| \leq |a_{2n+2}| \leq |a_{2n+1}|$$

$$|a_{2n+3}| \leq |a_{2n+2}| \leq |a_{2n+1}| \ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

cio' implica che ogni termine e' $\geq$ del precedente.

⟨1⟩3. Q.E.D.

Abbiamo visto che

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$$

e che $\{|a_n|\}$ e' non cresc., allora per il criterio di Leibniz, la serie converge. La somma di questa serie viene chiamata costante di Eulero-Mascheroni.

2.21 Costante di Eulero-Mascheroni

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

Proof:

$\langle 1\rangle$1. Dimostriamo che $\gamma \in \mathbb{R}$

Consideriamo la serie dell'esempio [2.4,pg.27], si ha:

$s_{2n+1} = 1-\log\frac{2}{1}+\frac{1}{2}-\log\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\log\frac{n}{n-1}+\frac{1}{n} =$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\left(\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\cdots+\log\frac{n}{n-1}\right) =$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-(\log 2+\log 3-\log 2+\log 4-\log 3+\cdots+\log n-\log(n-1)) =$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$

La serie dell'esempio converge, e quindi $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right) = \Gamma \in \mathbb{R}$$

Example 2.5. Un'applicazione:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})+(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\underbrace{\frac{\overbrace{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})-\log n}^{\longrightarrow\gamma}}{\underbrace{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}_{\longrightarrow+\infty}}}_{\longrightarrow 0}\right) = 1$$

2.22 Serie prodotto

Abbiamo due serie

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

da queste definiamo

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

dove

$$c_n = \sum_{h=1}^{n} a_h b_{n-h+1} = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$$

La (3) e' chiamata serie prodotto secondo Cauchy.

Theorem 2.12. *di Mertens.*
Se la (1), (2) *convergono rispettivamente con somma* A, B *e almeno una delle due e' assolutamente convergente, allora la* (3) *converge con somma* $C = AB$.

Proof:
⟨1⟩1. Portiamo un esempio che mostra che senza l'ipotesi di ass. conv. di almeno una delle serie iniziali, il teorema non vale

Consideriamo
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \quad (*)$$

⟨2⟩1. La $(*)$ converge

Usiamo il criterio di Leibniz: la successione
$$\{|a_n|\} = \{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$$
e' decrescente, e
$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$
quindi, per Leibniz, la $(*)$ converge.

Consideriamo adesso la serie prodotto della $(*)$ per se stessa
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad (**)$$
$$c_n = \sum_{h=1}^{n} a_h a_{n-h+1} = \sum_{h=1}^{n} \frac{(-1)^{h-1}}{\sqrt{h}} \frac{(-1)^{n-h+1-1}}{\sqrt{n-h+1}} =$$
$$(-1)^{n-1} \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{h}\sqrt{n-h+1}}$$

⟨2⟩2. Studiamo i punti di minimo e massimo assoluti della funzione $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{n-x+1} : [1,n] \longrightarrow \mathbb{R}$

Usiamo la tecnica dei tre insiemi[4]:

$X_1 = \{1, n\}$ gli estremi della funzione

$X_2 = \{x \in [1,n] \mid \nexists f'(x)\} = \emptyset$ poiche' $\exists f'(x)\ \forall x \in [1,n]$

$X_3 = \{x \in [1,n] \mid f'(x) = 0\}$

$$D[f(x)] = D\left[\sqrt{nx - x^2 + x}\right] = \frac{n - 2x + 1}{2\sqrt{(xn - x^2 + x)}}$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow n - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{n+1}{2}$$
$$X_3 = \{\frac{n+1}{2}\}$$

$$f(1) = \sqrt{n}, \quad f(n) = \sqrt{n}, \quad f\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n+1}{2}$$
$$f(1) = f(n) \le f\left(\frac{n+1}{2}\right) \Leftrightarrow \sqrt{n} \le \frac{n+1}{2} \Leftrightarrow n \le \frac{n^2+1+2n}{4} \Leftrightarrow$$
$$4n \le n^2 + 1 + 2n \Leftrightarrow 0 \le n^2 + 1 - 2n \Leftrightarrow 2n \le n^2 + 1 \Leftrightarrow 2 \le n + \frac{1}{n}$$

[4]questa tecnica consiste nel confrontare i numeri dell'insieme $\{f(x) \mid x \in X_1 \cup X_2 \cup X_3\}$

Quindi $1, n$ sono punti di minimo e $\frac{n+1}{2}$ e' un punto di massimo
$\langle 2 \rangle 3$. Q.E.D.
Da cio' che abbiamo visto

$$f(x) \leq \frac{n+1}{2} \ \forall x \in [1, n] \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{f(x)} \geq \frac{2}{n+1}$$

$$c_n = (-1)^{n-1} \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{h}\sqrt{n-h+1}} = (-1)^{n-1} \sum_{h=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{f(h)}}_{\geq \frac{2}{n+1}}$$

$$\Rightarrow \ |c_n| = \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{f(h)} \geq \frac{2n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} |c_n| \geq \lim_{n \to +\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 \ \Rightarrow \ \lim_{n \to +\infty} |c_n| \neq 0$$

quindi per il criterio di Leibniz la serie $(**)$ e' oscillante, percio' non converge.

□

Theorem 2.13. *Una versione piu' forte del thm di Mertens: se la* (1) *e* (2) *sono ass. conv. allora la* (3) *e' ass. convergente:*

Proof:
Per Hp

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = A \in \mathbb{R}, \ \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = B \in \mathbb{R}$$

dobbiamo provare che $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = C \in \mathbb{R}$; studiamo la sua somma parziale:

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} |c_i| = \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{h=1}^{i} a_h b_{i-h+1} \Big| =$$

$$|a_1 b_1| + |a_1 b_2 + a_2 b_1| + \cdots + |a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1| \leq$$

$$\leq |a_1||b_1| + |a_1||b_2| + |a_2||b_1| + \cdots + |a_1||b_n| + |a_2||b_{n-1}| + \cdots + |a_n||b_1| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{i} |a_h||b_{i-h+1}| =$$

$$= |a_1|(\underbrace{|b_1| + \cdots + |b_n|}_{\leq B}) + |a_2|(\underbrace{|b_1| + \cdots + |b_{n-1}|}_{\leq B}) + \cdots + |a_n| \underbrace{|b_1|}_{\leq B} \leq B(\underbrace{|a_1| + \cdots + |a_n|}_{\leq A}) \leq AB$$

$t_n \leq AB$
Quindi, la successione $\{t_n\}$ e' limitata, ed essendo a termini non negativi, converge.

□

2.23 Serie telescopica

La successione $\{a_n\}$ e la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$$

hanno lo stesso carattere. Questo deriva semplicemente, dal fatto che

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} (a_{n+1} - a_n)$$

e' una serie telescopica, cioe'

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} (a_{n+1} - a_n) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$$

2.24 Taylor e Mac-Laurin

Example 2.6. Studiamo la sviluppabilita' in taylor di centro $0 = 0$

$$f(x) = \log(1 + x) :] - 1, +1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
&f \in C^{\infty}(] - 1 : +\infty[) \\
&f'(x) = \frac{1}{1+x} \\
&f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \\
&f'''(x) = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3} \\
&D^4 [f(x)] = \frac{2(1+x)^4 - 4(1+x)^3 2(1+x)}{(1+x)^8} = \frac{-6(1+x)^4}{(1+x)^8} = \frac{-6}{(1+x)^4} \\
&D^5 [f(x)] = \frac{24}{(x+1)^5} \\
&D^6 [f(x)] = \frac{-120}{(x+1)^6} \\
&\vdots \\
&D^n [f(x)] = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}
\end{aligned}$$

Ovvero, vogliamo provare che $\forall x \in] - 1, 1]$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{D^n [f(0)]}{n!}x^n + \ldots \\
f(x) &= 0 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!x^n}{n!} + \cdots = \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \cdots = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \forall x \in] - 1, 1]
\end{aligned}$$

Osserviamo che fissato un $-1 < x < 1$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} \quad \text{serie geom di ragione } (-x)$$

che, liberando x in $]-1,1]$ si puo' intendere come una serie di potenze di centro 0:

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1} \quad (1)$$

applichiamo allora il corollario di Cauchy-Hadamad:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}1=1=:l$$

quindi, il raggio di convergenza e' $\frac{1}{l}=1$. Con questa informazione possiamo dire che in $]-1,1[$ la (1) converge assolutamente, anzi e' tot. conv in ogni intervallo $[a,b]\subseteq]-1,1[$. Possiamo applicare l'integrazione di serie all'intervallo $[0,b]$ e $[a,0]$:

$$\int_{[0,b]}\frac{1}{1+x}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,b]}(-1)^{n-1}x^{n-1}$$

$$\log(1+b)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}b^n \quad \forall b\in[0,1]$$

$$\int_{[a,0]}\frac{1}{1+x}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,b]}(-1)^{n-1}x^{n-1}$$

$$\log(1+a)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}a^n \quad \forall a\in[-1,0]$$

quindi

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \quad \forall x\in]-1,1[\quad (2)$$

Per vedere cosa accade agli estremi, procederemo cosi': la serie (2) e' una somma di potenze, calcoliamo il suo raggio, utilizziamo il thm di Abel per vedere dov'e' continua e utilizziamo la definizione di continuita' per concludere sugli estremi. Allora, l'H di (2) e':

$$H=\{h\geq 0\mid \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|h^{n-1} \quad \text{converge}\}$$

Utilizzando il criterio del rapporto, si vede che $\sup H=r=1$. Quindi, la (2) converge in $]-1,1[$ e non converge in $\mathbb{R}\setminus[-1,1]$. Per quanto riguarda gli estremi, la (2) si comporta cosi':

$$x=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad \text{converge (visto in exp [2.1,pg.10])}$$

$$x=-1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}=-\infty$$

A questo punto, per il thm di Abel, possiamo diverge che la (2) e' uniformemente convergente in ogni intervallo del tipo $[a, 1]$ con $-1 < a < 1$.
In questi intervallo, possiamo applicare allo il thm sulla continuita' della funzione limite: sia $S(x)$ la somma della serie, abbiamo fin'ora visto che

$$S(x) = \begin{cases} \log(1+x) & x \in]-1, 1[\\ S(1) & x = 1 \end{cases}$$

per il thm sulla continuita' della funzione limite, $S(x)$ e' continua, quindi

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 1^-} S(x) = S(1) \\ &\lim_{x \to 1^-} S(x) = \lim_{x \to 1^-} \log(1+x) = \log(2) \\ &S(1) = \log(2) = \log(1+1) \end{aligned}$$

In definitiva, abbiamo che

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \forall x \in]-1, 1]$$

2.25 Irrazionalita' di e

Abbiamo visto in analisiII.pdf che

$$e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

percio'

$$e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \qquad (*)$$

Dimostriamo l'irrazionalita' di e.
$\langle 1 \rangle 1$. Fissato un $n \in \mathbb{N}$, proviamo le seguenti disuguaglianze:

$$0 < e - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!} \qquad (1)$$

$$e - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!} < \frac{1}{n!n} \qquad (2)$$

$\langle 2 \rangle 1$. Partiamo dalla (1)
La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} \qquad (3)$$

e' la serie resto di posto $n+1$ della $(*)$. Per quanto visto in [2.6,pg.14], e poiche' la $(*)$ converge, anche la (3) converge e inoltre

$S =$ somma della $(*) = e$

$s_n =$ somma parziale della (*)

$T =$ somma della $(3) = S - s_{n+1} = e - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!}$

(3) a termini positivi $\Rightarrow T > 0 \Leftrightarrow 0 < e - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!} \Leftrightarrow (1)$

$\langle 2 \rangle 2$. Dimostriamo l'uguaglianza (2)

Consideriamo la seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!(n+1)^{k-1}} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^{k-1} \qquad (4)$$

Se escludiamo il fattore $\frac{1}{(n+1)!}$, la (4) diventa una serie geometrica di ragione $\frac{1}{n+1} < 1$, quindi converge a $\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}$.

Moltiplicando per il fattore otteniamo:

$$\frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^{k-1} = \frac{1}{(n+1)! \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)} = \frac{1}{n!n}$$

$\langle 3 \rangle 1$. Confrontiamo la (3) con la (4):

si dimostra per induzione che:

$$\frac{1}{(n+k)!} \leq \frac{1}{(n+1)!(n+1)^{k-1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

infatti,

$k = 1: \qquad \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)!}$

supp. vera per k.

$k+1:$

per Hp induttiva si ha:

$$\frac{1}{(n+k)!} \leq \frac{1}{(n+1)!(n+1)^{k-1}} < \frac{1}{(n+1)!(n+1)^{k-1}} + \frac{1}{(n+1)!(n+1)^{k-1}} \frac{k}{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(n+k)!} < \frac{1}{(n+1)!(n+1)^{k-1}} (1 + \frac{k}{n+1}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(n+k)!} < \frac{1}{(n+1)!(n+1)^{k-1}} (\frac{n+1}{n+1} + \frac{k}{n+1}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(n+k)!} < \frac{1}{(n+1)!(n+1)^{k-1}} (\frac{n+k+1}{n+1}) \qquad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{dividendo per } n+k+1}$$

$$\frac{1}{(n+k+1)(n+k)!} < \frac{1}{(n+1)!(n+1)^{k-1}} (\frac{1}{n+1}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(n+k+1)!} < \frac{1}{(n+1)!(n+1)^{k}}$$

Quindi, per il teorema del confronto, la somma della (3) e' $\leq$ di quella della

(4), ovvero

$$e - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!} \leq \frac{1}{n!n}$$

Quindi la disuguaglianza (2) e' dimostrata.

$\langle 1 \rangle 2.$ Q.E.D.

Supponiamo per assurdo che $e = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}, p \neq q, q > 1$. Per la (1) e (2), fissando $n = q$, si ha:

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=1}^{q+1} \frac{1}{(k-1)!} < \frac{1}{q!q}$$

moltiplichiamo ambo i membri per $q!$:

$$0 < \frac{p}{q} q! - q! \sum_{k=1}^{q+1} \frac{1}{(k-1)!} < \frac{1}{q}$$

$$0 < \underbrace{p(q-1)! - \sum_{k=1}^{q+1} \frac{q!}{(k-1)!}}_{M} < \frac{1}{q} \qquad (0')$$

$$\sum_{k=1}^{q+1} \frac{q!}{(k-1)!} = \frac{q!}{1} + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \cdots + \frac{q!}{q!} = q! + q! + q(q-1)\ldots 3 + \cdots + 1 \in \mathbb{N} \qquad (1')$$

$$q > 1, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N} \Rightarrow p(q-1)! \in \mathbb{N} \qquad (2')$$

$$0 < p(q-1)! - \sum_{k=1}^{q+1} \frac{q!}{(k-1)!} \Leftrightarrow p(q-1)! > \sum_{k=1}^{q+1} \frac{q!}{(k-1)!} \qquad (3')$$

$(1'), (2'), (3') \Rightarrow M \in \mathbb{N}$

$(0') \Rightarrow M < \dfrac{1}{q} < 1$ assurdo contro $M \in \mathbb{N}$

2.26 Formulario

Fattoriale

- $$n!! = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ \frac{n!}{(n-1)!!} & n \neq 1 \end{cases}$$

  Ad esempio,

  $$8!! = 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$$
  $$9!! = 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$$

- $n! = n!!(n-1)!!$
- $(2n)!! = 2^n n!$
- $(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{(2n)!!} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$

Limiti e serie di taylor:

- $\lim \frac{x^n}{n!} = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$
- $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$
- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots,$
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \forall x \in]-1,1]$
- $\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots,$

3 Spazi metrici

Definition 3.1. distanza tra due insiemi X, Y di (S, d):

$$d(X,Y) := \inf \{d(x,y) \mid x \in X, \; y \in Y\}$$

$$X, Y \text{ sono asintotici } \Leftrightarrow X \cap Y = \emptyset, \; d(X,Y) = 0$$

Theorem 3.1.
X sequenzialmente compatto, Y chiuso, $d(X,Y) = 0 \Rightarrow X \cap Y \neq \emptyset$

Proof:

$$d(X,Y) = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{II prop. inf}} \forall \varepsilon = \frac{1}{n} > 0 \;\; \exists x_n \in X, \; \exists y_n \in Y : \;\; d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \tag{1}$$

$\{x_n\} \subseteq X, \;\; X$ seq. comp. $\Rightarrow \exists \{x_{k_n}\} : \;\; x_{k_n} \longrightarrow x^* \in X \qquad (2)$

$y_{k_n} \longrightarrow x^*$ infatti,

$$0 \leq d(y_{k_n}, x^*) \leq d(y_{k_n}, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x^*) \underbrace{<}_{(1)} \underbrace{\frac{1}{k_n}}_{\to 0} + \underbrace{d(x_{k_n}, x^*)}_{\to 0 \;\; (2)}$$

$$\Rightarrow d(y_{k_n}, x^*) \to 0 \Leftrightarrow y_{k_n} \to x^*$$

$y_{k_n} \to x^* \Rightarrow x^* \in \overline{Y} \underbrace{=}_{\text{Y e' chiuso}} Y$

$x^* \in X \cap Y$

$\square$

Corollary 3.2.

$$X \, \textit{chiuso} \; , \; d(\{y\}, X) = 0 \Rightarrow y \in X$$

Proof:
$\{y\}$ e' seq. compatto, X e' chiuso, $d(X,Y) = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{thm prec.}} \{y\} \cap X \neq \emptyset \Leftrightarrow y \in X$

Example 3.2. Consideriamo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{x}\} = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R}\}$, ovvero l'iperbole equilatera. $B = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, ovvero l'asse x. A, B sono asintotici, infatti, $A \cap B = 0$,

$$d((n, \frac{1}{n}), (n, 0)) = \sqrt{(n-n)^2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} \to 0$$

Index