

Analisi II

AlpT (@freaknet.org)

May 31, 2008

Copyright ©2007 Andrea Lo Pumo aka AlpT <alpt@freaknet.org>. All rights reserved.

This document is free; you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or (at your option) any later version.

This document is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for more details.

You should have received a copy of the GNU General Public License along with this document; if not, write to the Free Software Foundation, Inc., 675 Mass Ave, Cambridge, MA 02139, USA.

Contents

1	Teoria dell'integrazione	1
1.1	Primitiva	1
1.2	Integrale indefinito	5
1.2.1	Integrali indefiniti immediati	5
1.3	Metodi d'integrazione	5
1.3.1	Integrazione per decomposizione	5
1.3.2	Integrazione per parti	7
1.3.3	Integrazione per sostituzione	8
1.3.4	Regola pratica di sostituzione	10
1.4	Integrale di Riemann	10
1.4.1	Esempi	11
1.4.2	Condizioni di integrabilita'	12
1.4.3	Proprieta'	14
1.4.4	Teorema della media	14
1.5	Integrale definito	18
1.5.1	Funzione integrale	21
1.5.2	Teorema di Torricelli	21
1.5.3	Formula fondamentale del calcolo integrale	22
1.5.4	Formule di sostituzione per integrali definiti	23
2	Misurabilita' secondo Jordan	23
2.0.5	Proprieta' della misura secondo Jordan	25
2.0.6	Esempi	25
2.1	Trapezoide o rettangoloide	26
2.2	Insieme normale	28
3	Integrali impropri	30
3.1	Integrali generalizzati	30
3.1.1	Condizioni per l'integrabilita'	31
3.1.2	Condizioni per la non integrabilita'	32
3.1.3	Proprieta'	32
3.2	Integrali illimitati	34
3.2.1	Condizioni per l'integrabilita'	35
3.2.2	Condizioni per la non integrabilita'	35
3.2.3	Proprieta'	36
4	Successioni di funzioni	36
4.1	Criterio di convergenza uniforme di Cauchy	38
4.2	Condizioni per le successioni di funzioni	39
4.3	Limite sotto integrale	41
5	Serie di funzioni	44
5.1	Serie sotto integrale	49
6	Serie di potenze	50
7	Serie di Taylor e Mac-Laurin	59
7.1	Formula di Taylor	59
7.2	Serie di Taylor	60

8	Spazi metrici	62
8.1	Spazio $\mathbb{R}$ a n dimensioni	62
8.2	Spazio di funzioni	64
8.3	Seconda disuguaglianza triangolare	65
8.4	Insieme limitato	66
8.5	Diametro	66
8.6	Interno, esterno, frontiera, derivato, chiusura	67
8.7	Insiemi internamente connessi	72
8.7.1	Poligonale	74
8.7.2	Insieme convesso	75
8.8	Successioni	76
8.8.1	Compattezza sequenziale	82
8.9	Limiti di funzioni reali	85
8.10	Continuità	86
9	Derivate parziali	92
9.0.1	Differenziabilità	94
9.0.2	Formula di Lagrange e Taylor	99
9.0.3	Funzioni a gradiente nullo	101
9.0.4	Ricerca di minimi e massimi	103
9.0.5	Algoritmo di ricerca dei pt. di max e min	107
9.0.6	Generalizzazioni	107
9.0.7	Max e min assoluto	108
9.1	Derivate direzionali	110
10	Appendice	112

1 Teoria dell'integrazione

1.1 Primitiva

Data $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ ed $F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) \equiv \text{primitiva di } f(x) \text{ su } (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \forall x \in (a, b) \exists F'(x) \\ 2) \forall x \in (a, b) F'(x) = f(x) \end{cases}$$

Ad esempio, $\frac{x^2}{2}$ e' una primitiva di x , $\sin x$ e' una primitiva di $\cos x$.

Proposition 1.1. *Se $F(x)$ e' una primitiva di $f(x)$ su (a, b) , allora anche $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ lo e'.*

Proof:

Basta notare che $D[F(x) + c] = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a, b)$ □

Proposition 1.2.

$$F(x), G(x) \text{ primitive di } f(x) \text{ su } (a, b) \Rightarrow F(x) - G(x) = c, c \in \mathbb{R}$$

Proof:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

$$G'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

$$F'(x) = G'(x) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : F(x) - G(x) = c \quad [\text{cor. di Lagrange}]$$

□

Theorem 1.3. *Dalle proposizioni [1.1,pg.1] e [1.2,pg.1] segue che se $f(x)$ e' dotata di primitiva e se $F(x)$ e' una sua primitiva su (a, b) , allora l'insieme di tutte le primitive di $f(x)$ su (a, b) e' $\{F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$*

Example 1.1. Ecco un esempio di una funzione che non ammette primitiva.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, +\infty[\\ -1 & x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

ASSUME: $\exists F(x)$ primitiva di $f(x)$ su $] - \infty, +\infty[$

PROVE: assurdo

Proof:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

Nel caso in cui $x \in [0, +\infty[$, si ha che:

$$F'(x) = 1$$

$$F'(x) = 1 = D[x]$$

$$\exists c \in \mathbb{R} : F(x) - x = c \quad [\text{cor. di Lagrange}]$$

Nel caso in cui $x \in]-\infty, 0]$, si ha che:

$$F'(x) = -1$$

$$F'(x) = -1 = D[-x]$$

$$\exists c' \in \mathbb{R} : F'(x) + x = c' \quad [\text{cor. di Lagrange}]$$

allora:

$$F(x) = \begin{cases} x + c & x \in [0, +\infty[\\ -x + c' & x \in]-\infty, 0] \end{cases}$$

poiche' $F(x)$ e' deriv. in (a, b) e' anche continua in (a, b) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0) = c$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x + c' = c'$$

$$c = c'$$

quindi:

$$F(x) = \begin{cases} x + c & x \in [0, +\infty[\\ -x + c & x \in]-\infty, 0] \end{cases}$$

$$\text{che equivale a: } F(x) = |x| + c \quad \forall x \in (a, b)$$

Poiche' $F(x)$ e' derivabile in ogni punto, deve anche esserlo in $x_0 = 0$, ma la derivata di $|x|$ in $x_0 = 0$ non esiste. Assurdo. $\square$

Theorem 1.4. Data $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \equiv \text{continua in } (a, b) \Rightarrow f \text{ ammette primitiva in } (a, b)$$

Non vale sempre il viceversa.

\langle 0 \rangle 1. Controesempio di questo thm

ASSUME:

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

PROVE: $f(x)$ non continua

Proof:

La primitiva di $f(x)$ e'

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Infatti, abbiamo

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad D \left[x^2 \cos \frac{1}{x} \right] = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$$

e poi

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x^2}_{\text{infinitesima}} \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{\text{limitata}} = 0 = F'_-(0) = F'_+(0) = F'(0)$$

però $f(x)$ non è continua, infatti,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

e il $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ non esiste. $\square$

Theorem 1.5. Data $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, dotata di primitiva in (a, b) ,

$$\begin{cases} F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ continua in } x_0 \\ F(x) \text{ primitiva di } f(x) \text{ in } (a, x_0[\\ F(x) \text{ primitiva di } f(x) \text{ in }]x_0, b) \end{cases} \Rightarrow F(x) \text{ primitiva di } f(x) \text{ in } (a, b)$$

(0)1. Dim

- ASSUME:
1. $G(x)$ primitiva di $f(x)$ su (a, b)
 2. $F(x)$ primitiva di $f(x)$ in $(a, x_0[$
 3. $F(x)$ primitiva di $f(x)$ in $]x_0, b)$
 4. $F(x)$ continua in x_0

Proof:

Per Hp 1:

$$G'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

Per Hp 2 e per $\forall x \in (a, x_0[$:

$$F'(x) = f(x) = G'(x)$$

$$F'(x) = G'(x) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : F(x) - G(x) = c \quad [\text{cor. di Lagrange}]$$

Per Hp 3 e per $\forall x \in]x_0, b)$:

$$F'(x) = f(x) = G'(x)$$

$$F'(x) = G'(x) \Rightarrow \exists c' \in \mathbb{R} : F(x) - G(x) = c' \quad [\text{cor. di Lagrange}]$$

Riassemblando:

$$F(x) = \begin{cases} G(x) + c & x \in (a, x_0[\\ G(x) + c' & x \in]x_0, b) \end{cases}$$

Per Hp 4:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} G(x) + c = G(x_0) + c$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} G(x) + c' = G(x_0) + c'$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) \Rightarrow G(x_0) + c' = G(x_0) + c \Rightarrow c = c'$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x) \Rightarrow F(x_0) = G(x_0) + c$$

e ritroviamo:

$$F(x) = \begin{cases} G(x) + c & x \in (a, x_0[\\ G(x) + c & x \in]x_0, b) \\ G(x_0) + c & x = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in (a, b)$$

e quindi $F(x)$ e' proprio la primitiva di $f(x)$:

$$F'(x) = D[G(x) + c] = G'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

□

Example 1.2. Vediamo un'applicazione del precedente teorema. Troviamo una primitiva di $f(x) = |x|$. (Per il thm [1.4,pg.2], dato che $f(x)$ e' continua, e' sicuro che ammetta una primitiva.)

Se ci restringiamo a $]0, +\infty[$, abbiamo $f(x) = x$ e quindi $F(x) = \frac{x^2}{2}$. Invece, in $] - \infty, 0[$ abbiamo $f(x) = -x$ e quindi $F(x) = -\frac{x^2}{2}$. Allora, se consideriamo

$$\begin{aligned} F(x) &= \begin{cases} \frac{x^2}{2} & x \in]0, +\infty[\\ -\frac{x^2}{2} & x \in] - \infty, 0[\\ 0 & x = 0 \end{cases} \\ &= |x| \frac{x}{2} \end{aligned}$$

avremo che $F(x)$ e' continua in $x_0 = 0$. Allora per il teorema precedente, $F(x)$ e' una primitiva di $f(x)$ in $\mathbb{R}$.

1.2 Integrale indefinito

L'integrale indefinito della f e' l'insieme di tutte le primitive assegnate a f , si denota con:

$$\int f(x)dx = \begin{cases} \emptyset & \text{se non esistono primitive per } f \\ \{F(x) + c, c \in \mathbb{R}\} & F(x) \text{ e' una primitiva per } f \end{cases}$$

$f(x)$, posta dentro un'integrale, viene chiamata funzione integranda.

1.2.1 Integrali indefiniti immediati

- (*) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1, x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ (0) $\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \log |x| + c, x \neq 0$
- (1) $\int [f(x)]^\alpha f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ (2) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + c$
- (*) $\int \sin x dx = -\cos x + c$ (*) $\int \cos x dx = \sin x + c$
- (*) $\int e^x dx = e^x + c$ (*) $\int 0 dx = c$
- (3) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$ (4) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cotan x + c$
- (0) $\frac{1}{x}$ e' continua in $] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ e quindi ammette primitiva. La sua primitiva in $] -\infty, 0[$ e' $\log -x$, invece in $]0, +\infty[$ e' $\log x$, quindi in definitiva una sua primitiva e' sempre $\log |x|$
- (1) con $\alpha \neq -1$, f derivabile nel suo intervallo di definizione e $f(x) > 0$
- (2) con f derivabile nel suo intervallo di definizione e $f(x) \neq 0$
- (3) stiamo considerando le primitive in ogni $(a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- (4) stiamo considerando le primitive in ogni $(a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$

1.3 Metodi d'integrazione

Vedremo alcuni metodi che semplificano il calcolo di integrali.

1.3.1 Integrazione per decomposizione

Theorem 1.6. Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a, b) e sia $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ allora valgono le seguenti proposizioni:

1. Anche $kf(x)$ e' dotata di primitive
2. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$

dove $k \int f(x)dx$ e' un insieme definito in questo modo:

$$k \int f(x)dx = \{k(F(x) + c), c \in \mathbb{R} \mid F(x) \text{ primitiva di } f(x)\}$$

(0)1. Dimostriamo la 1

Proof: Per Hp $\exists F(x) : F'(x) = f(x)$. Dimostriamo allora che $kF(x)$ e' una primitiva di $kf(x)$:

intanto $kF(x)$ e' derivabile perche' prodotto di f. deriv.

$$D[kF(x)] = kF'(x) = kf(x) \Rightarrow kF(x) \text{ e' una primitiva di } kf(x)$$

□

(0)2. Dimostriamo la 2

Dobbiamo dimostrare l'inclusione tra i due insiemi.

LET: 1. $k \neq 0$

$$2. A = \int k f(x) dx$$

$$3. B = k \int f(x) dx$$

(1)1. Dimostriamo $A \subseteq B$

Proof:

LET: $H(x) \in A$

allora

$$H'(x) = k f(x)$$

$$H(x) = k \left(\frac{1}{k} H(x) \right), \quad k \neq 0$$

Basta adesso provare che $\frac{1}{k} H(x)$ e' primitiva di $f(x)$:

$$D \left[\frac{1}{k} H(x) \right] = \frac{1}{k} H'(x) = \frac{1}{k} k f(x) = f(x)$$

$$H(x) \in B \Rightarrow A \subseteq B$$

□

(1)2. Dimostriamo $B \subseteq A$

Proof:

LET: $kF(x) \in B$

allora $D[kF(x)] = kF'(x) = kf(x)$, ovvero $kF(x)$ e' una primitiva di $kf(x)$ e quindi $kF(x) \in A$

□

Osservazione: se $k = 0$ abbiamo

$$A = \int 0 dx = \{c \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{k(F(x) + c), c \in \mathbb{R}\} = \{0\}$$

e quindi $A \neq B$

□

Theorem 1.7. Sia $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ dotate di primitive in (a, b) , allora valgono le seguenti proposizioni:

1. Anche $f(x) + g(x)$ e' dotata di primitive

$$2. \int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

dove $\int f(x) dx + \int g(x) dx$ e' un insieme definito in questo modo:

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx = \{(F(x) + c) + (G(x) + c'), c, c' \in \mathbb{R} \mid F, G \text{ primitive di } f, g\}$$

(0)3. Dim. 1

ASSUME: 1. $\exists F(x)$ primitiva di $f(x)$

2. $\exists G(x)$ primitiva di $g(x)$

Proof: Per Hp $\exists F(x) : F'(x) = f(x)$ e lo stesso per $g(x)$, allora $F(x) + G(x)$ e' una primitiva di $f(x) + g(x)$, infatti

$$D[F(x) + G(x)] = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

□

(0)4. Dim. 2

LET: $A = \int f(x) + g(x) dx$

$$B = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

(1)1. Dim. $A \subseteq B$

LET: $H(x) \in A$

$$F(x) \in \int f(x)dx$$

Abbiamo che $H(x) = F(x) + [H(x) - F(x)]$, quindi basta mostrare che $[H(x) - F(x)]$ e' la prim. di $g(x)$:

$$D[H(x) - F(x)] = H'(x) - F'(x) = f(x) + g(x) - f(x) = g(x)$$

□

(1)2. Dim. $B \subseteq A$

LET: $F(x) + G(x) \in B$

$$D[F(x) + G(x)] = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow F(x) + G(x) \text{ prim. di } f(x) + g(x)$$

□

□

Corollary 1.8. Come corollario dei due precedenti teoremi si ha subito che:

$$\int k_1 f_1(x) + \dots + k_n f_n(x) dx = k_1 \int f_1(x) dx + \dots + k_n \int f_n(x) dx$$

dove $k_i \neq 0$ e $f_i(x)$ sono dotate di primitive nell'intervallo di definizione.

Possiamo riscrivere il II membro in questo modo:

$$k_1 \int f_1(x) dx + \dots + k_n \int f_n(x) dx = \{k_1 F_1(x) + \dots + k_n F_n(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}\}$$

dove $F_i(x)$ e' una primitiva di $f_i(x)$.

1.3.2 Integrazione per parti

Theorem 1.9. Siano $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabili in (a, b) . Se la funzione $f'(x)g(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ e' dotata di primitive, allora:

1. $f(x)g'(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ e' dotata di primitive

2. $\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$, ovvero

$$\int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x),$$

dove $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ e' l'insieme delle funzioni che sono una differenza tra $f(x)g(x)$ e una primitiva di $f'(x)g(x)$.

$f(x)$ si chiama fattore finito e $g'(x)$ fattore differenziale.

(1)1. Dimostriamo la 1

Per Hp esiste $H(x)$ primitiva di $f'(x)g(x)$. Consideriamo $G(x) = f(x)g(x) - H(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. $G(x)$ e' la primitiva di $f(x)g'(x)$, infatti, e' derivabile in (a, b) e abbiamo:

$$G'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) - f'(x)g(x) = g'(x)f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

(1)2. Dimostriamo la 2

Sia $A = \int f(x)g'(x)$ e $B = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$.

(2)1. Dimostriamo $A \subseteq B$

Sia $H(x) \in A$, che possiamo scrivere come:

$$H(x) = f(x)g(x) - [f(x)g(x) - H(x)]$$

per vedere che $H(x) \in B$ dobbiamo quindi dimostrare che $f(x)g(x) - H(x)$ e' una primitiva di $f'(x)g(x)$. Intanto e' derivabile in (a, b) perche' lo era pure $H(x)$ e f, g , e inoltre:

$$D[f(x)g(x) - H(x)] = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) - f'(x)g(x) = f'(x)g(x)$$

□

⟨2⟩2. Dimostriamo $B \subseteq A$

Sia $P(x) = f(x)g(x) - H(x) \in B$. $P(x)$ e' derivabile in (a, b) perche' lo e' pure $H(x)$ e f, g . Inoltre la sua derivata e':

$P'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) - f'(x)g(x) = g'(x)f(x) \quad \forall x \in (a, b)$
quindi $P(x)$ e' una primitiva di $f(x)g'(x)$. In conclusione $P(x) \in A$ $\square$

1.3.3 Integrazione per sostituzione

Theorem 1.10. *Data $f(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$, dotata di primitiva in (α, β)
 $\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in (a, b) , con $\text{cod}(\varphi) \subseteq (\alpha, \beta)$, valgono queste due proposizioni:*

1. $f(\varphi(x))\varphi'(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ e' dotata di primitiva in (a, b) .

2.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left[\int f(y)dy \right]_{y=\varphi(x)}$$

dove il secondo membro e' un insieme che contiene funzioni del tipo $F(\varphi(x))$, con $F(x)$ primitiva di $f(y)$.

La 2 e' chiamata prima formula d'integrazione per sostituzione.

Proof:

⟨1⟩1. Dim 1.

Sia $F(x)$ la primitiva di f in (α, β) , che esiste per Hp. Una primitiva di $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ e' la funzione composta $F(\varphi(x))$, infatti,

$$D[F(\varphi(x))] = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

⟨1⟩2. Dim 2.

Sia $A = \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx$, $B = \left[\int f(y)dy \right]_{y=\varphi(x)}$

⟨2⟩1. Dim $A \subseteq B$

Sia $H(x)$ una primitiva di $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ in (a, b) , e $F(x)$ una primitiva di $f(x)$, allora

$$F(\varphi(x)) \in B$$

$$H'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x) = D[F(\varphi(x))] \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow H(x) \in B$$

⟨2⟩2. Dim $B \subseteq A$

Sia $F(\varphi(x)) \in B$, poiche'

$$D[F(\varphi(x))] = f(\varphi(x))\varphi'(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

si ha che $F(\varphi(x)) \in A$

$\square$

Theorem 1.11. *Data $f(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$, dotata di primitiva in (α, β)
 $\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile e invertibile in (a, b) , con $\text{cod}(\varphi) \subseteq (\alpha, \beta)$, valgono queste due proposizioni:*

1. $f(\varphi(x))\varphi'(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ e' dotata di primitiva in (a, b)

2.

$$\int f(x)dx = \left[\int f(\varphi(y))\varphi'(y)dy \right]_{y=\psi(x)}$$

dove $\psi(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow (a, b)$ e' la funzione inversa di φ

La 2 e' chiamata seconda formula d'integrazione per sostituzione.

Proof:

⟨1⟩1. Il punto 1. e' stato gia' dimostrato nel precedente thm. Dimostriamo il punto 2.

$$\text{Sia } A = \int f(x)dx, \quad B = \left[\int f(\varphi(y))\varphi'(y)dy \right]_{y=\psi(x)}$$

⟨2⟩1. Dim $A \subseteq B$

Sia $F(x)$ una primitiva di $f(x)$, allora

$$F(x) = F(\varphi(\psi(x))), \quad y = \psi(x)$$

$$D[F(\varphi(y))] = f(\varphi(y))\varphi'(y)$$

$$\Rightarrow F(x) \in B$$

⟨2⟩2. Dim $B \subseteq A$

Sia $H(\psi(x)) \in B$, allora

$$D[H(\psi(x))] = H'(\psi(x))\psi'(x) = f(\varphi(\psi(x)))\varphi'(\psi(x))\psi'(x) = f(x)\varphi'(\psi(x))\psi'(x) =$$

$$\varphi'(\psi(x)) = \frac{1}{\psi'(x)} \text{ [thm di derivazione delle funz. inverse]}$$

$$= f(x) \frac{1}{\psi'(x)} \psi'(x) = f(x)$$

$$\text{quindi } H(\psi(x)) \in A$$

□

Theorem 1.12. Data una $f(t)$ e $\varphi(x)$, con $\text{cod}\varphi \subseteq \text{dom}f$, e data $\psi(t)$, inversa di φ , vale la seguente uguaglianza:

$$\int f(\varphi(x)) dx = \left[\int f(t)\psi'(t) dt \right]_{t=\varphi(x)}$$

Noi la chiameremo terza formula d'integrazione per sostituzione.

Proof:

Per il teorema di derivazione delle funzioni inverse, abbiamo che

$$\psi'(\varphi(x)) = \frac{1}{\varphi'(x)}$$

allora

$$\int f(\varphi(x)) dx = \int f(\varphi(x)) \frac{1}{\varphi'(x)} \varphi'(x) dx$$

$$= \int f(\varphi(x))\psi'(\varphi(x))\varphi'(x) dx$$

$$\text{poniamo } h(t) = f(t)\psi'(t)$$

$$= \int h(\varphi(x))\varphi'(x) dx$$

per la prima formula di sost. abbiamo:

$$= \left[\int h(t) dt \right]_{t=\varphi(x)} = \left[\int f(t)\psi'(t) dt \right]_{t=\varphi(x)}$$

□

Example 1.3.

$$\begin{aligned}
& \int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + e^x + 1} dx = \\
& \quad f(t) = \frac{t+1}{t^2+t+1} \quad \varphi(x) = e^x \quad \psi(t) = \log t \\
& = \left[\int f(t) \psi'(t) dt \right]_{t=\varphi(x)} \\
& = \left[\frac{t+1}{t(t^2+t+1)} dt \right]_{t=\varphi(x)}
\end{aligned}$$

da qui si procede risolvendo questo integrale razionale

1.3.4 Regola pratica di sostituzione

Una volta fatta una qualsiasi sostituzione di tipo $t = f(x)$, basta considerare dx come la derivata di x , dove x diventa $f^{-1}(t)$, alcuni esempi:

$$\begin{aligned}
& \int f(x) dx = \\
& \quad x = \varphi(t), \quad t = \psi(x) \text{ [l'inversa di } \varphi], \quad dx = D[\varphi(t)] = \varphi'(t) \\
& = \int f(x) dx = \left[\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right]_{t=\psi(x)} \text{ [questa e' la seconda formula di sost.]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \\
& \quad t = \varphi(x), \quad x = \psi(t), \quad dx = D[\psi(t)] = \psi'(t), \quad \varphi'(x) = \varphi'(\psi(t)) = \frac{1}{\psi'(t)} \text{ [thm. di deriv. funz. inversa]} \\
& = \left[\int f(t) \frac{1}{\psi'(t)} \psi'(t) dt \right]_{t=\varphi(x)} = \left[\int f(t) dt \right]_{t=\varphi(x)} = \text{[questa e' la prima formula]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int f(\varphi(x)) dx = \\
& \quad t = \varphi(x), \quad x = \psi(t), \quad dx = D[\psi(t)] = \psi'(t) \\
& = \left[\int f(t) \psi'(t) dt \right]_{t=\varphi(x)} \text{ [questa e' la terza]}
\end{aligned}$$

1.4 Integrale di Riemann

Data $f(x) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata in $[a, b]$, una partizione di $[a, b]$ si indica con $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\}, n \in \mathbb{N} : x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

In altre parole stiamo suddividendo $[a, b]$ in n intervallini di tipo $[x_{i-1}, x_i]$.

Nota: $f(x)$ limitata in $[a, b]$ vuol dire che esistono $h, k \in \mathbb{R} : h \leq f(x) \leq k \quad \forall x \in [a, b]$

$[a, b]$.

$$|\mathcal{P}| = \text{ampiezza di } \mathcal{P} = \max \{(x_i - x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

Poiche' f e' limitata in $[a, b]$, lo sara' pure in $[x_{i-1}, x_i]$, quindi:

$$\begin{cases} \exists m_i = \inf f(x) & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \exists M_i = \sup f(x) & x \in [x_{i-1}, x_i] \end{cases}$$

Definiamo la somma inferiore e la somma superiore:

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \quad S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

Al variare di $\mathcal{P}$ di $[a, b]$ nascono i seguenti insiemi numerici:

$$A = \{s(f, \mathcal{P})\}_{\mathcal{P}} \quad B = \{S(f, \mathcal{P})\}_{\mathcal{P}}$$

A e' l'insieme numerico delle somme inferiori, e B quello delle somme superiori.

Theorem 1.13.

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{limitata in } [a, b] \Rightarrow A, B \text{ sono separati}$$

Essere separati vuol dire che

$$\forall x \in A, y \in B \quad x \leq y$$

Definition 1.4.

$$f(x) \text{ e' integrabile secondo Riemann} \Leftrightarrow A, B \text{ sono separati e contigui}$$

Essere contigui vuol dire che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A, y \in B : y - x < \varepsilon$$

Definition 1.5. L'integrale secondo Riemann e' l'elemento di separazione di A, B , e si indica con

$$\int_{[a,b]} f(x) dx$$

e quindi, essendo l'elemento di separazione:

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \sup A = \inf B$$

Theorem 1.14. *Ogni funzione continua o monotona o generalmente continua in $[a, b]$ e' integrabile secondo Riemann.*

1.4.1 Esempi

Esempio 1

Data $f(x) = k$, vogliamo calcolare il suo integrale secondo Riemann in $[a, b]$.
 f e' sicuramente limitata in $[a, b]$ dato che e' costante. Inoltre,

$$m_i = \inf f(x) = k, \quad M_i = \sup f(x) = k \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

Percio',

$$\begin{aligned} s(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = m_i \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \\ &= m_i(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \cdots + x_n - x_{n-1}) = m_i(x_n - x_0) = m_i(b - a) = k(b - a) \\ S(f, \mathcal{P}) &= k(b - a) \quad [\text{per procedimento analogo a } s(f, \mathcal{P})] \end{aligned}$$

allora

$$\{s(f, \mathcal{P})\}_{\mathcal{P}} = \{k(b - a)\} \quad \{S(f, \mathcal{P})\}_{\mathcal{P}} = \{k(b - a)\}$$

e in definitiva:

$$\int_{[a,b]} k dx = k(b - a)$$

Esempio 2

Esempio di funzione non integrabile secondo Riemann: la funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \forall x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

abbiamo che

$$m_i = \inf f(x) = 0 \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$M_i = \sup f(x) = 1 \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = 0$$

$$S(f, \mathcal{P}) = M_i(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \cdots + x_n - x_{n-1}) = 1(x_n - x_0) = b - a = 1 - 0 = 1$$

$$A = \{s(f, \mathcal{P})\}_{\mathcal{P}} = \{0\} \quad B = \{S(f, \mathcal{P})\}_{\mathcal{P}} = \{1\}$$

e ovviamente A, B non sono contigui.

1.4.2 Condizioni di integrabilita'

Theorem 1.15. $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$ allora

1. f e' limitata in $[a, b]$
2. f e' integrabile secondo Riemann in $[a, b]$

Proof:

(1)1. Dim la 1

La f e' continua in $[a, b]$, quindi per il teorema di Weierstrass

$$\exists m = \min \{f([a, b])\}, \quad \exists M = \max \{f([a, b])\}$$

allora

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

quindi f e' limitata □

(1)2. Dim la 2

f e' continua in $[a, b]$, allora per il teorema di Cantor-Heine (vedi [8.32,pg.87])

e' anche uniformemente continua, cioe'

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo $\frac{\varepsilon}{b-a}$:

$$(*) \quad \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Adesso prendiamo una partizione $\overline{P}$ di $[a, b]$ in modo tale che $|\overline{P}| < \delta$, $|\overline{P}|$ e' l'ampiezza della partizione, cioe':

$$|\overline{P}| = \max \{x_i - x_{i-1}, i = 1, \dots, n\} < \delta \Rightarrow x_i - x_{i-1} < \delta \forall i = 1, \dots, n$$

Consideriamo questa differenza:

$$\begin{aligned} m_i &= \inf f(x) \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \\ &= \min f([x_{i-1}, x_i]) \quad [\text{per la continuita' di } f \text{ e per il thm di Weierstrass}] \\ &= f(\eta_i), \quad \eta_i \in [x_{i-1}, x_i] \\ M_i &= \sup f(x) \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \\ &= \max f([x_{i-1}, x_i]) = f(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \\ S(f, \overline{P}) - s(f, \overline{P}) &= \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) - f(\eta_i))(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n |f(\xi_i) - f(\eta_i)|(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

Cerchiamo adesso di sfruttare la disuguaglianza dell'uniforme continuita':

$$\eta_i \in [x_{i-1}, x_i] \subseteq [a, b] \Rightarrow \eta_i \in [a, b]$$

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \subseteq [a, b] \Rightarrow \xi_i \in [a, b]$$

$$|\xi_i - \eta_i| < x_i - x_{i-1} \quad [\text{dato che } \xi_i \text{ e } \eta_i \text{ sono nello stesso int. } [x_{i-1}, x_i]]$$

$$x_i - x_{i-1} < \delta \quad [\text{per quello che avevamo visto prima}]$$

$$|\xi_i - \eta_i| < \delta$$

quindi ξ_i e η_i rispettano le condizioni della (*), percio'

$$|f(\xi_i) - f(\eta_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

maggioriamo adesso la differenza che avevamo prima considerato:

$$S(f, \overline{P}) - s(f, \overline{P}) = \sum_{i=1}^n |f(\xi_i) - f(\eta_i)|(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon$$

$$S(f, \overline{P}) - s(f, \overline{P}) < \varepsilon$$

Quindi $\forall \varepsilon > 0$, riusciamo a trovare due partizioni $P_1 = P_2 = \overline{P}$ tali che $S(f, \overline{P}) - s(f, \overline{P}) < \varepsilon$. Questo vuol dire che $\{S(f, P)\}_P$, $\{s(f, P)\}_P$ sono due insiemi contigui, percio', in definitiva, f e' integrabile secondo Riemann, $\square$

Theorem 1.16. $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, monotona in $[a, b]$ allora

1. f e' limitata in $[a, b]$
2. f e' integrabile secondo Riemann in $[a, b]$

Proof: Dimostriamo solo il caso in cui la funzione e' non decrescente. Tutti gli altri casi sono analoghi.

(1)1. Dim la 1

Sia $x \in [a, b]$, allora $a \leq x \leq b$, poiche' f e' non decrescente $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, quindi f e' limitata in $[a, b]$ $\square$

(1)2. Dim la 2

Procedendo analogamente alla dimostrazione del teorema [1.15,pg.12], e considerando $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1} > 0$ arriviamo a

$$|\overline{P}| = \min \{x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n\} < \delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1} \Rightarrow x_i - x_{i-1} < \delta \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Poiche' f e' non decrescente, abbiamo

$$M_i = \sup f([x_{i-1}, x_i]) = f(x_i)$$

$$m_i = \inf f([x_{i-1}, x_i]) = f(x_{i-1})$$

Allora considerando la solita differenza, arriviamo a

$$\begin{aligned} S(f, \overline{P}) - s(f, \overline{P}) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))\delta = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1} = \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1} (f(x_n) - f(x_0)) \\ &= \varepsilon \frac{f(b) - f(a)}{f(b) - f(a) + 1} < \varepsilon \cdot 1 \end{aligned}$$

$$S(f, \overline{P}) - s(f, \overline{P}) < \varepsilon$$

La dimostrazione e' conclusa. $\square$

Theorem 1.17. $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *generalmente continua e limitata in $[a, b] \Rightarrow f$ e' integrabile secondo Riemann.*

Una funzione e' generalmente continua in $[a, b]$ quando e' continua in $[a, b] \setminus E$, dove E e' un sottoinsieme finito di $[a, b]$. Ovvero e' generalmente continua, se e' continua in tutto $[a, b]$, tranne un numero finito di punti.

1.4.3 Proprieta'

Date $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, integrabili secondo Riemann in $[a, b]$, e presi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valgono le seguenti proprieta'

1. Proprieta' distributiva dell'integrale esteso:

$$\begin{cases} \alpha f(x) + \beta g(x) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ e' integrabile secondo Riemann} \\ \int_{[a,b]} \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_{[a,b]} f(x) dx + \beta \int_{[a,b]} g(x) dx \end{cases}$$

2. Proprieta' di additivita':

$$\begin{cases} \forall [\alpha, \beta] \subseteq [a, b] \quad f \text{ e' integrabile secondo Riemann in } [\alpha, \beta] \\ c \in]a, b[\Rightarrow \int_{[a,b]} f(x) dx = \int_{[a,c]} f(x) dx + \int_{[c,b]} f(x) dx \end{cases}$$

1.4.4 Teorema della media

Theorem 1.18. *Data $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, integrabile secondo Riemann, e posto*

$$m = \inf f([a, b]) \quad M = \sup f([a, b])$$

si ha

$$m(b-a) \leq \int_{[a,b]} f(x) dx \leq M(b-a)$$

Se inoltre f e' continua, si ha

$$\exists \xi \in [a, b] : \int_{[a, b]} f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

Proof:

Per Hp f e' int. sec. R. $\Rightarrow$ e' limitata $\Rightarrow \exists$ finito $M = \sup f([a, b])$, $\exists$ finito $m = \inf f([a, b])$. Inoltre

$$\int_{[a, b]} f(x) dx = \sup \{s(f, P)\}_P = \inf \{S(f, P)\}_P$$

e quindi

$$s(f, P_1) \leq \int_{[a, b]} f(x) \leq S(f, P_2) \quad \forall P_1, P_2 \text{ part. di } [a, b]$$

Consideriamo allora $P_1 = P_2 = \tilde{P} = \{a, b\}$ (la part. banale). Abbiamo che

$$s(f, \tilde{P}) \leq \int_{[a, b]} f(x) \leq S(f, \tilde{P})$$

Poiche' $\tilde{P}$ e' la part. banale, abbiamo che sia la somma inferiore sia quella superiore sono formate da un solo elemento:

$$s(f, \tilde{P}) = m_1(b - a) \underbrace{=}_{m=m_1} m(b - a)$$

$$S(f, \tilde{P}) = M_1(b - a) \underbrace{=}_{M=M_1} M(b - a)$$

allora

$$m(b - a) \leq \int_{[a, b]} f(x) \leq M(b - a)$$

Questo completa la prima parte della dim.

Supponiamo adesso che f sia continua, allora per il thm di Weierstrass

$$M = \sup f([a, b]) = \max f([a, b]), \quad m = \inf f([a, b]) = \min f([a, b])$$

Consideriamo

$$m(b - a) \leq \int_{[a, b]} f(x) \leq M(b - a)$$

$$m \leq \frac{1}{(b - a)} \int_{[a, b]} f(x) \leq M$$

$$\gamma = \frac{1}{(b - a)} \int_{[a, b]} f(x)$$

$\frac{1}{(b - a)} \int_{[a, b]} f(x)$ si chiama la *media integrale*. Per quanto detto

$$\min f([a, b]) = \inf f([a, b]) = m \leq \gamma \leq M = \sup f([a, b]) = \max f([a, b])$$

poiche' le funzioni continue assumono tutti i valori compresi tra il min e il max, si avra'

$$\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = \gamma = \frac{1}{(b - a)} \int_{[a, b]} f(x) \Rightarrow \int_{[a, b]} f(x) = f(\xi)(b - a)$$

□

Corollary 1.19. Data $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, integrabile secondo Riemann,

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_{[a, b]} f(x) dx \geq 0$$

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq 0 \Rightarrow \int_{[a, b]} f(x) dx \leq 0$$

Proof:

(1)1. Dim. la 1

Poiche' almeno 0 e' un minorante di $f([a, b])$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow m = \inf f([a, b]) \geq 0$$

allora per il thm della media:

$$m(b-a) \leq \int_{[a,b]} f(x) dx$$

ma $b-a > 0$ e $m \geq 0$, quindi

$$0 \leq m(b-a) \leq \int_{[a,b]} f(x) dx$$

□

(1)2. Dim. la 2

Poiche' almeno 0 e' un maggiorante di $f([a, b])$

$$f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow M = \sup f([a, b]) \leq 0$$

allora per il thm della media:

$$\int_{[a,b]} f(x) dx \leq M(b-a)$$

ma $b-a > 0$ e $M \leq 0$, quindi

$$\int_{[a,b]} f(x) dx \leq M(b-a) \leq 0$$

□

Corollary 1.20. Date $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, integrabili secondo Riemann in $[a, b]$,

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_{[a,b]} f(x) dx \leq \int_{[a,b]} g(x) dx$$

Proof:

Consideriamo $\varphi(x) = f(x) - g(x) \leq 0$. Per le proprieta' [1.4.3,pg.14],

$$\int_{[a,b]} \varphi(x) = f(x) - g(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) dx - \int_{[a,b]} g(x) dx$$

per il corollario [1.19,pg.15],

$$\int_{[a,b]} \varphi(x) dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_{[a,b]} f(x) dx - \int_{[a,b]} g(x) dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_{[a,b]} f(x) dx \leq \int_{[a,b]} g(x) dx$$

□

Corollary 1.21. Data $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, integrabile secondo Riemann,

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq 0, \quad [\alpha, \beta] \subseteq [a, b] \Rightarrow \int_{[a,b]} f(x) dx \geq \int_{[\alpha,\beta]} f(x) dx$$

Proof:

Supponiamo che $a < \alpha < \beta < b$, per la proprieta' di additivita'

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_{[a,\alpha]} f(x) dx + \int_{[\alpha,\beta]} f(x) dx + \int_{[\beta,b]} f(x) dx$$

Per il cor [1.19,pg.15] $\int_{[a,\alpha]} f(x) dx \geq 0$ e $\int_{[\beta,b]} f(x) dx \geq 0$, allora maggiorando:

$$\int_{[a,\alpha]} f(x) dx + \int_{[\alpha,\beta]} f(x) dx + \int_{[\beta,b]} f(x) dx \geq 0 + \int_{[\alpha,\beta]} f(x) dx + 0 = \int_{[\alpha,\beta]} f(x) dx$$

□

Corollary 1.22. Data $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$,

$$\forall x \in [a, b] \ f(x) \geq 0, \ \exists x_0 \in [a, b] \ f(x_0) > 0 \Rightarrow \int_{[a, b]} f(x) \, dx > 0$$

Proof:

Essendo continua in $[a, b]$, f e' anche continua x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) > 0$$

Per il thm della permanenza del segno:

$$\exists [\alpha, \beta] \subseteq [a, b], \ x_0 \in [\alpha, \beta] : \ \forall x \in [\alpha, \beta] \ f(x) > 0 \quad (1)$$

Per il corollario precedente:

$$\int_{[a, b]} f(x) \, dx \geq \int_{[\alpha, \beta]} f(x) \, dx$$

Applichiamo il thm della media a $f(x)$ ristretta a $[\alpha, \beta]$:

$$\exists \xi \in [\alpha, \beta] : \int_{[\alpha, \beta]} f(x) \, dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$$

$$(\beta - \alpha) > 0$$

poiche' ξ soddisfa la (1) si ha $f(\xi) > 0$, quindi

$$\int_{[a, b]} f(x) \, dx \geq \int_{[\alpha, \beta]} f(x) \, dx = f(\xi)(\beta - \alpha) > 0$$

□

Corollary 1.23. Data $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, integrabile secondo Riemann, valgono queste due proposizioni:

1. $|f(x)| : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e' integrabile secondo Riemann
- 2.

$$\left| \int_{[a, b]} f(x) \, dx \right| \leq \int_{[a, b]} |f(x)| \, dx$$

Proof:

(1)1. Dimostriamo solo nel caso in cui f sia continua

(2)1. Da $f(x)$ continua, segue che $|f(x)|$ e' continua

$$x_0 \in [a, b]$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \ \forall x \in]x - \delta, x + \delta[\cap [a, b]$$

$$\varepsilon > |f(x) - f(x_0)| \geq ||f(x)| - |f(x_0)||$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \delta' = \delta : \ ||f(x)| - |f(x_0)|| < \varepsilon \ \forall x \in]x - \delta, x + \delta[\cap [a, b]$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$$

(2)2. Q.E.D.

Per le proprieta' del valore assoluto:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \ \forall x \in [a, b]$$

allora integrando ogni membro, e usando il corollario [1.20,pg.16],

$$\int_{[a, b]} -|f(x)| \, dx \leq \int_{[a, b]} f(x) \, dx \leq \int_{[a, b]} |f(x)| \, dx$$

che per la proprieta' distributiva:

$$-\int_{[a, b]} |f(x)| \, dx \leq \int_{[a, b]} f(x) \, dx \leq \int_{[a, b]} |f(x)| \, dx$$

e per la proprieta' del valore assoluto

$$\left| \int_{[a,b]} f(x) dx \right| \leq \int_{[a,b]} |f(x)| dx$$

□

Example 1.6. Sia $f(x)$ una funzione integrabile secondo Riemann in $[a, b]$, proviamo che data la funzione

$$F(c) = \int_{[a,c]} f(x) dx : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

si ha

$$\lim_{c \rightarrow b^-} F(c) = \int_{[a,b]} f(x) dx$$

Proof: La tesi equivale a:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \left| \int_{[a,c]} f(x) dx - \int_{[a,b]} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad \forall c \in]b - \delta, b[\cap [a, b]$$

se scegliamo $\delta \in]0, b - a[$, possiamo riscrivere l'ultima condizione direttamente come: $\forall c \in]b - \delta, b[$

Per la proprieta' di additivita' possiamo scrivere:

$$\left| \int_{[a,c]} f(x) dx - \int_{[a,b]} f(x) dx \right| = \left| - \int_{[c,b]} f(x) dx \right| = \left| \int_{[c,b]} f(x) dx \right|$$

per il corollario di prima:

$$\left| \int_{[c,b]} f(x) dx \right| \leq \int_{[c,b]} |f(x)| dx$$

per il thm della media

$$M = \sup |f([c, b])|$$

$$\int_{[c,b]} |f(x)| dx \leq M(b - c)$$

Si ha $c \in]b - \delta, b[\Rightarrow b - c < \delta$. Ponendo $\delta \in]0, b - a[$: $\delta M < \varepsilon$, abbiamo infine:

$$M(b - c) \leq M\delta < \varepsilon$$

1.5 Integrale definito

Sia data $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, integrabile secondo Riemann in tutti gli intervalli chiusi contenuti in (a, b) . Siano $\alpha, \beta \in (a, b)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx := \begin{cases} \int_{[\alpha, \beta]} f(x) dx & \alpha < \beta \\ 0 & \alpha = \beta \\ - \int_{[\beta, \alpha]} f(x) dx & \alpha > \beta \end{cases}$$

da questa definizione si ha questa immediata proprieta':

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$$

Theorem 1.24. *Proprieta' distributiva dell'integrale definito:*

Siano $h, k \in \mathbb{R}$. Data la funzione $hf(x) + kg(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, integrabile secondo Riemann in tutti gli intervalli chiusi contenuti in (a, b) , e dati $\alpha, \beta \in (a, b)$, si ha

$$\int_{\alpha}^{\beta} hf(x) + kg(x) dx = h \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + k \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

Proof:

CASE: $\alpha < \beta$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} hf(x) + kg(x) dx &= \int_{[\alpha, \beta]} hf(x) + kg(x) dx \\ &= h \int_{[\alpha, \beta]} f(x) dx + k \int_{[\alpha, \beta]} g(x) dx \quad [\text{per la prop. distr. degli int. estesi.}] \end{aligned}$$

CASE: $\alpha > \beta$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} hf(x) + kg(x) dx &= - \int_{[\beta, \alpha]} hf(x) + kg(x) dx \\ &= -h \int_{[\beta, \alpha]} f(x) dx - k \int_{[\beta, \alpha]} g(x) dx \quad [\text{per la prop. distr. degli int. estesi.}] \\ &= h \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + k \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \end{aligned}$$

CASE: $\alpha = \beta$

$$0 = 0 + 0$$

□

Theorem 1.25. *Proprieta' di additivita' per l'integrale definito:*

Data la funzione $f(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, integrabile secondo Riemann in tutti gli intervalli chiusi contenuti in (a, b) , e dati $\alpha, \beta, \gamma \in (a, b)$, si ha

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

Proof:

CASE: $\alpha < \beta$

CASE: $\alpha < \gamma < \beta$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= \int_{[\alpha, \beta]} f(x) dx \\ &= \int_{[\alpha, \gamma]} f(x) dx + \int_{[\gamma, \beta]} f(x) dx \quad [\text{prop. di additivita' degli int. estesi}] \end{aligned}$$

CASE: $\alpha < \beta < \gamma$

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx &= \int_{[\alpha, \gamma]} f(x) dx \\
&= \int_{[\alpha, \beta]} f(x) dx + \int_{[\beta, \gamma]} f(x) dx \quad [\text{prop. di additivita' degli int. estesi}] \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx \\
\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx - \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx \\
&= \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx \\
\text{CASE: } \gamma < \alpha < \beta \\
\int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx &= \int_{[\gamma, \beta]} f(x) dx \\
&= \int_{[\gamma, \alpha]} f(x) dx + \int_{[\alpha, \beta]} f(x) dx \quad [\text{prop. di additivita' degli int. estesi}] \\
&= \int_{\gamma}^{\alpha} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \\
\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx - \int_{\gamma}^{\alpha} f(x) dx \\
&= \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx
\end{aligned}$$

□

CASE: $\beta < \alpha$

Si procede analogamente al caso precedente

□

Theorem 1.26. *Teorema della media per gli integrali definiti:*

Data la funzione $f(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, continua, e $\alpha, \beta \in (a, b)$ con $\alpha \neq \beta \Rightarrow$

$$\exists \xi \in [\alpha, \beta] : \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$$

Proof:

CASE: $\alpha < \beta$

Per definizione

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{[\alpha, \beta]} f(x) dx$$

Poiche' f e' continua, e per il teorema della media degli integrali estesi:

$$\exists \xi \in [\alpha, \beta] : \int_{[\alpha, \beta]} f(x) dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$$

CASE: $\beta < \alpha$

Per definizione

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{[\beta, \alpha]} f(x) dx$$

Poiche' f e' continua, e per il teorema della media degli integrali estesi:

$$\exists \xi \in [\beta, \alpha] : \int_{[\beta, \alpha]} f(x) dx = f(\xi)(\alpha - \beta)$$

e quindi

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{[\beta, \alpha]} f(x) dx = -f(\xi)(\alpha - \beta) = f(\xi)(\beta - \alpha)$$

□

1.5.1 Funzione integrale

Data la funzione $f(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, integrabile secondo Riemann in tutti gli intervalli chiusi contenuti in (a, b) , e dato $x_0 \in (a, b)$, possiamo definire la funzione integrale $F(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

cioè, associamo a ogni $x \in (a, b)$ il punto $\int_{x_0}^x f(x) dx \in \mathbb{R}$

1.5.2 Teorema di Torricelli

Data la funzione $f(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, continua in (a, b) , $x_0 \in (a, b)$ e $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$, funzione integrale di $f(x)$, valgono le seguenti proposizioni:

1. $F(x)$ è derivabile in (a, b)
2. $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$

Proof:

(1)1. Dim. la 1 e la 2

Sia $x' \in (a, b)$. Per la genericità di x' , è sufficiente provare che $\exists F'(x') = f(x')$, cioè

$$\exists F'(x') = f(x') \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x'} \frac{F(x) - F(x')}{x - x'} = f(x')$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, b) \cap]x' - \delta, x' + \delta[\setminus \{x'\} \text{ si ha } \left| \frac{F(x) - F(x')}{x - x'} - f(x') \right| < \varepsilon \quad (1)$$

Poiché la f è continua:

$$\lim_{x \rightarrow x'} f(x) = f(x') \Rightarrow \text{in corrispondenza di } \varepsilon \text{ si ha}$$

$$\exists \delta' > 0 : \forall x \in (a, b) : |x - x'| < \delta' \text{ si ha } |f(x) - f(x')| < \varepsilon \quad (2)$$

(2)1. Dimostriamo che fissando $\delta = \delta'$ la (1) è soddisfatta

Fissiamo $\delta = \delta'$ e prendiamo una x che rispetti le condizioni della (1), cioè

$$x \in (a, b) \cap]x' - \delta', x' + \delta'[\setminus \{x'\} \Leftrightarrow x \in (a, b), |x - x'| < \delta', x \neq x'$$

procediamo:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x) - F(x')}{x - x'} - f(x') \right| &= \left| \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{x_0}^{x'} f(t) dt}{x - x'} - f(x') \right| \\
&= \left| \frac{\left(\int_{x_0}^{x'} f(t) dt + \int_{x'}^x f(t) dt \right) - \int_{x_0}^{x'} f(t) dt}{x - x'} - f(x') \right| \quad [\text{per l'additivita'}] \\
&= \left| \frac{\int_{x'}^x f(t) dt}{x - x'} - f(x') \right| \\
&\quad \exists \xi \in [x', x] : \int_{x'}^x f(t) dt = f(\xi)(x - x') \quad [\text{thm della media per int. def.}] \\
&= \left| \frac{f(\xi)(x - x')}{x - x'} - f(x') \right| = |f(\xi) - f(x')| \quad [\text{nota che } x \neq x']
\end{aligned}$$

Poiche' $\xi \in [x', x]$, la ξ rispetta la condizione della (2), quindi:

$$\begin{aligned}
&|f(\xi) - f(x')| < \varepsilon \\
\Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(x')}{x - x'} - f(x') \right| &= |f(\xi) - f(x')| < \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.27.

$f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, continua $\Rightarrow$ f ammette primitive, e una sua primitiva e' la funzione integrale
Questo e' proprio quello che afferma il teorema di Torricelli.

1.5.3 Formula fondamentale del calcolo integrale

Corollary 1.28. del teorema di Torricelli.

Data $f(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, continua e data $G(x)$ primitiva di $f(x)$ in (a, b) , e presi $\alpha, \beta \in (a, b)$ si ha

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = G(\beta) - G(\alpha)$$

Per convenzione, si pone:

$$[G(x)]_{\alpha}^{\beta} := G(\beta) - G(\alpha)$$

Proof:

Sia

$$F(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

la funzione integrale.

Per il thm di Torricelli $F(x)$ e' una primitiva di $f(x)$ in (a, b) , quindi

$$\exists c \in \mathbb{R} : G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\begin{aligned}
G(\beta) &= F(\beta) + c \\
G(\alpha) &= F(\alpha) + c \\
G(\beta) - G(\alpha) &= F(\beta) - F(\alpha) = \int_{x_0}^{\beta} f(t) dt - \int_{x_0}^{\alpha} f(t) dt \\
&= \int_{x_0}^{\beta} f(t) dt + \int_{\alpha}^{x_0} f(t) dt \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \quad [\text{prop. di additivita'}]
\end{aligned}$$

□

1.5.4 Formule di sostituzione per integrali definiti

Conseguenza della formula fondamentale del calcolo integrale:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x) dx = \\
&\quad x = \varphi(t), \quad t = \psi(x) \text{ [l'inversa di } \varphi], \quad dx = D[\varphi(t)] = \varphi'(t) \\
&= \int_a^b f(x) dx = \left[\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right]_{\psi(a)}^{\psi(b)} = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \\
&\quad t = \varphi(x), \quad x = \psi(t), \quad dx = D[\psi(t)] = \psi'(t), \quad \varphi'(x) = \varphi'(\psi(t)) = \frac{1}{\psi'(t)} \\
&= \left[\int f(t) dt \right]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int f(\varphi(x)) dx = \\
&\quad t = \varphi(x), \quad x = \psi(t), \quad dx = D[\psi(t)] = \psi'(t) \\
&= \left[\int f(t) \psi'(t) dt \right]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) \psi'(t) dt
\end{aligned}$$

2 Misurabilita' secondo Jordan

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$, con X° indichiamo l'interno di X (vedi gli appunti di topologia), ovvero nella topologia euclidea:

$$x \in X^\circ \Leftrightarrow \exists I(x, r) : I(x, r) \subseteq X$$

dove con $I(x, r)$ indichiamo il cerchio di raggio $r > 0$ e centro x . Inoltre, diremo che

$$X \text{ e' limitato} \Leftrightarrow \exists I(x, r) : X \subseteq I(x, r)$$

con $x \in X, r > 0$.

Useremo anche la seguente famiglia:

$$\mathcal{P} = \{\pi \text{ poligono elementare o unione di poligoni elementari}\}$$

Cioe' l'insieme di tutti i poligoni.

Definition 2.1. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme limitato e dotato di punti interni. E siano

$$\alpha = \{\pi \in \mathcal{P} \mid \pi \subseteq X\} \quad \beta = \{\pi' \in \mathcal{P} \mid \pi \supseteq X\}$$

ovvero, l'insieme dei poligono contenuti in X e quello dei poligoni che contengono X . Infine, poniamo

$$A = \{\text{area } \pi \in \alpha\} \quad B = \{\text{area } \pi' \in \beta\}$$

Diremo che X e' misurabile secondo Peano Jordan se A e B sono separati e contigui. E chiameremo $\text{mis } X$ l'elemento di separazione, cioe'

$$\text{mis } X = \sup A = \inf B > 0$$

Proposition 2.1. In questo caso $A \neq 0$, $B \neq 0$ e inoltre A e B sono separati.

Proof:

Poiche' X e' dotato di punti interni $\exists I(x, r) : I(x, r) \subseteq X$, allora se prendiamo un qualunque poligono π inscritto a $I(x, r)$, abbiamo

$$\pi \subseteq I(x, r) \subseteq X \Rightarrow \pi \subseteq X \Rightarrow \pi \in \alpha \Rightarrow \text{area } \pi \in A$$

Poiche' X e' limitato $\exists I(x, r) : I(x, r) \supseteq X$, allora basta prendere un poligono π' circoscritto a $I(x, r)$ e si ha:

$$\pi' \supseteq I(x, r) \supseteq X \Rightarrow \pi' \supseteq X \Rightarrow \pi' \in \beta \Rightarrow \text{area } \pi' \in B$$

Ovviamente, per costruzione, α, β sono separati, infatti, prendendo un qualsiasi $\pi \in \alpha$, $\pi' \in \beta$, si ha:

$$\pi \subseteq X \subseteq \pi' \Rightarrow \pi \subseteq \pi'$$

allora $\text{area } \pi \leq \text{area } \pi'$

□

Definition 2.2. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme limitato, ma non dotato di punti interni, cioe' $X^\circ = \emptyset$.

In questo caso avremo $A = \emptyset$. Allora diremo che

$$X \text{ misurabile secondo Jordan} \Leftrightarrow \inf B = 0$$

e poniamo

$$\text{mis } X = \inf B = 0$$

Proof:

(1)1. Dimostriamo che $A = \emptyset$

Se per assurdo $\exists \pi \in A$, allora e' possibile trovare un intorno $I(x, r) \subseteq \pi$. Ma allora

$$I(x, r) \subseteq \pi \subseteq X \Rightarrow x \in X^\circ \Rightarrow X^\circ \neq \emptyset$$

assurdo.

□

Definition 2.3. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$, non limitato. Diremo che X e' misurabile secondo Jordan se ogni $X \cap \pi$, con $\pi \in \mathcal{P}$, e' misurabile secondo definizione [2.1,pg.24], [2.2,pg.24]. Poniamo

$$\text{mis } X = \sup \{\text{mis } X \cap \pi \mid \pi \in \mathcal{P}\} \leq +\infty$$

2.0.5 Proprieta' della misura secondo Jordan

Dati $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$

1. X, Y misurabili $\Rightarrow X \cap Y, X \cup Y, X \setminus Y, Y \setminus X$ misurabili
2. Proprieta' di isotonia.
 X, Y misurabili, $X \subseteq Y \Rightarrow \text{mis } X \leq \text{mis } Y$
3. Proprieta' di additivita' finita

$$\begin{cases} \text{mis } X, \text{mis } Y < +\infty \\ X^\circ \cap Y^\circ = \emptyset \end{cases} \Rightarrow \text{mis } X \cup Y = \text{mis } X + \text{mis } Y$$

4. $\text{mis } Y < +\infty, X \subseteq Y \Rightarrow \text{mis } Y \setminus X = \text{mis } Y - \text{mis } X$
5. La misura e' invariante per traslazione.

X misurabile, Y e' una traslazione di $X \Rightarrow Y$ misurabile, $\text{mis } X = \text{mis } Y$

6. $X \neq \mathbb{R}^2, X \neq \emptyset$, allora

$$X \text{ misurabile} \Leftrightarrow F(X) \text{ e' misurabile}$$

2.0.6 Esempi

Example 2.4. di insieme non limitato e misurabile secondo Jordan:
 Consideriamo il primo quadrante in alto a destra e chiamiamolo X , cioe'

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$$

Ovviamente X non e' limitato.

Prendendo un poligono π qualsiasi, abbiamo questi casi:

$$X \cap \pi = \begin{cases} \tilde{\pi} \in \mathcal{P} & \text{un altro poligono, che e' quindi mis. secondo def [2.1,pg.} \\ \text{unione di un numero finito di segmenti} & \text{questo e' un poligono mis. secondo def [2.2,pg.24]} \\ \text{unione di un numero finito di punti} & \text{e' mis. secondo def [2.2,pg.24]} \\ \emptyset & \end{cases}$$

Quindi X e' misurabile secondo Jordan.

Consideriamo adesso il seguente quadrato:

$$\pi_n = [0, n] \times [0, n] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n\}$$

ovviamente $X \cap \pi_n = \pi_n$. Consideriamo allora

$$Y = \{\text{mis } X \cap \pi_n, n \in \mathbb{N}\}, \quad \sup Y = +\infty$$

Poiche' $Y \subseteq \{\text{mis } X \cap \pi, \pi \in \mathcal{P}\}$, allora a maggior ragione

$$\sup \{\text{mis } X \cap \pi, \pi \in \mathcal{P}\} = \text{mis } X = +\infty$$

Example 2.5. di ins. non misurabile secondo Jordan.

Consideriamo il quadrato $\Delta = [0, 1] \times [0, 1]$ e

$$X = \{(x, y) \in \Delta \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$$

cioè quadrato di lato 1 formato solo dai punti razionali.

Ovviamente è limitato, perché contenuto in un cerchio di centro O e raggio 2.

Proof:

$\langle 1 \rangle 1.$ Dim che non contiene punti interni

Infatti, se per assurdo $p = (x_0, y_0) \in X$ fosse un punto interno, allora $\exists I(p, r) :$

$I(p, r) \subseteq X$. Consideriamo $\tilde{p}_0 = (x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}, y_0)$, con $n \in \mathbb{N} : \frac{\sqrt{2}}{n} < r$. Si ha che

$$d(\tilde{p}_0, p) = \sqrt{(x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n} - x_0)^2 + (y_0 - y_0)^2} = \frac{\sqrt{2}}{n} < r$$

$$\Rightarrow \tilde{p}_0 \in I(p, r) \subseteq X \Rightarrow \tilde{p}_0 \in X$$

$$\Rightarrow x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{Q} \text{ [assurdo]}$$

□

Siamo nel caso di def. [2.2,pg.24], controlliamo quindi se $\inf B = 0$:

$$B = \{\text{area } \pi' \mid \pi' \in \mathcal{P}, \pi' \supseteq X\}$$

È intuitivo il fatto che

$$\pi' \supseteq X \Rightarrow \pi' \supseteq \Delta \Rightarrow \text{area } \pi' \geq \text{area } \Delta = 1 \quad \forall \pi' \in \mathcal{P}, \pi' \supseteq X$$

quindi, si ha

$$\inf B \geq 1, \text{ anzi, poichè } \text{area } \Delta \in B, \inf B = \min B = 1$$

ecco quindi che $\inf B = 1 \neq 0$, perciò secondo def [2.2,pg.24], X non è misurabile.

2.1 Trapezoide o rettangoloide

Definition 2.6. Data $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, limitata in $[a, b]$, con $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, definiamo il *trapezoide* di f relativo all'intervallo chiuso $[a, b]$:

$$T(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$$

In sostanza, $T(f)$ è la porzione del piano che sta sotto il grafico di $f(x)$. Nota che $f(x) \geq 0$

Theorem 2.2.

$$\begin{cases} f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continua} \\ f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(f) \text{ è misurabile} \\ \text{mis } T(f) = \int_{[a, b]} f(x) dx \end{cases}$$

Proof:

$\langle 2 \rangle 1.$ Vediamo che $T(f)$ è sia limitato che dotato di pt. interni

Per semplicità, supponiamo $f(x) > 0$. f è continua, quindi per Weierstrass,

$$\exists \max f([a, b]) = M$$

$$\exists \min f([a, b]) = m$$

Consideriamo questi due rettangoli:

$$\Delta = [a, b] \times [0, M] \supseteq T(f)$$

$$\Delta' = [a, b] \times [0, m] \subseteq T(f)$$

⟨3⟩1. $T(f)$ è limitato

Esiste infatti un cerchio di centro $I(O, r)$, di raggio $r > \max \{d((0, 0), (0, M)), d((0, 0), (-b, M))\}$ che contiene Δ e che quindi contiene $T(f)$

⟨3⟩2. $T(f)$ è dotato di punti interni

Infatti, esiste un cerchio $I(c, r)$, dove c è il centro del rettangolo Δ' e $r < \min \{m - c_y, c_x - a\}$, che è contenuto in Δ' e quindi in $T(f)$.

LET: $A = \{\text{area } \pi \mid \pi \in \mathcal{P}, \pi \subseteq T(f)\}$

$B = \{\text{area } \pi' \mid \pi' \in \mathcal{P}, \pi' \supseteq T(f)\}$

⟨2⟩2. Dimostriamo che A, B sono contigui, utilizzando l'integrale esteso di Riemann

Intanto osserviamo che

A, B contigui $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \text{area } \pi \in A, \text{area } \pi' \in B : \text{area } \pi' - \text{area } \pi < \varepsilon$

Poiché f è continua, per il thm [1.15,pg.12], è integrabile secondo Riemann. Nella dimostrazione del thm [1.15,pg.12] avevamo visto che

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall P, \text{partizione di } [a, b] : |P| < \delta \Rightarrow S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$ (*)

Ricordandoci che

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \quad S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

$$m_i = \inf f([x_{i-1}, x_i]) \quad \underbrace{\quad}_{f \text{ è continua}} \quad \min f([x_{i-1}, x_i])$$

$$M_i = \sup f([x_{i-1}, x_i]) \quad \underbrace{\quad}_{f \text{ è continua}} \quad \max f([x_{i-1}, x_i])$$

consideriamo ora

$$\pi = \bigcup_{i=1, \dots, n} [x_{i-1}, x_i] \times [0, m_i]$$

$$\pi' = \bigcup_{i=1, \dots, n} [x_{i-1}, x_i] \times [0, M_i]$$

Ovviamente $\pi \subseteq T(f)$, $\pi' \supseteq T(f)$. Calcoliamo le loro aree:

$$\text{area } \pi = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m_i \quad (1)$$

$$\text{area } \pi' = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M_i \quad (2)$$

$$\Rightarrow \text{area } \pi = s(f, P), \text{area } \pi' = S(f, P) \quad (1)$$

quindi per la (*), abbiamo

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon \Leftrightarrow \text{area } \pi' - \text{area } \pi < \varepsilon$$

ecco dimostrato che $T(f)$ è misurabile.

⟨2⟩3. Ultimo passo

Poiche' la f e' integrabile secondo Riemann, $\int_{[a,b]} f(x) dx$ e' l'elemento di separazione dei due insiemi

$$\{s(f, P)\}_P, \quad \{S(f, P)\}_P$$

cioe'

$$s(f, P) \leq \int_{[a,b]} f(x) dx \leq S(f, P') \quad \forall P, P'$$

Fissiamo $P = P' = P$:

$$s(f, P) \leq \int_{[a,b]} f(x) dx \leq S(f, P) \quad (2)$$

Per la (1) e per la definizione di $\text{mis } X$, abbiamo:

$$\text{area } \pi \leq \text{mis } X \leq \text{area } \pi' \Leftrightarrow s(f, P) \leq \text{mis } X \leq S(f, P) \quad (3)$$

allora, dalla (2) e (3), per le proprieta' del valore assoluto¹ si ha:

$$\left| \text{mis } X - \int_{[a,b]} f(x) dx \right| \leq S(f, P) - s(f, P)$$

e sempre per la (*):

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$$

Quindi, abbiamo trovato che per ogni ε ,

$$\left| \text{mis } X - \int_{[a,b]} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

e percio'

$$\text{mis } X - \int_{[a,b]} f(x) dx = 0 \Rightarrow \text{mis } X = \int_{[a,b]} f(x) dx$$

□

2.2 Insieme normale

Data $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, con $g(x) \geq f(x) \forall x \in [a, b]$. Definiamo l'*insieme* normale di f, g :

$$T(f, g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

In altre parole, $T(f, g)$ e' l'insieme dei punti compresi tra il grafico di g (che sta' sopra) e il grafico di f .

Lemma 2.3. Indicando con G_f il grafico della funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$:

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], y = f(x)\}$$

valgono le seguenti proposizioni:

1. $G_f^\circ = \emptyset$
2. G_f e' misurabile secondo Jordan e $\text{mis } G_f = 0$

Proof:

⟨2⟩1. G_f e' limitato

Considerando il rettangolo $T = [a, b] \times [0, \max \{f([a, b])\}]$. basta prendere il cerchio $C = I(O, r)$ che lo contenga, cosi' che':

$$C \supseteq T \supseteq G_f$$

⟨2⟩2. G_f non ha punti interni

¹vedi proprieta' 12 del valore assoluto in analisiI.pdf

Sia $P = (x, f(x)) \in G_f$, non sara' mai possibile trovare un cerchio $I(P, r) : I(P, r) \subseteq G_f$, infatti, se per assurdo esistesse, allora anche $(x, f(x) + \varepsilon)$, $\varepsilon < r$ dovrebbe appartenere a G_f , ma questo e' assurdo.

⟨2⟩3. Rientriamo percio' nel caso della def [2.2,pg.24]. Usando una cornice che racchiude G_f , con l'altezza che tende a 0, si puo' dimostrare che $\inf B = \text{mis } G_f = 0$.

Vogliamo dimostrare che $\inf B = 0$, ovvero che

$$\begin{cases} \forall \text{area } \pi \in B, \inf B \leq \text{area } \pi \Leftrightarrow 0 \leq \text{area } \pi \\ \forall \varepsilon > 0 : \exists \text{area } \pi \in B : \text{area } \pi < \inf B + \varepsilon = \varepsilon \end{cases}$$

Poiche' tutte le aree sono ≥ 0 , la prima condizione e' gia' provata.

Fissiamo ε . Nella dimostrazione del thm [1.15,pg.12] avevamo visto che, fissata la $\frac{\varepsilon}{2} > 0$

$$\exists \delta > 0 : \forall P, \text{ partizione di } [a, b] : |P| < \delta \Rightarrow S(f, P) - s(f, P) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (*)$$

Fissando una determinata partizione, consideriamo allora questo poligono:

$$\begin{aligned} \pi &= \bigcup_i^n [x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i + \sigma] \\ m_i &= \min\{f([x_{i-1}, x_i]), M_i = \max\{f([x_{i-1}, x_i])\} \\ \sigma &= \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \end{aligned}$$

la sua area e':

$$\begin{aligned} \text{area } \pi &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(M_i + \sigma - m_i) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n \sigma(x_i - x_{i-1}) = \\ &= S(f, P) - s(f, P) + \sigma(b-a) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sigma(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad [\text{per la } (*)] \end{aligned}$$

□

Theorem 2.4. Data $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, con $g(x) \geq f(x) \forall x \in [a, b]$.

$$f, g \text{ continue in } [a, b] \Rightarrow \begin{cases} 1. T(f, g) \text{ e' misurabile} \\ 2. \text{mis } T(f, g) = \int_{[a, b]} g(x) - f(x) dx \end{cases}$$

Proof:

⟨1⟩1. Dimostriamo il thm nel caso in cui $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} g(x) &\geq f(x) \forall x \in [a, b] \Rightarrow T(f) \subseteq T(g) \quad (1) \\ &\Rightarrow \text{mis } T(f) \leq \text{mis } T(g) \quad [\text{propr. di isotonia, vedi [2.0.5,pg.25]}] \\ g(x) &> f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b] \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(f, g) &= [T(g) \setminus T(f)] \cup G_f \quad (3) \\ G_f^\circ &= \emptyset \quad [\text{per il lemma [2.3,pg.28]}] \\ \text{mis } G_f &= 0 \quad [\text{per lo stesso lemma}] \end{aligned}$$

Per la (2) e per la continuita' di f, g , applichiamo il thm [2.2,pg.26] su f, g :

$$\text{mis } T(f) = \int_{[a,b]} f(x) \, dx$$

$$\text{mis } T(g) = \int_{[a,b]} g(x) \, dx$$

$T(f), T(g)$ sono misurabili, allora dalla (1) e (3) e per le varie proprieta' della misura (vedi [2.0.5,pg.25]), si ha:

$$\text{mis } T(f, g) = \text{mis}[T(g) \setminus T(f)] \cup G_f = \text{mis}[T(g) \setminus T(f)] + \underbrace{\text{mis } G_f}_{=0} = \text{mis } T(g) - \text{mis } T(f)$$

$$= \int_{[a,b]} g(x) \, dx - \int_{[a,b]} f(x) \, dx = \int_{[a,b]} g(x) - f(x) \, dx$$

(1)2. Dimostriamo il caso $f(x) < 0$ per qualche $x \in [a, b]$

Trasliamo f, g in modo da avere $G_f, G_g \geq 0$, per poi applicare il thm [2.2,pg.26]:

$m = \min f([a, b])$ [che esiste perche' f e' continua]

$$f(x) < 0 \text{ per qualche } x \in [a, b] \Rightarrow m < 0$$

$$f_1(x) = f(x) - m$$

$$g_1(x) = g(x) - m$$

$$m \leq f(x) \, \forall x \in [a, b] \Rightarrow f(x) - m \geq 0 \, \forall x \in [a, b]$$

$$g(x) \geq f(x) \, \forall x \in [a, b] \Rightarrow g(x) - m \geq f(x) - m \geq 0 \, \forall x \in [a, b]$$

A questo punto possiamo applicare i risultati del passo (1)1: $T(f_1, g_1)$ e' misurabile, e inoltre

$$\text{mis } T(f_1, g_1) = \int_{[a,b]} g_1(x) - f_1(x) \, dx = \int_{[a,b]} g(x) - m - f(x) + m \, dx = \int_{[a,b]} g(x) - f(x) \, dx$$

Poiche' $T(f_1, g_1)$ e' una traslazione di $T(f, g)$, per la quinta proprieta' della misura (vedi [2.0.5,pg.25]), si ha:

$$\text{mis } T(f, g) = \text{mis } T(f_1, g_1)$$

□

3 Integrali impropri

3.1 Integrali generalizzati

Definition 3.1.

LET: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ oppure $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$

f non limitata in un intorno di b

f integrabile secondo Riemann in tutti gli intervalli del tipo $[a, c]$, $c \in]a, b[$

Diremo che f e' integrabile in senso generalizzato in $[a, b]$ se $\exists$ finito $\lim_{c \rightarrow b^-} \int_{[a,c]} f(x) \, dx$ e con

$$\int_a^b f(x) \, dx := \int_{[a,b]} f(x) \, dx := \lim_{c \rightarrow b^-} \int_{[a,c]} f(x) \, dx$$

indicheremo l'integrale generalizzato (o improprio).

Definition 3.2.

LET: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ oppure $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

f non limitata in un intorno di a

f integrabile secondo Riemann in tutti gli intervalli del tipo $[c, b]$, $c \in]a, b[$

Diremo che f e' integrabile in senso generalizzato in $[a, b]$ se $\exists$ finito $\lim_{c \rightarrow a^+} \int_{[c, b]} f(x) dx$ e con

$$\int_a^b f(x) dx := \int_{[a, b]} f(x) dx := \lim_{c \rightarrow a^+} \int_{[c, b]} f(x) dx$$

indicheremo l'integrale generalizzato (o improprio).

Definition 3.3.

LET: $c_1, c_2, \dots, c_r \in [a, b] : a \leq c_1 < c_2 < \dots < c_r \leq b$

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ oppure

$f : [a, b] \setminus \{c_1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ oppure

$f : [a, b] \setminus \{c_1, c_2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ oppure

$f : [a, b] \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_r\} \longrightarrow \mathbb{R}$ oppure

f non limitata in un intorno di c_1 , di $c_2, \dots$, di c_r

$\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\}$ una partizione di $[a, b]$, tale che $[x_{i-1}, x_i]$ contiene un solo c_j in uno dei due estremi²

Diremo che f e' integrabile in senso generalizzato, se e' integrabile, secondo le def [3.1,pg.30],[3.2,pg.30] o secondo Riemann, in ogni intervallino del tipo $[x_{i-1}, x_i]$, e porremo:

$$\int_a^b f(x) dx := \int_{[a, b]} f(x) dx := \sum_{i=1}^n \int_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) dx$$

Si puo' dimostrare che quest'ultimo integrale e' indipendente dalla scelta di $\mathcal{P}$

3.1.1 Condizioni per l'integrabilita'

Theorem 3.1.

LET: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ oppure $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$

f non limitata in un intorno di b

f integrabile secondo Riemann in tutti gli intervalli del tipo $[a, c]$, $c \in]a, b[$

$$\exists A, \alpha, \delta > 0 : \alpha < 1, \delta \leq b - a : |f(x)| \leq \frac{A}{(b-x)^\alpha} \forall x \in [b-\delta, b[$$

$\Rightarrow f$ e' integrabile in senso generalizzato in $[a, b]$

Theorem 3.2.

LET: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ oppure $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

f non limitata in un intorno di a

f integrabile secondo Riemann in tutti gli intervalli del tipo $[c, b]$, $c \in]a, b[$

$$\exists A, \alpha, \delta > 0 : \alpha < 1, \delta \leq b - a : |f(x)| \leq \frac{A}{(x-a)^\alpha} \forall x \in]a, a+\delta]$$

$\Rightarrow f$ e' integrabile in senso generalizzato in $[a, b]$

² $x_{i-1} = c_j$ XOR $x_i = c_k$

3.1.2 Condizioni per la non integrabilit 

Theorem 3.3.

LET: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ oppure $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$
 f non limitata in un intorno di b
 f integrabile secondo Riemann in tutti gli intervalli del tipo $[a, c]$, $c \in]a, b[$
 $\exists A, \alpha, \delta > 0 : \alpha \geq 1, \delta \leq b - a : f(x) \geq \frac{A}{(b-x)^\alpha} \forall x \in [b-\delta, b[$
 $\Rightarrow f$ **non** e' integrabile in senso generalizzato in $[a, b]$

Theorem 3.4.

LET: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ oppure $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$
 f non limitata in un intorno di a
 f integrabile secondo Riemann in tutti gli intervalli del tipo $[c, b]$, $c \in]a, b[$
 $\exists A, \alpha, \delta > 0 : \alpha \geq 1, \delta \leq b - a : f(x) \geq \frac{A}{(x-a)^\alpha} \forall x \in]a, a+\delta]$
 $\Rightarrow f$ **non** e' integrabile in senso generalizzato in $[a, b]$

3.1.3 Proprieta'

Proposition 3.5. Sia $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, non limitata in un intorno sinistro di b , ed integrabile in ogni intervallo $[a, c]$ con $c \in]a, b[$

$$\exists \int_{[a,b]} |f(x)| dx \Rightarrow \begin{cases} \exists \int_{[a,b]} f(x) dx \\ \left| \int_{[a,b]} f(x) dx \right| \leq \int_{[a,b]} |f(x)| dx \end{cases}$$

Nota³

Proof:

Poniamo

$$F(c) = \int_{[a,c]} f(x) dx$$

$$H(c) = \int_{[a,c]} |f(x)| dx$$

Per Hp

$$\exists \int_{[a,b]} |f(x)| \Leftrightarrow \exists \text{ finito } \lim_{c \rightarrow b^-} \int_{[a,c]} |f(x)| dx$$

Per la cond. di Cauchy sulle funzioni:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta' > 0 : |H(c') - H(c'')| < \varepsilon \forall c', c'' \in]b - \delta', b[\cap]a, b[$$

se scegliamo $\delta' \in]0, b-a[$, possiamo riscrivere l'ultima condizione direttamente come: $\forall c', c'' \in]b - \delta', b[$

<2>1. Proviamo che vale la condizione di Cauchy per $f(x)$

³ $\int_{[a,b]} f(x) dx$ e' l'integrale generalizzato di $f(x)$.

La tesi e':

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in]0, b-a[: |F(c') - F(c'')| < \varepsilon \quad \forall c', c'' \in]b-\delta, b[$$

Se supponiamo $c' = c''$, allora la tesi e' vera.

Se, invece, $c' < c''$, per le prop. degli int. estesi abbiamo:

$$\begin{aligned} |F(c') - F(c'')| &= |F(c'') - F(c')| = \left| \int_{[a, c'']} f(x) dx - \int_{[a, c']} f(x) dx \right| = \left| \int_{[c', c'']} f(x) dx \right| \\ &\stackrel{\leq}{\underbrace{\text{per il cor [1.23, pg.17]}}} \int_{[c', c'']} |f(x)| dx = \int_{[a, c'']} |f(x)| dx - \int_{[a, c']} |f(x)| dx \\ &= |H(c'') - H(c')| < \varepsilon \quad \forall c', c'' \in]b-\delta', b[\end{aligned}$$

Quindi abbiamo dimostrato la tesi con $\delta = \delta'$.

Analogamente si vede per $c'' < c'$.

⟨2⟩2. Q.E.D.

Adesso sappiamo che entrambi i limiti esistono e sono finiti, quindi per def di integrale generalizzato:

$$\begin{aligned} \int_{[a, b]} |f(x)| dx &\Leftrightarrow \lim_{c \rightarrow b^-} \int_{[a, c]} |f(x)| dx \\ \left| \int_{[a, b]} f(x) dx \right| &\Leftrightarrow \lim_{c \rightarrow b^-} \left| \int_{[a, c]} f(x) dx \right| \end{aligned}$$

Per il cor [1.23, pg.17]:

$$\left| \int_{[a, c]} f(x) dx \right| \leq \int_{[a, c]} |f(x)| dx \quad \forall c \in]a, b[$$

Allora prendendo i limiti di ambo i membri con $c \rightarrow b^-$, avremo la tesi. $\square$

Proposition 3.6. *Siano $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, non limitate in un intorno sinistro di b , ed integrabili in ogni intervallo $[a, c]$ con $c \in]a, b[$*

$$\begin{cases} |f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b[\\ \exists \int_{[a, b]} g(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists \int_{[a, b]} |f(x)| dx \\ \int_{[a, b]} |f(x)| dx \leq \int_{[a, b]} g(x) dx \end{cases}$$

Proof:

Poniamo

$$\begin{aligned} F(c) &= \int_{[a, c]} |f(x)| dx \\ G(c) &= \int_{[a, c]} g(x) dx \end{aligned}$$

Per Hp:

$$\exists \int_{[a, b]} g(x) \Leftrightarrow \exists \text{ finito } \lim_{c \rightarrow b^-} \int_{[a, c]} g(x) dx$$

Per la cond. di Cauchy sulle funzioni:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta' \in]0, b-a[: |G(c') - G(c'')| < \varepsilon \quad \forall c', c'' \in]b-\delta', b[$$

⟨2⟩1. Proviamo che vale la condizione di Cauchy per $|f(x)|$

La tesi e':

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in]0, b-a[: |F(c') - F(c'')| < \varepsilon \quad \forall c', c'' \in]b-\delta, b[$$

Se supponiamo $c' = c''$, la tesi e' vera.

Se, invece, $c' < c''$, per le prop. degli int. estesi abbiamo:

$$\begin{aligned} |F(c') - F(c'')| &= |F(c'') - F(c')| = \left| \int_{[a, c'']} |f(x)| \, dx - \int_{[a, c']} |f(x)| \, dx \right| = \\ &= \left| \int_{[c', c'']} |f(x)| \, dx \right| = \int_{[c', c'']} |f(x)| \, dx \\ &\stackrel{\text{corollario [1.20, pg. 16]}}{\leq} \int_{[c', c'']} g(x) \, dx = \int_{[a, c'']} g(x) \, dx - \int_{[a, c']} g(x) \, dx = \end{aligned}$$

$$|H(c'') - H(c')| < \varepsilon \quad \forall c', c'' \in]b - \delta', b[$$

$$|F(c'') - F(c')| < \varepsilon \quad \forall c', c'' \in]b - \delta', b[$$

Quindi abbiamo dimostrato la tesi con $\delta = \delta'$.

Analogamente si vede per $c'' < c'$.

⟨2⟩2. Q.E.D.

Adesso sappiamo che entrambi i limiti esistono e sono finiti, quindi per def di integrale generalizzato:

$$\begin{aligned} \int_{[a, b]} g(x) \, dx &= \lim_{c \rightarrow b^-} \int_{[a, c]} g(x) \, dx \\ \int_{[a, b]} |f(x)| \, dx &= \lim_{c \rightarrow b^-} \int_{[a, c]} |f(x)| \, dx \end{aligned}$$

Per il cor [1.20, pg. 16]:

$$\int_{[a, c]} |f(x)| \, dx \leq \int_{[a, c]} g(x) \, dx \quad \forall c \in]a, b[$$

Allora prendendo i limiti di ambo i membri con $c \rightarrow b^-$, avremo la tesi. $\square$

3.2 Integrali illimitati

Definition 3.4.

LET: $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

f integrabile secondo Riemann in tutti gli intervalli del tipo $[a, b]$, $b \in [a, +\infty[$

Diremo che f e' integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty[$ se $\exists$ finito $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} f(x) \, dx$ e con

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx := \int_{[a, +\infty]} f(x) \, dx := \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} f(x) \, dx$$

indicheremo l'integrale generalizzato (o improprio).

Definition 3.5.

LET: $f :]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$

f integrabile secondo Riemann in tutti gli intervalli del tipo $[a, b]$, $a \in]-\infty, b]$

Diremo che f e' integrabile in senso generalizzato in $] -\infty, b]$ se $\exists$ finito $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_{[a, b]} f(x) \, dx$ e con

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx := \int_{]-\infty, b]} f(x) \, dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_{[a, b]} f(x) \, dx$$

indicheremo l'integrale generalizzato (o improprio).

Definition 3.6.

LET: $f :] - \infty, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
 f integrabile secondo Riemann in tutti gli intervalli del tipo $[a, b] : [a, b] \subseteq] - \infty, +\infty[$

Diremo che f e' integrabile in senso generalizzato in $] - \infty, +\infty[$ se fissato ad arbitrio $c \in \mathbb{R}$, si ha che $\exists \int_{-\infty}^c f(x) dx, \exists \int_c^{+\infty} f(x) dx$.

Con

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \int_{[-\infty, +\infty]} f(x) dx := \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

indicheremo l'integrale generalizzato (o improprio).

Si puo' dimostrare che quest'ultimo integrale e' indipendente dalla scelta di c .

3.2.1 Condizioni per l'integrabilita'

Theorem 3.7.

LET: $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
 f integrabile secondo Riemann in tutti gli intervalli del tipo $[a, b]$, $b \in [a, +\infty[$

$$\exists A, \alpha, x^* > 0, \alpha > 1, x^* \geq a : |f(x)| \leq \frac{A}{|x|^\alpha} \forall x > x^*$$

$$\Rightarrow f \text{ e' int. in senso generalizzato in } [a, +\infty[$$

Theorem 3.8.

LET: $f :] - \infty, b] \longrightarrow \mathbb{R}$
 f integrabile secondo Riemann in tutti gli intervalli del tipo $[a, b]$, $a \in] - \infty, b]$

$$\exists A, \alpha, x^* > 0, \alpha > 1, x^* \leq b : |f(x)| \leq \frac{A}{|x|^\alpha} \forall x \leq x^*$$

$$\Rightarrow f \text{ e' int. in senso generalizzato in } [a, +\infty[$$

3.2.2 Condizioni per la non integrabilita'

Theorem 3.9.

LET: $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
 f integrabile secondo Riemann in tutti gli intervalli del tipo $[a, b]$, $b \in [a, +\infty[$

$$\exists A, \alpha, x^* > 0, \alpha \leq 1, x^* \geq a : f(x) \geq \frac{A}{|x|^\alpha} \forall x > x^*$$

$$\Rightarrow f \text{ non e' int. in senso generalizzato in } [a, +\infty[$$

Theorem 3.10.

LET: $f :] - \infty, b] \longrightarrow \mathbb{R}$
 f integrabile secondo Riemann in tutti gli intervalli del tipo $[a, b]$, $a \in] - \infty, b]$
 $\exists A, \alpha, x^* > 0, \alpha \leq 1, x^* \leq b : f(x) \geq \frac{A}{|x|^\alpha} \forall x \leq x^*$
 $\Rightarrow f$ **non** e' int. in senso generalizzato in $[a, +\infty[$

3.2.3 Proprieta'

Theorem 3.11.

LET: 1. $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
2. f integrabile in ogni intervallo $[a, b]$ con $b > a$
 $a' \in \mathbb{R}, a < a'$
 $\exists \int_{[a, +\infty]} f(x) dx \Rightarrow \begin{cases} \exists \int_{[a', +\infty]} f(x) dx \\ \int_{[a', +\infty]} f(x) dx = \int_{[a, +\infty]} f(x) dx - \int_{[a, a']} f(x) dx \end{cases}$
 $\exists \int_{[a', +\infty]} f(x) dx \Rightarrow \begin{cases} \exists \int_{[a, +\infty]} f(x) dx \\ \int_{[a, +\infty]} f(x) dx = \int_{[a', +\infty]} f(x) dx + \int_{[a, a']} f(x) dx \end{cases}$

Proof:

(1) 1. Dim. il primo caso

Per le prop degli integrali estesi

$$\int_{[a', b]} f(x) dx = \int_{[a, b]} f(x) dx - \int_{[a, a']} f(x) dx \quad \forall b > a \quad (1)$$

Per Hp:

$$\exists \text{ finito } \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} f(x) dx = \int_{[a, +\infty]} f(x) dx$$

Allora, passando al limite nella (1), otteniamo

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{[a', b]} f(x) dx = \int_{[a, +\infty]} f(x) dx - \int_{[a, a']} f(x) dx$$

che e' la tesi.

Analogamente si vede per il secondo caso. □

4 Successioni di funzioni

Definition 4.1. Una successione di funzioni e' una applicazione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^{(a, b)}$ ⁴, ovvero e' una legge che associa a ogni numero naturale n una funzione, che indicheremo con f_n , definita da (a, b) in $\mathbb{R}$.

Per indicare una successione di funzioni useremo le seguenti scritte equivalenti:

$$\{f_n\}, \{f_1, \dots, f_n, \dots\}$$

Definition 4.2. Sia $x \in (a, b)$. Se la successione numerica $\{f_1(x), f_2(x), \dots\}$ converge e ha come limite $f(x) \in \mathbb{R}$, diremo che la successione $\{f_n\}$ e' puntualmente convergente con limite $f(x)$.

⁴ $\mathbb{R}^{(a, b)} = \{f \mid f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}\}$

Formalmente:

$$\{f_n\} \text{ e' p. conv. in } x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \underbrace{v = v(\varepsilon)}_{v \text{ dipende da } \varepsilon} \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n > v$$

Se $\forall x \in (a, b)$, la successione $\{f_n\}$ e' puntualmente convergente con limite $f(x)$, diremo allora che $\{f_n\}$ e' puntualmente convergente in (a, b) con limite f , e scriveremo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \stackrel{p.}{=} f(x) \text{ in } (a, b)$$

oppure

$$f_n \xrightarrow{p.} f \text{ in } (a, b)$$

Formalmente:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \stackrel{p.}{=} f(x) \text{ in } (a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) \forall \varepsilon > 0 \exists \underbrace{v = v(\varepsilon, x)}_{v \text{ dipende da } \varepsilon \text{ e da } x} \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n > v$$

Definition 4.3.

Data la successione di funzioni $\{f_n\}$, con $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$, diremo che $\{f_n\}$ e' uniformemente convergente con limite $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v = v(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n > v \forall x \in (a, b)$$

e scriveremo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \stackrel{u.}{=} f(x) \text{ in } (a, b)$$

oppure

$$f_n \xrightarrow{u.} f \text{ in } (a, b)$$

In sostanza, la differenza dalla convergenza puntuale in (a, b) e' che l'indice v non dipende piu' da x .

Proposition 4.1. *Dalle stesse definizioni, segue immediatamente che se la successione e' uniformemente convergente a $f(x)$ in (a, b) , allora lo sara' in qualsiasi $(\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$, convergendo alla restrizione $f|_{(\alpha, \beta)}(x)$*

Proposition 4.2. *Ovviamente la uniforme convergenza implica la puntuale convergenza. Non vale pero' il viceversa.*

Proof:

<1>1. Portiamo un controesempio

$$\text{LET: } \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in [0, 1] f_n(x) = x^n$$

$$\text{CASE: } x = 0$$

$$\{f_n\} = \{0, 0, \dots\} \Rightarrow \{f_n\} \text{ converge puntualmente a } 0 \text{ in } x = 0.$$

$$\text{CASE: } x = 1$$

$$\{f_n\} = \{1, 1, \dots\} \Rightarrow \{f_n\} \text{ converge puntualmente a } 1 \text{ in } x = 1.$$

$$\text{CASE: } x \in]0, 1[$$

$$\{f_n\} = \{x, x^1, \dots, x^n, \dots\} \Rightarrow \{f_n\} \text{ converge puntualmente a } 0 \text{ in } x \in]0, 1[.$$

In definitiva, posto

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n \stackrel{p.}{=} f(x)$ in $[0, 1]$, cioè $\{f_n\}$ e' puntualmente convergente in $[0, 1]$ con limite $f(x)$. Questa successione non e' pero uniformemente convergente.

Supponiamo per assurdo che lo sia, ovvero supponiamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v = v(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |x^n - f(x)| < \varepsilon \forall n > v \forall x \in [0, 1]$$

fissiamo $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e consideriamo le $x \in [0, 1[$, abbiamo percio' $f(x) = 0 \forall x \in [0, 1[$ e quindi

$$\varepsilon = \frac{1}{2} > 0 \exists v = v(\varepsilon) \in \mathbb{N} : x^n < \frac{1}{2} \forall n > v \forall x \in [0, 1[\quad (1)$$

considerando $n := v + 1$, prendendo i limiti per $x \rightarrow 1^-$ si ha

$$x^{v+1} \longrightarrow 1, \quad \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

per i teoremi sui limiti si ha

$$f(x) < g(x) \forall x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x) \quad (2)$$

quindi

$$(1) \Rightarrow x^{v+1} < \frac{1}{2} \forall x \in [0, 1[\Rightarrow \underbrace{\lim_{x \rightarrow 1^-} x^{v+1}}_{(2)} \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{2}$$

il che e' assurdo.

□

Example 4.4. Un esempio di funzione uniformemente convergente e' $f_n(x) = \frac{x}{n} \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in [0, 1]$.

Procedendo come prima si vede che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} \stackrel{p.}{=} f(x) \text{ in } [0, 1]$$

dove $f(x) = 0 \forall x \in [0, 1]$. Dimostriamo che $\{\frac{x}{n}\}$ e' uniformemente convergente.

Considerando che $f(x) = 0$, vogliamo dimostrare che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v = v(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \left| \frac{x}{n} \right| < \varepsilon \forall n > v \forall x \in [0, 1]$$

Sappiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ovvero

$$\varepsilon > 0 \exists v' \in \mathbb{N} : \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \forall n > v'$$

inoltre $x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$. Mettendo insieme queste informazioni, ricaviamo che

$$\left| \frac{x}{n} \right| = \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n} = \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x}{n} \right| < \varepsilon \forall n > v'$$

ed ecco la tesi.

4.1 Criterio di convergenza uniforme di Cauchy

Data la successione $\{f_n\}$, con $f_n : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$, si ha

$\{f_n\}$ e' unif. conv. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists v = v(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \forall n, m > v \forall x \in (a, b)$

Proof:

(1)1. Dim $\Rightarrow$

Fissiamo $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, per l'Hp si ha:

$$\exists v = v(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n > v \forall x \in (a, b) \quad (1)$$

consideriamo $n, m > v$, e maggioriamo $|f_n(x) - f_m(x)|$:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \underbrace{\leq}_{\text{per la (1)}} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

(1)2. Dim $\Leftarrow$

PROVE: $f_n \xrightarrow{u.} f$ in $(a, b) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists v' = v'(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n > v' \forall x \in (a, b)$

Fissiamo $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ e $x \in (a, b)$, allora per Hp

$$\exists v = v(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n, m > v \quad (1)$$

Avendo fissato x , $\{f_n(x)\}$ diventa una serie numerica, che soddisfa la (1). La (1) e' proprio la condizione di Cauchy per le successioni numeriche, quindi $\{f_n(x)\}$ converge a un certo limite $f(x) \in \mathbb{R}$. Poiche' la x e' stata scelta arbitrariamente, possiamo dire che $f_n \xrightarrow{p.} f$ in (a, b) .

(2)1. Dim $f_n \xrightarrow{u.} f$ in (a, b)

Fissiamo $n \in \mathbb{N} : n > v$ e $x \in (a, b)$. Per la (1):

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \forall m > v \quad (2)$$

facendo tendere $m \rightarrow \infty$ si ha che $f_m \xrightarrow{p.} f$ in (a, b) e che $\frac{\varepsilon}{2} \rightarrow \frac{\varepsilon}{2}$, allora, passando al limite in (2), si avra'⁵:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

per l'arbitrarieta' di x si ha infine:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n > v \forall x \in (a, b)$$

che e' quindi la tesi con $v' = v$

□

4.2 Condizioni per le successioni di funzioni

Theorem 4.3. *Condizione caratterizzante le successioni uniformemente convergenti di funzioni limitate:*

LET: $\{f_n\}$, $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N} \exists \text{ finito } \sup_{x \in (a, b)} |f_n(x) - f(x)| = L_n$ (cioe' tutte le f_n sono limitate in (a, b))

si ha:

$$f_n \xrightarrow{u.} f \text{ in } (a, b) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 0$$

Proof:

(1)1. Dim $\Rightarrow$

Notiamo innanzitutto che $L_n \geq 0$ poiche' e' il sup di un insieme i cui elem. sono tutti valori assoluti. Quello che dobbiamo provare e':

$$\text{PROVE: } \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists v = v(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \underbrace{|L_n - 0|}_{=L_n} < \varepsilon \forall n > v$$

Per Hp, fissata $\frac{\varepsilon}{2} > 0$:

$$\exists v' = v'(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n > v' \forall x \in (a, b)$$

⁵Stiamo usando il teorema sui limiti che dice: $f(x) < g(x) \forall x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

questo vuol dire che, fissato $n > v'$, $\frac{\varepsilon}{2}$ e' un maggiorante di $\{|f_n(x) - f(x)|\}_{x \in (a,b)}$, allora poiche' L_n e' il minimo dei maggioranti si ha:

$$L_n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

ovvero

$$L_n < \varepsilon \quad \forall n > v'$$

che e' la tesi con $v = v'$

(1) 2. Dim $\Leftarrow$

Per Hp

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists v = v(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |L_n - 0| = L_n = \sup_{x \in (a,b)} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n > v$$

percio' per def. di sup:

$$\sup_{x \in (a,b)} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n > v \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in (a,b) \quad \forall n > v$$

e questa e' proprio la tesi.

□

Example 4.5. Riconducendoci all'esempio visto in [4,pg.37], applichiamo quest'ultimo teorema.

$$|x^n - f(x)| = \begin{cases} x^n & x \in [0, 1[\\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} |x^n - f(x)| = 1 \Rightarrow L_n = \sup \{|x^n - f(x)|\}_{x \in [0,1]} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 1 \neq 0$$

quindi per il thm [4.3,pg.39], $\{x^n\}$ non e' unif. convergente a $f(x)$

Example 4.6. Riconducendoci all'esempio [4.4,pg.38] dimostriamo che $\frac{x}{n}$ e' unif. conv.

$$f(x) = 0$$

$$L_n = \sup \left\{ \left| \frac{x}{n} - f(x) \right| \right\}_{x \in [0,1]} = \sup \left\{ \frac{x}{n} \right\}_{x \in [0,1]} = \max \left\{ \frac{x}{n} \right\}_{x \in [0,1]} = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

quindi per il thm [4.3,pg.39], $\{\frac{x}{n}\}$ e' unif. conv. a $f(x)$.

Theorem 4.4. *Teorema di continuita' della funzione limite:*

LET: $\{f_n\}$, $f_n : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, continua in $x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x_0 \in (a,b)$$

si ha

$$f_n \xrightarrow{u.} f \text{ in } (a,b) \Rightarrow f \text{ continua in } x_0$$

Osservazione: con $f_n \xrightarrow{p.} f$ in (a,b) il teorema non funziona.

Proof:

$$\text{PROVE: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in (a,b) \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

Per Hp, fissato $\frac{\varepsilon}{3} > 0$:

$$\exists v = v(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n > v \quad \forall x \in (a,b)$$

Fissato $n = v + 1 \in \mathbb{N}$ abbiamo:

$$|f_{v+1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in (a, b) \quad (1)$$

fissando $x = x_0$:

$$|f_{v+1}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (2)$$

Per Hp di continuit  di f_n in x_0 abbiamo che

$$\exists \delta' : |f_{v+1}(x) - f_{v+1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in (a, b) \cap]x_0 - \delta', x_0 + \delta'[\quad (3)$$

Maggioriamo $|f(x) - f(x_0)|$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |(f(x) - f_{v+1}(x)) + (f_{v+1}(x) - f_{v+1}(x_0)) + (f_{v+1}(x_0) - f(x_0))| \\ &\leq |f(x) - f_{v+1}(x)| + |f_{v+1}(x) - f_{v+1}(x_0)| + |f_{v+1}(x_0) - f(x_0)| \\ |f(x) - f_{v+1}(x)| &= |f_{v+1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{per la (1)} \end{aligned}$$

$$|f_{v+1}(x) - f_{v+1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{per la (3)}$$

$$|f_{v+1}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{per la (2)}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Quindi la tesi   provata con $\delta = \delta'$

(1)1. Dim. che usando l'Hp $f_n \xrightarrow{p} f$ in (a, b) il teorema non funziona

Consideriamo la successione dell'esempio [4,pg.37].

x^n   continua in 1 $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^n \xrightarrow{p} f$ in (a, b) , dove

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$f(x)$ non   continua in 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \neq f(1) = 1$$

□

Theorem 4.5. *Teorema di derivazione della funzione limite:*

LET: (a, b) limitato

$\{f_n\}$, $f_n : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, deriv. in $(a, b) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\{f_n\}$   conv. punt. in almeno un punto c , ovvero $\exists c \in (a, b) : \{f_n(c)\}$ converge

$\{f'_n\} = \{f'_1, \dots, f'_n, \dots\}$

$f'_n \xrightarrow{u} g$ in (a, b)

$f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$

allora

1. $f_n \xrightarrow{u} f$ in (a, b) , dove $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$

2. $\exists f'(x) = g(x) \quad \forall x \in (a, b)$

ovvero,

$$D \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

4.3 Limite sotto integrale

$$\left\{ \int_a^b f_n(x) dx \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

e' una successione numerica, dove
 $f_n : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b] \forall n \in \mathbb{N}$
 $f_n \xrightarrow{p} f$ in $[a, b]$ il problema che ci poniamo e':

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \stackrel{?}{=} \int_a^b f(x) dx$$

che equivale a scrivere:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

Example 4.7. Esempio di successione per cui vale il passaggio al limite sotto il segno d'integrale.

Usiamo la successione di funzioni dell'esempio [4,pg.37]:

$$f_n(x) = x^n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Calcoliamo, usando la definizione, $\int_{[0,1]} f(x) dx$:

$$\int_{[0,1]} f(x) dx = \sup \{s(f, \mathcal{P})\}_{\mathcal{P}}$$

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 0 \forall i \leq n \text{ proprio per costruz. di } f(x)$$

$$s(f, \mathcal{P}) = 0 \forall \mathcal{P} \Rightarrow \sup \{s(f, \mathcal{P})\}_{\mathcal{P}} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{[0,1]} f(x) dx = 0$$

In definitiva

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0 = \int_{[0,1]} f(x) dx = 0$$

Example 4.8. Esempio di successione per cui **non** vale il passaggio al limite sotto il segno d'integrale.

Consideriamo

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2 x & x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 4n - 4n^2 x & x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

definita in $[0, 1]$. Il suo grafico come quello di fig [1,pg.43].

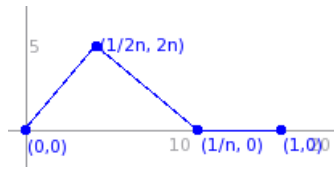


Figure 1: Grafico di f_n , per una particolare $n \in \mathbb{N}$

Calcoliamo i vari limiti.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f_n(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{2n}} 4n^2 x dx + \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} 4n - 4n^2 x dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 0 dx = \\
 &= 4n^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2n}} + 4n \left(\left[x \right]_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} - n \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} \right) + 0 = \\
 &= \frac{1}{2} + 4n \left(\frac{1}{2n} - \frac{3}{8n} \right) = \frac{1}{2} + 2 - \frac{3}{2} = 1 \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx &= 1
 \end{aligned}$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) &= 0 \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) &= 0 \\
 \text{sia } x \in]0, 1[\\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < x &\Rightarrow \exists v \in \mathbb{N} : \forall n > v \quad \frac{1}{n} < x \quad (1) \\
 \Rightarrow \forall n > v \quad x \in \left[\frac{1}{n}, 1 \right] &\Rightarrow \forall n > v \quad f_n(x) = 0 \\
 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= 0
 \end{aligned}$$

$$f_n \xrightarrow{p.} f \text{ in } [0, 1], \quad f(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\int_{[0,1]} f(x) dx = 0$$

La (1), intuitivamente, deriva dal fatto che man mano che n cresce, il punto $(\frac{1}{n}, 0)$ si sposta sulla sinistra, fino a che x viene “inglobato” nel terzo segmento (vedi la fig. del grafico).

Riassumendo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1 \neq 0 = \int_{[0,1]} f(x) dx$$

Nota: usando il thm [4.3,pg.39], si vede che f_n non e' unif. conv. a $f(x)$

Theorem 4.6. *del passaggio al limite.*

LET: $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f_n \xrightarrow{u} f \text{ in } [a, b] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Nota ⁶

Proof:

Prima di tutto osserviamo che f e' continua per il thm [4.4,pg.40].

La tesi che dimostriamo e':

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists v = v(\varepsilon) : \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon \quad \forall n > v$$

Per Hp, e fissato $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$

$$f_n \xrightarrow{u} f \text{ in } [a, b] \Rightarrow \exists v' = v'(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_n - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall n > v' \quad \forall x \in [a, b] \quad (1)$$

Proviamo la tesi con $v = v'$:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b f_n(x) - f(x) dx \right| = \\ &= \left| f_n(\xi) - f(\xi) \right| (b-a) \quad \text{thm della media} \\ &\underbrace{<}_{\text{per la (1), con } n > v'} (b-a) \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

5 Serie di funzioni

Data la successione di funzioni $\{f_n\}$ con $f_n : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ definiamo la *serie di funzioni*:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots, \quad (1)$$

con x variabile in (a, b) .

La somma parziale di posto n della serie (1) e':

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x), \quad x \in (a, b)$$

nasce cosi' $\{s_n\}$, ovvero la successione delle somme parziali della serie di funzioni (1).

Definition 5.1. Fissato $x \in (a, b)$, la serie (1) converge puntualmente in x , con somma $f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ la serie numerica $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ ha per somma $f(x)$, ovvero se la successione numerica $\{s_n(x)\}$ converge con limite $f(x)$ Scriveremo:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \stackrel{p}{=} f(x) \text{ in } x$$

⁶se abbiamo solo l'Hp $f_n \xrightarrow{p} f$ in $[a, b]$, non possiamo affermare nulla sul passaggio al limite, come dimostrano gli esempi [4.8,pg.42], [4.7,pg.42].

che equivale a dire:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x) \stackrel{p.}{=} f(x) \text{ in } x$$

Definition 5.2. La serie (1) converge puntualmente in (a, b) , con funzione somma $f(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, se $\forall x \in (a, b)$ converge puntualmente in x , ovvero

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \stackrel{p.}{=} f(x) \text{ in } (a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \stackrel{p.}{=} f(x) \text{ in } x$$

che equivale a dire

$$s_n \xrightarrow{p.} f \text{ in } (a, b)$$

Definition 5.3. La serie (1) converge uniformemente in (a, b) , con funzione somma $f(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, se $s_n \xrightarrow{u.} f$ in (a, b) :

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \stackrel{u.}{=} f(x) \text{ in } (a, b) \Leftrightarrow s_n \xrightarrow{u.} f \text{ in } (a, b)$$

Definition 5.4. Convergenza assoluta:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \stackrel{a.}{=} f(x) \text{ in } (a, b) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)| \stackrel{p.}{=} f(x) \text{ in } (a, b)$$

Definition 5.5. Convergenza totale:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \stackrel{t.}{=} f(x) \text{ in } (a, b) \Leftrightarrow \exists \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} L_n}_{\text{serie num.}}, \text{ convergente e } \forall n \in \mathbb{N} L_n \geq 0 : |f_n(x)| \leq L_n \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in (a, b)$$

Proposition 5.1. Dalle stesse definizioni, segue immediatamente che se la serie e' uniformemente (o totalmente) convergente a $f(x)$ in (a, b) , allora lo sara' in qualsiasi $(\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$, convergendo alla restrizione $f|_{(\alpha, \beta)}(x)$

Theorem 5.2. Criterio di Cauchy di convergenza uniforme di serie di funzioni.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \stackrel{u.}{=} f(x) \text{ in } (a, b) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists v = v(\varepsilon) : |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon \forall n > v \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in (a, b) \end{aligned}$$

Proof: Prima di tutto notiamo che

$$f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x) = s_{n+p}(x) - s_n(x)$$

dove $s_n(x)$ e' la somma parziale di posto n .

(1)1. Dim $\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \stackrel{u.}{=} f(x) \text{ in } (a, b) \Leftrightarrow s_n \xrightarrow{u.} f \text{ in } (a, b)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists v' = v'(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |s_{n'}(x) - s_m(x)| < \varepsilon \forall n', m > v' \forall x \in (a, b) \text{ [Cauchy per succ. di funz]}$$

Fissato $n > v', p \in \mathbb{N}$, poniamo $v = v', n' = n + p, m = n$, ottenendo cosi' la tesi:

$$|s_{n'}(x) - s_m(x)| = |s_{n+p}(x) - s_n(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon \forall n > v' \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in (a, b)$$

(1)2. Dim $\Leftarrow$

Dobbiamo dimostrare che vale la condizione di Cauchy per la successione di funzioni $s_n(x)$, ovvero che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v = v(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon \forall n, m > v \forall x \in (a, b)$$

Per Hp abbiamo:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v' = v'(\varepsilon) : |s_{n'+p}(x) - s_{n'}(x)| < \varepsilon \forall n' > v' \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in (a, b) \quad (1)$$

Allora, ponendo $v = v'$ e prendendo $n, m > v'$, abbiamo:

CASE: $n = m$

$$|s_n(x) - s_m(x)| = 0 < \varepsilon$$

CASE: $n > m$

$$|s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon \text{ per la (1), dove } n' = m, p = n - m$$

CASE: $n < m$

$$|s_n(x) - s_m(x)| = |s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon \text{ per la (1), dove } n' = n, p = m - n$$

□

Corollary 5.3. Data la serie di funzioni $\{f_n(x)\}$, con $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, la seguente e' una condizione equivalente a quella di Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \underbrace{v = v(\varepsilon)}_{\text{indip. da } x} : |s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon \forall n, m > v \forall x \in (a, b) \quad (i)$$

Ovvero, se con (j) indichiamo la condizione di cauchy, allora

$$(i) \Leftrightarrow (j)$$

Proof:

(1)1. Dim $\Rightarrow$

Fissiamo $\varepsilon > 0, n > v, p \in \mathbb{N}^*$ e $m = n + p$, allora

$$|s_n(x) - s_{n+p}(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in (a, b)$$

che equivalente a

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in (a, b)$$

per l'arbitrarieta' di p, n , la tesi e' acquisita.

(1)2. Dim $\Leftarrow$

Per Hp:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v \in \mathbb{N} : |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon \quad \forall n > v \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in (a, b)$$

Prendiamo un $m > v$ e fissiamo $\varepsilon > 0$.

CASE: $n = m$

$$|s_n(x) - s_m(x)| = |s_m(x) - s_m(x)| = 0 < \varepsilon$$

□

CASE: $n < m$

Poniamo $p = m - n$, e avremo:

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall n > v \quad \forall x \in (a, b)$$

che equivale a

$$|s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon \quad \forall n > v \quad \forall x \in (a, b)$$

□

CASE: $m < n$

Poniamo $p = n - m$, e avremo:

$$|f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \cdots + f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall m > v \quad \forall x \in (a, b)$$

che equivale a

$$|s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon \quad \forall m > v \quad \forall x \in (a, b)$$

□

□

Corollary 5.4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \xrightarrow{u.} \text{in } (a, b) \Rightarrow \begin{cases} 1) \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{a.} \text{in } (a, b) \\ 2) \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{u.} \text{in } (a, b) \end{cases}$$

Proof:

(1) 1. Dim $\Rightarrow$ 1)

Per definizione.

(1) 2. Dim $\Rightarrow$ 2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \xrightarrow{u.} \text{in } (a, b) \Leftrightarrow [\text{criterio di Cauchy}]$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists v' = v'(\varepsilon) : |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| < \varepsilon \quad \forall n > v' \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in (a, b)$$

Sempre per il criterio di convergenza uniforme di Cauchy, la tesi equivale a

dire:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v = v(\varepsilon) : |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon \quad \forall n > v \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in (a, b)$$

Per la proprietà del valore assoluto:

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > v'$$

Quindi, in definitiva la tesi è provata con $v = v'$.

□

Theorem 5.5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{t.} \text{in } (a, b) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \xrightarrow{u.} \text{in } (a, b)$$

Proof:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{t.} \text{in } (a, b) \Leftrightarrow \exists \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} L_n}_{\text{serie num.}}, \text{ convergente e } \forall n \in \mathbb{N} \quad L_n \geq 0 : |f_n(x)| \leq L_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in (a, b)$$

Per il criterio di convergenza delle serie numeriche di Cauchy, dire che $\sum_{n=1}^{\infty} L_n$ converge equivale a:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v' = v'(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |L_{n+1} + L_{n+2} + \cdots + L_{n+k}| < \varepsilon \quad \forall n > v' \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Per il criterio di convergenza uniforme di Cauchy per serie, la tesi equivale a:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v = v(\varepsilon) : |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| < \varepsilon \quad \forall n > v \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in (a, b)$$

Allora, ponendo $v = v'$:

$$|L_{n+1} + L_{n+2} + \cdots + L_{n+k}| = L_{n+1} + L_{n+2} + \cdots + L_{n+k} \quad \text{per l'Hip } L_n \geq 0$$

$$|f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| \leq L_{n+1} + L_{n+2} + \cdots + L_{n+k} = \quad [\text{per l'Hip } |f_n(x)| \leq L_n]$$

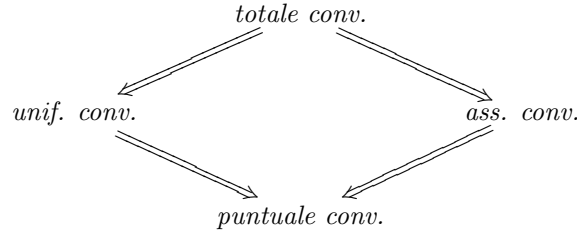
$$= |L_{n+1} + L_{n+2} + \cdots + L_{n+k}| < \varepsilon$$

□

Theorem 5.6. *Data una serie di funzioni*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (1)$$

con $f_n : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, valgono le seguenti implicazioni (relative all'intervallo (a, b)):



$$\begin{aligned} \text{totale conv.} &\not\Leftarrow \text{unif. conv.} \not\Leftarrow \text{puntuale conv.} \\ \text{totale conv.} &\not\Leftarrow \text{ass. conv.} \not\Leftarrow \text{puntuale conv.} \\ \text{ass. conv.} &\not\Leftarrow \text{unif. conv.} \not\Leftarrow \text{ass. conv.} \end{aligned}$$

Proof:

(1)1. Unif. conv $\Rightarrow$ punt. conv

Deriva immediatamente dalla proposizione [4.2,pg.37]

(1)2. Ass. conv $\Rightarrow$ punt. conv

$$s_n(x) = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_n(x)|$$

$$s_n(x) \xrightarrow{p} f(x) \text{ in } (a, b) \text{ per Hp}$$

fissato $x \in (a, b) \Rightarrow \{t_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)\}$ e' una serie num. ass. conv.

$\Rightarrow \{t_n(x)\}$ e' una succ. conv. (vedi il thm *ass.conv.* $\Rightarrow$ *conv.* negli appunti calcolo.pdf)

$\Rightarrow$ la serie (1) e' punt. conv in x

x e' arbitraria $\Rightarrow$ la serie (1) e' punt. conv in (a, b)

(1)3. Totale conv $\Rightarrow$ unif. conv $\wedge$ ass. conv

Per il thm [5.5,pg.47] si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{t} \text{ in } (a, b) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \xrightarrow{u} \text{ in } (a, b)$$

per il corollario [5.4,pg.47] si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \xrightarrow{u} \text{ in } (a, b) \Rightarrow \begin{cases} 1) \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{a} \text{ in } (a, b) \\ 2) \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{u} \text{ in } (a, b) \end{cases}$$

□

Theorem 5.7.

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{u} f(x) \text{ in } (a, b) \\ \forall n \in \mathbb{N} \ f_n \text{ continua in } x_0 \in (a, b) \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ continua in } x_0$$

Proof:

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \stackrel{u.}{=} f(x) \text{ in } (a, b) \Rightarrow s_n \xrightarrow{u.} f \text{ in } (a, b)$
 (2) $\forall n \in \mathbb{N} \ f_n \text{ continua in } x_0 \Rightarrow s_n(x) \text{ e' continua, in } x_0, \text{ poiche' somma di funz. continue}$
 (1), (2) $\Rightarrow f(x) \text{ e' continua, in } x_0, \text{ per il thm [4.4,pg.40]}$

□

Theorem 5.8. *di derivazione della funzione limite della serie.*

LET: • (a, b) limitato

- $\{f_n\}, f_n : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ deriv. in } (a, b) \forall n \in \mathbb{N}$
- $\exists c \in (a, b) : \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ converge puntualmente in } c,$
 ovvero $\exists c \in (a, b) : \sum_{n=1}^{\infty} f_n(c) \text{ converge}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \stackrel{u.}{=} g(x) \text{ in } (a, b)$

allora

1. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \stackrel{u.}{=} f(x) \text{ in } (a, b),$
 dove $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$
2. $\exists f'(x) \forall x \in (a, b),$
 $f'(x) = g(x) \forall x \in (a, b), \text{ ovvero}$

$$\exists f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

Proof:

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c) \text{ converge} \Rightarrow \{s_n(c)\} \text{ converge} \Rightarrow s_n \xrightarrow{p.} \text{ in } c$

Ponendo $T_n = f'_1(x) + \dots + f'_n(x)$, abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \stackrel{u.}{=} g(x) \text{ in } (a, b) \Rightarrow T_n \xrightarrow{u.} g \text{ in } (a, b)$$

Da tutte queste ipotesi, per il thm [4.5,pg.41] segue che

$$s_n \xrightarrow{u.} f \text{ in } (a, b) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \stackrel{u.}{=} f(x) \text{ in } (a, b)$$

$$f'(x) = g(x) \forall x \in (a, b)$$

□

5.1 Serie sotto integrale

Theorem 5.9. *dell'integrazione per serie.*

LET: $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ continua in } [a, b], \forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \stackrel{u.}{=} f(x) \text{ in } [a, b] \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[a,b]} f_n(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) dx$$

Questo teorema ci permette di scrivere ⁷

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \stackrel{u.}{=} f(x) \text{ in } [a, b] \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[a,b]} f_n(x) dx = \int_{[a,b]} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx$$

Proof:

Poniamo

$$T_n = \int_{[a,b]} f_1(x) dx + \dots + \int_{[a,b]} f_n(x) dx = \int_{[a,b]} f_1(x) + \dots + f_n(x) dx = \int_{[a,b]} s_n(x) dx$$

la tesi che vogliamo dimostrare è:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{[a,b]} f_n(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) dx \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \int_{[a,b]} f(x) dx$$

Per Hp:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \stackrel{u.}{=} f(x) \text{ in } [a, b] \Rightarrow s_n \xrightarrow{u.} f \text{ in } [a, b]$$

Allora per il thm [4.6, pg. 44], si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} s_n(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) dx$$

□

6 Serie di potenze

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali e $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + \dots \quad (1)$$

viene chiamata *serie di potenze* di centro x_0 . Compattamente si scrive come:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x - x_0)^{n-1}$$

Definiamo il raggio di convergenza della serie (1):

$$r = \sup H$$

dove

$$H = \left\{ h \geq 0 : \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n-1}| h^{n-1} \text{ converge} \right\}$$

ovviamente $0 \in H$.

CASE: $0 < r < +\infty$

L'intervallo

$$I =]x_0 - r, x_0 + r[$$

viene chiamato intervallo di convergenza della serie (1)

CASE: $r = +\infty$

L'intervallo

$$I =]-\infty, +\infty[$$

viene chiamato intervallo di convergenza della serie (1)

⁷nota che $\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[a,b]} f_n(x) dx \right\}$ è una serie numerica

CASE: $r = 0$

Non viene definito alcun intervallo di convergenza.

Example 6.1. Calcoliamo l'r di questa serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1}$$

allora

$$H = \left\{ h \geq 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} h^{n-1} \text{ converge} \right\}$$

usiamo il criterio del rapporto fissando $h \geq 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(n)!} h^n}{\frac{1}{(n-1)!} h^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h}{n} = 0 < 1 \Rightarrow \text{converge}$$

quindi $H = [0, +\infty[$ e in definitiva $r = +\infty$.

Example 6.2. Consideriamo la serie geometrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$

che e' una serie di potenze con $a_n = 1 \forall n \in \mathbb{N}$ e $x_0 = 0$.

$$H = \left\{ h \geq 0 : \sum_{n=1}^{\infty} h^{n-1} \text{ converge} \right\}$$

quest'ultima e' ancora una serie geometrica, e si ha $\sum_{n=1}^{\infty} h^{n-1} \text{ converge} \Leftrightarrow -1 < h < 1$, quindi

$$H = [0, 1[$$

e in definitiva $r = 1$.

Theorem 6.1. Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (x - x_0)^{n-1} \quad (1)$$

allora

$$0 < r \leq +\infty \Rightarrow \begin{cases} 1. \text{ La (1) e' tot. conv. in ogni interv. } [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset \text{ nel interv. di convergenza} \\ 2. \text{ La (1) e' ass. conv. nell'interv. di convergenza} \end{cases}$$

Proof:

(1)1. Dim. per $0 < r < +\infty$

In questo caso, l'interv. di convergenza e' $]x_0 - r, x_0 + r[$.

Fissiamo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset]x_0 - r, x_0 + r[$.

Dobbiamo provare che

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} L_n, \text{ convergente, a termini non neg. : } |a_{n-1} (x - x_0)^{n-1}| \leq L_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

$r = \sup H$, per la sec. prop. del sup:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists h \in H : h > r - \varepsilon$$

notando che $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset]x_0 - r, x_0 + r[\Rightarrow x_0 + \delta < x_0 + r \Leftrightarrow \delta < r$,

fissiamo $\varepsilon = r - \delta > 0$, ottenendo:

$$\exists h \in H : h > \delta$$

poiche' $h \in H$, si ha che la serie numerica (a termini non negativi) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n-1}| h^{n-1}$

converge. Proviamo la tesi con $L_n = |a_{n-1}|$ e per $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$$|a_{n-1}(x - x_0)^{n-1}| \leq |a_{n-1}| h^{n-1} \Leftrightarrow |a_{n-1}| |(x - x_0)|^{n-1} \leq |a_{n-1}| h^{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x - x_0|^{n-1} \leq h^{n-1}$$

$$x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \Rightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Leftrightarrow |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow |x - x_0|^{n-1} < \delta^{n-1}$$

$$h > \delta \Leftrightarrow h^{n-1} > \delta^{n-1}$$

$$|x - x_0|^{n-1} < \delta^{n-1} < h^{n-1} \Rightarrow |x - x_0|^{n-1} \leq h^{n-1}$$

(1)2. Dim con $r = +\infty$

In questo caso, l'intervallo di convergenza e' $] - \infty, +\infty[$.

$$r = \sup H = +\infty \Leftrightarrow \forall k > 0 : \exists h \in H : h > k$$

fissando $k = \delta$, abbiamo $h > \delta$. Allora procedendo esattamente come nel precedente passo della dimostrazione, otteniamo la tesi.

(1)3. Dimostriamo il punto 2

Dimostriamo sia per il caso $0 < r < +\infty$ che per $r = +\infty$. Fissato $x \in I$, dove I e' l'intervallo di convergenza.

CASE: $0 < r < +\infty$

$$x \in I =]x_0 - r, x_0 + r[\Rightarrow |x - x_0| < r$$

CASE: $r = +\infty$

$$|x - x_0| < r = +\infty$$

Scegliamo una $\delta > 0 : |x - x_0| \leq \delta < r$.

$$|x - x_0| \leq \delta \Leftrightarrow x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

$$\delta < r \Rightarrow [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq I$$

Per il passo precedente della dimostrazione, la (1) e' totalmente convergente in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Per il thm [5.6,pg.48], e' anche assolutamente convergente in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e in particolar modo in x .

□

Corollary 6.2.

LET: $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x - x_0)^{n-1}$ (1)
 r raggio di convergenza di (1)
 I intervallo di convergenza

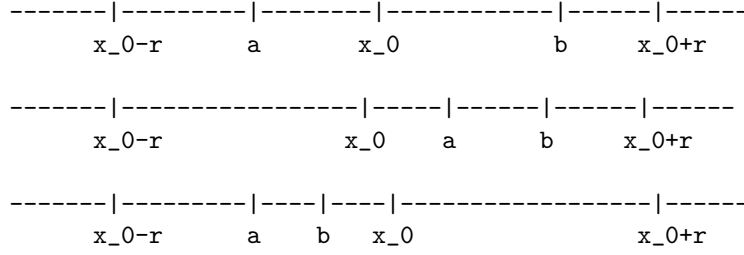
si ha

$$0 < r \leq +\infty \Rightarrow \text{la serie (1)} \xrightarrow{t.} \text{in ogni interv. di tipo } [a, b] \subseteq I$$

Proof:

Sia $[a, b] \subseteq I$.

Alcuni casi che si possono presentare:



Poniamo $\delta = \max \{x_0 - a, b - x_0\}$, che e' in sostanza la lunghezza del segmento piu' lungo tra x_0a e x_0b .

$\langle 2 \rangle 1. \delta > 0$

CASE: $x_0 > a$

$$x_0 > a \Leftrightarrow x_0 - a > 0 \Rightarrow \delta > 0$$

CASE: $x_0 > b$

$$x_0 > b > a \Rightarrow x_0 - a > 0 \Rightarrow \delta > 0$$

CASE: $x_0 < a$

$$x_0 < a < b \Rightarrow b - x_0 > 0 \Rightarrow \delta > 0$$

CASE: $x_0 < b$

$$x_0 < b \Rightarrow b - x_0 > 0 \Rightarrow \delta > 0$$

CASE: $x_0 = a$

$$x_0 = a < b \Rightarrow b - x_0 > 0 \Rightarrow \delta > 0$$

CASE: $x_0 = b$

$$x_0 = b > a \Rightarrow x_0 - a > 0 \Rightarrow \delta > 0$$

$\langle 2 \rangle 2. [a, b] \subseteq [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

CASE: $\delta = x_0 - a$

$$\delta = x_0 - a \Leftrightarrow a = x_0 - \delta$$

$$\delta > b - x_0 \Rightarrow b < \delta + x_0$$

$$a = x_0 - \delta < b < \delta + x_0 \Rightarrow [a, b] \subseteq [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

CASE: $\delta = b - x_0$

$$\delta = b - x_0 \Leftrightarrow b = x_0 + \delta$$

$$\delta > x_0 - a \Rightarrow a > x_0 - \delta$$

$$x_0 + \delta = b > a > x_0 - \delta \Rightarrow [a, b] \subseteq [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

$\langle 2 \rangle 3. [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq I$

CASE: $r = +\infty$

E' ovvio, perche' $I =] - \infty, +\infty[$

CASE: $r \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
[a, b] \subseteq I = [x_0 - r, x_0 + r] &\Rightarrow \begin{cases} a \geq x_0 - r \\ b \leq x_0 + r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - a \leq r \\ b - x_0 \leq r \end{cases} \Rightarrow \max\{x_0 - a, b - x_0\} = \delta \leq r \\
&\Rightarrow \begin{cases} x_0 + \delta \leq x_0 + r \\ x_0 - \delta \geq x_0 - r \end{cases} \Rightarrow [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq [x_0 - r, x_0 + r]
\end{aligned}$$

⟨2⟩4. Q.E.D.

Allora, per il thm [6.1,pg.51], la (1) e' tot. conv in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e di conseguenza, per la prop [5.1,pg.45], in $[a, b]$

□

Theorem 6.3.

LET: $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x - x_0)^{n-1}$ (1)
r raggio di convergenza di (1), $0 \leq r < +\infty$
fissato $x \in \mathbb{R} : |x - x_0| > r$
 $\Rightarrow$ *la serie (1) non converge in x*

Proof:

⟨1⟩1. Dimostriamo per assurdo

Fissiamo $x' \in \mathbb{R} : |x' - x_0| > r$, e supponiamo che la serie numerica

$$a_{n-1}(x' - x_0)^{n-1}$$

converga. Allora, per il thm sulle serie numeriche si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n-1}(x' - x_0)^{n-1} = 0$$

Poiche' per le successioni numeriche la convergenza implica la limitatezza, la successione

$$\{a_{n-1}(x' - x_0)^{n-1}\}$$

e' limitata, ovvero

$$\exists M > 0 : |a_{n-1}(x' - x_0)^{n-1}| = |a_{n-1}||x' - x_0|^{n-1} < M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

Dalle Hp:

$$|x' - x_0| > r \Rightarrow \begin{cases} |x' - x_0| > 0 \Leftrightarrow x' \neq x_0 & r = 0 \\ x' \in \mathbb{R} \setminus [x_0 - r, x_0 + r] & 0 < r < +\infty \end{cases}$$

Scegliamo un $h \in \mathbb{R} : |x' - x_0| > h > r$.

⟨2⟩1. Proviamo che $h \in H$

Ovviamente $h \geq 0$ dato che $h > r \geq 0$. Proviamo allora che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n-1}|h^{n-1} \quad (3)$$

converge. Maggioriamo:

$$\begin{aligned}
|a_{n-1}|h^{n-1} &= |a_{n-1}||x' - x_0|^{n-1} \frac{h^{n-1}}{|x' - x_0|^{n-1}} = |a_{n-1}(x' - x_0)^{n-1}| \left(\frac{h}{|x' - x_0|} \right)^{n-1} \\
&< M \left(\frac{h}{|x' - x_0|} \right)^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [\text{per la (2)}]
\end{aligned}$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} M \left(\frac{h}{|x' - x_0|} \right)^{n-1} = M \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{h}{|x' - x_0|} \right)^{n-1}$$

e' la serie geometrica di ragione $\frac{h}{|x' - x_0|}$. Poiche',

$$|x' - x_0| > h > r > 0 \Rightarrow -1 < 0 < \frac{h}{|x' - x_0|} < 1$$

, essa converge. Per il teorema del confronto sulle serie (3), (4)⁸, la serie (3) converge. In conclusione $h \in H$.
 <2>2. Q.E.D.

$$\begin{aligned} h \in H &\Rightarrow h \leq \sup H = r \\ h &> r \text{ per Hp} \end{aligned}$$

assurdo.

□

Proposition 6.4. *Risumiamo i risultati dei thm [6.3,pg.54], [6.1,pg.51].*

- $r = 0 \Rightarrow$ la (1) converge solo in x_0 (in altre $x \neq x_0$ non converge)
- $r = +\infty \Rightarrow$ la (1) converge assolutamente in $]-\infty, +\infty$
- $0 < r < +\infty \Rightarrow$ la (1) converge assolutamente in $]x_0 - r, x_0 + r[$, **non** converge in $\mathbb{R} \setminus [x_0 - r, x_0 + r]$.
 Negli estremi $x_0 - r, x_0 + r$, abbiamo un caso dubbio: potrebbe convergere o non convergere.

Theorem 6.5. *di Abel*

LET: $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}$ (1)
 r raggio di convergenza di (1), $0 < r < +\infty$

(1) converge in $x_0 - r, x_0 + r \Rightarrow$ (1) $\xrightarrow{u.}$ in $[x_0 - r, x_0 + r]$

(1) converge in $x_0 - r$ ma non in $x_0 + r \Rightarrow$

(1) $\xrightarrow{u.}$ in ogni interv. del tipo $[x_0 - r, b] \forall x_0 - r < b < x_0 + r$

(1) converge in $x_0 + r$ ma non in $x_0 - r \Rightarrow$

(1) $\xrightarrow{u.}$ in ogni interv. del tipo $[a, x_0 + r] \forall x_0 - r < a < x_0 + r$

Theorem 6.6. *di Cauchy-Hadamard.*

LET: $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}$ (1)
 r raggio di convergenza di (1)
 $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = l$

allora

$$r = \begin{cases} \frac{1}{l} & 0 < l < +\infty \\ +\infty & l = 0 \\ 0 & l = +\infty \end{cases}$$

Attenzione: a_n non e' il termine generale della serie, ma il coefficiente del termine generale!

Proof:

<1>1. Dimostriamo solo il punto 1

La tesi e' $\sup H = \frac{1}{l}$, che equivale a provare

$$H = [0, \frac{1}{l}[\vee H = [0, \frac{1}{l}]$$

⁸che possiamo usare perche' le serie sono a termini non negativi

dove J e' un qualsiasi insieme $\subseteq H$. Che equivale ancora a

$$\begin{cases} i) & 0 \leq h < \frac{1}{l}, \Rightarrow h \in H \\ ii) & h > \frac{1}{l} \vee h < 0 \Rightarrow h \notin H \end{cases}$$

ovvero

$$[0, \frac{1}{l}] \subseteq H \subseteq [0, \frac{1}{l}]$$

(2)1. Dim i)

Avendo $0 \leq h < \frac{1}{l}$, per far vedere che $h \in H$ e' sufficiente dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n-1}| h^{n-1} \quad (+)$$

converge. Per Hp

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = l, \quad 0 < l < +\infty$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists v \in \mathbb{N} : ||a_n|^{\frac{1}{n}} - l| < \varepsilon \quad \forall n > v;$$

$$\Leftrightarrow l - \varepsilon < |a_n|^{\frac{1}{n}} < l + \varepsilon \quad \forall n > v \quad (*)$$

Sia $k \in \mathbb{R} : h < k < \frac{1}{l}$,

$$k < \frac{1}{l} \Leftrightarrow \frac{1}{k} > l$$

fissiamo $\varepsilon = \frac{1}{k} - l > 0$, per la (*)

$$\exists v \in \mathbb{N} : |a_n|^{\frac{1}{n}} < l + \varepsilon = \frac{1}{k} \quad \forall n > v \Leftrightarrow |a_n| < \frac{1}{k^n}$$

$$\Rightarrow |a_n| h^n \leq \frac{h^n}{k^n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{h}{k})^n$ e' la serie geom. di ragione $(\frac{h}{k})$ e poiche' $h < k \Rightarrow \frac{h}{k} < 1$, converge. Per il criterio del confronto, anche la (+) converge.

(1)2. Dim ii)

Per assurdo supponiamo che $h \in H$, $h > \frac{1}{l}$, allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n-1}| h^{n-1}$$

converge, e quindi

$$\lim |a_{n-1}| h^{n-1} = 0 \Leftrightarrow \lim |a_n| h^n = 0 \quad (a)$$

per Hp possiamo fissare $\varepsilon = l - \frac{1}{h} > 0$, per la (*)

$$\exists v \in \mathbb{N} : l - \varepsilon = \frac{1}{h} < |a_n|^{\frac{1}{n}} \quad \forall n > v$$

$$\Leftrightarrow 1 < |a_n| h^n \quad \forall n > v \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| h^n \geq 1$$

che e' assurdo contro la (a).

Infine, per definizione, $h < 0 \Rightarrow h \notin H$.

□

Corollary 6.7.

LET: $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (x - x_0)^{n-1}$, $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (1)

r raggio di convergenza di (1)

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$$

allora

$$r = \begin{cases} \frac{1}{l} & 0 < l < +\infty \\ +\infty & l = 0 \\ 0 & l = +\infty \end{cases}$$

Attenzione: a_n non e' il termine generale della serie, ma il coefficiente del termine generale!

Proof:

Vale la seguente implicazione:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = l$$

□

Example 6.3. Continuiamo dall'esempio [6.1,pg.51], ricavandoci con le nuove tecniche r :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n)!}}{\frac{1}{(n-1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \\ &\Rightarrow r = +\infty \end{aligned}$$

Quindi la serie converge assolutamente in $] -\infty, +\infty[$. Da questo, possiamo dedurre anche un limite notevole: sia $x \in] -\infty, +\infty[$, abbiamo visto che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ converge in x , allora per il criterio di convergenza delle serie numeriche:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Example 6.4. Continuiamo dall'esempio [6.2,pg.51],

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \\ &\Rightarrow r = 1 \end{aligned}$$

Quindi la serie converge assolutamente in $] -1, +1[$, **non** converge in $\mathbb{R} \setminus] -1, +1[$. A priori non possiamo dire nulla per i punti $-1, +1$, pero' si vede che:

$$\begin{aligned} x = -1 &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \text{ e' oscillante} \\ x = 1 &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = +\infty \end{aligned}$$

Theorem 6.8.

- LET:
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} \quad (1)$
 - r raggio di convergenza di (1)
 - $\sum_{n=1}^{\infty} D[a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}]$ la serie ottenuta dalla (1) derivando ogni suo termine, ovvero

$$a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \dots \quad (1')$$

allora le serie (1) e (1') hanno lo stesso raggio di convergenza.

Da questo risultato possiamo dedurre che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} D^k [a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}]$$

con $k \in \mathbb{N}$, ha lo stesso raggio di convergenza della (1).

Theorem 6.9. sulla derivabilit  della funzione somma di una serie di potenze.

LET: • r raggio di convergenza della serie di potenze (1), e sia $r > 0$

• I l'intervallo di convergenza della (1)

• $f(x)$ la funzione somma della (1)

allora

1. $f(x)$ e' derivabile in I

2. $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D [a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}] = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \dots \quad \forall x \in I$

Proof:

Per il thm [6.8,pg.57], la serie (1') ha lo stesso raggio di convergenza di (1), e quindi ha anche lo stesso intervallo di convergenza.

<2>1. Sia $x' \in I$, proviamo la tesi per questo arbitrario punto x

Sia $[a, b] \subseteq I : x' \in [a, b]$, per il cor [6.2,pg.52], sia (1) sia (1') convergono totalmente in $[a, b]$, e quindi anche uniformemente. Per il thm [5.8,pg.49], si ha che

$$\exists f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D [a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}] \quad \forall x \in [a, b]$$

quindi a maggior ragione

$$\exists f'(x') = \sum_{n=1}^{\infty} D [a_{n-1}(x'-x_0)^{n-1}]$$

□

Corollary 6.10. Sotto le ipotesi del teorema [6.9,pg.58] e applicandolo ripetutamente, si ha

1. $f(x) \in C^\infty(I)$, ovvero la f e' derivabile infinite volte nell'intervallo I .

2. $D^k [f(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} D^k [a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}]$

E poiche' ogni derivazione abbassa di un grado i termine, e le costanti derivate sono pari a 0, si ha

$$D^k [f(x)] = D^k [a_k(x-x_0)^k] + D^k [a_{k+1}(x-x_0)^{k+1}] + \dots$$

Theorem 6.11. sulla relazione tra i coefficienti della serie di potenze e la funzione somma.

Sotto le ipotesi del thm [6.9,pg.58], si ha

$$a_0 = f(x_0) \quad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!} \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!} \quad \dots \quad a_n = \frac{D^n [f(x_0)]}{n!}$$

che equivale a dire

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{D^{n-1} [f(x_0)]}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \dots$$

cioè,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^{n-1} [f(x_0)]}{(n-1)!} (x-x_0)^{n-1}$$

Proof:

Per il cor [6.10,pg.58], possiamo procedere in questo modo:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \dots$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \dots$$

$$f'(x_0) = a_1 + 0 + 0 + \dots = a_1$$

$$D^k [f(x)] = D^k [a_k(x-x_0)^k] + D^k [a_{k+1}(x-x_0)^{k+1}] + \dots$$

Calcoliamo $D^k [a_k(x-x_0)^k]$:

$$D^1 [a_k(x-x_0)^k] = a_k k(x-x_0)^{k-1}$$

$$D^2 [a_k(x-x_0)^k] = a_k k(k-1)(x-x_0)^{k-2}$$

$$D^3 [a_k(x-x_0)^k] = a_k k(k-1)(k-2)(x-x_0)^{k-3}$$

$\vdots$

$$D^k [a_k(x-x_0)^k] = a_k k(k-1)(k-2) \dots (k-(k-1))(x-x_0)^{k-k} = a_k k!$$

quindi

$$D^k [f(x_0)] = D^k [a_k(x-x_0)^k] + 0 + 0 + \dots = a_k k! + 0 + 0 + \dots = a_k k!$$

$$a_k = \frac{D^k [f(x_0)]}{k!}$$

□

7 Serie di Taylor e Mac-Laurin

7.1 Formula di Taylor

Data una funzione $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$, se la f è derivabile n volte, allora

$\forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\} \quad \exists \underbrace{\xi = \xi_n(x)}_{\text{dip. da } n, x} \in T, \quad \text{dove } T \text{ è l'int. aperto di estremi } x, x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{D^{n-1} [f(x_0)]}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \underbrace{\frac{D^n [f(\xi)]}{(n)!}(x-x_0)^n}_{R_n(x)}$$

$R_n(x)$ e' chiamato il termine complementare n -esimo della formula di Taylor, nella forma di Lagrange.
 $f(x_0)$ e' chiamato punto iniziale, e $f(\xi)$ punto finale.

Osserviamo che se $n = 1$, allora

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x - x_0) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi)$$

e questo e' proprio il teorema di Lagrange, applicato alla f ristretta all'intervallo di estremi x, x_0 .

Per $x_0 = 0 \in (a, b)$, si ha la formula di Mac-Laurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{D^{n-1}[f(0)]}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{D^n[f(\xi)]}{(n)!}x^n$$

7.2 Serie di Taylor

Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $x_0 \in (a, b)$. Se $\exists D^n[f(x_0)] \quad \forall n \in \mathbb{N}$ allora ha senso definire la serie di Taylor:

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{D^{n-1}[f(x_0)]}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \dots \quad (t)$$

Definition 7.1. Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) \in C^\infty((a, b))$, $x_0 \in (a, b)$.

Prendendo un $\bar{x} \in (a, b)$, diremo che la f e' sviluppabile in serie di Taylor in $\bar{x}$, se la (t) converge puntualmente a $f(x)$ in $\bar{x}$, ovvero se

$$f(\bar{x}) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(\bar{x} - x_0) + \dots + \frac{D^{n-1}[f(x_0)]}{(n-1)!}(\bar{x} - x_0)^{n-1} + \dots$$

Oss: dalla definizione segue immediatamente che f e' sviluppabile in serie di Taylor in x_0 , infatti

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_0 - x_0) + \dots + \frac{D^{n-1}[f(x_0)]}{(n-1)!}(x_0 - x_0)^{n-1} + \dots = f(x_0) + 0 + 0 + \dots = f(x_0)$$

Theorem 7.1. Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) \in C^\infty((a, b))$, $x_0 \in (a, b)$, allora

$$f \text{ e' sviluppabile in } x \in (a, b) \setminus \{x_0\} \text{ in serie di Taylor di centro } x_0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$$

Proof:

(1) 1. Dim $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \text{Hp} &\Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{D^{n-1}[f(x_0)]}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \dots \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x) = f(x), \quad s_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{D^{n-1}[f(x_0)]}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x) - s_n(x)) = 0 \end{aligned}$$

Per la formula di Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \underbrace{\frac{D^{n-1}[f(x_0)]}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + R_n(x)}_{s_n(x)}$$

$$\Leftrightarrow f(x) - s_n(x) = R_n(x)$$

quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x) - s_n(x)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$$

□

Corollary 7.2.

LET: $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) \in C^\infty((a, b))$

$x, x_0 \in (a, b)$, $x \neq x_0$

T l'intervallo aperto di estremi x, x_0

allora

$\exists M = M(x_0, x) > 0 : |D^n[f(t)]| \leq M \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in T \Rightarrow f$ e' sviluppabile in $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ in serie di Taylor di centro x_0

Proof:

Cerchiamo di usare il thm [7.1,pg.60], ovvero cerchiamo di dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{D^n[f(\xi)]}{(n)!}(x-x_0)^n = 0, \quad \xi \in T$$

Per Hp e ponendo $t = \xi$, abbiamo

$$0 \leq |D^n[f(\xi)]| \leq M \Leftrightarrow 0 \leq \frac{D^n[f(\xi)]}{(n)!}|x-x_0|^n \leq \frac{M}{(n)!}|x-x_0|^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nell'esempio [6.3,pg.57] abbiamo visto che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

ponendo $a = |x - x_0|$ e otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x-x_0|^n}{(n)!} = 0$$

percio':

$$\begin{aligned} \frac{M}{(n)!}|x-x_0|^n &\longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

e per il criterio del confronto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{D^n[f(\xi)]}{(n)!}|x-x_0|^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$$

quindi per il thm [7.1,pg.60], la tesi e' dimostrata.

□

Example 7.2. Proviamo che la funzione $f(x) = e^x$ e' sviluppabile in serie di Taylor di centro $x_0 = 0$, ovvero che

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \cdots + \frac{D^{n-1}[f(0)]}{(n-1)!}(x-0)^{n-1} + \cdots \\ e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \quad (1) \end{aligned}$$

Abbiamo gia' visto che la serie (1) converge.

CASE: $x = 0$

Allora, l'uguaglianza (1) e' banalmente vera

CASE: $x > 0$

Ricordando che e^x e' crescente:

$$|D^n [e^t]| = e^t \leq \underbrace{e^x}_{\text{nota che } x \text{ e' fissato}} \quad \forall t \in]x_0, x[\quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$M = e^x$$

per il corollario [7.2,pg.61], la f e' qui sviluppabile in serie di T.

CASE: $x < 0$

$$|D^n [e^t]| = e^t \leq e^0 = 1 \quad \forall t \in]x, x_0[\quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$M = 1$$

per il corollario [7.2,pg.61], la f e' qui sviluppabile in serie di T.

Example 7.3. E adesso espandiamo $f(x) = \sin x$. Prendiamo sempre $x_0 = 0$, e dimostriamo che

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \dots + \frac{D^{n-1}[f(0)]}{(n-1)!}(x-0)^{n-1} + \dots$$

$$f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x \quad D^3[f(x)] = -\cos x \quad D^4[f(x)] = \sin x$$

$$f'(0) = 1 \quad f''(0) = 0 \quad D^3[f(0)] = -1 \quad D^4[f(0)] = 0$$

$$\sin(x) = 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (1)$$

Per $x = 0$, la (1) e' verificata.

Per $x \neq 0$, osserviamo che $D^n[f(t)] \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R}$, quindi per il corollario [7.2,pg.61], la f e' qui sviluppabile in serie di T.

8 Spazi metrici

Per il concetto di spazio metrico vedi topologia.pdf.

8.1 Spazio $\mathbb{R}$ a n dimensioni

Spazio $(\mathbb{R}^n, d)$, dove

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$d((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Proposition 8.1. *Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz:*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \quad \forall (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$$

e scegliendo $(b_1, \dots, b_n) = (1, 1, \dots, 1)$ si ha

$$\sum_{i=1}^n a_i \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

Proof:

Poniamo $A = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$, $B = \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$

Supponiamo che esistano almeno una coppia di $a_i, b_i \neq 0$, altrimenti la disuguaglianza risulta ovvia ($0 \leq 0$). Osserviamo che

$$\alpha\beta \leq \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\beta^2$$

infatti,

$$0 \leq (\alpha - \beta)^2 \Leftrightarrow 0 \leq \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \Leftrightarrow 2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$$

$$\alpha\beta \leq \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\beta^2$$

Poniamo allora

$$\alpha = \frac{a_i}{A}, \quad \beta = \frac{b_i}{B}$$

e abbiamo

$$\frac{a_1 b_1}{AB} \leq \frac{a_1^2}{2A^2} + \frac{b_1^2}{2B^2}$$

$$\frac{a_2 b_2}{AB} \leq \frac{a_2^2}{2A^2} + \frac{b_2^2}{2B^2}$$

$\vdots$

$$\frac{a_n b_n}{AB} \leq \frac{a_n^2}{2A^2} + \frac{b_n^2}{2B^2}$$

sommiamo membro a membro ottenendo:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{AB} \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{2A^2} + \frac{b_i^2}{2B^2} = \frac{1}{2A^2} \overbrace{\sum_{i=1}^n a_i^2}^{=A^2} + \frac{1}{2B^2} \overbrace{\sum_{i=1}^n b_i^2}^{=B^2}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{AB} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq AB$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

□

Proposition 8.2. *La funzione*

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$d((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

e' una metrica.

Proof:

(1)1. Dimostriamo che d e' una metrica

Dimostriamo solo la disuguaglianza triangolare, le altre proprieta' sono ovvie.

Dobbiamo dimostrare quindi che:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2}$$

Procediamo:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n [(x_i - z_i) + (z_i - y_i)]^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)(z_i - y_i)$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)(z_i - y_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2}$$

quindi

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)(z_i - y_i) \\ & \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2} = \\ & \left[\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2} \right]^2 \\ & \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \left[\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2} \right]^2 \\ & \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2} \end{aligned}$$

□

8.2 Spazio di funzioni

Dato l'intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, definiamo

$$\begin{aligned} C^0([a, b]) &= \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ e' continua in } [a, b]\} \\ d : C^0([a, b]) \times C^0([a, b]) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ d(f, g) &= \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| \end{aligned}$$

Per il thm di Weierstrass, la d e' ben definita.

Proof:

(1)1. dimostriamo che d e' una metrica

(2)1. $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$

$$\begin{aligned}
d(f, g) = 0 &\Rightarrow \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| = 0 \\
0 \leq |f(x) - g(x)| &\leq \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| = 0 \quad \forall x \in [a, b] \\
|f(x) - g(x)| = 0 &\Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad \forall x \in [a, b]
\end{aligned}$$

$$f = g \Rightarrow d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| = 0 \Rightarrow$$

⟨2⟩2. Diseguaglianza triangolare

La Ts e':

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$$

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x) - h(x)| + \max_{x \in [a, b]} |h(x) - g(x)| \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\begin{aligned}
|f(x) - g(x)| &= |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leq \\
&\underbrace{\max_{x \in [a, b]} |f(x) - h(x)| + \max_{x \in [a, b]} |h(x) - g(x)|}_{M} \quad \forall x \in [a, b]
\end{aligned}$$

quindi M e' un maggiorante di $\{|f(x) - g(x)|\}$, poiche' il suo massimo e' il minimo dei maggioranti si ha

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| \leq M = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - h(x)| + \max_{x \in [a, b]} |h(x) - g(x)|$$

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$$

□

8.3 Seconda diseguaglianza triangolare

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Proof:

⟨1⟩1. Dim $|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y) \Leftrightarrow -d(x, y) \leq d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, y)$$

⟨2⟩1. Dim $d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, y)$

Per la prima diseg. triangolare:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

$$d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y)$$

$$d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, y)$$

⟨2⟩2. Dim $-d(x, y) \leq d(x, z) - d(z, y)$

$$d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y)$$

$$d(z, y) - d(z, x) \leq d(x, y)$$

$$-d(x, y) \leq d(z, x) - d(z, y)$$

$$-d(x, y) \leq d(x, z) - d(z, y)$$

□

8.4 Insieme limitato

Siamo in uno spazio metrico (S, d) , allora

$$\begin{aligned} I(x, r) &:= \{y \in S \mid d(x, y) < r\} \\ C(x, r) &:= \{y \in S \mid d(x, y) \leq r\} \\ \Gamma(x, r) &:= \{y \in S \mid d(x, y) = r\} \end{aligned}$$

E' ovvio che

$$\{x\} \subseteq I(x, r) \subseteq C(x, r) \subseteq I(x, r + \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$$

Un insieme $X \subseteq S$ si dice limitato $\Leftrightarrow \exists I(x, r) : X \subseteq I(x, r)$

Valgono le seguenti prop.:

1. X limitato, $Y \subseteq X \Rightarrow Y$ limitato
2. X limitato $\Rightarrow X \cap Y$ limitato
3. X limitato, Y limitato $\Rightarrow X \cup Y$ limitato

Proof: Per Hp

$$\begin{aligned} X &\subseteq I(x, r) \\ Y &\subseteq I(y, r') \end{aligned}$$

consideriamo $I(y, m)$, dove $m = \max\{d(x, y) + r, r'\}$.

$\langle 1 \rangle 1.$ Dim $X \cup Y \subseteq I(y, m)$

$$\begin{aligned} y' \in Y &\Rightarrow y' \in I(y, m) \text{ [poiche' } r' \leq m] \\ x' \in X & \\ d(x', x) < r, \quad d(x', y) &\leq d(x', x) + d(x, y) < r + d(x, y) \leq m \\ d(x', y) < m &\Rightarrow x' \in I(y, m) \end{aligned}$$

□

8.5 Diametro

Diametro di $X \subseteq S$, $X \neq \emptyset$:

$$\text{diam } X = \sup \{d(x, y) \mid x, y \in X\}$$

si ha:

1. $0 \leq \text{diam } X \leq \infty$
2. X e' limitato $\Leftrightarrow \text{diam } X < +\infty$

Proof:

$\langle 1 \rangle 1.$ Dim $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} X \text{ lim.} &\Rightarrow X \subseteq I(z, r) \Rightarrow \forall x \in X \quad d(x, z) < r \\ \forall x, y \in X \quad d(x, z) < r, \quad d(y, z) < r &\Rightarrow d(x, z) + d(z, y) < 2r \Rightarrow d(x, y) < 2r \Rightarrow \\ d(x, y) &\leq \underbrace{\text{diam } X}_{\text{il sup e' il min dei magg.}} \leq 2r < +\infty \quad \forall x, y \in X \end{aligned}$$

$\langle 1 \rangle 2.$ Dim $\Leftarrow$

Basta prendere $r = \text{diam } X$, e si ha $X \subseteq I(x, r + \varepsilon)$ con x un qualsiasi pt. $\in X$ e $\varepsilon > 0$:

$$y \in X \Rightarrow d(x, y) \leq \text{diam } X \Rightarrow y \in I(x, r + \varepsilon)$$

□

8.6 Interno, esterno, frontiera, derivato, chiusura

Dato $X, Y \subseteq S$ (nota ⁹)

$$x \text{ e' interno a } X \Leftrightarrow \exists I(x, r) \subseteq X$$

$$X^\circ = \{x \in X \mid x \text{ e' interno a } X\}$$

$$x \text{ e' esterno a } X \Leftrightarrow \exists I(x, r) \subseteq S \setminus X$$

$$\text{ext } X = \{x \in X \mid x \text{ e' esterno a } X\}$$

$$x \text{ e' di frontiera per } X \Leftrightarrow \forall I(x, r) \quad I(x, r) \cap X \neq \emptyset, \quad I(x, r) \cap S \setminus X \neq \emptyset$$

$$F(X) = \{x \in X \mid x \text{ e' di frontiera per } X\}$$

$$x \text{ e' di accumulazione per } X \Leftrightarrow \forall I(x, r) \quad \exists q \in X, \quad q \neq x : \quad q \in I(x, r) \cap X$$

$$D(X) = \{x \in X \mid x \text{ e' di accumulazione per } X\}$$

$$X \text{ e' discreto} \Leftrightarrow D(X) = \emptyset$$

$$X \text{ e' chiuso} \Leftrightarrow D(X) \subseteq X$$

$$X \text{ e' aperto} \Leftrightarrow X = X^\circ$$

$$X \text{ e' perfetto} \Leftrightarrow D(X) = X$$

$$\overline{X} = X \cup D(X) \quad (\text{chiusura})$$

$$x \text{ e' isolato per } X \Leftrightarrow x \in X, \quad x \notin D(X) \Leftrightarrow \exists I(x, \varepsilon) \cap X = \{x\}$$

Proprieta':

$$1. \quad X^\circ = \text{ext } S \setminus X$$

$$2. \quad \text{ext } X = (S \setminus X)^\circ$$

$$3. \quad F(X) = F(S \setminus X)$$

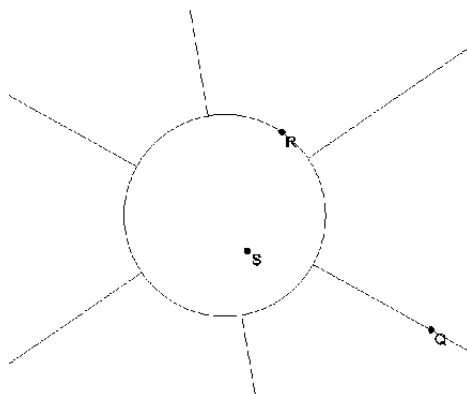
$$4. \quad X \text{ e' perfetto} \Rightarrow X \text{ e' chiuso}$$

$$5. \quad X \text{ e' denso in } Y \Leftrightarrow Y \subseteq \overline{X}$$

6.

$$X \text{ e' un dominio} \Leftrightarrow \begin{cases} X \neq \emptyset \\ X \text{ chiuso} \\ X \subseteq D(X^\circ) \end{cases}$$

⁹alcune dimostrazioni sono svolte negli appunti di topologia



Questo insieme mostrato in figura non e' un dominio: Q non appartiene al derivato dell'interno, ovvero Q non e' un punto di accumulazione dell'interno: l'interno e' il solo cerchio.

7. X e' connesso $\Leftrightarrow \nexists U, V$ chiusi : $U \cap V = \emptyset, U \cup V = X$

8. $X \cup F(X) = X \cup D(X) = \overline{X}$
 Gia' dim. in topologia.

9. X chiuso $\Leftrightarrow X = \overline{X}$

10. X chiuso $\Leftrightarrow F(X) \subseteq X$

11. X aperto $\Leftrightarrow X \cap F(X) = \emptyset$

Proof: Vedi "1.11.2 Proprieta' della frontiera" in topologia.

12. X aperto e chiuso $\Leftrightarrow F(X) = \emptyset$

Proof:

$\langle 1 \rangle 1.$ Dim $\Rightarrow$

X aperto $\Rightarrow X \cap F(X) = \emptyset$

X chiuso $\Rightarrow F(X) \subseteq X \Rightarrow X \cap F(X) = F(X)$

$X \cap F(X) = \emptyset \Rightarrow F(X) = \emptyset$

$\langle 1 \rangle 2.$ Dim $\Leftarrow$

$F(X) = \emptyset \Rightarrow F(X) \subseteq X \Rightarrow X$ e' chiuso

$F(X) = \emptyset \Rightarrow F(X) \cap X = \emptyset \Rightarrow X$ e' aperto

13. L'insieme Θ degli aperti e $\mathcal{C}$, l'insieme dei chiusi, godono delle solite proprieta' viste in topologia.

14. $x \in D(X) \Leftrightarrow$ ogni intorno di x si incontra con X in infiniti punti

Proof:

$\langle 1 \rangle 1.$ Dim I

S metrizzabile $\Rightarrow S$ e' normale $\Rightarrow S$ e' T_1 . Negli spazi T_1 , vale proprio questa proprieta'.

$\langle 1 \rangle 2.$ Dim II

Se supp. per assurdo che

$$\exists \delta > 0 : I(x, \delta) \cap X \setminus \{x\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

allora prendiamo $m = \min \{d(x, x_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ e avremo che $I(x, m) \cap X = \{x\}$ che e' in assurdo con $x \in D(X)$

15. Corollario del precedente:

$$D(X) \neq \emptyset \Rightarrow X \text{ e' infinito}$$

Non vale il viceversa, prendi ad esempio $X = \mathbb{N}$ in $(\mathbb{R}, d)$.

Ulteriore corollario:

$$X = \emptyset \vee X \text{ finito} \Rightarrow X \text{ e' discreto} (D(X) = \emptyset)$$

16. $D(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = D(A_1) \cup D(A_2) \cup \dots \cup D(A_n)$

Proof: Vedi "1.11.1 Proprieta' del derivato" in topologia.

17. $\overline{X}$, $F(X)$, $D(X)$ sono insiemi chiusi

$\langle 1 \rangle 1$. Dim che $F(X)$ e' chiuso, ovvero $D(F(X)) \subseteq F(X)$

Sia $x_0 \in D(F(X))$, allora

$$\forall \delta > 0 : \exists \bar{x} \in I(x_0, \delta) \cap F(X) \setminus \{x_0\}$$

$$r := \delta - d(\bar{x}, x_0) > 0$$

$$\bar{x} \in F(X) \Rightarrow \begin{cases} \exists x_1 \in I(\bar{x}, r) \cap X \\ \exists x_2 \in I(\bar{x}, r) \cap (S \setminus X) \end{cases} \quad (1)$$

$\langle 2 \rangle 1$. $I(\bar{x}, r) \subseteq I(x_0, \delta)$

sia $x \in I(\bar{x}, r)$,

$$x \in I(\bar{x}, r) \Rightarrow d(x, \bar{x}) < r$$

$$d(x, x_0) \leq d(x, \bar{x}) + d(\bar{x}, x_0) < r + d(\bar{x}, x_0) = \delta \Rightarrow x \in I(x_0, \delta)$$

Quindi,

$$\begin{cases} I(\bar{x}, r) \subseteq I(x_0, \delta) \\ (1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists x_1 \in I(\bar{x}, r) \cap X \\ \exists x_2 \in I(\bar{x}, r) \cap (S \setminus X) \end{cases}$$

$\langle 1 \rangle 2$. Dim che $D(X)$ e' chiuso, ovvero $D(D(X)) \subseteq D(X)$

Sia $x_0 \in D(D(X))$, per una proprieta' gia' vista, qualsiasi intorno $I(x_0, \delta)$ si incontra con $D(X)$ in infiniti punti distinti da x_0 . Sia $\bar{x}$ uno di questi punti, cioe' $\bar{x} \in I(x_0, \delta) \cap D(X) \setminus \{x_0\}$

$\langle 2 \rangle 1$. dim che $I(\bar{x}, r) \subseteq I(x_0, \delta)$, dove $r = \delta - d(x_0, \bar{x})$

$$x \in I(\bar{x}, r) \Rightarrow d(x, \bar{x}) < r$$

$$d(x, x_0) \leq d(x_0, \bar{x}) + d(\bar{x}, x_0) < r + d(\bar{x}, x_0) = \delta \Rightarrow x \in I(x_0, \delta)$$

Poiche' $\bar{x} \in D(X)$, $I(\bar{x}, r)$ si incontra con X in infiniti punti, allora dato che $I(\bar{x}, r) \subseteq I(x_0, \delta)$, anche $I(x_0, \delta)$ si incontra con X in infiniti punti, e quindi, per l'arbitrarieta' di $\delta > 0$, si ha $x_0 \in D(X)$.

$\langle 1 \rangle 3$. Dim che $\overline{X}$ e' chiuso, ovvero $D(\overline{X}) \subseteq \overline{X}$

$$D(\overline{X}) = D(X \cup D(X)) = D(X) \cup D(D(X)) \subseteq D(X) \subseteq X \cup D(X) = \overline{X}$$

18. X° , ext X sono insiemi aperti

19. Sia A un aperto e C un chiuso,

- (a) $A \setminus C$ e' un aperto
(b) $C \setminus A$ e' un chiuso

Proof:

$\langle 1 \rangle 1.$ $A \setminus C$ e' aperto

Sia $a \in A \setminus C$.

$$a \in A = A^\circ \Rightarrow \exists I(a, \delta) \subseteq A$$

$$a \notin C \Rightarrow a \notin D(C) \Rightarrow \exists I(a, \delta') : I(a, \delta') \cap C = \emptyset$$

$$r := \min\{\delta, \delta'\}$$

$$I(a, r) \subseteq A \setminus C, \text{ infatti,}$$

$$y \in I(a, r) \subseteq I(a, \delta) \subseteq A$$

$$\text{per assurdo } y \in C \Rightarrow y \in I(a, \delta') \cap C = \emptyset \text{ assurdo}$$

$\langle 1 \rangle 2.$ $C \setminus A$ e' chiuso

Sia $c \in D(C \setminus A)$,

$$C \setminus A \subseteq C \Rightarrow D(C \setminus A) \subseteq D(C) \Rightarrow c \in D(C) \underbrace{\subseteq}_{C \text{ e' chiuso}} C$$

$$\text{per assurdo } c \in A \Rightarrow \exists I(c, r) \subseteq A \Leftrightarrow I(c, r) \cap (C \setminus A) = \emptyset \Rightarrow c \notin D(C \setminus A) \text{ assurdo}$$

20. Dato x_0 ,
cerchio $C(x_0, r)$, $\{x \mid d(x, x_0) \geq r\}$ sono insiemi chiusi

21. Dato x_0 ,
cerchio $I(x_0, r)$, $\{x \mid d(x, x_0) > r\}$ sono insiemi aperti

Proof:

$\langle 1 \rangle 1.$ $\mathcal{A} = \{x \mid d(x, x_0) > r\}$ e' aperto

Sia $a \in \mathcal{A}$, dimostriamo che $\exists I(a, \delta) \subseteq \mathcal{A}$.

$$a \in \mathcal{A} \Rightarrow d(a, x_0) > r$$

$$s := d(a, x_0) - r > 0$$

$$I(a, s) \subseteq \mathcal{A}, \text{ infatti,}$$

$$y \in I(a, s) \Rightarrow d(y, a) < s \Leftrightarrow -d(y, a) > -s$$

$$d(x_0, y) \underbrace{\geq}_{\text{II dis. triang.}} |d(a, x_0) - d(y, a)| > |d(a, x_0) - s| = |r| = r$$

II dis. triang.

Proposition 8.3. Negli spazi metrici euclidei, e in particolar modo in $(\mathbb{R}^p, d)$, dato un aperto A (per la dim vedi [10, pg. 112])

$$X^\circ \subseteq D(X) \quad \forall X \subseteq \mathbb{R}^p$$

$$A \subseteq D(A), \text{ infatti}$$

$$A = A^\circ \subseteq D(A)$$

Proposition 8.4. In $(\mathbb{R}, d)$, con $d(x, y) = |x - y|$, preso $Y \subseteq \mathbb{R}$

$$\exists \text{ finito } \sup Y \Rightarrow \sup Y \in F(Y)$$

$$\exists \text{ finito } \inf Y \Rightarrow \inf Y \in F(Y)$$

Proof:

Sia $y^* = \sup Y$. La ts e':

$$\forall r > 0 : I(y^*, r) \cap Y \neq \emptyset \wedge I(y^*, r) \cap (\mathbb{R} \setminus Y) \neq \emptyset$$

Per le proprieta' del sup

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists y \in Y : y^* + \varepsilon > y^* \geq y > y^* - \varepsilon$$

$$\Rightarrow y \in]y^* - \varepsilon, y^* + \varepsilon[$$

$$\exists \bar{y} \in]y^*, y^* + \varepsilon] \Rightarrow \bar{y} > y^* = \sup Y \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{per def di sup}} \quad \bar{y} \notin Y \Rightarrow]y^* - \varepsilon, y^* + \varepsilon[\cap (\mathbb{R} \setminus Y) \neq \emptyset$$

Notando che $I(y^*, \varepsilon) =]y^* - \varepsilon, y^* + \varepsilon[$, abbiamo raggiunto la tesi.

□

Proposition 8.5. $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ e' connesso.

Proof:

C1 C2

Y

[-----|-----|-----|-----]

a x1 x* x2 b

Supponiamo per assurdo che $[a, b]$ non sia connesso, ovvero supponiamo che

$$\exists C_1, C_2 \text{ chiusi} : C_1 \cup C_2 = [a, b], \quad C_1 \cap C_2 = \emptyset$$

Sia $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2$, osserviamo che

$$x_1 \in C_1, \quad C_1 \cap C_2 = \emptyset \Rightarrow x_1 \notin C_2$$

$$\begin{cases} x_2 \in C_2 \\ x_1 \notin C_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

⟨2⟩1. Supponiamo che $x_1 < x_2$ e dimostriamo che $[x_1, x_2] \subseteq [a, b]$

$$C_1 \cup C_2 = [a, b] \Rightarrow \begin{cases} C_1 \subseteq [a, b] \\ C_2 \subseteq [a, b] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \in C_1 \subseteq [a, b] \\ x_2 \in C_2 \subseteq [a, b] \\ x_1 < x_2 \end{cases} \Rightarrow a \leq x_1 < x_2 \leq b \Rightarrow [x_1, x_2] \subseteq [a, b]$$

Sia $Y = C_1 \cap [x_1, x_2]$

$$x_1 \in [x_1, x_2], \quad x_1 \in C_1 \Rightarrow Y \neq \emptyset \quad C_1, [x_1, x_2] \text{ chiusi} \Rightarrow Y \text{ chiuso}$$

Sia $x^* = \sup Y$

⟨2⟩2. $x_1 \leq x^* < x_2$

Intanto osserviamo che $x^* \in \mathbb{R}$, infatti

$$Y \subseteq [x_1, x_2] \Rightarrow Y \text{ e' limitato} \Rightarrow \exists \text{ finito } \sup Y$$

Inoltre, per la prop [8.4, pg. 70]

$$x^* \in F(Y) \quad \underbrace{\subseteq}_{Y \text{ e' chiuso}} \quad Y$$

$$x^* \in Y \Rightarrow x^* \in C_1$$

$$\begin{cases} x^* \in C_1 \\ C_1 \cap C_2 = \emptyset \end{cases} \Rightarrow x^* \notin C_2 \Rightarrow x^* \neq x_2 \quad (*)$$

$$x^* \in Y \Rightarrow x^* \in [x_1, x_2]$$

$$\begin{cases} x^* \in [x_1, x_2] \\ x^* \neq x_2 \end{cases} \Rightarrow x^* < x_2$$

⟨2⟩3. $]x^*, x_2] \subseteq C_2$
 Sia $x \in]x^*, x_2]$,

$$x > x^* \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{per def. di sup}} \quad x \notin Y$$

$$\begin{cases} x \notin Y = C_1 \cap [x_1, x_2] \\ x \in]x^*, x_2] \subseteq [x_1, x_2] \end{cases} \Rightarrow x \notin C_1$$

$$\begin{cases} x \notin C_1 \\ x \in]x^*, x_2] \subseteq [x_1, x_2] \subseteq [a, b] \\ C_1 \cup C_2 = [a, b] \end{cases} \Rightarrow x \in C_2$$

⟨2⟩4. Q.E.D.

Sia

$$\{x_n\} \subseteq]x^*, x_2] : x_n \xrightarrow{\mathbb{R}} x^* \quad (1')$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \{x_n\} \subseteq]x^*, x_2] \subseteq C_2 \\ (1') \end{cases} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{prop [8.14, pg. 77]}} \quad x^* \in \overline{C_2} \quad \underbrace{=}_{C_2 \text{ e' chiuso}} \quad C_2 \end{aligned}$$

$$x^* \in C_2, \text{ ma } x^* \notin C_2 \text{ vedi } (*)$$

assurdo

□

8.7 Insiemi internamente connessi

Siamo in $(\mathbb{R}^p, d)$, con $p \geq 2$ e d metrica euclidea. Siano $a, b \in \mathbb{R}^2$, con $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_p)$,

$$\text{segmento } \overrightarrow{ab} := \{x \in \mathbb{R}^p \mid x_i = a_i + t(b_i - a_i) \ t \in [0, 1], \ i = 1, 2, \dots, p\}$$

Theorem 8.6. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^p$, $X \neq \emptyset$, $X \neq \mathbb{R}^p$, e infine $a, b \in \mathbb{R}^p$,

$$a \in X, \ b \in \mathbb{R}^p \setminus X \Rightarrow \exists x^* \in \overrightarrow{ab}: x^* \in F(X)$$

Proof:

LET:

$$x^*(t) \in \overrightarrow{ab}, \text{ dove } x^*(t) = (a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), \dots, a_p + t(b_p - a_p))$$

⟨2⟩1. Dim un risultato preliminare:

$$d(x(t), x(t')) = |t' - t|d(a, b)$$

$$x^* := x(t), \ \bar{x} := x(t')$$

$$\begin{aligned} d(x^*, \bar{x}) &= \sqrt{\sum_{i=1}^p (x^*_i - \bar{x}_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^p (a_i + t(b_i - a_i) - a_i - t'(b_i - a_i))^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^p (t - t')^2 (b_i - a_i)^2} = |t - t'| \sqrt{\sum_{i=1}^p (b_i - a_i)^2} = |t - t'|d(a, b) \end{aligned}$$

□

$$\text{LET: } T = \{t \in [0, 1[\mid x(t) \in X\}$$

allora

$$T \subseteq [0, 1[\Rightarrow \exists \sup T =: t^*$$

$$x^* := x(t^*)$$

Se $b \in \overline{X}$, allora

$$b \notin X, \overline{X} = X \cup F(X) \Rightarrow b \in F(X)$$

e quindi avremmo già' finito. Supponiamo allora che $b \notin \overline{X}$, ovvero $b \notin D(X)$.

$\langle 2 \rangle 2$. Supponiamo che $x^* \in X$

$\langle 3 \rangle 1$. $t^* < 1$

Se per assurdo $t^* = 1$, si avra'

$$x(t^*) = x(1) = b \notin X \Leftrightarrow x^* \notin X \text{ assurdo}$$

$\langle 3 \rangle 2$. Q.E.D.

Abbiamo visto che $t^* < 1$, allora e' anche vero che

$$t^* < \min \left\{ 1, t^* + \frac{r}{d(a, b)} \right\}$$

dove r e' un arbitrario numero reale > 0 . Per la densita' di $\mathbb{R}$, possiamo prendere un $\bar{t} \in \mathbb{R}$ t.c.

$$t^* < \bar{t} < \min \left\{ 1, t^* + \frac{r}{d(a, b)} \right\}$$

poniamo $\bar{x} = x(\bar{t})$.

Se per assurdo $\bar{x} \in X$,

$$\bar{x} \in X \Rightarrow \bar{t} \in T \underbrace{\Rightarrow}_{t^* \text{ e' sup}} \bar{t} < t^* \text{ assurdo}$$

Vale questa catena di disequaglianze:

$$t^* - \frac{r}{d(a, b)} < t^* < \bar{t} < t^* + \frac{r}{d(a, b)}$$

da cui segue

$$|\bar{t} - t^*| < \frac{r}{d(a, b)}$$

allora,

$$d(x^*, \bar{x}) = d(x(t^*), x(\bar{t})) = |t^* - \bar{t}|d(a, b) < \frac{r}{d(a, b)}d(a, b) = r$$

$$d(x^*, \bar{x}) < r \Rightarrow \bar{x} \in I(x^*, r)$$

Abbiamo percio' dimostrato che

$$\forall r > 0 \ I(x^*, r) \cap \mathbb{R}^p \setminus X \neq \emptyset$$

$$x^* \in X \Rightarrow I(x^*, r) \cap X \neq \emptyset, \text{ quindi } x^* \in F(X)$$

$\langle 2 \rangle 3$. Supponiamo adesso che $x^* \notin X$

Scegliamo

$$\varepsilon = \frac{r}{d(a, b)}$$

per la prop del sup, avremo

$$\begin{aligned} \exists \bar{t} \in T : t^* \geq \bar{t} > t^* - \varepsilon; \quad x(\bar{t}) \in X \\ t^* - \varepsilon = t^* - \frac{r}{d(a,b)} < \bar{t} \leq t^* < t^* + \frac{r}{d(a,b)} \\ \Rightarrow |t^* - \bar{t}| < \frac{r}{d(a,b)} \end{aligned}$$

$$d(x(t^*), x(\bar{t})) = |t^* - \bar{t}|d(a,b) < \frac{r}{d(a,b)}d(a,b) = r$$

$$\Rightarrow x(\bar{t}) \in I(x^*, r) \cap X$$

Abbiamo percio' dimostrato che

$$\begin{aligned} \forall r > 0 \quad I(x^*, r) \cap X \neq \emptyset \\ x^* \notin X \Rightarrow I(x^*, r) \cap \mathbb{R}^p \setminus X \neq \emptyset, \text{ quindi } x^* \in F(X) \end{aligned}$$

□

Corollary 8.7. In $(\mathbb{R}^p, d)$, gli unici insiemi aperti e chiusi sono $\emptyset, \mathbb{R}^p$

Proof:

Se per assurdo $\exists X \subseteq \mathbb{R}^p$, $X \neq \emptyset$ aperto e chiuso, allora per il thm di prima $F(X) \neq \emptyset$, ma per la prop [12,pg.68], si ha $F(X) = \emptyset$, assurdo.

□

8.7.1 Poligonale

In $(\mathbb{R}^p, d)$, siano $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)} \in \mathbb{R}^p$, due a due distinti, diamo le seguenti definizioni:

$a^{(i)}$ e' chiamato *vertice* della poligonale

$a^{(1)}, a^{(n)}$ sono i *pt. terminali* poligonale

$$s_i = \underbrace{a^{(i)} a^{(i+1)}}_{\text{segmento}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

s_i e' chiamato *lato* della poligonale

$$\sum(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}) := \bigcup_{i=1}^{n-1} s_i \text{ e' la poligonale}$$

la poligonale e' semplice $\Leftrightarrow$ ogni suo punto, a eccezione dei vertici, appartiene a un solo lato

Definition 8.1. $X \subseteq \mathbb{R}^p$ si dice internamente connesso $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \exists x', x'' \in X : x' \neq x'' \\ \forall x', x'' \in X : x' \neq x'' \exists \text{una poligonale semplice } \sum \text{ di estremi } x', x'' \text{ t.c. } \sum \setminus \{x', x''\} \subseteq X^\circ \end{cases}$$

Proposition 8.8.

$$X \text{ e' internamente connesso e chiuso } \Rightarrow X \text{ e' un dominio connesso}$$

Definition 8.2. Dato un $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, X aperto,

$$X \text{ e' semplicemente connesso} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} X \text{ e' internamente connesso} \\ \forall \text{ poligonale semplice chiusa } \Sigma \subseteq X \text{ si ha } \pi \subseteq X \\ \text{dove } \pi \text{ e' il poligono t.c. } F(\pi) = \Sigma \end{cases}$$

Data Σ , l'esistenza e unicit  di π e' garantita dal teorema di Jordan¹⁰.

In poche parole, un insieme e' semplicemente connesso quando e' privo di "buchi".

8.7.2 Insieme convesso

Definition 8.3. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^p$ e sia $x = (x_1, \dots, x_p) \in X$,

$$X \text{ e' convesso rispetto ad } x \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall y \in X \setminus \{x\} \quad xy \subseteq X$$

dove xy e' il segmento di estremi x, y .

Proposition 8.9. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$, aperto non vuoto, allora

$$X \text{ semplicemente connesso} \Rightarrow X \text{ internamente connesso} \\ \Leftrightarrow$$

Proof: L'implicazione e' immediata per definizione. Dimostriamo che non vale il viceversa: consideriamo $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. X e' chiaramente internamente connesso, non e' pero' semplicemente connesso: basta considerare una poligonale Σ che racchiude l'origine, ovvero, se π e' il poligono t.c. $F(\pi) = \Sigma$, allora $(0,0) \in \pi$. Quindi

$$(0,0) \in \pi \Rightarrow \pi \not\subseteq X$$

□

Proposition 8.10. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$, aperto non vuoto, allora

$$\exists x \in X : X \text{ convesso rispetto a } x \Rightarrow X \text{ semplicemente connesso} \\ \Leftrightarrow$$

Proof:

(1)1. Dim. $\Rightarrow$

Poiche' X e' un aperto non vuoto, esistono almeno due suoi pt. y, y' distinti: se per assurdo $X = \{y\}$, allora X sarebbe un chiuso, ma gli unici insiemi sia aperti che chiusi di $\mathbb{R}^p$ sono $\emptyset, \mathbb{R}^p$, assurdo.

Presi $y, y' \in X : y \neq y'$, consideriamo la poligonale $\Sigma = yx \cup xy'$.

$$X \text{ convesso rispetto a } x \Rightarrow xy, xy' \subseteq X \Rightarrow \Sigma \subseteq X \underbrace{=}_{X \text{ aperto}} X^\circ$$

Quindi X e' internamente connesso.

Consideriamo adesso una $\Sigma \subseteq X$ poligonale semplice chiusa e sia π il poligono t.c. $F(\pi) = \Sigma$, allora

$$X \text{ convesso rispetto a } x \Rightarrow \forall y \in X \setminus \{x\} \quad xy \subseteq X \Rightarrow \forall y \in \pi \setminus \{x\} \subseteq X \setminus \{x\} \quad xy \subseteq X \Rightarrow \forall y \in \pi \setminus \{x\} \quad y \in X$$

¹⁰teorema che vedremo in Analisi III

e poiche' $x \in X$, possiamo dire

$$\pi \subseteq X$$

Quindi X e' semplicemente connesso.

(1)1. Dim $\Leftarrow$

Consideriamo

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\}$$

X e' semp. connesso, ma non e' convesso rispetto ad alcun suo punto x :
basta considerare il segmento xy che taglia il cerchio piu' piccolo.

□

8.8 Successioni

Sia (S, d) uno spazio metrico,

$$x : \mathbb{N} \longrightarrow S$$

e' una successione di elementi di S . Diamo la seguente def:

$$x_n := x(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\{x_n\} := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\{x_n\} \text{ converge a } x^* \in S \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^* \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists v = v(\varepsilon) : \forall n > v \, d(x_n, x^*) < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{S} x^*$$

$$\{x_n\} \text{ e' limitata} \Leftrightarrow \exists I(x, r) : \{x_n\} \subseteq I(x, r)$$

Proposition 8.11.

$$x_n \xrightarrow{S} x^* \Leftrightarrow d(x_n, x^*) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$$

Definition 8.4.

La successione $\{x_n\}$ e' di Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists v : \forall n, m > v \, d(x_n, x_m) < \varepsilon$

Theorem 8.12. *Il limite di una successione convergente e' unico, ovvero*

$$x_n \xrightarrow{S} x^*, \, x_n \xrightarrow{S} \bar{x} \Rightarrow x^* = \bar{x}$$

Proof:

Supponiamo che

$$x_n \xrightarrow{S} x^*$$

$$x_n \xrightarrow{S} \bar{x}$$

allora

$$\text{per } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists v = v(\varepsilon) : \forall n > v \, d(x_n, x^*) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{per } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists v' = v'(\varepsilon) : \forall n > v' \, d(x_n, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$d(x^*, \bar{x}) \leq d(x_n, x^*) + d(x_n, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \, d(x^*, \bar{x}) < \varepsilon$$

Se per assurdo: $d(x^*, \bar{x}) > 0$ allora $d(x^*, \bar{x}) < d(x^*, \bar{x})$, assurdo

quindi $d(x^*, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow x^* = \bar{x}$

□

Theorem 8.13. Data $\{x_n\}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \xrightarrow{S} x^* \\ \{x_{k_n}\} \text{ estratta} \end{array} \right\} \Rightarrow x_{k_n} \xrightarrow{S} x^*$$

Proof:

$$x_n \xrightarrow{S} x^* \Leftrightarrow d(x_n, x^*) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{per il thm sulle succ estratte di analI}} \quad d(x_{k_n}, x^*) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \Rightarrow x_{k_n} \xrightarrow{S} x^*$$

Proposition 8.14. In (S, d) , con $X \subseteq S$, $x \in S$,

$$x \in \overline{X} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subseteq X : x_n \xrightarrow{S} x$$

Proof:

(1)1. Dim $\Rightarrow$

$$\overline{X} = X \cup D(X)$$

CASE: $x \in X$

La successione costante $\{x\} \subseteq X$ converge a x .

CASE: $x \notin X$, $x \in D(X)$

$$x \in D(X) \Rightarrow \forall r > 0 \quad I(x, r) \cap X \setminus \{x\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x_r \in I(x, r) \cap X, \quad x_r \neq x$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \exists x_n \in I(x, \frac{1}{n}) \cap X \Leftrightarrow x_n \in X \wedge 0 \leq d(x, x_n) < \frac{1}{n}$$

$$\{x_n\} \subseteq X$$

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{\mathbb{R}} 0, \quad 0 \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \Rightarrow d(x, x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{S} x$$

(1)2. Dim $\Leftarrow$

Per Hp $\exists \{x_n\} \subseteq X : x_n \xrightarrow{S} x$. La ts e'

$$x \in \overline{X} = X \cup D(X)$$

Se $x \in X$ allora abbiamo finito. Supponiamo invece che $x \notin X$ e dimostriamo che $x \in D(X)$.

Sia $I(x, r)$ un intorno di x . Poiche' $\{x_n\}$ converge a x , in corrispondenza di r :

$$\exists v = v(r) \in \mathbb{N} : \forall n > v \quad d(x, x_n) < r \Leftrightarrow x_n \in I(x, r)$$

$$x_n \neq x :$$

$$\{x_n\} \subseteq X \Rightarrow x_n \in X, \quad x \notin X \Rightarrow x \neq x_n$$

in conclusione:

$$\forall r > 0 : \exists x_n \in I(x, r) \cap X \setminus \{x\} \quad \Leftrightarrow \quad x \in D(X)$$

□

Proposition 8.15. In (S, d) , con $X \subseteq S$, $x \in S$,

$$x \in D(X) \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subseteq X, \quad x_n \neq x_m \quad \forall n \neq m \quad \text{t.c.} \quad x_n \xrightarrow{S} x$$

Proof:

(1)1. Dim $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
x \in D(X) &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists x_\varepsilon \in I(x, \varepsilon) \cap X, x_\varepsilon \neq x \quad (1) \\
(1) &\Rightarrow \text{per } \varepsilon_1 = 1 \exists x_1 \neq x : x_1 \in I(x, \varepsilon) \cap X \Leftrightarrow (x_1 \in X \wedge d(x, x_1) < \varepsilon_1 = 1) \\
(1) &\Rightarrow \text{per } \varepsilon_2 = d(x, x_1) \quad \exists x_2 \neq x : d(x, x_2) < \varepsilon_2 \\
&\quad d(x, x_2) < \varepsilon_2 = d(x, x_1) \Rightarrow x_1 \neq x_2 \\
(1) &\Rightarrow \text{per } \varepsilon_3 = d(x, x_2) \quad \exists x_3 \neq x : d(x, x_3) < \varepsilon_3 \\
&\quad d(x, x_3) < \varepsilon_3 = d(x, x_2) < d(x, x_1) \Rightarrow x_1 \neq x_3, x_3 \neq x_2 \\
&\dots
\end{aligned}$$

abbiamo così costruito la successione desiderata: $\{x_n\}$

(1)2. Dim $\Leftarrow$

Sia $I(x, r)$ un intorno di x . Per Hp:

$$\exists v = v(r) \in \mathbb{N} : \forall n > v \quad d(x_n, x) < r$$

Sia $n = v + 1$. Se $x_n \neq x$, allora $x_n \in I(x, r) \cap X \setminus \{x\}$, altrimenti sia $m = v + 2$.

Per Hp $x_m \neq x_n = x$, quindi $x_m \in I(x, r) \cap X \setminus \{x\}$.

Abbiamo così dimostrato che

$$\forall r > 0 \quad I(x, r) \cap X \setminus \{x\} \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in D(X)$$

□

Theorem 8.16.

$$\{x_n\} \text{ convergente} \Rightarrow \{x_n\} \text{ e' di Cauchy}$$

Proof:

La nostra ts e':

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v : \forall n, m > v \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Per Hp $x_n \xrightarrow{S} x^*$,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v' : \forall n > v' \quad d(x_n, x^*) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Poniamo $v = v'$, e siano $n, m > v$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x^*) + d(x^*, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(1)1. Dim $\Leftarrow$

Sia $S =]0, 1]$ il nostro spazio con metrica $d(x, y) = |x, y|$, cioè quella euclidea.

Consideriamo

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\} \subseteq S$$

questa successione (in S) e' di Cauchy ma non e' convergente.

(2)1. E' di Cauchy

In $(\mathbb{R}, d_e)$, una successione e' convergente sse e' di Cauchy. La successione $\{1/n\}$ converge a 0 in $\mathbb{R}$ e quindi soddisfa Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v : \forall n, m > v \quad \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \varepsilon$$

ma la metrica di d_e e' la stessa che abbiamo usato per S , quindi $\{1/n\}$ e' di Cauchy anche in s .

(2)2. Non converge

Supponiamo per assurdo che

$$x_n \xrightarrow{S} x^*$$

allora

$$\begin{aligned}
 x_n \xrightarrow{S} x^* &\Leftrightarrow d(x_n, x^*) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \Leftrightarrow |x_n, x^*| \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\mathbb{R}} x^* \\
 \frac{1}{n} &\xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \\
 \Rightarrow x^* &= 0 \\
 x_n \xrightarrow{S} x^*, &\text{ ma } x^* \notin S, \text{ assurdo}
 \end{aligned}$$

□

Definition 8.5.

Uno spazio metrico si dice *completo* $\Leftrightarrow (\{x_n\}$ convergente $\Leftrightarrow \{x_n\}$ di Cauchy)

ovvero, e' uno spazio in cui ogni succ. conv. e' di Cauchy, e viceversa.

Example 8.6. $(\mathbb{R}, d_e)$ e' completo, mentre $([0, 1], d_e)$, $(\mathbb{Q}, d_e)$ non lo sono.

Theorem 8.17. Sia

$$\{x^{(n)}\}$$

una successione di elementi di $\mathbb{R}^p$, dove

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_p^{(n)}) \in \mathbb{R}^p$$

Ogni $\{x_i^{(n)}\}$ (con i fissato), e' un successione di elementi di $\mathbb{R}$.

Valgono i seguenti teoremi:

1. $\{x^{(n)}\}$ converge $\Leftrightarrow$ Per $i = 1, 2, \dots, p$ $\{x_i^{(n)}\}$ converge
 2. $\{x^{(n)}\}$ e' di Cauchy $\Leftrightarrow$ Per $i = 1, 2, \dots, p$ $\{x_i^{(n)}\}$ e' di Cauchy
- e i seguenti corollari, che si rifanno ai risultati di analisi I:
3. $\{x^{(n)}\}$ limitata $\Rightarrow \exists \{x^{(k_n)}\}$ convergente in $\mathbb{R}^p$
 4. $(\mathbb{R}^p, d)$ e' completo

Proof:

<1>1. Dimostriamo il thm 1.

<2>1. Dim $\Rightarrow$

Per Hp $\{x^{(n)}\}$ converge a un $x^{(*)} \in \mathbb{R}^p$, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists v = v(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall n > v \quad \sqrt{\sum_{i=1}^p (x_i^{(n)} - x_i^{(*)})^2} < \varepsilon$$

Osserviamo che

$$(x_i^{(n)} - x_i^{(*)})^2 \leq \sum_{i=1}^p (x_i^{(n)} - x_i^{(*)})^2$$

$$\sqrt{(x_i^{(n)} - x_i^{(*)})^2} = |x_i^{(n)} - x_i^{(*)}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^p (x_i^{(n)} - x_i^{(*)})^2} < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

Questo significa che $\{x_i^{(n)}\}$ converge a $x_i^{(*)}$

(1)2. Dim $\Leftarrow$

Per Hp abbiamo che:

$$\forall \frac{\varepsilon}{p} > 0$$

$$\exists v_1 \in \mathbb{N} : \forall n > v_1 \quad |x_1^{(n)} - x_1^{(*)}| < \frac{\varepsilon}{p}$$

$$\exists v_2 \in \mathbb{N} : \forall n > v_2 \quad |x_2^{(n)} - x_2^{(*)}| < \frac{\varepsilon}{p}$$

...

$$\exists v_p \in \mathbb{N} : \forall n > v_p \quad |x_p^{(n)} - x_p^{(*)}| < \frac{\varepsilon}{p}$$

Allora, se consideriamo $v = \min \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, avremo che $\forall n > v$

$$|x_1^{(n)} - x_1^{(*)}| + |x_2^{(n)} - x_2^{(*)}| + \dots + |x_p^{(n)} - x_p^{(*)}| < \frac{\varepsilon}{p} + \frac{\varepsilon}{p} + \dots + \frac{\varepsilon}{p} = \varepsilon$$

Inoltre,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^p (x_i^{(n)} - x_i^{(*)})^2} \leq \sum_{i=1}^p |x_i^{(n)} - x_i^{(*)}|$$

infatti, elevando al quadrato si ottiene

$$\sum_{i=1}^p (x_i^{(n)} - x_i^{(*)})^2 \leq \sum_{i=1}^p (x_i^{(n)} - x_i^{(*)})^2 + \text{tutti i vari doppi prodotti}$$

In conclusione,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^p (x_i^{(n)} - x_i^{(*)})^2} \leq \sum_{i=1}^p |x_i^{(n)} - x_i^{(*)}| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

che e' la tesi. $\square$

(1)3. La dimostrazione del thm 2. e' analoga a quella del thm 1., basta considerare $\forall n, m > v$, invece che $\forall n > v$, e $x^{(m)}$, invece che $x^{(*)}$

(1)4. Dimostriamo il thm 3.

Per Hp

$$\{x^{(n)}\} \text{ limitata}$$

$$\exists I(x^{(*)}, r) : \{x^{(n)}\} \subseteq I(x^{(*)}, r)$$

$$x^{(n)} \in I(x^{(*)}, r) \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^p (x_i^{(n)} - x_i^{(*)})^2} < r \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

dove $x^{(*)} = (x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, \dots, x_p^{(*)}) \in \mathbb{R}^p$.

(2)1. $\{x_1^{(n)}\}$ e' limitata da $]x_1^{(*)} - r, x_1^{(*)} + r[$

Infatti, dalla (1)

$$|x_1^{(n)} - x_1^{(*)}| < \sqrt{\sum_{i=1}^p (x_i^{(n)} - x_i^{(*)})^2} < r \Rightarrow x_1^{(n)} \in]x_1^{(*)} - r, x_1^{(*)} + r[\quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Poiche' $\{x_1^{(n)}\}$ e' una successione di $\mathbb{R}$, essendo limitata esiste una sua estratta

$\{x_1^{(k(n))}\}$ convergente a un certo $x_1^{(o)}$.

In modo analogo a prima, si vede che

$\{x_2^{(k(n))}\}$ e' limitata, e quindi $\exists x_2^{(k_2 k(n))}$ che converge a un $x_2^{(o)}$

$\{x_3^{((k_2 k)(n))}\}$ e' limitata, e quindi $\exists x_3^{(k_3 k_2 k(n))}$ che converge a un $x_3^{(o)}$

...

$\{x_p^{((k_p k_{p-1} \dots k)(n))}\}$ e' limitata, e quindi $\exists x_p^{((k_{p+1} k_p \dots k)(n))}$ che converge a un $x_p^{(o)}$

Quindi,

$\{(x_1^{(k(n))}, x_2^{(k_2 k(n))}, \dots, x_p^{((k_{p+1} k_p \dots k)(n))})\}$ e' un'estratta di $\{x^{(n)}\}$ che converge a $\{(x_1^{(o)}, x_2^{(o)}, \dots, x_n^{(o)})\}$

□

Example 8.7. $(\mathbb{R}^p, d_e)$ e' completo.

Infatti, se consideriamo una successione di Cauchy, tutte le successioni componenti saranno di Cauchy. Poiche' queste sono successioni in $(\mathbb{R}, d_e)$, che e' uno spazio completo, saranno anche convergenti. Allora, poiche' tutte le successioni componenti sono convergenti, anche la successione composta di $\mathbb{R}^p$ lo sara'.

Theorem 8.18. *Lo spazio¹¹ $(C^0([a, b]), d)$ e' completo.*

Proof:

Sia $\{f_n\}$ una successione di cauchy. Vogliamo dimostrare che e' convergente.

$$\{f_n\} \text{ cauchy} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists v : \forall n, m > v \left(d(f_n, f_m) < \varepsilon \Leftrightarrow \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \right)$$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \forall n, m > v \forall x \in [a, b] \quad (1)$$

La (1) e' la condizione di unif. conv. di Cauchy per le succ. di funz. (vedi [4.1,pg.38]), quindi

(1) $\Rightarrow \{f_n\}$ e' unif. conv., in $\mathbb{R}$, a una $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

Ci resta ancora da provare che $\{f_n\}$ e' conv. nello spazio $C^0([a, b])$.

$\langle 2 \rangle 1. f \in C^0([a, b])$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \in C^0([a, b]) \Rightarrow f_n \text{ e' continua in } [a, b]$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{thm [4.4,pg.40]}} f \text{ e' continua in } [a, b] \Rightarrow f \in C^0([a, b])$$

$\langle 2 \rangle 2. \text{ Q.E.D.}$

Dimostramo che $f_n \xrightarrow{S} f$.

$$f_n \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists v' = v'(\varepsilon) : \forall n > v' (\forall x \in [a, b] \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow d(f_n, f) < \varepsilon)$$

In conclusione:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v' = v'(\varepsilon) : \forall n > v' d(f_n, f) < \varepsilon$$

$$\text{cioe', } f_n \xrightarrow{S} f$$

□

¹¹vedi [8.2,pg.64]

8.8.1 Compattezza sequenziale

Definition 8.8. Sia X un sottoinsieme di (S, d) .

X e' sequenzialmente compatto $\Leftrightarrow X = \emptyset$ oppure $\forall \{x_n\} \subseteq X \quad \exists \{x_{k_n}\} : x_{k_n} \xrightarrow{S} x^* \in X$

X e' relativamente sequenzialmente compatto $\Leftrightarrow \overline{X}$ e' seq. compatto

Proposition 8.19.

LET: 1. (S, d)

2. $Y \subseteq X \subseteq S$

Y chiuso, X seq. comp. $\Rightarrow Y$ seq. comp.

Proof:

Sia $\{y_n\}$ una succ. di elementi di Y .

$\{y_n\} \subseteq Y \subseteq X$, X seq. comp. $\Rightarrow \exists \{y_{k_n}\} : y_{k_n} \xrightarrow{S} y^* \in X$

$$y_{k_n} \xrightarrow{S} y^* \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{vedi [8.14,pg.77]}} \quad y^* \in \overline{Y} \quad \underbrace{=}_{Y \text{ e' chiuso}} \quad Y$$

Abbiamo quindi dimostrato che da successione di elementi di Y , esiste una estratta convergente a Y .

□

Theorem 8.20. In (S, d) , preso $X \subseteq S$,

$$X \text{ seq. comp.} \Rightarrow X \text{ chiuso e limitato}$$

Non vale il viceversa. In $(\mathbb{R}^p, d)$ vale.

Proof:

<2>1. X e' chiuso

Sappiamo che $X \subseteq \overline{X}$. Dimostriamo che $\overline{X} \subseteq X$, per ottenere $\overline{X} = X$.

Sia $x \in \overline{X}$, allora per la prop [8.14,pg.77],

$$\exists \{x_n\} \subseteq X : x_n \xrightarrow{S} x$$

Poiche' X e' seq. comp.

$$\exists \{x_{k_n}\} : x_{k_n} \xrightarrow{S} x^* \in X$$

Per il thm [8.13,pg.77] e per l'unicita' del limite $x = x^* \in X$

<2>2. X e' limitato

Supponiamo per assurdo che non lo sia, cioe'

$$\forall I(x^*, \varepsilon) \quad \exists \bar{x} \in X : \bar{x} \notin I(x^*, \varepsilon)$$

allora, fissando $x^* \in X$,

$$I(x^*, 1) \quad \exists \bar{x}_1 \in X : \bar{x}_1 \notin I(x^*, 1) \Leftrightarrow d(x^*, \bar{x}_1) \geq 1$$

$$I(x^*, 2) \quad \exists \bar{x}_2 \in X : \bar{x}_2 \notin I(x^*, 2) \Leftrightarrow d(x^*, \bar{x}_2) \geq 2$$

...

$$I(x^*, n) \quad \exists \bar{x}_n \in X : \bar{x}_n \notin I(x^*, n) \Leftrightarrow d(x^*, \bar{x}_n) \geq n \quad (1)$$

Abbiamo cosi' costruito la successione $\{\bar{x}_n\} \subseteq X$. Poiche' X e' seq. comp.

$$\exists \{\bar{x}_{k_n}\} : \bar{x}_{k_n} \xrightarrow{S} z \in X \Leftrightarrow d(\bar{x}_{k_n}, z) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \quad (2)$$

Per la prop. triangolare

$$d(\bar{x}_{k_n}, x^*) \leq d(\bar{x}_{k_n}, z) + d(z, x^*) \quad (3)$$

Concludiamo:

$$(1) \Rightarrow d(x^*, \bar{x}_{k_n}) \geq n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x^*, \bar{x}_{k_n}) = +\infty$$

$$(2) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} d(\bar{x}_{k_n}, z) = 0$$

allora, prendendo il limite nella (3): $\infty \leq d(z, x^*)$ assurdo

⟨2⟩3. Dimostriamo $\nLeftarrow$

Scegliamo come spazio $S =]0, 1]$, con la metrica euclidea, e consideriamo come sottoinsieme $X = \{\frac{1}{n}\}$.

⟨3⟩1. X e' chiuso, poiche' $D(X) = \emptyset$

Sia $x \in S$ e sia

$$m \in \mathbb{N} : \frac{1}{m+1} < x < \frac{1}{m}, d\left(x, \frac{1}{m}\right) < d\left(x, \frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}$$

Sia $r > 0 : r < \frac{1}{m}$

$$I(x, r) = \{z \in S \mid d(z, x) < r \Leftrightarrow |z - x| < r \Leftrightarrow x + r > z > x - r\} =]x - r, x + r[$$

$$]x - r, x + r[\cap X = \{x\}, \text{ [poiche' } r < \frac{1}{m}]$$

$$\Rightarrow x \notin D(X)$$

⟨3⟩2. X e' limitato

Infatti,

$$I(0, 1) =]0, 2] \supseteq X$$

⟨3⟩3. X non e' seq. comp.

Supp. per assurdo che lo sia, allora da $\{\frac{1}{n}\}$ possiamo estrarre $\{\frac{1}{k_n}\}$ che converge a un $x^* \in X$.

Pero',

$$\frac{1}{k_n} \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$$

e per l'unicita' del limite $x^* = 0 \in X$, ma questo e' assurdo, perche $0 \notin X$.

□

Corollary 8.21.

$$X \text{ seq. comp.} \Rightarrow X \text{ rel. seq. comp.}$$

Proof:

$$X \text{ seq. comp.} \Rightarrow X \text{ chiuso e lim.}$$

$$X \text{ chiuso} \Leftrightarrow X = \overline{X}$$

$$\overline{X} \text{ seq. comp.}$$

□

Corollary 8.22. $X \text{ rel. seq. comp.} \Rightarrow X \text{ limitato}$

Proof:

$$X \text{ rel. seq. comp.} \Leftrightarrow \overline{X} \text{ seq. comp.} \Rightarrow \overline{X} \text{ chiuso e limitato}$$

$$\overline{X} \text{ limitato} \Leftrightarrow \exists I(x, r) \supseteq \overline{X} \supseteq X \Rightarrow X \text{ limitato}$$

□

Theorem 8.23. In $(\mathbb{R}^p, d)$, prendendo un sottoinsieme X

$$X \text{ chiuso e limitato} \Leftrightarrow X \text{ seq. compatto}$$

Proof:

Per il thm [8.20,pg.82], basta dimostrare $\Rightarrow$.

Sia $\{x_n\} \subseteq X$

$$X \text{ limitato} \Rightarrow \{x_n\} \text{ e' lim.} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{vedi [8.17,pg.79]}} \quad \exists \{x_{k_n}\} : x_{k_n} \xrightarrow{\mathbb{R}^p} x^* \in \mathbb{R}^p$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{vedi [8.14,pg.77]}} \quad x^* \in \overline{X} \quad \underbrace{=}_{X \text{ e' chiuso}} \quad X$$

Il che' dimostra che da una successione di elementi di X possiamo estrarne una convergente in X

□

Corollary 8.24. In $(\mathbb{R}^p, d)$

$$X \text{ rel. seq. comp} \Leftrightarrow \text{limitato}$$

Proof:

(1) 1. Dim $\Rightarrow$

vedi [8.22,pg.83]

(1) 2. Dim $\Leftarrow$

$$X \text{ lim.} \Rightarrow \exists I(x, r) : X \subseteq I(x, r) \subseteq C(x, r) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{prop.chiusura}} \quad \overline{X} \subseteq \overline{C(x, r)} \quad \underbrace{=}_{\text{e' chiuso}} \quad C(x, r) \subseteq I(x, r + \varepsilon)$$

$\Rightarrow \overline{X}$ e' limitato

$$\begin{cases} \overline{X} \subseteq \mathbb{R}^p \\ \overline{X} \text{ e' limitato} \\ \overline{X} \text{ e' chiuso} \end{cases} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{vedi [8.23,pg.84]}} \quad \overline{X} \text{ e' seq. comp.} \Leftrightarrow X \text{ e' rel. seq. comp.}$$

□

Theorem 8.25. di Bolzano.

In (S, d) , $X \subseteq S$,

$$X \text{ infinito, rel. seq. compatto} \Rightarrow D(X) \neq \emptyset$$

Proof:

X infinito $\Rightarrow \exists x_1 \in X$

X infinito $\Rightarrow \exists x_2 \neq x_1 \in X \Leftrightarrow x_2 \in X \setminus \{x_1\}$

X infinito $\Rightarrow \exists x_3 \in X : x_3 \in X \setminus \{x_1, x_2\}$

...

X infinito $\Rightarrow \exists x_n \in X : x_n \in X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$

$$\begin{cases} \{x_n\} \subseteq X \subseteq \overline{X} \\ X \text{ rel. seq. comp.} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \exists \{x_{k_n}\} \subseteq X : x_{k_n} \xrightarrow{S} x^* \in \overline{X}, \text{ con } x_{k_n} \neq x_{k_m} \forall n \neq m$$

Abbiamo quindi trovato la succ. $\{x_{k_n}\}$ di elementi di X , due a due distinti, percio' per la prop [8.15,pg.77], si ha $x^* \in D(X)$.

□

Corollary 8.26. In $(\mathbb{R}^p, d)$,

$$X \text{ infinito, limitato} \Rightarrow D(X) \neq \emptyset$$

Proof: Segue immediatamente dal thm di prima a dal cor [8.24,pg.84].

8.9 Limiti di funzioni reali

Definition 8.9. Sia (S, d) uno spazio metrico, e $(\mathbb{R}, d_e)$ quello euclideo¹² su $\mathbb{R}$. Data la funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, con $X \subseteq S$, e $x_0 \in D(X)$ Diamo le seguenti definizioni:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0, \delta) \cap X \setminus \{x_0\} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty &\Leftrightarrow \forall k > 0 \quad \exists \delta > 0 : f(x) > k \quad \forall x \in I(x_0, \delta) \cap X \setminus \{x_0\} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty &\Leftrightarrow \forall k > 0 \quad \exists \delta > 0 : f(x) < -k \quad \forall x \in I(x_0, \delta) \cap X \setminus \{x_0\} \end{aligned}$$

Si dice che f e' regolare se esiste uno dei limiti sopra indicati.

Theorem 8.27. Valgono i seguenti teoremi:

1. f regolare $\Rightarrow$ il suo limite e' unico
2. f convergente $\Rightarrow \exists h, k \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : k \leq f(x) \leq h \quad \forall x \in I(x_0, \delta) \cap X \setminus \{x_0\}$
.. ovvero la f ristretta all'intorno $I(x_0, \delta)$ e' limitata
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l < h \Rightarrow \exists \delta > 0 : f(x) < h \quad \forall x \in I(x_0, \delta) \cap X \setminus \{x_0\}$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > h \Rightarrow \exists \delta > 0 : f(x) < h \quad \forall x \in I(x_0, \delta) \cap X \setminus \{x_0\}$
5.
$$\begin{cases} f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in X \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$
6.
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = ab \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha a + \beta b \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \\ g(x) \neq 0 \quad \forall x \in X \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$$
8. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, Y \subseteq X, x_0 \in D(Y) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0, x \in Y} \overbrace{f(x)}^{f \text{ ristretta a } Y} = l, \text{ vedi [10,pg.112]}$
9.
$$\begin{cases} Y, Z \subseteq X, Z \cup Y = X \\ x_0 \in D(X) \cap D(Y) \cap D(Z) \\ \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/Y = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/Z = l \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

¹²con I_e indichiamo gli intorni in $(\mathbb{R}, d_e)$

Theorem 8.28.

$$f \text{ e' continua in } x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Per la definizione di continuita' vedi [8.10,pg.86].

Proof:

(1)1. Dim $\Rightarrow$

La tesi e':

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0, \delta) \cap X \setminus \{x_0\}$$

poiche' $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ possiamo direttamente considerare $I(x_0, \delta) \cap X$

Che e' proprio l'ipotesi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta' > 0 : \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0, \delta) \cap X$$

con $\delta = \delta'$

(1)2. Dim $\Leftarrow$

basta scambiare tesi e hp nella dimostrazione di prima.

□

Definition 8.10. Se X non e' limitato, possiamo dare quest'ulteriore definizione:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \Leftrightarrow \text{fissato } a \in S \text{ si ha } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in X : d(x, a) > \delta$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \text{fissato } a \in S \text{ si ha } \forall k > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad f(x) > k \quad \forall x \in X : d(x, a) > \delta$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \text{fissato } a \in S \text{ si ha } \forall k > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad f(x) < -k \quad \forall x \in X : d(x, a) > \delta$$

Theorem 8.29. Valgono i seguenti teoremi:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = |l|$

8.10 Continuita'

Siano (S, d) , (S', d') due spazi metrici, sia $f : X \rightarrow S'$, dove $X \subseteq S$. Con $I(x, r)$ indichiamo un intorno in S , con $I'(x, r)$ uno in S' , analogamente per d e d' indichiamo la metrica nel primo spazio e quella nel secondo.

Definition 8.11.

$$f \text{ e' continua in } x^* \in S \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad d'(f(x), f(x^*)) < \varepsilon \quad \forall x \in I(x^*, \delta) \cap X$$

f e' continua in $X \Leftrightarrow$ e' continua in ogni $x^* \in X$, ovvero:

$$\forall x^* \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad d'(f(x), f(x^*)) < \varepsilon \quad \forall x \in I(x^*, \delta) \cap X$$

$$f \text{ e' unif. continua in } X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \forall x, y \in X : d(x, y) < \delta$$

$$f \text{ e' lipschitziana} \Leftrightarrow \exists L > 0 : \quad d'(f(x), f(y)) \leq L d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Example 8.12. Un polinomio $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, a n variabili, e' una funzione continua.

Proposition 8.30.

$$f. \text{ lipschitziana} \implies f. \text{ unif. cont.} \implies f. \text{ cont.}$$

$$f. \text{ lipschitziana} \not\Leftarrow f. \text{ unif. cont.} \not\Leftarrow f. \text{ cont.}$$

Proof:

(1) 1. $f. \text{ lipschitziana} \Rightarrow f. \text{ unif. cont.}$

La tesi si ha immediatamente con

$$\delta = \frac{\varepsilon}{L}$$

□

Theorem 8.31. Negli spazi metrici (S, d) , (S', d')

$$\left\{ \begin{array}{l} f : X \longrightarrow S', \text{ continua in } x^* \in X \\ \{x_n\} \subseteq X : x_n \xrightarrow{S} x^* \end{array} \right. \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{S'} f(x^*)$$

Non vale il viceversa.

Proof:

La tesi da dimostrare e':

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists v = v(\varepsilon) \in \mathbb{N} : d'(f(x_n), f(x^*)) < \varepsilon \quad \forall n > v$$

Per Hp

$$f \text{ continua in } x^* \in X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : d'(f(x), f(x^*)) < \varepsilon \quad \forall x \in I(x^*, \delta) \cap X \quad (1)$$

$$x_n \xrightarrow{S} x^* \Leftrightarrow \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists v' = v'(\varepsilon') \in \mathbb{N} : \forall n > v' \quad (d(x_n, x^*) < \varepsilon' \Leftrightarrow x_n \in I(x^*, \varepsilon'))$$

fissiamo $\varepsilon' = \delta$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \in I(x^*, \varepsilon') \quad \forall n > v' \\ \{x_n\} \subseteq X \Rightarrow x_n \in X \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right. \xRightarrow[\text{per la (1)}]{} d'(f(x_n), f(x^*)) < \varepsilon \quad \forall n > v'$$

Abbiamo dimostrato la ts con $v = v'$

□

Theorem 8.32. di Cantor-Heine sulla uniforme continuita' delle funzioni.

LET: 1. (S, d) , (S', d')

2. $X \subseteq S$, $X \neq \emptyset$, X sequenzialmente compatto

3. $f : X \longrightarrow S'$, continua in X

allora

f e' uniformemente continua in X

Proof:

La tesi e':

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \forall x, y \in X : d(x, y) < \delta$$

supponiamo per assurdo che sia falsa, ovvero supponiamo che

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \quad \left(\exists x, y \in X : d(x, y) < \delta \quad \text{per cui} \quad d'(f(x), f(y)) \geq \varepsilon \right) \quad (1)$$

Poiche' la scelta di δ e' arbitraria (purché > 0), possiamo affermare

$$\forall \delta = \frac{1}{n} > 0 \quad \left(\exists x_\delta, y_\delta \in X : d(x_\delta, y_\delta) < \delta = \frac{1}{n} \quad \text{per cui} \quad d'(f(x_\delta), f(y_\delta)) \geq \varepsilon \right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left(\exists x_n, y_n \in X : d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \text{per cui} \quad d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon \right) \quad (2)$$

Quindi si creano le seguenti due successioni a elementi di X

$$\{x_n\}, \{y_n\}$$

Poiche' X e' seq. comp.

$$\exists \{x_{k_n}\} : x_{k_n} \xrightarrow{S} x^* \in X \Leftrightarrow d(x_{k_n}, x^*) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \quad (3)$$

<2>1. Dimostriamo che pure $\{y_{k_n}\}$ converge a x^*

Per la dis. triangolare

$$0 \leq d(y_{k_n}, x^*) \leq d(y_{k_n}, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x^*)$$

per la (2):

$$\begin{cases} d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow d(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \Rightarrow d(y_{k_n}, x_{k_n}) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$$

Per la (3):

$$d(x_{k_n}, x^*) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$$

Quindi

$$0 \leq d(y_{k_n}, x^*) \leq \overbrace{d(y_{k_n}, x_{k_n})}^{\rightarrow 0} + \overbrace{d(x_{k_n}, x^*)}^{\rightarrow 0} \Rightarrow d(y_{k_n}, x^*) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \Leftrightarrow y_{k_n} \xrightarrow{S} x^*$$

Poiche' f e' continua in X , lo sara' in particolar modo in x^* , per cui

$$\begin{cases} f \text{ continua in } x^* \\ \{x_{k_n}\} \subseteq X \\ x_{k_n} \xrightarrow{S} x^* \in X \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \\ \text{thm [8.31,pg.87]} \end{matrix} \quad f(x_{k_n}) \xrightarrow{S'} f(x^*) \Leftrightarrow d'(f(x_{k_n}), f(x^*)) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$$

$$\begin{cases} f \text{ continua in } x^* \\ \{y_{k_n}\} \subseteq X \\ y_{k_n} \xrightarrow{S} x^* \in X \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \\ \text{thm [8.31,pg.87]} \end{matrix} \quad f(y_{k_n}) \xrightarrow{S'} f(x^*) \Leftrightarrow d'(f(y_{k_n}), f(x^*)) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$$

<2>2. Q.E.D.

Per la (2) e per la dis. triang.

$$\varepsilon \leq d'(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \leq d'(f(x_{k_n}), f(x^*)) + d'(f(x^*), f(y_{k_n}))$$

$$\varepsilon \leq d'(f(x_{k_n}), f(x^*)) + d'(f(x^*), f(y_{k_n})) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Prendendo i limiti:

$$\begin{aligned} \underbrace{\varepsilon}_{\rightarrow \varepsilon} &\leq \overbrace{d'(f(x_{k_n}), f(x^*)) + d'(f(x^*), f(y_{k_n}))}^{\rightarrow 0} \\ &\Rightarrow \varepsilon \leq 0 \end{aligned}$$

assurdo.

□

Corollary 8.33.

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ continua} \Rightarrow f \text{ unif. continua}$$

Proof: Immediata conseguenza del thm precedente, del thm [8.23,pg.84] e del fatto che $[a, b]$ e' chiuso e lim.

Theorem 8.34. di Weierstrass.

LET: 1. $(S, d), (S', d')$

2. $X \subseteq S, X \neq \emptyset, X$ sequenzialmente compatto in S

3. $f : X \longrightarrow S',$ continua in X

allora

$f(X)$ e' sequenzialmente compatto in S'

Proof:

Sia $\{y_n\} \subseteq f(X)$.

Per def. di immagine

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in X : f(x_n) = y_n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x_n\} \subseteq X \\ X \text{ seq. comp.} \end{array} \right. \Rightarrow \exists \{x_{k_n}\} : x_{k_n} \xrightarrow{S} x^* \in X \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ cont. in } X \Rightarrow f \text{ cont in } x^* \\ (1) \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{f(x_{k_n}) \xrightarrow{S'} f(x^*)}_{\text{vedi [8.31,pg.87]}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_{k_n}) = y_{k_n} \in f(X) \\ x^* \in X \Rightarrow f(x^*) \in f(X) \end{array} \right. \Rightarrow f(X) \text{ e' seq. comp.}$$

□

Corollary 8.35.

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a, b] \Rightarrow \exists$ il max e il min assoluto di $\text{Im } f$

Piu' in generale, se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e' chiuso e limitato

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, continua in $X \Rightarrow \exists$ il max e il min assoluto di $\text{Im } f$

Proof:

f e' continua, e inoltre per il thm [8.23,pg.84], $[a, b]$ e' seq. compatto, allora per il thm [8.34,pg.88], anche $\text{Im } f$ lo e'.

Sempre per il thm [8.23,pg.84], $\text{Im } f$ e' chiuso e limitato.

$$\text{Im } f \text{ lim.} \Rightarrow \exists I(x^*, r) =]x^* - r, x^* + r[: \text{Im } f \subseteq]x^* - r, x^* + r[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [a, b] \quad x^* - r < f(x) < x^* + r$$

quindi, f e' lim. sia superiormente che inferiormente

f lim. inferiormente $\Rightarrow \exists$ finito $\sup \text{Im } f$

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \text{ finito } \sup \text{Im } f \\ \text{Im } f \subseteq \mathbb{R} \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\sup \text{Im } f \in F(\text{Im } f)}_{[8.4,pg.70]} \quad (1)$$

$$\text{Im } f \text{ e' chiuso} \Rightarrow F(\text{Im } f) \subseteq \text{Im } f \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \sup \text{Im } f \in \text{Im } f \Rightarrow \sup \text{Im } f = \max \text{Im } f$$

analogamente si vede per l'inf.

(1)1. Quando X e' chiuso e' limitato

Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e' chiuso e limitato, allora per il thm [8.23,pg.84], e' sequenzialmente compatto. Quindi per il thm di Weierstrass [8.34,pg.88], anche $\text{Im } f$ lo e'. A questo punto si procede esattamente come nel passo precedente.

□

Theorem 8.36. Continuita' delle funzioni composte.

LET: 1. $(S, d), (S', d'), (S'', d''), X \subseteq S, Y \subseteq S'$

2. $f : X \longrightarrow S'$, continua in $x^* \in X$

3. $g : Y \longrightarrow S''$, continua in $y^* \in Y$

4. $f(X) \subseteq Y$, $f(x^*) = y^*$

allora

$$h(x) = g(f(x)) : X \longrightarrow S'', \text{ e' continua in } x^*$$

Proof:

La tesi e':

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta'' > 0 : \quad d''(h(x), h(x^*)) < \varepsilon \quad \forall x \in I'(x^*, \delta'') \cap X$$

Procediamo:

$$g \text{ continua in } y^* \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad d''(g(y), g(y^*)) < \varepsilon \quad \forall y \in I'(y^*, \delta) \cap Y \quad (1)$$

$$f \text{ e' continua in } x^* \Rightarrow \text{ per } \varepsilon = \delta > 0 \quad \exists \delta' > 0 : \quad d'(f(x), f(x^*)) < \delta \quad \forall x \in I(x^*, \delta') \cap X$$

$$f(x^*) = y^* \Rightarrow d'(f(x), f(x^*)) = d'(f(x), y^*) < \delta \Leftrightarrow f(x) \in I'(y^*, \delta) \quad (2)$$

$$f(x) \in f(X) \subseteq Y, (2) \Rightarrow f(x) \in I'(y^*, \delta) \cap Y \quad (3)$$

$$(1), (3) \Rightarrow d''(g(f(x)), g(y^*)) < \varepsilon \Leftrightarrow d''(h(x), h(x^*)) < \varepsilon$$

che e' la tesi, con $\delta'' = \delta'$

□

Theorem 8.37. In (S, d) , con $X \subseteq S$, siano $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, continue in $x^* \in X$, allora

$$1. \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \alpha f(x) + \beta g(x) \text{ e' continua in } x^* \\ \alpha f(x)g(x) \text{ e' continua in } x^* \end{cases}$$

$$2. \quad \forall x \in X \quad g(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \text{ e' continua in } x^*$$

$$3. \quad f(x^*) > 0 \Rightarrow \exists I(x^*, r) \cap X : \quad \forall x \in I(x^*, r) \quad f(x) > 0$$

Theorem 8.38. dell'esistenza degli zeri.

In (S, d) , con $X \subseteq S$ chiuso e connesso, sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in X , allora

$$\exists x', x'' \in X : f(x') < 0, f(x'') > 0 \Rightarrow \exists \xi \in X : f(\xi) = 0$$

Siano

$$C_1 = \{x \in X \mid f(x) \leq 0\}, \quad C_2 = \{x \in X \mid f(x) \geq 0\}$$

$$f(x') < 0 \Rightarrow x' \in C_1 \Rightarrow C_1 \neq \emptyset$$

$$f(x'') > 0 \Rightarrow x'' \in C_2 \Rightarrow C_2 \neq \emptyset$$

\langle 1 \rangle 1. C_1 e' chiuso

Proviamo che $\overline{C_1} \subseteq C_1$. Sia $x^* \in \overline{C_1}$,

$$\begin{cases} C_1 \subseteq X \Rightarrow \overline{C_1} \subseteq \overline{X} \\ x^* \in \overline{C_1} \end{cases} \underbrace{\quad}_{X \text{ e' chiuso}} = X \Rightarrow x^* \in X \quad (1)$$

$$x^* \in \overline{C_1} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{thm [8.14,pg.77]}} \exists \{x_n\} \subseteq C_1 : x_n \xrightarrow{S} x^* \quad (2)$$

$$\begin{cases} \{x_n\} \subseteq C_1 \subseteq X \\ f \text{ continua in } x^* \\ (1), (2) \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{thm [8.31,pg.87]}} f(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x^*) \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_n \in C_1 \Rightarrow f(x_n) \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{thm della perm. del segno}} f(x^*) \leq 0 \Rightarrow x^* \in C_1 \quad (3)$$

$$(x^* \in \overline{C_1} \Rightarrow x^* \in C_1) \Rightarrow \overline{C_1} \subseteq C_1 \Rightarrow C_1 \text{ e' chiuso}$$

(1)2. C_2 e' chiuso

Analogamente a prima.

(1)3. Q.E.D.

Notando che $C_1 \cup C_2 = X$, se per assurdo $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, si avrebbe, contro ipotesi, che X non e' connesso.

$$C_1 \cap C_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists \xi \in C_1, \xi \in C_2$$

$$\begin{cases} \xi \in C_1 \Rightarrow f(\xi) \leq 0 \\ \xi \in C_2 \Rightarrow f(\xi) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(\xi) = 0$$

□

Corollary 8.39. In (S, d) , con $X \subseteq S$ chiuso e connesso, sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in X , allora

$$\exists x', x'' \in X, \exists \gamma \in \mathbb{R} : f(x') \leq \gamma \leq f(x'') \Rightarrow \exists \xi \in X : f(\xi) = \gamma$$

Proof:

Se $\gamma = f(x')$, allora la ξ cercata e' proprio x' . Analogamente per x'' . Quindi supponiamo che $f(x') < \gamma < f(x'')$.

Sia

$$\varphi(x) = f(x) - \gamma : X \longrightarrow S'$$

φ e' continua in X perche' comb. lineare di funzioni continue in X . Inoltre

$$\varphi(x') = f(x') - \gamma < 0$$

$$\varphi(x'') = f(x'') - \gamma > 0$$

Per il thm [8.38,pg.90],

$$\exists \xi \in X : \varphi(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - \gamma = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \gamma$$

□

Corollary 8.40. teorema dei valori intermedi.

$$\begin{cases} X \subseteq \mathbb{R}^n, \text{ chiuso, limitato e connesso} \\ f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua} \end{cases} \Rightarrow f(X) = [\min f, \max f]$$

o in altri termini, la f assume ogni valore compreso tra il max. e il min.

Proof: Per il cor di Weierstrass (vedi [8.35,pg.89]),

$$\exists x' \in X : f(x') = \min f$$

$$\exists x'' \in X : f(x'') = \max f$$

quindi preso un $\gamma \in [\min f, \max f] = [f(x'), f(x'')]$, per la prop [8.39,pg.91],

$$\exists \xi \in X : f(\xi) = \gamma \Rightarrow \gamma \in f(X)$$

quindi $[\min f, \max f] \subseteq f(X)$. Ma ovviamente, $f(X) \subseteq [\min f, \max f]$ □

Corollary 8.41.

$$\begin{cases} f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ continua in } [a, b] \\ f(a) < 0, f(b) > 0 \end{cases} \Rightarrow \exists \xi \in]a, b[: f(\xi) = 0$$

Proof: Immediata conseguenza del thm precedente, e del fatto che $[a, b]$ e' chiuso e connesso vedi [8.5,pg.71].

9 Derivate parziali

Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, dove $A \subseteq \mathbb{R}^2$, non vuoto e aperto.

Sia $(x_0, y_0) \in A$. Poiche' A e' aperto, $A = A^\circ$, e quindi

$$\exists I_{\mathbb{R}^2}(P, \delta) \subseteq A \Rightarrow \begin{cases}]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\times \{y_0\} \subseteq I_{\mathbb{R}^2}(P, \delta) \\ \{x_0\} \times]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\subseteq I_{\mathbb{R}^2}(P, \delta) \end{cases}$$

Con $f(x, y_0)$ indicheremo la restrizione di f a $]x - \delta, x + \delta[\times \{y_0\}$, mentre con $f(x_0, y)$ la restrizione a $\{x_0\} \times]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$.

Definition 9.1. Diremo che la f e' derivabile parzialmente in (x_0, y_0) rispetto alla variabile x sse esiste finito il seguente limite:

$$f_x(x_0, y_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

analogamente per y :

$$f_y(x_0, y_0) := \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Se la f e' derivabile, rispetto a x , in ogni punto di A , allora nasce la funzione

$$f_x(x, y) : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

possiamo quindi considerare la sua derivata parziale rispetto a x e rispetto a y :

$$f_{xx}(x_0, y_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_x(x, y_0) - f_x(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$f_{xy}(x_0, y_0) := \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f_x(x_0, y) - f_x(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

analogamente, se f e' derivabile rispetto a y in A :

$$f_{yx}(x_0, y_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_y(x, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$f_{yy}(x_0, y_0) := \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f_y(x_0, y) - f_y(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

e così' via... , .

f_{yx}, f_{xy} si chiamano *derivate seconde parziali miste*.

f_{xx}, f_{yy} si chiamano *derivate seconde parziali pure*.

Theorem 9.1. *di Schwartz sull'invertibilità dell'ordine di derivazione. Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, dove $A \subseteq \mathbb{R}^2$, non vuoto e aperto. Sia $(x_0, y_0) \in A$. Poiché A è aperto, $A = A^\circ$.*

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in A \quad \exists f_x(x, y), f_y(x, y), f_{yx}(x, y), f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y), f_{xy}(x, y) \text{ continue in } (x_0, y_0) \end{cases} \Rightarrow f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$$

Proof:

$$(x_0, y_0) \in A = A^\circ \Rightarrow \exists I_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), \delta) \subseteq A$$

$$f_{xy} \text{ continua in } (x_0, y_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ per } \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad \exists 0 < \delta_1 < \delta : \quad \left| f_{xy}(x, y) - f_{xy}(x_0, y_0) \right| < \varepsilon \quad \forall (x, y) \in I_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), \delta_1) \cap A \quad (1)$$

$$\delta_1 < \delta \Rightarrow I_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), \delta_1) \subseteq I_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), \delta) \subseteq A \Rightarrow I_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), \delta_1) \cap A = I_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), \delta_1)$$

$$f_{yx} \text{ continua in } (x_0, y_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ per } \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad \exists 0 < \delta_2 < \delta_1 : \quad \left| f_{yx}(x, y) - f_{yx}(x_0, y_0) \right| < \varepsilon \quad \forall (x, y) \in I_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), \delta_2) \cap A \quad (2)$$

$$\delta_2 < \delta_1 \Rightarrow I_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), \delta_2) \subseteq I_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), \delta_1) \subseteq A \Rightarrow I_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), \delta_2) \cap A = I_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), \delta_2)$$

Poiché $\delta_2 < \delta_1$ le condizioni (1) e (2) sono entrambe verificate per $\forall (x, y) \in I_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), \delta_2)$.

Siano $x^* > x_0, y^* > y_0 : (x^*, y^*) \in I((x_0, y_0), \delta_2)$

$$\varphi(x) = f(x, y^*) - f(x, y_0) : [x_0, x^*] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Questa funzione è ben posta, e' inoltre derivabile, perché combinazione lineare di f con se stessa e perché per Hp $\exists f_x$. La sua derivata è:

$$\varphi'(x) = f_x(x, y^*) - f_x(x, y_0)$$

poiché è derivabile, e' anche continua; allora, per il thm di Lagrange

$$\exists \xi \in]x_0, x^*[: \quad \varphi(x^*) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi)(x^* - x_0)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{f(x^*, y^*) - f(x^*, y_0) - f(x_0, y^*) + f(x_0, y_0)}_L = (f_x(\xi, y^*) - f_x(\xi, y_0))(x^* - x_0)$$

$$L = (f_x(\xi, y^*) - f_x(\xi, y_0))(x^* - x_0) \quad (3)$$

Dalle Hp segue che $\exists f_{xy}(\xi, y) \quad \forall y \in [y_0, y^*]$, quindi, poiché derivabile, f_x è continua; applicando il thm di Lagrange a $f_x(\xi, y) : [y_0, y^*] \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\exists \eta \in]y_0, y^*[: \quad f_x(\xi, y^*) - f_x(\xi, y_0) = f_{xy}(\xi, \eta)(y^* - y_0)$$

sostituendo in (3):

$$L = f_{xy}(\xi, \eta)(y^* - y_0)(x^* - x_0)$$

In modo analogo a tutto il procedimento svolto fin'ora, scegliendo

$$\psi(y) = f(x^*, y) - f(x_0, y) : [y_0, y^*] \longrightarrow \mathbb{R}$$

si conclude che

$$\exists \xi_1 \in]x_0, x^*[, \exists \eta_1 \in]y_0, y^*[: \quad L = f_{yx}(\xi_1, \eta_1)(x^* - x_0)(y^* - y_0)$$

Quindi

$$\frac{L}{(x^* - x)(y^* - y_0)} = f_{yx}(\xi_1, \eta_1) = f_{xy}(\xi, \eta)$$

(2)1. Q.E.D.

$$(\xi, \eta) \in]x_0, x^*[\times]y_0, y^*[$$

$$(\xi_1, \eta_1) \in]x_0, x^*[\times]y_0, y^*[$$

$$\left| f_{xy}(x_0, y_0) - f_{yx}(x_0, y_0) \right| = \left| f_{xy}(x_0, y_0) - f_{xy}(\xi, \eta) + f_{xy}(\xi_1, \eta_1) - f_{yx}(x_0, y_0) \right|$$

$$\leq \left| f_{xy}(x_0, y_0) - f_{xy}(\xi, \eta) \right| + \left| f_{yx}(\xi_1, \eta_1) - f_{yx}(x_0, y_0) \right| \underset{\text{per la (1), (2)}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\left| f_{xy}(x_0, y_0) - f_{yx}(x_0, y_0) \right| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow f_{xy}(x_0, y_0) - f_{yx}(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

□

Example 9.2. di funzione che ammette derivate parziali in x e y ma non e' continua.

Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x = 0 \vee y = 0 \\ 1 & x \neq 0 \wedge y \neq 0 \end{cases} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

(0)5. $\exists f_x(0, 0), f_y(0, 0)$

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0 \quad f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0$$

(0)6. f non e' continua in $(0, 0)$

Per assurdo supponiamo che lo sia:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \left| f(x, y) - f(0, 0) \right| < \varepsilon \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \cap I((0, 0), \delta)$$

poiche' $f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. $f(0, 0) = 0$ e poiche' $I((0, 0), \delta) \subseteq \mathbb{R}^2$, possiamo scrivere:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(x, y) < \varepsilon \quad \forall (x, y) \in I((0, 0), \delta)$$

allora, per $\varepsilon = \frac{1}{2}$,

$$\text{per } \varepsilon = \frac{1}{2} \exists \delta' > 0 : f(x, y) < \frac{1}{2} \quad \forall (x, y) \in I((0, 0), \delta')$$

$$\text{Sia } P = \left(\frac{\delta'}{2}, \frac{\delta'}{2} \right) \in \mathbb{R}^2$$

$$d(P, (0, 0)) = \sqrt{\frac{\delta'^2}{4} + \frac{\delta'^2}{4}} = \frac{\delta'}{\sqrt{2}} < \delta'$$

$$\Rightarrow P \in I((0, 0), \delta') \Rightarrow f(P) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{2} \text{ assurdo}$$

9.0.1 Differenziabilita'

LET: 1. $A \subseteq \mathbb{R}^2$, aperto e non vuoto

2. $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$

3. $(x_0, y_0) \in A \subseteq D(A)$

$$f \text{ si dice differenziabile in } (x_0, y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0) \\ \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{\sigma(x, y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0 \end{cases}$$

dove

incrementi:

$$\Delta x = x - x_0$$

$$\Delta y = y - y_0$$

$$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

differenziale totale di f , relativo al pt. (x_0, y_0) :

$$df = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

$$\sigma(x, y) = \Delta f - df$$

Theorem 9.2. f differenziabile in $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ continua in (x_0, y_0)

Proof:

(1) 1. Dim $\Rightarrow$

Trasformiamo $\sigma(x, y)$:

$$\sigma(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - (f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y)$$

$$f(x, y) = \sigma(x, y) + f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

$$f(x, y) = \frac{\sigma(x, y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \underbrace{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y}_{P(x, y)} \quad (1)$$

Osserviamo che $P(x, y)$ e' una funzione continua, poiche' e' un polinomio.

$d_e(x, x_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ e' pure una funzione continua (e' infatti composizione di funzioni continue).

Allora:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} P(x, y) = P(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{\sigma(x, y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0 \text{ [per Hp]}$$

$$(1) \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{vedi [8.28, pg.86]}} \quad f \text{ e' continua in } (x_0, y_0)$$

(1) 2. Dim $\nRightarrow$

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

e' continua in $(0, 0)$, possiede $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$, ma non e' differenziabile in $(0, 0)$.

(2) 1. E' continua in $(0, 0)$

Composizione di funzioni continue. Inoltre, il radicale ha sempre senso.

(2) 2. Dim $\exists f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$

$$f_x(0, 0) = D_{x=0}f(x, 0) = D_{x=0}0 = 0$$

$$f_y(0, 0) = D_{y=0}f(0, y) = D_{y=0}0 = 0$$

(2) 3. Non e' differenziabile in $(0, 0)$

Supponiamo per assurdo che lo sia, ovvero che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sigma(x,y)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad (1)$$

allora

$$\sigma(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - (f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y) = f(x,y)$$

$$\text{Sia } Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, x \neq 0\},$$

$$(1) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{vedi [8.27, pg.85]}} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), (x,y) \in Y} \frac{\sqrt{|x^2|}}{\sqrt{2x^2}} \Big|_Y = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

assurdo

□

Theorem 9.3. *del differenziale totale.*

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, aperto e non vuoto, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$

$$\begin{cases} \exists f_x(x,y) \quad \forall (x,y) \in A \\ \exists f_y(x_0, y_0) \\ f_x \text{ continua in } (x_0, y_0) \end{cases} \Rightarrow f \text{ e' differenziabile in } (x_0, y_0) \Rightarrow f \text{ e' continua in } (x_0, y_0)$$

$$\begin{cases} \exists f_x(x,y) \quad \forall (x,y) \in A \\ \exists f_y(x,y) \quad \forall (x,y) \in A \\ f_x, f_y \text{ continue in } A \end{cases} \Rightarrow f \text{ e' differenziabile in } A \Rightarrow f \text{ e' continua in } A$$

Definition 9.3. $A \subseteq \mathbb{R}^2$, aperto non vuoto.

$$C^0(A) = \{f : A \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua in } A\}$$

$$C^1(A) = \{f : A \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua in } A, \exists \text{ derivate parziali prime di } f \text{ e sono funzioni continue in } A\}$$

$$C^2(A) = \{f : A \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua in } A, \exists \text{ derivate parziali prime, seconde di } f, \text{ tutte continue in } A\}$$

...

$$C^n(A) = \{f : A \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua in } A, \exists \text{ derivate parziali prime, seconde, } \dots, n\text{-esime di } f, \text{ continue in } A\}$$

$$C^\infty(A) = \{f : A \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua in } A, \exists \text{ derivate parziali di qualunque ordine di } f, \text{ tutte continue in } A\}$$

Theorem 9.4. *di derivazione delle funzioni composte.*

LET: 1. $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $(x_0, y_0) \in A$, dove $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A \neq \emptyset$, A aperto

2. $x(t) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabile in $t_0 \in (a, b)$

3. $y(t) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabile in $t_0 \in (a, b)$

4. $\forall t \in (a, b) \quad (x(t), y(t)) \in A$

5. $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$

allora la funzione

$$h(t) = f(x(t), y(t)) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

e' derivabile in t_0 , e la sua derivata e'

$$h'(t_0) = f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0)$$

Proof:

(1)1. Lemma:

Data $f(x) : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $X \subseteq (S, d)$, $x^\circ \in X$, con $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) :$
 $X \longrightarrow \mathbb{R}$, si ha
 f e' continua in $x^\circ \Leftrightarrow f_i(x)$ e' continua in $x^\circ \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$

Nota ¹³

(2)1. Dim $\Rightarrow$

f continua in $x^\circ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d_{\mathbb{R}^n}(f(x), f(x^\circ)) < \varepsilon \quad \forall x \in I_S(x^\circ, \delta) \cap X$

Fissiamo i . Si ha:

$$|f_i(x) - f_i(x^\circ)| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (f_i(x) - f_i(x^\circ))^2} = d_{\mathbb{R}^n}(f(x), f(x^\circ)) < \varepsilon$$

quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f_i(x) - f_i(x^\circ)| < \varepsilon \quad \forall x \in I_S(x^\circ, \delta) \cap X$$

(2)2. Dim $\Leftarrow$

Per Hp, fissato $\varepsilon > 0$

$$\begin{cases} \exists \delta_1 > 0 : |f_1(x) - f_1(x^\circ)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} & \forall x \in I_S(x^\circ, \delta_1) \cap X \\ \exists \delta_2 > 0 : |f_2(x) - f_2(x^\circ)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} & \forall x \in I_S(x^\circ, \delta_2) \cap X \\ \dots \\ \exists \delta_n > 0 : |f_n(x) - f_n(x^\circ)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} & \forall x \in I_S(x^\circ, \delta_n) \cap X \end{cases}$$

quindi, prendendo $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$, avremo

$$\sum_{i=1}^n (f_i(x) - f_i(x^\circ))^2 = d_{\mathbb{R}^n}(f(x), f(x^\circ))^2 < \varepsilon^2 \Leftrightarrow d_{\mathbb{R}^n}(f(x), f(x^\circ)) < \varepsilon$$

□

(1)2. Dimostrazione del teorema

f e' differenziabile in (x_0, y_0) , quindi

$$\exists f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$$

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\sigma(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0 \quad (1)$$

$$\sigma(x,y) = f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Sia

$$\omega(x,y) = \begin{cases} \frac{\sigma(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} & A \setminus \{(x_0, y_0)\} \\ 0 & (x,y) = (x_0, y_0) \end{cases} \quad (2)$$

ω e' continua in (x_0, y_0) , infatti,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \omega(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\sigma(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \underbrace{=}_{(1)} 0 = \omega(x_0, y_0)$$

La funzione

$$\varphi(t) : (a, b) \longrightarrow A$$

$$\varphi(t) = (x(t), y(t))$$

¹³Per una dimostrazione alternativa, vedi topologia.pdf - Prodotto e quozienti - Teorema 3.15 - f continua $\Leftrightarrow p \circ f, q \circ f$ sono continue.

e' continua in t_0 , perche' $x(t), y(t)$ sono derivabili (e quindi continue) in t_0 .

Ricapitolando:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(t) \text{ continua in } t_0 \\ \omega(x, y) \text{ continua in } (x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0)) = \varphi(t_0) \\ \text{Hp 4} \Rightarrow \varphi((a, b)) \subseteq A \end{array} \right. \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{thm [8.36, pg. 89]}} \quad \omega(x(t), y(t)) \text{ continua in } t_0$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{t \rightarrow t_0} \omega(x(t), y(t)) = \omega(x_0, y_0) = 0 \quad (3)$$

Dalla (2):

$$\sigma(x, y) = \omega(x, y) \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad \forall (x, y) \in A \setminus \{(x_0, y_0)\}$$

considerando che $\sigma(x_0, y_0) = 0, \quad \omega(x_0, y_0) = 0$:

$$\sigma(x, y) = \omega(x, y) \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad \forall (x, y) \in A$$

espandiamo σ :

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \omega(x, y) \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

poiche' $(x(t), y(t)) \in A$, possiamo sostituire $(x, y) = (x(t), y(t))$; sostituiamo anche $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$

$$\begin{aligned} f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0)) &= \omega(x(t), y(t)) \sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2} \\ &\quad + f_x(x(t_0), y(t_0))(x(t) - x(t_0)) + f_y(x(t_0), y(t_0))(y(t) - y(t_0)) \end{aligned}$$

dividiamo tutto per $t - t_0$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{t - t_0} &= \omega(x(t), y(t)) \frac{\sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2}}{t - t_0} \\ &\quad + f_x(x(t_0), y(t_0)) \frac{(x(t) - x(t_0))}{t - t_0} + f_y(x(t_0), y(t_0)) \frac{(y(t) - y(t_0))}{t - t_0} \end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} &= \omega(x(t), y(t)) \frac{\sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2}}{t - t_0} \\ &\quad + f_x(x(t_0), y(t_0)) \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + f_y(x(t_0), y(t_0)) \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \quad (4) \end{aligned}$$

Adesso calcoliamo i vari limiti:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = h'(t_0)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} = y'(t_0)$$

$$(3) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \omega(x(t), y(t)) = 0$$

Se $t > t_0$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2}}{t - t_0} &= \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \sqrt{\left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}\right)^2 + \left(\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}\right)^2} = \\ &= \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2} \end{aligned}$$

Se $t < t_0$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} -\frac{\sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2}}{t - t_0} &= \\ &= -\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2} \end{aligned}$$

Quindi, prendendo i limiti della (4), avremo:

$$h'(t_0) = 0(\pm\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}) + f_x(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0))y'(t_0)$$

ovvero

$$h'(t_0) = f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0)$$

□

9.0.2 Formula di Lagrange e Taylor

Theorem 9.5. *Formula di Lagrange.*

LET: 1. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A \neq \emptyset$, A aperto

2. $f \in C^1(A)$

3. $(x, y), (x_0, y_0) \in A$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$

4. S segmento di estremi $(x, y), (x_0, y_0)$, contenuto in A
allora $\exists(\xi, \eta) \in S \setminus \{(x, y), (x_0, y_0)\}$ tale che

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) \right]_{(\xi, \eta)}^{(1)}$$

dove

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) \right]_{(\xi, \eta)}^{(1)} = f_x(\xi, \eta)(x - x_0) + f_y(\xi, \eta)(y - y_0)$$

Proof:

Il punto generico di S e':

$$(x(t), y(t)) = (x + t(x - x_0), y + t(y - y_0)) \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$(x, y) = (x(0), y(0)), \quad (x_0, y_0) = (x(1), y(1))$$

Le derivate delle coordinate:

$$x'(t) = x - x_0$$

$$y'(t) = y - y_0$$

Poiche' $f \in C^1(A)$, per il thm [9.3,pg.96], si ha che f e' differenziabile e continua in A . Allora per il thm [9.4,pg.96], si ha

$$h(t) = f(x(t), y(t)) : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$= f_x(x(t), y(t))(x - x_0) + f_y(x(t), y(t))(y - y_0) \quad \forall t \in [0, 1]$$

Allora per il thm di Lagrange di analisi I:

$$\exists \tau \in]0, 1[: \quad \frac{h(1) - h(0)}{1} = h'(\tau)$$

$$f(x(1), y(1)) - f(x(0), y(0)) = f_x(x(\tau), y(\tau))(x - x_0) + f_y(x(\tau), y(\tau))(y - y_0)$$

$$(\xi, \eta) = (x(\tau), y(\tau))$$

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, \eta)(x - x_0) + f_y(\xi, \eta)(y - y_0)$$

□

Theorem 9.6. Formula di Taylor per funzioni reali a due variabili.

LET: 1. $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A \neq \emptyset$, A aperto

2. $f \in C^m(A)$

3. $(x, y), (x_0, y_0) \in A$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$

4. S segmento di estremi $(x, y), (x_0, y_0)$, contenuto in A

allora $\exists (\xi, \eta) \in S \setminus \{(x, y), (x_0, y_0)\}$ tale che

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i!} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) \right]_{(x_0, y_0)}^{(i)} \right) + \frac{1}{m!} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) \right]_{(\xi, \eta)}^{(m)}$$

ovvero

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) \right]_{(x_0, y_0)}^{(1)} + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) \right]_{(x_0, y_0)}^{(2)} + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) \right]_{(x_0, y_0)}^{(m-1)} + \frac{1}{m!} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) \right]_{(\xi, \eta)}^{(m)}$$

dove

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) \right]_{(\bar{x}, \bar{y})}^{(k)} = \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x^h \partial y^{k-h}} \right)_{(\bar{x}, \bar{y})} (x - x_0)^h (y - y_0)^{k-h}$$

dove $\frac{\partial^k f}{\partial x^h \partial y^{k-h}}$ e' la derivata k -esima di f rispetto alla variabile x , contata h volte, e rispetto a y , contata $k - h$ volte.

Proof:

La dimostrazione e' simile a quella della formula di Lagrange: basta considerare la funzione $h(t) = f(x(t), y(t))$, e applicare ad essa la formula di Taylor per le funzioni a una variabile.

□

9.0.3 Funzioni a gradiente nullo

Definition 9.4. Data la funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A \neq \emptyset$, A aperto, dicesi gradiente di f in (x_0, y_0)

$$\text{grad } f(x_0, y_0) := \nabla f(x_0, y_0) := Df(x_0, y_0) := (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^2$$

Proposition 9.7.

Se f e' costante, ovvero $f(x, y) = c$, allora $\text{grad } f(x_0, y_0) = (0, 0)$, infatti,

$$f_x(x_0, y_0) = D_{x=x_0} f(x, y_0) = D_{x=x_0} c = 0$$

non vale il viceversa:

$$A = A_1 \cup A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in A_1 \\ -1 & (x, y) \in A_2 \end{cases}$$

$f|_{A_1}, f|_{A_2}$ sono costanti

$$\begin{cases} \text{grad } f|_{A_1}(x, y) = 0 & \forall (x, y) \in A_1 \\ \text{grad } f|_{A_2}(x, y) = 0 & \forall (x, y) \in A_2 \end{cases} \Rightarrow \text{grad } f(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in A$$

Se pero', A e' internamente connesso, allora vale il viceversa.

Theorem 9.8.

LET: 1. $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A \neq \emptyset$, A aperto

2. $\text{grad } f(x, y) = (0, 0) \quad \forall (x, y) \in A$, ovvero

$$\begin{cases} \exists f_x(x, y) = 0 & \forall (x, y) \in A \\ \exists f_y(x, y) = 0 & \forall (x, y) \in A \end{cases}$$

3. A e' internamente connesso

allora

$$\exists c \in \mathbb{R} : f(x, y) = c \quad \forall (x, y) \in A$$

ovvero, f e' costante.

Proof:

Vogliamo dimostrare che $\forall P, Q \in A : P \neq Q$ si ha $f(P) = f(Q)$.

Siano $P = (x_0, y_0)$, $Q = (x_1, y_1)$ e sia S il segmento che ha per estremi P e Q , ovvero

$$S = \{(x, y) \in A \mid \exists t \in [0, 1] : x = x(t), y = y(t), \text{ dove } x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0), y(t) = y_0 + t(y_1 - y_0)\}$$

Distinguiamo due casi

CASE: $S \subseteq A$

Sia $h(t) = f(x(t), y(t)) : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

f_x, f_y sono funzioni continue perche' costanti. Allora, per il thm [9.3,pg.96],

f e' differenziabile in A .

$x(t), y(t)$ sono derivabili in $[0, 1]$ perche' sono polinomi.

$\forall t \in [0, 1] \ (x(t), y(t)) \in S \subseteq A$.

Quindi, per il thm [9.4,pg.96],

$$h'(t) = \underbrace{f_x(x(t), y(t))}_{=0} x'(t) + \underbrace{f_y(x(t), y(t))}_{=0} y'(t) = 0$$

$$h'(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R} : h(t) = c \quad \forall t \in [0, 1]$$

cor. Lagrange di Anal. I

$$\Rightarrow f(x(t), y(t)) = c \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow f(x(0), y(0)) = f(x(1), y(1)) = f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1)$$

CASE: $S \subsetneq A$

Poiche' A e' internamente connesso, esiste una poligonale $\sum$, di estremi P, Q , tutta contenuta in A .

I vertici della poligonale sono:

$$(x^{(0)}, y^{(0)}), (x^{(1)}, y^{(1)}), \dots, (x^{(n)}, y^{(n)})$$

$$\text{con } (x^{(0)}, y^{(0)}) = (x_0, y_0), \quad (x^{(n)}, y^{(n)}) = (x_1, y_1)$$

i lati della poligonale sono $s_1, s_2, \dots, s_n$, rispettivamente di estremi $((x^{(0)}, y^{(0)}), (x^{(1)}, y^{(1)})), ((x^{(1)}, y^{(1)}), (x^{(2)}, y^{(2)})), \dots, ((x^{(n-1)}, y^{(n-1)}), (x^{(n)}, y^{(n)}))$

Se consideriamo il segmento $s_1 \subseteq \sum \subseteq A$, ci ritroviamo nel caso precedente, quindi

$$f(x^{(0)}, y^{(0)}) = f(x^{(1)}, y^{(1)})$$

lo stesso vale per il segmento $s_2, s_3, \dots, s_n$, quindi

$$f(x^{(0)}, y^{(0)}) = f(x^{(1)}, y^{(1)})$$

$$f(x^{(1)}, y^{(1)}) = f(x^{(2)}, y^{(2)})$$

$$f(x^{(2)}, y^{(2)}) = f(x^{(3)}, y^{(3)})$$

...

$$f(x^{(n-1)}, y^{(n-1)}) = f(x^{(n)}, y^{(n)})$$

In conclusione

$$f(x^{(0)}, y^{(0)}) = f(x^{(n)}, y^{(n)}) \Leftrightarrow f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1)$$

□

Corollary 9.9.

LET: 1. $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2, A \neq \emptyset, A$ aperto

2. $\text{grad } f(x, y) = \text{grad } g(x, y) \quad \forall (x, y) \in A$, ovvero

$$\begin{cases} \exists f_x, g_x, & f_x(x, y) = g_x(x, y) & \forall (x, y) \in A \\ \exists f_y, g_y, & f_y(x, y) = g_y(x, y) & \forall (x, y) \in A \end{cases}$$

3. A e' internamente connesso

allora

$$\exists c \in \mathbb{R} : f(x, y) - g(x, y) = c \quad \forall (x, y) \in A$$

ovvero, la differenza delle due funzioni e' costante.

Proof:

Basta considerare la funzione differenza φ :

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= f(x, y) - g(x, y) \\ \varphi_x(x, y) &= f_x(x, y) - g_x(x, y) \underbrace{=}_\text{per hp} 0 \\ \varphi_y(x, y) &= f_y(x, y) - g_y(x, y) = 0 \\ \text{grad } \varphi(x, y) &= (0, 0) \quad \forall (x, y) \in A\end{aligned}$$

allora, per il thm di prima

$$\exists c \in \mathbb{R} : \varphi(x, y) = c \quad \forall (x, y) \in A \Leftrightarrow f(x, y) - g(x, y) = c \quad \forall (x, y) \in A$$

□

9.0.4 Ricerca di minimi e massimi

Definition 9.5. Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, dove $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_0, y_0) \in X$,

- (x_0, y_0) e' un pt. di minimo relativo $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in I((x_0, y_0), \delta) \cap X$
 (x_0, y_0) e' un pt. di massimo relativo $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in I((x_0, y_0), \delta) \cap X$
 (x_0, y_0) e' un pt. di estremo relativo $\Leftrightarrow (x_0, y_0)$ e' un pt. di minimo o di massimo relativo
 (x_0, y_0) e' un pt. di minimo assoluto $\Leftrightarrow f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in X$
 (x_0, y_0) e' un pt. di massimo assoluto $\Leftrightarrow f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in X$
 (x_0, y_0) e' un pt. di estremo assoluto $\Leftrightarrow (x_0, y_0)$ e' un pt. di minimo o di massimo assoluto

Le definizioni analoghe per i punti di estremo propri:

- (x_0, y_0) e' min. rel. proprio $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : f(x_0, y_0) < f(x, y) \quad \forall (x, y) \in I((x_0, y_0), \delta) \cap X \setminus \{(x_0, y_0)\}$
 (x_0, y_0) e' max. rel. proprio $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : f(x_0, y_0) > f(x, y) \quad \forall (x, y) \in I((x_0, y_0), \delta) \cap X \setminus \{(x_0, y_0)\}$

Theorem 9.10. di Fermat.

Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, dove $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X^\circ \neq \emptyset$, $(x_0, y_0) \in X^\circ$,

$$(x_0, y_0) \text{ e' un pt. di estremo relativo } , \begin{cases} \exists f_x(x_0, y_0) \Rightarrow f_x(x_0, y_0) = 0 \\ \exists f_y(x_0, y_0) \Rightarrow f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Proof:

CASE: (x_0, y_0) max rel.

Poiche' (x_0, y_0) e' un punto interno, $\exists \delta' > 0 : I((x_0, y_0), \delta) \subseteq X$, inoltre, essendo di massimo relativo $\exists \delta'' > 0 : f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in I((x_0, y_0), \delta'') \cap X$, allora prendendo $\delta = \min \{\delta', \delta''\}$, avremo

$$f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

$\Rightarrow x_0$ e' un max. rel per la funzione a una variabile $f(x, y_0)$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{thm. Fermat, Anal I}} f_x(x_0, y_0) = 0$$

Analogamente per y .

Definition 9.6. Diremo che il punto $(x_0, y_0) \in X^\circ$ e' un punto stazionario o

critico $\Leftrightarrow \begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$ Il punto e' "critico", in quanto, e' possibile che sia

un punto di estremo relativo. I punti non critici, per il thm di Fermat, non possono essere pt. di estremo relativo.

Theorem 9.11.

LET: 1. $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A \neq \emptyset$, A aperto

2. $(x_0, y_0) \in A$ pt. di estremo relativo

allora

$$1. f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

$$2. (x_0, y_0) \text{ max. rel. } \Rightarrow \lambda^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2\lambda\mu f_{xy}(x_0, y_0) + \mu^2 f_{yy}(x_0, y_0) \leq 0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$3. (x_0, y_0) \text{ min. rel. } \Rightarrow \lambda^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2\lambda\mu f_{xy}(x_0, y_0) + \mu^2 f_{yy}(x_0, y_0) \geq 0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Corollary 9.12. *Nell Hp del thm precedente, si ha*

$$1. f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

$$2. (x_0, y_0) \text{ max. rel. } \Rightarrow f_{xx}(x_0, y_0) \leq 0, \quad f_{yy}(x_0, y_0) \leq 0$$

$$(x_0, y_0) \text{ min. rel. } \Rightarrow f_{xx}(x_0, y_0) \geq 0, \quad f_{yy}(x_0, y_0) \geq 0$$

3.

$$(x_0, y_0) \text{ estremo rel. } \Rightarrow H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} \geq 0$$

$H(x_0, y_0)$ e' chiamato il determinante Hessiano relativo al punto (x_0, y_0) e alla funzione f .

Questo corollario e' utile per capire se un punto non e' di estremo relativo: basta controllare che una delle tre condizioni non sia verificata.

Proof:

Supponiamo che (x_0, y_0) sia max. rel., allora per il thm precedente

$$\lambda^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2\lambda\mu f_{xy}(x_0, y_0) + \mu^2 f_{yy}(x_0, y_0) \leq 0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (*)$$

$$\lambda = 1, \mu = 0 \Rightarrow f_{xx}(x_0, y_0) \leq 0$$

$$\lambda = 0, \mu = 1 \Rightarrow f_{yy}(x_0, y_0) \leq 0$$

CASE: $f_{xx}(x_0, y_0) = 0$

$$H(x_0, y_0) \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0) f_{yx}(x_0, y_0)}_{=0 \text{ per Hp}} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$f \in C^2(A) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{thm [9.1, pg.93]}} \quad f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

$$\Leftrightarrow -f_{xy}(x_0, y_0)^2 \geq 0 \Leftrightarrow f_{xy}(x_0, y_0)^2 \leq 0 \quad (1)$$

$$H(x_0, y_0) \geq 0 \Leftrightarrow (1)$$

$$(*) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\mu=f_{xy}(x_0, y_0)} \quad 2\lambda f_{xy}(x_0, y_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)^2 f_{yy}(x_0, y_0) \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Scegliamo $\lambda = \frac{1 - f_{yy}(x_0, y_0)}{2}$ ottenendo cosi':

$$f_{xy}(x_0, y_0)^2 (2\lambda + f_{yy}(x_0, y_0)) \leq 0 \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\lambda = \frac{1 - f_{yy}(x_0, y_0)}{2}} \quad f_{xy}(x_0, y_0)^2 \leq 0$$

la (1) e' cosi' resa vera, e poiche' $H(x_0, y_0) \Leftrightarrow (1)$, abbiamo dimostrato la tesi
CASE: $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$

$$(*) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\mu=1} \underbrace{f_{xx}(x_0, y_0)}_A \lambda^2 + \underbrace{2f_{xy}(x_0, y_0)}_B \lambda + \underbrace{f_{yy}(x_0, y_0)}_C \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$A < 0, \quad A\lambda^2 + B\lambda + C \leq 0 \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta \leq 0$$

se cosi' non fosse, esisterebbero alcune λ in cui il polinomio ammette valori positivi

$$\frac{\Delta}{4} = B^2 - AC = f_{xy}(x_0, y_0)^2 - f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2 \geq 0 \Leftrightarrow H(x_0, y_0) \geq 0$$

□

Proposition 9.13. *Sotto le hp del corollario precedente,*

$$H(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0, f_{yy}(x_0, y_0) \neq 0$$

infatti,

$$H(x_0, y_0) > 0 \Leftrightarrow 0 < f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2 \leq f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) \Rightarrow$$

$$f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0, f_{yy}(x_0, y_0) \neq 0$$

Theorem 9.14. *condizione sufficiente affinche' un punto sia di estremo relativo.*

LET: 1. $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, f \in C^2(A)$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2, A \neq \emptyset, A$ aperto

2. $H(x_0, y_0) > 0$

3. $(x_0, y_0) \in A, f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, ovvero (x_0, y_0) e' un punto critico

allora

1. $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ e' di max. rel. proprio

2. $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ e' di min. rel. proprio

Nota¹⁴.

Proof:

Dimostriamo il caso in cui $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$.

$f \in C^2(A) \Rightarrow f_{xx}(x, y)$ e' continua, e quindi e' continua in (x_0, y_0) :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f_{xx}(x, y) = f_{xx}(x_0, y_0) < 0$$

allora per la permanenza del segno:

$$\exists \delta' > 0 : f_{xx}(x, y) < 0 \quad \forall (x, y) \in I((x_0, y_0), \delta') \quad (1)$$

Nota¹⁵.

Consideriamo $H(x, y) : A \rightarrow \mathbb{R}$ come funzione:

$$H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)f_{yx}(x, y) \underbrace{=}_{f \in C^2(A)} f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

$H(x, y)$ e' continua, perche' prodotto e differenza di funzioni continue. Poiche' per Hp $H(x_0, y_0) > 0$, per la permanenza del segno si avra':

$$\exists \delta'' > 0 : H(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in I((x_0, y_0), \delta'') \quad (2)$$

Poniamo $\delta = \min \{\delta', \delta''\}$. δ soddisfa sia la (1) che la (2), poiche'

$$I((x_0, y_0), \delta) \subseteq I((x_0, y_0), \delta') \cap I((x_0, y_0), \delta'')$$

Quello che vogliamo dimostrare e' che

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in I((x_0, y_0), \delta)$$

Utilizziamo la formula di Taylor arrestata alle derivate seconde (vedi [9.6,pg.100]):

$(x, y) \in I((x_0, y_0), \delta) : (x, y) \neq (x_0, y_0)$, S segmento di estremi P, Q

$S \subseteq I((x_0, y_0), \delta) \subseteq A$

per Taylor $\exists (\xi, \eta) \in S \setminus \{(x_0, y_0), (x, y)\}$ tale che

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) \right]_{(x_0, y_0)}^{(1)} + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) \right]_{(\xi, \eta)}^{(2)} = \\ &= f(x_0, y_0) + \underbrace{f_x(x_0, y_0)}_{=0 \text{ per Hp}}(x - x_0) + \underbrace{f_y(x_0, y_0)}_{=0 \text{ per Hp}}(y - y_0) + \\ &\quad + f_{yy}(\xi, \eta)(y - y_0)^2 + 2f_{xy}(\xi, \eta)(x - x_0)(y - y_0) + f_{xx}(\xi, \eta)(x - x_0)^2 = \\ &= f(x_0, y_0) + f_{yy}(\xi, \eta)(y - y_0)^2 + 2f_{xy}(\xi, \eta)(x - x_0)(y - y_0) + f_{xx}(\xi, \eta)(x - x_0)^2 \quad (3) \end{aligned}$$

Notiamo che (ξ, η) e' un punto che soddisfa sia la (1) che la (2).

Distinguiamo due casi:

CASE: $y - y_0 = 0$

In questo caso abbiamo dalla (3)

$$\begin{cases} (x, y) \neq (x_0, y_0) \\ y - y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow x \neq x_0$$

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f_{xx}(\xi, \eta)}_{<0 \text{ (1)}} \underbrace{(x - x_0)^2}_{>0} \Rightarrow f(x, y) - f(x_0, y_0) < 0 \Leftrightarrow f(x, y) < f(x_0, y_0)$$

e in questo caso abbiamo finito

CASE: $y - y_0 \neq 0$

¹⁴ f_{xx}, f_{yy} hanno lo stesso segno

¹⁵ $I((x_0, y_0), \delta') = I((x_0, y_0), \delta') \cap X$ perche' (x_0, y_0) e' un punto di A , ed A e' un aperto, quindi (x_0, y_0) e' un punto interno di A

Vogliamo dimostrare che $f(x, y) - f(x_0, y_0) < 0$, ovvero che

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \underbrace{=}_{(3)} f_{yy}(\xi, \eta)(y - y_0)^2 + 2f_{xy}(\xi, \eta)(x - x_0)(y - y_0) + f_{xx}(\xi, \eta)(x - x_0)^2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_{yy}(\xi, \eta) + 2f_{xy}(\xi, \eta) \frac{x - x_0}{y - y_0} + f_{xx}(\xi, \eta) \left(\frac{x - x_0}{y - y_0} \right)^2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{t = \frac{x - x_0}{y - y_0}} f_{xx}(\xi, \eta)t^2 + 2f_{xy}(\xi, \eta)t + f_{yy}(\xi, \eta) < 0 \quad (4)$$

$$t = \frac{x - x_0}{y - y_0}$$

esaminiamo quest'ultimo polinomio:

$$\frac{\Delta}{4} = f_{xy}(\xi, \eta)^2 - f_{xx}(\xi, \eta)f_{yy}(\xi, \eta) \underbrace{=}_{\text{per la (2)}} -H(\xi, \eta) < 0$$

quindi la (4) e' vera $\forall t \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in I((x_0, y_0), \delta)$

□

9.0.5 Algoritmo di ricerca dei pt. di max e min

Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, f \in C^2(A)$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2, A \neq \emptyset, A$ aperto,

1. Troviamo tutti i punti critici:

$$Pc = \begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

Pc e' l'insieme di tutti i punti critici. Se e' vuoto, ci fermiamo: non esistono punti di estremo relativo.

2. Per ogni $(x_0, y_0) \in Pc$ calcoliamo $H(x_0, y_0)$

- (a) Se $H(x_0, y_0) < 0$, allora, per il cor [9.12,pg.104], (x_0, y_0) non e' un estremo relativo
- (b) Se $H(x_0, y_0) > 0$, per il thm [9.14,pg.105],
 - i. Se $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, (x_0, y_0) e' un max. rel. proprio
 - ii. Se $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, (x_0, y_0) e' un min. rel. proprio
- (c) Se $H(x_0, y_0) = 0$, allora siamo in un caso dubbio, e non possiamo dire nulla a priori.

9.0.6 Generalizzazioni

I teoremi fin'ora visti si possono estendere a funzioni definite in $\mathbb{R}^n$.

1. Si estende la definizione di gradiente:

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} (f_{x_1}(\mathbf{x}), f_{x_2}(\mathbf{x}), \dots, f_{x_n}(\mathbf{x}))$$

O usando un'altra notazione:

$$\nabla f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_{\mathbf{x}}, \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_{\mathbf{x}}, \dots, \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_{\mathbf{x}} \right)$$

2. Si definisce la *matrice Hessiana* H :

$$(H)_{ij}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

o usando l'altra notazione:

$$(H)_{ij}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{\mathbf{x}} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Se $f \in C^2(A)$, allora per Schwartz (vedi [9.1,pg.93]) H e' una matrice simmetrica.

Definition 9.7. Sia $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice simmetrica

$$M \text{ e' definita positiva } \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} M_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

dove M_i e' il determinante del minore principale i -esimo.

Le definizioni di matrice *semidefinita positiva*, *semidefinita negativa* si trovano negli appunti di Geometria 2.

Proposition 9.15. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, aperto non vuoto, $\mathbf{x} \in A$. In analogia al cor [9.12,pg.104], si ha

1. $\text{grad } f = \underline{0}$, dove $\underline{0} = (0, 0, \dots, 0)$ e' il vettore nullo.

2. $\mathbf{x}$ max. rel. $\Rightarrow H(\mathbf{x})$ e' semidefinita negativa.

$\mathbf{x}$ min. rel. $\Rightarrow H(\mathbf{x})$ e' semidefinita positiva.

Theorem 9.16. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, aperto non vuoto, $\mathbf{x} \in A$. In analogia al thm [9.14,pg.105], si ha

$$\begin{cases} \text{grad } f(\mathbf{x}) = \underline{0} \\ H(\mathbf{x}) \text{ definita positiva} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x} \text{ e' un punto di minimo relativo proprio}$$

9.0.7 Max e min assoluto

Theorem 9.17. Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, continua in X , con $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, chiuso e limitato.

(x_0, y_0) e' un estremo assoluto $\Rightarrow (x_0, y_0) \in X_1 \cup X_2 \cup X_3$, dove

$$X_1 = \{(x, y) \in X^\circ \mid \exists f_x(x, y) = 0 \wedge \exists f_y(x, y) = 0\}$$

$$X_2 = \{(x, y) \in X^\circ \mid \nexists f_x(x, y) \vee \nexists f_y(x, y)\}$$

$$X_3 = F(X)$$

In sostanza, per trovare i punti di estremo assoluto, basta cercare in $X_1 \cup X_2 \cup X_3$.

Proof:

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} X \text{ chiuso e limitato} \\ X \subseteq \mathbb{R}^2 \end{cases} \xRightarrow[\text{thm [8.23,pg.84]}]{\Rightarrow} X \text{ seq. compatto} \\ & \begin{cases} X \text{ seq. compatto} \\ f \text{ continua in } X \end{cases} \xRightarrow[\text{thm di Weierstrass}]{\Rightarrow} f \text{ ammette max. e min. ass.} \end{aligned}$$

Inoltre,

$$X \text{ limitato, } X \neq \emptyset \Rightarrow X \neq \mathbb{R}^2, X \neq \emptyset \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{cor [8.7,pg.74]}} \quad F(X) = X_3 \neq \emptyset$$

E' chiaro che si puo' verificare uno e uno solo dei seguenti casi:

CASE: $(x_0, y_0) \in X_1$

□

CASE: $(x_0, y_0) \in X_2$

□

CASE: $(x_0, y_0) \in X \setminus (X_2 \cup X_3)$

$$(x_0, y_0) \notin X_3 = F(X), (x_0, y_0) \in X \Rightarrow (x_0, y_0) \in X^\circ$$

$$P \in X^\circ, P \notin X_2 \Rightarrow \exists f_x(x_0, y_0), \exists f_y(x_0, y_0)$$

$$(x_0, y_0) \text{ e' estremo relativo} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{per il thm di Fermat}} \quad f_x = f_y = 0 \Rightarrow (x_0, y_0) \in X_1$$

□

Proposition 9.18.

X_1 e' formato dalla soluzioni del sistema

$$P_C = \begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$$

e possiede spesso un numero finito di punti.

X_2 pure possiede spesso un numero finito di punti:

$$X_2 = \{(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), \dots, (x'_m, y'_m)\}$$

X_3 e' la frontiera, e spesso e' una curva del tipo

$$X_3 = \{(x(t), y(t)) \mid t \in [a, b], x(t), y(t) \text{ sono funzioni continue in } [a, b]\}$$

in questi casi

$$\max_X f = \max \left\{ f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \dots, f(x_n, y_n), f(x'_1, y'_1), f(x'_2, y'_2), \dots, f(x'_m, y'_m), \max_{t \in [a, b]} h(t) \right\}$$

dove $h(t) = f(x(t), y(t)) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Il $\max_{t \in [a, b]} h(t)$ si calcola con lo stesso procedimento, applicato pero' a una funzione a una sola variabile.

Example 9.8. $f(x, y) = y^2 - x^4 : X \longrightarrow \mathbb{R}$, con $X = C((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
 f e' continua, quindi per Weierstrass ammette minimo e massimo assoluti.

$$f_x(x, y) = -4x^3 \quad \forall (x, y) \in X$$

$$f_y(x, y) = 2y \quad \forall (x, y) \in X$$

$$Pc = \begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} = \begin{cases} -4x^3 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} = \{(0, 0)\}$$

$$X_1 = \{(0, 0)\}$$

$$X_2 = \emptyset$$

$$X_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, t \in [0, 2\pi]\}$$

$$h(t) = f(x(t), y(t)) = \sin^2 t - \cos^4 t$$

$$h'(t) = 2 \sin t \cos t + 4 \cos^3 t \sin t = \sin t \cos t (4 \cos^2 + 2)$$

$$X'_1 = \{t \in [0, 2\pi] \mid h'(t) = 0\} = \left\{k\pi, k\frac{\pi}{2} \mid k = 0, 1\right\} = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$X'_2 = \emptyset$$

$$X'_3 = \{0, 2\pi\}$$

$$\begin{aligned} \max_X f &= \max\{\max f(X_1 \cup X_2), \max h(X'_1 \cup X'_2 \cup X'_3)\} = \max\left\{f(0, 0), h(0), h(\pi), h\left(\frac{\pi}{2}\right), h(2\pi)\right\} = \\ &= \max\{0, -1, 1\} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_X f &= \min\{\min f(X_1 \cup X_2), \min h(X'_1 \cup X'_2 \cup X'_3)\} = \min\left\{f(0, 0), h(0), h(\pi), h\left(\frac{\pi}{2}\right), h(2\pi)\right\} = \\ &= \min\{0, -1, 1\} = -1 \end{aligned}$$

9.1 Derivate direzionali

Le derivate direzionali estendono il concetto di derivate parziali.

Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A \neq \emptyset$, A aperto. Sia $(x_0, y_0) \in A$. Prendiamo una qualsiasi retta r passante per (x_0, y_0) , definita da:

$$r : \begin{cases} x(t) = x_0 + \alpha t \\ y(t) = y_0 + \beta t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

con $|\alpha| \leq 1$, $|\beta| \leq 1$, $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$. Nota¹⁶

$$(x_0, y_0) \in A \text{ aperto} \Rightarrow \exists \delta > 0 : I((x_0, y_0), \delta) \subseteq A$$

. La derivata con direzione r , in (x_0, y_0) e' definita come

$$\begin{aligned} f_r(x_0, y_0) &:= \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{(x_0, y_0)} := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x(t), y(t)) - f(x_0, y_0)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) - f(x_0, y_0)}{t} \quad \forall t \in]-\delta, \delta[\setminus \{0\} \end{aligned}$$

¹⁶In sostanza, come vettore direttore stiamo prendendo il vettore che ha componenti (α, β) , con $(\alpha, \beta) \in S^1$, dove S^1 e' la circonferenza unitaria.

(1)1. Controlliamo che questa definizione abbia senso, ovvero che sia lecito calcolare $f(x(t), y(t))$:

$$d((x(t), y(t)), (x_0, y_0)) = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} = \sqrt{(\alpha t)^2 + (\beta t)^2} = |t| \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = |t|$$

$$t \in]-\delta, \delta[\Leftrightarrow |t| < \delta \Rightarrow (x(t), y(t)) \in I((x_0, y_0), \delta) \subseteq A \Rightarrow (x(t), y(t)) \in A$$

Quindi, dato che $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x(t), y(t))$ ha senso.

(1)2. Osservazione

Prendendo una retta r parallela all'asse x , passante per (x_0, y_0) , otteniamo la derivata parziale in x per (x_0, y_0) :

$$\alpha = 1, \beta = 0$$

$$f_r(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \underset{t=x-x_0}{=} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = f_x(x_0, y_0)$$

analogamente per $f_y(x_0, y_0)$:

$$\alpha = 0, \beta = 1$$

$$f_r(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} \underset{t=y-y_0}{=} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = f_y(x_0, y_0)$$

Theorem 9.19. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A \neq \emptyset$, A aperto, $(x_0, y_0) \in A$

f differenziabile in $(x_0, y_0) \Rightarrow \exists f_r(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\alpha + f_y(x_0, y_0)\beta$

$\forall r$ retta passante per (x_0, y_0) con num. direttori α, β

Proof:

(1)1. Dim $\Rightarrow$

Prendiamo una qualsiasi retta r passante per (x_0, y_0) , definita da:

$$r : \begin{cases} x(t) = x_0 + \alpha t \\ y(t) = y_0 + \beta t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{con } |\alpha| \leq 1, |\beta| \leq 1, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1.$$

$$(x_0, y_0) \in A \text{ aperto} \Rightarrow \exists \delta > 0 : I((x_0, y_0), \delta) \subseteq A$$

$$F(t) = f(x(t), y(t)) :]-\delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R}$$

f , per Hp e' differenziabile in (x_0, y_0)

$$x'(t) = \alpha, \quad y'(t) = \beta \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\forall t \in (x(t), y(t)) \in A$ [l'abbiamo visto prima in [9.1,pg.111]]

allora, per il thm [9.4,pg.96] :

$$\exists F'(0) = f_x(x_0, y_0)\alpha + f_y(x_0, y_0)\beta$$

$$F'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x(t), y(t)) - f(x_0, y_0)}{t} = f_r(x_0, y_0)$$

□

(1)2. Dim $\nRightarrow$

Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right)^2 & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

f ammette una qualsiasi derivata direzionale in $(0, 0)$, non e' pero' differenziabile.

⟨2⟩1. f non e' continua in $(0,0)$

Calcoliamo il limite della f ristretta a $Y = \{(x, x^2)\}$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), (x,y) \in Y} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), (x,y) \in Y} \left(\frac{x^4}{2x^4} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$f(0,0) = 0 \neq \frac{1}{4}$$

per il thm 8. di [8.27,pg.85]: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \neq 0 = f(0,0)$

Allora, per il thm [9.2,pg.95], f non e' differenziabile in (x_0, y_0) .

⟨2⟩2. f ammette una qualsiasi derivata direzionale in $(0,0)$

Sia r una retta passante per $(0,0)$:

$$r : \begin{cases} x(t) = \alpha t \\ y(t) = \beta t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$f_r(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\alpha t, \beta t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\alpha t, \beta t)}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha^4 t^5 \beta^2}{(\alpha^4 t^2 + \beta^2)^2} = 0$$

□

10 Appendice

Proof: della proposizione [8.3,pg.70]

Sia $x^\circ = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^\circ$, vogliamo provare che $x^\circ \in D(X)$.

Sia $I(x^\circ, \delta')$ un intorno qualsiasi di x° , Affinche' $x^\circ \in D(X)$, si deve avere

$$\forall \delta' > 0 : \exists \bar{x} \in I(x^\circ, \delta') \cap X \setminus \{x^\circ\}$$

Fissiamo $\delta' > 0$. Poiche' $x^\circ \in X^\circ$, si ha

$$\exists \delta'' > 0 : I(x^\circ, \delta'') \subseteq X$$

Sia $\delta = \min \{\delta', \delta''\}$.

$$\bar{x} = (x_1 + \frac{\delta}{2}, x_2, \dots, x_n)$$

$$d_{\mathbb{R}^n}(x^\circ, \bar{x}) = |x_1 + \frac{\delta}{2} - x_1| = \frac{\delta}{2} < \delta \Rightarrow \bar{x} \in I(x^\circ, \delta)$$

$$d_{\mathbb{R}^n}(x^\circ, \bar{x}) < \delta \leq \delta'' \Rightarrow \bar{x} \in I(x^\circ, \delta'') \subseteq X$$

$$x_1 + \frac{\delta}{2} \neq x_1 \Rightarrow \bar{x} \neq x^\circ$$

$$\bar{x} \in I(x^\circ, \delta) \cap X \setminus \{x^\circ\}$$

□

Proof: del thm 8. di [8.27,pg.85]

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0, \delta) \cap X \setminus \{x_0\}$$

$$y \in I(x_0, \delta) \cap Y \setminus \{x_0\} \underset{Y \subseteq X}{\Rightarrow} y \in I(x_0, \delta) \cap X \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Nota: questo lemma e' utile per provare che il limite di una funzione non e' un certo numero l , infatti, in diversi casi risulta piu' semplice calcolare il limite della restrizione della funzione. □

Index

- cantor-heine, 87
- convergenza
 - assoluta (serie), 45
 - puntuale, 37
 - puntuale (serie), 44
 - totale (serie), 45
 - uniforme, 37
 - uniforme (serie), 45
- criterio di Cauchy, 38, 45
- derivata parziale, 92
- differenziabilita', 94
- differenziale
 - totale, 96
- diseguaglianza di Cauchy-Schwartz, 62
- diseguaglianza triangolare II, 65
- f di spazi metrici continua, 86
- insieme
 - normale, 28
- insieme convesso, 75
- insiemi sequenzialmente compatti, 82
- integrale
 - generalizzato, 30
 - illimitato, 34
 - improprio, 30
- internamente connesso, 74
- intervallo di convergenza, 50
- invariante, 25
- isotonia, 25
- jordan
 - proprieta', 25
- jordan peano, 23
- Mac-Laurin, 59
- misurabilita', 23
- permanenza del segno, 90
- poligonale, 74
- raggio di convergenza, 50
- rettangoloide, 26
- semplicemente connesso, 74
- serie di funzioni, 44
- serie di potenze, 50
- somma parziale, 44
- spazio completo, 79
- spazio metrico C zero, 64
- successione
 - di funzioni, 36
- Taylor, 59
- teorema
 - di Abel, 55
 - di Cauchy-Hadamard, 55
 - di Torricelli, 21
- torricelli, 21
- trapezoide, 26
- weierstrass, 88