

CAPITOLO 7

SERIE NUMERICHE IN $\mathbb{R}$ E IN $\mathbb{C}$

È già noto al lettore come si possano sommare un numero finito di numeri reali o complessi; accade, a volte, di dover “sommare” infiniti numeri reali o complessi; per poter definire una tale nuova operazione è stato introdotto, dai matematici, l’importante concetto di serie numerica. Questo capitolo è dedicato allo studio della teoria delle serie di numeri reali o complessi.

§1. Il carattere di una serie.

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali o complessi; se volessimo sommare tutti i numeri di tale successione la maniera più naturale di procedere per introdurre questa nuova operazione sarebbe quella di sommare i primi due elementi, quindi di aggiungere alla loro somma il terzo elemento, quindi di aggiungere alla somma dei primi tre elementi il quarto elemento, e così via, cercando di capire il comportamento di queste somme man mano che aumenta il numero degli elementi considerati. Questo procedimento empirico viene fissato nella seguente definizione

Definizione 1.1. *Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali o complessi (si noti che è possibile che tale successione non sia definita per alcuni valori di n , ma deve esserlo da un certo posto in poi); indichiamo con s_n la somma dei primi $n + 1$ elementi della successione, cioè $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$, definendo così un’altra successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, detta successione delle somme parziali. La coppia di successioni $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ si chiama *serie numerica*; per brevità, d’ora in poi, una serie sarà denotata con il simbolo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Se la successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad un numero S , diremo che la serie converge ed ha per somma S e scriveremo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S.$$

Se la successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ diverge, diremo che la serie diverge e scriveremo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty.$$

Se la successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ diverge positivamente (risp. negativamente), diremo che la serie diverge positivamente (risp. negativamente) e scriveremo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \quad \left(\text{risp.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty \right).$$

Se una serie converge o diverge essa viene detta regolare o determinata; in caso contrario si dice irregolare o indeterminata.

Studiare il *carattere* di una serie vuol dire cercare di determinare se la serie converge, possibilmente calcolandone la somma, o diverge o è indeterminata; a_n viene detto termine generale della serie.

Presentiamo, adesso, esempi di studio di serie, alcuni di fondamentale importanza

Esempio 1.1. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione costante. È facile vedere (la dimostrazione viene lasciata al lettore) che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge se e solo se ogni a_n vale zero (nel qual caso la somma della serie è zero), altrimenti diverge (nel caso reale positivamente o negativamente, a seconda del segno di a_n).■

Esempio 1.2. Data $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ consideriamo la serie, detta *serie telescopica*, seguente

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$$

la cui successione delle somme parziali ha il seguente termine generale $s_n = a_0 - a_{n+1}$ (infatti si ha $s_n = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n+1}) = a_0 - a_{n+1}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$); quindi il carattere di una tale serie è perfettamente determinato da quello della successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$; nel caso in cui tale successione converga, la somma della serie è, ovviamente, $a_0 - \lim_n a_n$.

La serie (di Mengoli) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ è un esempio di serie telescopica, poiché $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (quindi $a_n = \frac{1}{n}$ per $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$), che risulta convergente, poiché $\lim_n a_n = 0$, ed ha per somma 1.

Anche l'esame del carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ può essere svolto ricorrendo all'idea che sta alla base dello studio delle serie telescopiche; infatti, si ha (con $p \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{n=1}^p \frac{1}{2\sqrt{n}} \geq \sum_{n=1}^p \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^p [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}] = \sqrt{p+1} - 1 \xrightarrow{p \rightarrow \infty} +\infty. \blacksquare$$

Esempio 1.3. Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5n + 3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Dalla Teoria dei Polinomi (Capitolo 3) sappiamo che la funzione $\frac{x^2+5x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$ può essere decomposta in fratti semplici come segue

$$\frac{x^2 + 5x + 3}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right] \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, -1, -2, -3.$$

Segue da ciò che il generico elemento della successione delle somme parziali della serie data è

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{3}{k+2} + \frac{1}{k+3} \right] \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Tale elemento può essere scritto come segue

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) + \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} \right) \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) + \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{3} \right) \right] \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1. \end{aligned}$$

La serie assegnata risulta allora convergente con somma $\frac{5}{6}$. ■

Esempio 1.4. Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a q^n$, detta *serie geometrica* di ragione q (supponiamo $q \neq 1$, altrimenti ricadiamo nel caso descritto nell'Esempio 1.1); dal Capitolo 2 sappiamo che il generico termine della successione delle somme parziali è $s_n = a \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e, dal Capitolo 5, sappiamo che tale successione converge se e solo se $|q| < 1$ con limite $\frac{a}{1-q}$; possiamo concludere che la serie geometrica converge se e solo se la sua ragione verifica la condizione $|q| < 1$, nel qual caso la somma della serie è il numero $\frac{a}{1-q}$; se, invece, $a, q \in \mathbb{R}, q > 1$, la serie diverge positivamente se $a > 0$, negativamente se $a < 0$, mentre è indeterminata se $a, q \in \mathbb{R}, a \neq 0, q \leq -1$. ■

Vediamo come la serie geometrica può essere usata per trovare la frazione generatrice di un numero reale decimale infinito periodico con periodo non uguale a 9. Sia $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_p \overline{a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n}}$ il numero in esame; è noto (Capitolo 5, Esercizio 4.4) che α è il limite, per $h \rightarrow \infty$, della successione $(\alpha_h)_{h=1}^{\infty}$ dove $\alpha_h = a_0, a_1 a_2 \dots a_p \underbrace{a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n} a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n} \dots a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n}}_{h \text{ "blocchi" } a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n}}$, per ogni $h \in \mathbb{N}, h \geq 1$. D'altra parte

$$\alpha_h = \frac{a_0 a_1 a_2 \dots a_p}{10^p} + \frac{a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n}}{10^{p+n}} + \frac{a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n}}{10^{p+2n}} + \dots + \frac{a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n}}{10^{p+hn}};$$

quindi $\alpha_h - \frac{a_0 a_1 a_2 \dots a_p}{10^p}$ è il termine generale della successione delle somme parziali di una serie geometrica di ragione $\frac{1}{10^n}$; tale serie deve quindi convergere e, dopo aver fatto tendere h ad ∞ , deve aversi

$$\alpha - \frac{a_0 a_1 a_2 \dots a_p}{10^p} = \frac{a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n}}{10^{p+n}} \frac{1}{1 - \frac{1}{10^n}}$$

da cui segue che

$$\alpha = \frac{a_0 a_1 a_2 \dots a_p}{10^p} + \frac{a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n}}{10^p} \frac{1}{10^n - 1} =$$

$$\frac{a_0 a_1 a_2 \dots a_p (10^n - 1) + a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n}}{(10^n - 1) \times 10^p} = \frac{a_0 a_1 a_2 \dots a_p a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n} - a_0 a_1 a_2 \dots a_p}{\underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ volte}} \times 10^p}$$

che è la nota formula che dà la frazione generatrice.■

In maniera analoga (la dimostrazione viene lasciata al lettore) si può giustificare la seguente convenzione:
dato un numero decimale periodico di periodo 9, conveniamo di considerarlo uguale al numero decimale finito ottenuto eliminando il periodo ed aggiungendo una unità alla cifra che precede il periodo.■

Esempio 1.5. Consideriamo la serie seguente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, detta *serie armonica*. Per studiarne il carattere ricordiamo che si ha $(1 + \frac{1}{n})^n < e$, per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$; ne segue che

$$\log \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < 1 \Rightarrow \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1;$$

possiamo così scrivere che

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > \log 2 + \log \frac{3}{2} + \dots + \log \frac{n+1}{n} = \log (n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1;$$

poiché $\lim_n \log(n+1) = +\infty$, anche $\lim_n s_n = +\infty$; la serie armonica risulta, allora, divergente positivamente.■

Esempio 1.6. Si provi che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p}{n(n+1)(n+2)\dots(n+p)} = \frac{1}{p!}$, per ogni $p \in \mathbb{N}$.

Si ha

$$\frac{p}{n(n+1)(n+2)\dots(n+p)} = \frac{p+n-n}{n(n+1)(n+2)\dots(n+p)} =$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Da tale uguaglianza applicata alla successione delle somme parziali della serie in esame segue facilmente la tesi.■

Dal momento che il carattere di una serie dipende da quello della successione delle sue somme parziali è lecito attendersi che i risultati del Capitolo 5 possano avere importanti conseguenze per lo studio delle serie; questo è in effetti vero come si vedrà nel seguito. Enunciamo, per iniziare, il seguente risultato la cui semplice dimostrazione viene lasciata al lettore

Teorema 1.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a termini complessi converga è che convergano $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$. In questo caso si ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n + i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$.*

Da quanto osservato in questo primo risultato potrebbe sembrare che è sufficiente fissare al nostra attenzione solo sulle serie a termini reali, che quindi potrebbero sembrare più importanti di quelle a termini complessi; in realtà ciò non è vero, perché le due teorie sono entrambi importanti, con risultati analoghi, ma anche con molti risultati differenti ed in particolare le serie a termini complessi si sono rivelate anch'esse di fondamentale importanza nello sviluppo dell'Analisi Matematica e delle sue applicazioni; per accorgersi di ciò occorre però andare avanti con gli studi. Noi ci occuperemo, finché potremo, delle serie a termini complessi, trattando le serie reali solo quando è possibile ottenere risultati che non hanno analogo per le serie in $\mathbb{C}$.

Esercizio 1.1. Provare che le due serie reali

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n \sin nx$$

convergono per ogni $\rho \in [0, 1[$ ed ogni $x \in \mathbb{R}$, calcolandone la somma.■

Ragionando sulla idea intuitiva di serie convergente si è portati a pensare che affinché una serie converga deve necessariamente accadere che i suoi termini devono, definitivamente, essere “piccoli”; ma un attento esame dell'Esempio 1.5 rivela che ciò, anche se necessario per la convergenza di una serie, non è sufficiente, poiché, sebbene ogni termine della serie possa essere definitivamente “piccolo”, considerando un “gruppo” di termini consecutivi della serie la somma di tale gruppo di termini può essere “grande”, di modo che, dovendo sommare infiniti gruppi di questo tipo, la somma finale della serie non sarà un numero (con gli stessi ragionamenti dell'Esempio 1.5 il lettore dimostri che $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} > \log 2$, per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$); quanto qui osservato in maniera intuitiva è il contenuto del seguente

Criterio di Cauchy. *Sia data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Essa converge se e solo se vale la seguente Condizione di Cauchy*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > \nu, p \in \mathbb{N} \quad \text{risulta} \quad |a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \epsilon. \blacksquare$$

Dimostrazione. Il risultato è una conseguenza immediata del Criterio di Convergenza di Cauchy per le successioni (Capitolo 5) da applicare alla successione (s_n) delle somme parziali, una volta che si osservi che $a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p} = s_{n+p} - s_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}, n > 0, p \in \mathbb{N}$.■

Sappiamo già che la serie armonica non converge e quindi essa non può verificare la Condizione di Cauchy, come in realtà osservato prima dell'enunciazione del Criterio di Cauchy; è possibile dimostrare anche in altro

modo che la Condizione di Cauchy non è soddisfatta dalla serie armonica; infatti siano $\epsilon = \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $p = n$; si ha

$$\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right| > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ volte}} = \frac{1}{2} = \epsilon$$

che è quanto volevamo. ■

Una importante conseguenza è la seguente condizione necessaria per la convergenza di dimostrazione immediata, che viene pertanto lasciata al lettore

Corollario 1.2. *Sia data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Essa converge solo se $\lim_n a_n = 0$.*

Ribadiamo che il precedente Corollario 1.2 è solo una condizione necessaria per la convergenza come dimostra l'Esempio 1.5; infatti la serie ivi considerata diverge anche se il suo termine generale é infinitesimo.

Altra interessante conseguenza è data dal

Corollario 1.3. *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergente con (a_n) non crescente (risp. non decrescente) e $a_n \geq 0$ (risp. $a_n \leq 0$), per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $na_n \rightarrow 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo che (a_n) sia non crescente e $a_n \geq 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, lasciando al lettore la prova della tesi nel caso (a_n) non decrescente con $a_n \leq 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $n = 2h$, $h \in \mathbb{N}$; abbiamo così che

$$\frac{n}{2} a_n = h a_{2h} = \underbrace{a_{2h} + a_{2h} + \dots + a_{2h}}_{h \text{ volte}} \leq a_{2h} + \dots + a_{h+1};$$

applichiamo adesso il Criterio di Convergenza di Cauchy per le serie: fissato $\epsilon > 0$ esiste $\mu \in \mathbb{N}$ tale che, per $h > \mu$ e $p \in \mathbb{N}$ arbitrario, segue che $a_{h+1} + \dots + a_{h+p} < \epsilon$; scegliendo quindi $h > \mu$, $p = h$ dalla precedente formula otteniamo che $\frac{n}{2} a_n < \epsilon$. Adesso, sia $n = 2h + 1$, $h \in \mathbb{N}$; si ha

$$\frac{n}{2} a_n \leq (h+1) a_{2h+1} = \underbrace{a_{2h+1} + a_{2h+1} + \dots + a_{2h+1}}_{h+1 \text{ volte}} \leq a_{2h+1} + \dots + a_{h+1};$$

ripetendo il precedente ragionamento si ricava facilmente che $\frac{n}{2} a_n < \epsilon$ per h sufficientemente grande. La tesi è così acquisita. ■

Dal precedente risultato segue facilmente che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ non converge per alcun $\alpha \leq 1$ così come non converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^p n}{n^\alpha}$, per $p \in]0, \infty[$, $\alpha \in]0, 1]$.

Esercizio 1.2. Data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e fissato $k \in \mathbb{N}$, si chiama *serie resto k-esimo* la serie $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$, che viene usualmente denotata con R_k . Provare che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge (risp. diverge o è indeterminata) se e solo

se esiste una serie resto che converge (risp. diverge o è indeterminata) se e solo se ogni serie resto converge (risp. diverge o è indeterminata). Dimostrare, poi, che una serie converge se e solo se $\lim_k R_k = 0$. ■

Esercizio 1.3. Provare che il carattere di una serie non si altera se si cambiano un numero finito di termini della serie.■

I risultati contenuti nella successiva Proposizione 1.4 sono immediati dalla Definizione 1.1 e da noti risultati sulle successioni (Capitolo 5, §3 e §9)

Proposizione 1.4. *Siano date due serie numeriche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ e due numeri $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Si hanno i seguenti risultati*

- i) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ converge con somma $\alpha A + \beta B$
- ii) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ converge se $\beta = 0$, diverge se $\beta \neq 0$
- iii) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è regolare e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è indeterminata, allora $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ è indeterminata se $\beta \neq 0$
- iv) se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è reale e converge e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è reale e diverge positivamente (risp. negativamente), allora $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ diverge positivamente (risp. negativamente) se $\beta > 0$, diverge negativamente (risp. positivamente) se $\beta < 0$
- v) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sono reali e divergono positivamente (risp. negativamente) e $\alpha\beta > 0$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ diverge positivamente (risp. negativamente) se $\alpha > 0$, mentre diverge negativamente (risp. positivamente) se $\alpha < 0$
- vi) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è reale e diverge positivamente, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è reale e diverge negativamente e $\alpha\beta < 0$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ diverge positivamente se $\alpha > 0$, mentre diverge negativamente se $\alpha < 0$
- vii) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergono nulla si può dire sul carattere di $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ senza ulteriori ipotesi.

Osserviamo che la serie considerata nell'Esempio 1.3 può essere studiata attraverso la Proposizione 1.4 una volta che si osservi che essa può essere vista come combinazione lineare delle tre serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$.

§2. Serie a termini reali di segno costante.

In questo paragrafo fisseremo la nostra attenzione su una particolare classe di serie; analizzeremo dettagliatamente le serie a termini reali di segno costante poiché per esse sono stati ottenuti dai matematici tanti

buoni teoremi, che non hanno senso per le serie a termini complessi; grazie alla Proposizione 1.4 possiamo studiare solo le serie a termini non negativi, cosa che faremo nel seguito. L'importanza delle serie a termini reali di segno costante è dovuta al fatto che esse sono sempre regolari

Teorema 2.1. *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Allora essa converge oppure diverge positivamente.*

Dimostrazione. È facile vedere che la successione (s_n) delle somme parziali della serie è non decrescente; il Teorema sul Limite delle Successioni Monotone (Capitolo 5) implica allora che essa converge oppure diverge positivamente. ■

Esempio 2.1. Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, detta *serie armonica generalizzata*; dopo il Corollario 1.3 abbiamo notato che essa non può convergere, se $\alpha \leq 1$; dal Teorema 2.1 segue che tale serie deve divergere positivamente; analoga osservazione può essere fatta per la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^p n}{n^\alpha}$, dove $p \in]0, \infty[$, $\alpha \in]0, 1]$. ■

Esempio 2.2. *Si studi la successione $a_0 = a \in]0, +\infty[$, $a_{n+1} = a_n |\sin n|$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.*

Innanzitutto, notiamo che la successione è a termini non negativi e che

$$a_{n+1} = a_n |\sin n| < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

quindi (a_n) converge ad un certo numero $l \in [0, +\infty[$. Adesso, osserviamo che

$$a_{n+2} = a_{n+1} |\sin(n+1)| = a_n |\sin(n+1) \sin n| =$$

$$a_n \frac{1}{2} |\cos 1 - \cos(2n+1)| \leq a_n \frac{1 + \cos 1}{2};$$

passando al limite per $n \rightarrow \infty$ si ha

$$l \leq l \frac{1 + \cos 1}{2} \Rightarrow l = 0 \quad \text{poiché} \quad 0 < \frac{1 + \cos 1}{2} < 1.$$

Inoltre, per induzione si vede facilmente (la dimostrazione viene lasciata al lettore) che

$$a_{2n+2} \leq a_2 \left[\frac{1 + \cos 1}{2} \right]^n, \quad a_{2n+1} \leq a_1 \left[\frac{1 + \cos 1}{2} \right]^n \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

le ultime disuguaglianze implicano che, detta (s_n) la successione delle somme parziali della serie da studiare, si ha

$$s_{2n+2} \leq \sum_{h=0}^n (a_1 + a_2) \left[\frac{1 + \cos 1}{2} \right]^h \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

poiché, come già osservato, $0 < \frac{1+\cos 1}{2} < 1$, la precedente disuguaglianza implica che (s_{2n}) converge e quindi anche (s_n) converge; la serie data è allora convergente.■

Una prima fondamentale conseguenza della regolarità delle serie reali a termini di segno costante è il seguente importantissimo

Teorema di Confronto. *Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie a termini non negativi tali che esista $\nu \in \mathbb{N}$ per cui $a_n \leq b_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$. Allora,*

i) se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

ii) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.

Dimostrazione. Consideriamo i resti n -esimi $A_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} a_n, B_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} b_n$; è noto che essi hanno lo stesso carattere delle serie di cui sono resti e poiché la successione delle somme parziali di A_ν è regolare ed è maggiorata termine a termine dalla successione delle somme parziali di B_ν , che è regolare, la tesi segue dal Teorema di Confronto relativo alle successioni (Capitolo 5).■

Osservazione 2.1. Notiamo che se, nel precedente Teorema di Confronto, $a_n \leq b_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora (se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge ed in più) la somma di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non supera quella di $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.■

Applicando alcuni dei risultati finora provati dimostriamo che il numero "e" è un numero irrazionale, facendo uso della uguaglianza $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$, provata nel Capitolo 5. Per assurdo si supponga che $e = \frac{p}{q}$ dove $p, q \in \mathbb{N}$ con $q \geq 2$ (se fosse $q = 1$, avremmo che $e \in \mathbb{N}$; ma poiché $e \in]2, 3[$ ciò non può verificarsi); calcoliamo come segue, utilizzando anche l'Osservazione 2.1

$$0 \leq e - \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} = \frac{p}{q} - \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} = \sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} =$$

$$\frac{1}{(q+1)!} \left(1 + \frac{1}{q+2} + \frac{1}{(q+2)(q+3)} + \frac{1}{(q+2)(q+3)(q+4)} + \dots \right) \leq$$

$$\frac{1}{(q+1)!} \left(1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \dots \right) = \frac{1}{(q+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} =$$

$$\frac{1}{(q+1)!} \frac{q+1}{q} = \frac{1}{q!q}.$$

Ne viene che

$$0 \leq \frac{p}{q} - \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} = \frac{p}{q} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{q!} \right) \leq \frac{1}{q!q} \iff$$

$$0 \leq p(q-1)! - \left(q! + q! + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \dots + 1 \right) \leq \frac{1}{q} < 1;$$

poiché ognuna delle frazioni del tipo $\frac{q!}{h!}$, $h = 2, 3, \dots, q$, che compaiono nell'ultima relazione è un numero intero, abbiamo provato che esiste un numero intero compreso fra 0 ed 1, fatto che è impossibile. Quindi $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dalla precedente dimostrazione segue anche che $0 < e - \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{q!q}$, maggiorazione per mezzo della quale riusciamo a valutare la "velocità" con la quale la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ approssima il numero "e"; osserviamo, anche, che si hanno le seguenti disuguaglianze (valide per $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

$$e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{h!} - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n =$$

$$1 + 1 + \sum_{h=2}^{+\infty} \frac{1}{h!} - \left[1 + 1 + \sum_{h=2}^n \frac{n(n-1)\dots(n-h+1)}{h!} \frac{1}{n^h} \right] =$$

$$\sum_{h=2}^{+\infty} \frac{1}{h!} - \sum_{h=2}^n \frac{1}{h!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{h-1}{n} \right) =$$

$$\sum_{h=2}^n \frac{1}{h!} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{h-1}{n} \right) \right] + \sum_{h=n+1}^{+\infty} \frac{1}{h!} \geq \frac{1}{2!} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] = \frac{1}{2n};$$

da quanto adesso osservato segue che la successione $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$ approssima il numero "e" molto più lentamente di quanto non faccia la serie $\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{h!}$. Sempre utilizzando la disuguaglianza $0 < e - \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{q!q}$ calcoliamo il $\lim_q q \sin(2\pi e q!)$. Innanzitutto osserviamo che da essa segue subito che

$$2\pi e q! - 2\pi \left[\sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} \right] q! \leq \frac{2\pi}{q} \quad \forall q \in \mathbb{N}, q \geq 1;$$

d'altra parte $e \geq \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} + \frac{1}{(q+1)!}$ per ogni $q \in \mathbb{N}$, da cui segue che

$$\frac{2\pi}{q+1} \leq 2\pi e q! - 2\pi \left[\sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} \right] q! \quad \forall q \in \mathbb{N}, q \geq 1;$$

ne segue che

$$q \sin \frac{2\pi}{q+1} \leq q \sin \left\{ 2\pi e q! - 2\pi \left[\sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} \right] q! \right\} \leq q \sin \frac{2\pi}{q} \quad \forall q \in \mathbb{N}, q \geq 4;$$

poiché $\left[\sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} \right] q! \in \mathbb{N}$ si deduce che

$$q \sin \frac{2\pi}{q+1} \leq q \sin(2\pi e q!) \leq q \sin \frac{2\pi}{q} \quad \forall q \in \mathbb{N}, q \geq 4;$$

dal momento che

$$\lim_q q \sin \frac{2\pi}{q+1} = \lim_q q \sin \frac{2\pi}{q} = 2\pi$$

possiamo concludere che

$$\lim_q q \sin(2\pi e q!) = 2\pi. \blacksquare$$

Esempio 2.3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge perché $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. In modo analogo si può provare che la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge per $\alpha \geq 2$. ■

Il precedente Teorema di Confronto ha importanti, perché utili, corollari

Corollario 2.2. Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi tali che esista $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = l \in]0, +\infty[$.

Allora le due serie hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione. È sufficiente osservare che, fissato $\epsilon \in]0, l[$, si ha, definitivamente,

$$l - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \epsilon \Leftrightarrow (l - \epsilon)b_n < a_n < b_n(l + \epsilon)$$

applicando quindi il Teorema di Confronto e la Proposizione 1.4. ■

La serie armonica generalizzata viene spesso usata come *serie campione* per applicare il Teorema di Confronto o qualcuno dei suoi Corollari, come possiamo vedere nell'Esempio 2.4 successivo

Esempio 2.4. Si studi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left[1 + \frac{1}{n} \right]^\alpha - 1 \right)$, $\alpha \in]0, \infty[$.

Poiché, per uno dei limiti del Capitolo 5 (§7), si ha

$$\lim_n \frac{\left[1 + \frac{1}{n} \right]^\alpha - 1}{\frac{1}{n}} = \alpha \neq 0$$

la serie data ha lo stesso carattere della serie armonica e quindi diverge, qualunque sia il valore di α . ■

Corollario 2.3. Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi tali che $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0$. Allora valgono i seguenti fatti

i) se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

ii) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.

Dimostrazione. È sufficiente osservare che, definitivamente, si ha

$$\frac{a_n}{b_n} < 1 \Leftrightarrow a_n < b_n$$

applicando quindi il Teorema di Confronto. ■

In maniera analoga si dimostra il

Corollario 2.4. Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi tali che $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = +\infty$. Allora valgono i seguenti fatti

i) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge

ii) se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Infine, si ha la seguente conseguenza

Corollario 2.5. Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi tali che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, definitivamente. Allora valgono i seguenti fatti

i) se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

ii) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.

Dimostrazione. Per ipotesi esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n} \quad \forall n \geq \nu$$

da cui segue

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_\nu}{b_\nu} \Leftrightarrow a_{n+1} \leq \frac{a_\nu}{b_\nu} b_{n+1} \quad \forall n \geq \nu.$$

È allora sufficiente usare il Teorema di Confronto e la Proposizione 1.4 per avere la tesi. ■

Sul Teorema di Confronto si basa la dimostrazione dei seguenti Criteri

Criterio del Rapporto (D'Alembert). Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Supponiamo che esistano $\nu \in \mathbb{N}, K \in]0, 1[$ tali che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq K$, per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$; allora, la serie converge. Se, invece, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$, allora la serie diverge.

Dimostrazione. Dall'ipotesi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq K$ per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$, segue che

$$a_{n+1} \leq K a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \nu.$$

Procedendo per induzione è facile vedere (la dimostrazione viene lasciata al lettore) che

$$a_{n+1} \leq K^{n+1-\nu} a_\nu \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$$

disuguaglianza che significa che la serie data è maggiorata termine a termine definitivamente dalla serie di termine generale $K^{n+1-\nu} a_\nu$, che è una serie geometrica convergente perché con ragione $K \in]0, 1[$. Dal Teorema di Confronto segue la tesi, nel primo caso. Se, invece, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$, allora la successione (a_n) è definitivamente non decrescente e quindi non può convergere a zero; allora, la serie non può convergere e deve necessariamente divergere. ■

Esempio 2.5. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge perché si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (la dimostrazione viene lasciata al lettore).■

Il Criterio di D'Alembert ha il seguente corollario

Corollario 2.6. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Si hanno i seguenti fatti

i) se $L = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, allora la serie converge

ii) se $l = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, allora la serie diverge.

Dimostrazione. Sotto l'ipotesi (i), dalla prima proprietà caratteristica del massimo limite segue che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon \quad \forall n > \nu.$$

Poiché $L < 1$ possiamo scegliere $\epsilon \in]0, 1 - L[$ in modo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon < 1 \quad \forall n > \nu.$$

La tesi segue allora dal Criterio del Rapporto. Sotto l'ipotesi (ii), dalla prima proprietà caratteristica del minimo limite segue che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \epsilon \quad \forall n > \nu.$$

Poiché $l > 1$ possiamo scegliere $\epsilon \in]0, l - 1[$ in modo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \epsilon > 1 \quad \forall n > \nu.$$

La tesi segue allora dal Criterio del Rapporto.■

Osservazione 2.2. Nel caso (ii) del precedente Corollario 2.6 non è possibile sostituire il $\liminf$ con il $\limsup$ come dimostra il seguente esempio; sia data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ dove $a_n = \frac{1}{2^n}$ se n è pari e $a_n = \frac{1}{3^n}$ se n è dispari; poiché $a_n \leq \frac{1}{2^n}$ per ogni n , la serie considerata converge; tuttavia è facile vedere che $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.■

Esercizio 2.1 È possibile sostituire $\limsup$ con $\liminf$ nella (i) del Corollario 2.6 ?■

Esercizio 2.2. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi tale che esista $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$; è possibile derivare da tale fatto informazioni sul carattere della serie? ■

Esempio 2.6. Proviamo che $\lim_n \frac{A^n}{n^b} = +\infty$, per ogni $A > 1, b > 0$, utilizzando tecniche differenti da quelle adoperate nel Capitolo 5; consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^b}{A^n}$; grazie al Corollario 2.6 è facile vedere (la dimostrazione viene lasciata al lettore) che essa converge; quindi per il Corollario 1.2 il suo termine generale

è infinitesimo; ne segue facilmente l'asserto grazie ad una delle proprietà delle successioni (Capitolo 5). In maniera analoga si può dedurre il seguente (già noto) limite notevole $\lim_n \frac{A^n}{n!} = 0$, per $A \in \mathbb{R}$. ■

Dall'esame di questo Esempio 2.6 si deduce che una (possibile) strada da seguire per provare che una successione (a_n) è infinitesima è quella di provare la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Esercizio 2.3. Dire se la seguente affermazione è concettualmente corretta: “se $q \in]0, 1[$ la convergenza della serie geometrica di ragione q può essere stabilita solo attraverso l'uso del Corollario 2.6, cioè senza far uso del procedimento seguito nell'Esempio 1.4 o di altro procedimento”. ■

Esempio 2.7. Si studi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{2n}$, cercando di determinare i valori del parametro $x \in \mathbb{R}$ per i quali essa converge.

Notiamo che si ha convergenza per $x = 0$, mentre se $x \neq 0$ ogni termine della serie è positivo. Applichiamo, per $x \neq 0$, il Corollario 2.6 ottenendo

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} x^{2(n+1)}}{\frac{n!}{n^n} x^{2n}} = x^2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \rightarrow \frac{x^2}{e}$$

relazione da cui segue la convergenza della serie per $x \in]-\sqrt{e}, \sqrt{e}[$ e la sua divergenza per $|x| > \sqrt{e}$. Se $|x| = \sqrt{e}$, otteniamo la serie seguente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} e^n$ che non può convergere dal momento che $\left(\frac{n!}{n^n} e^n\right)_{n=1}^{\infty}$ è non decrescente, come si può provare facilmente (la dimostrazione viene lasciata al lettore), e quindi non può essere infinitesimo. ■

Criterio della Radice (Cauchy). Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Supponiamo che esistano $\nu \in \mathbb{N}, K \in]0, 1[$ tali che $\sqrt[n]{a_n} \leq K$, per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$; allora, la serie converge. Se, invece, esistono infiniti a_n tali che $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, allora la serie diverge.

Dimostrazione. Dall'ipotesi $\sqrt[n]{a_n} \leq K$ per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$ segue facilmente che $a_n \leq K^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$, cosicché possiamo affermare che la serie data è maggiorata termine a termine definitivamente dalla serie di termine generale K^n , che è una serie geometrica convergente perché con ragione $K \in]0, 1[$. Dal Teorema di Confronto segue la tesi, nel primo caso. Se, invece, $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ per infiniti indici, allora la successione (a_n) non può convergere a zero; la serie data non può convergere e deve necessariamente divergere. ■

Il Criterio della Radice di Cauchy ha il seguente corollario

Corollario 2.7. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Si hanno i seguenti fatti

- i) se $L = \limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, allora la serie converge
- ii) se $l = \limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, allora la serie diverge.

Dimostrazione. Sotto l'ipotesi (i), dalla prima proprietà caratteristica del massimo limite segue che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sqrt[n]{a_n} < L + \epsilon \quad \forall n > \nu.$$

Poichè $L < 1$ possiamo scegliere $\epsilon \in]0, 1 - L[$ in modo che

$$\sqrt[n]{a_n} < L + \epsilon < 1 \quad \forall n > \nu.$$

La tesi segue allora dal Criterio della Radice. Sotto l'ipotesi (ii), dalla prima proprietà caratteristica del minimo limite segue che per ogni $\epsilon > 0$ esistono infiniti termini della successione $(\sqrt[n]{a_n})$ maggiori di $L - \epsilon$; poichè possiamo scegliere $\epsilon > 0$ in modo che $L - \epsilon \geq 1$ la tesi segue dal Criterio della Radice. ■

Facendo uso del Corollario 8.5 del Capitolo 5 è facile vedere (la dimostrazione viene lasciata al lettore) che se sono verificate le ipotesi del Criterio del Rapporto sono anche verificate quelle del Criterio della Radice; ne viene che il Criterio della Radice è più generale di quello del Rapporto. Il seguente esempio mostra che il Criterio della Radice può essere applicato allo studio di serie alle quali non è applicabile quello del Rapporto, di modo che possiamo affermare che i due criteri non sono equivalenti.

Esempio 2.8. Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^n}$, che converge come può essere visto facilmente applicando il Corollario del Criterio della Radice; invece, il Criterio del Rapporto non è applicabile perchè $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ per ogni n dispari e $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}$ per ogni n pari. ■

Esercizio 2.4. È possibile sostituire $\limsup$ con $\liminf$ nel Corollario 2.7 ? ■

Esercizio 2.5. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi tale che esista $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e sia uguale ad 1. È possibile dire qualcosa sul carattere della serie ? ■

Dimostriamo adesso il seguente Criterio di Kummer, un risultato di natura molto generale, come vedremo nel corso del paragrafo; esso infatti estende il Criterio di D'Alembert ed implica anche la validità di altri interessanti criteri, il Criterio di Raabe ed il Criterio di Gauss; le condizioni contenute nel successivo risultato sono, inoltre, tanto generali da risultare anche necessarie per la convergenza e/o la divergenza di una serie a termini positivi, come sarà provato dopo

Criterio di Kummer. Sia data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a termini tutti positivi. Supponiamo che esistano una successione (p_n) di numeri positivi, un numero $p > 0$ ed un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tali che per $n > \nu$ si abbia

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \geq p.$$

Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente. Se, invece, per $n > \nu$ accade che

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \leq 0$$

e se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ diverge, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è divergente.

Dimostrazione. Supponiamo che esistano una successione (p_n) di numeri positivi, un numero $p > 0$ ed un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tali che per $n > \nu$ si abbia

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \geq p.$$

Allora si ha, sempre per $n > \nu$,

$$p_n a_n - p_{n+1} a_{n+1} \geq p a_{n+1} > 0$$

fatto che implica che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p} (p_n a_n - p_{n+1} a_{n+1})$ è una serie a termini positivi; studiandone la successione delle somme parziali, si vede facilmente che essa è superiormente limitata, cosicché la stessa serie converge; poiché il suo termine generale maggiore definitivamente quello della serie data, quest'ultima deve allora convergere. Questo conclude la prima parte della dimostrazione. Per completarla osserviamo che se, per $n > \nu$, risulta

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \leq 0$$

si ha allora, sempre per $n > \nu$,

$$\frac{p_n}{p_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Dal momento che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ diverge per ipotesi, si ottiene la divergenza della serie data grazie al Corollario 2.5. ■

Immediata conseguenza è il seguente utile

Criterio di Raabe. Sia data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a termini tutti positivi. Supponiamo che esistano un numero $K > 1$ ed un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tali che per $n > \nu$ si abbia

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq K.$$

Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente. Se, invece, per $n > \nu$ accade che

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$$

allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è divergente.

Dimostrazione. Per dimostrare la prima parte della tesi (caso della convergenza) basta applicare il Criterio di Kummer con $p_n = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $p = K - 1$. Per dimostrare la seconda parte della tesi (caso della divergenza) basta applicare il Criterio di Kummer con $p_n = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. ■

Come per il Criterio del Rapporto e della Radice è possibile dare un Corollario del Criterio di Raabe (la dimostrazione viene lasciata al lettore)

Corollario 2.8. Sia data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a termini tutti positivi. Supponiamo che si abbia

$$\liminf_n n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1$$

allora la serie è convergente. Se, invece, accade che

$$\limsup_n n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1$$

allora la serie è divergente.

Esercizio 2.6. Facendo uso delle serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dove

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & n \text{ pari} \\ 3^{-n} & n \text{ dispari} \end{cases}, \quad b_n = \begin{cases} 2^n & n \text{ pari} \\ 3^n & n \text{ dispari} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

dimostrare che nel Corollario 2.8 non è possibile sostituire $\liminf$ con $\limsup$ e $\limsup$ con $\liminf$. ■

Esempio 2.9. Studiamo attraverso il Corollario 2.8 la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, per $\alpha \in [0, +\infty[$, $\alpha \neq 1$; a tal fine si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{(n+1)^\alpha}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^\alpha - 1}{\frac{1}{n}} = \alpha;$$

possiamo quindi concludere che la serie armonica generalizzata converge se e solo se $\alpha > 1$, mentre diverge se e solo se $\alpha \leq 1$. ■

Esercizio 2.7. Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha - \log n}$ al variare del parametro reale positivo α . ■

I seguenti due esercizi, assieme ad alcuni dei successivi criteri, dimostrano la forza del Criterio di Kummer

Esercizio 2.8 Sia $\sum_{n=0}^{\infty}$ una serie a termini positivi per la quale esiste una costante $L \in]0, 1[$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L$. Provare che esistono una successione $(p_n) \subset]0, +\infty[$ ed un numero positivo p tali che $p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \geq p$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. ■

Esercizio 2.9 Sia $\sum_{n=0}^{\infty}$ una serie a termini positivi tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. Provare che esiste una successione $(p_n) \subset]0, +\infty[$ tale che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ diverge, mentre $p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \leq 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. ■

Possiamo, adesso, dimostrare un Criterio dovuto a Gauss che può essere usato abbastanza agevolmente nel caso in cui il Criterio di Raabe non abbia efficacia; anch'esso utilizza il Criterio di Kummer

Criterio di Gauss. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Siano $p \in]0, +\infty[$, $K \in \mathbb{R}$, (ψ_n) una successione limitata tali che, definitivamente, si abbia

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{K}{n} + \frac{\psi_n}{n^{1+p}}.$$

Allora, se $K > 1$ la serie converge, se $K \leq 1$ la serie diverge.

Dimostrazione. Innanzitutto supponiamo che sia $K \neq 1$; dall'ipotesi otteniamo che, definitivamente, si ha

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = K + \frac{\psi_n}{n^p};$$

poiché il secondo membro di tale uguaglianza ha limite uguale a K , possiamo concludere che

$$\lim_n n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = K;$$

la tesi segue adesso dal Corollario 2.8. Sia, adesso, $K = 1$. Applicheremo il Criterio di Kummer scegliendo $p_n = n \log n$ per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$; si ha

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} = n \log n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \log (n+1) = n \log n \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{\psi_n}{n^{1+p}} \right] - (n+1) \log (n+1) =$$

$$(n+1)[\log n - \log (n+1)] + \frac{\psi_n \log n}{n^p} = -\frac{n+1}{n} \log \left(\frac{n+1}{n} \right)^n + \frac{\psi_n \log n}{n^p} \longrightarrow -1$$

dal momento che $\frac{\log n}{n^p} \rightarrow 0$ (Capitolo 5, §4); quindi

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \leq 0 \quad \text{definitivamente;}$$

poiché $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ diverge (si veda il successivo Esempio 2.10), possiamo concludere che anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge. ■

Un altro interessante risultato, di diversa natura rispetto ai precedenti, è il seguente criterio dovuto ad Abel

Criterio di Abel. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi, la cui successione delle somme parziali viene denotata con (s_n) . Se $p \in \mathbb{Z} \cap]-\infty, 0]$, allora dalla convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ segue quella di $\sum_{n=-p}^{\infty} \frac{a_n}{s_{n+p}}$, mentre, se $p \in \mathbb{N}$, dalla convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ segue quella di $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s_{n+p}}$. Viceversa, se $\sum_{n=-p}^{\infty} \frac{a_n}{s_{n+p}}$, con $p \in \mathbb{Z} \cap]-\infty, 0]$, converge, allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. Se, invece, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s_{n+p}}$, con $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$, converge, nulla può dirsi sul carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Dimostrazione. Lasciamo al lettore il facile compito di provare la prima asserzione, sotto l'ipotesi di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Adesso, si supponga che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ converga e che, per assurdo, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverga; innanzitutto si osservi che per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{s_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{s_{n+2}} + \dots + \frac{a_{n+k}}{s_{n+k}} \geq 1 - \frac{s_n}{s_{n+k}} \quad (2.1).$$

Dal momento che $s_n \rightarrow +\infty$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ è possibile determinare $k_n \in \mathbb{N}$ tale che

$$2s_n \leq s_{n+k_n} \iff \frac{s_n}{s_{n+k_n}} \leq \frac{1}{2};$$

scrivendo la (2.1) per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per il corrispondente k_n si ricava che

$$\frac{a_{n+1}}{s_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{s_{n+2}} + \dots + \frac{a_{n+k_n}}{s_{n+k_n}} \geq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

disuguaglianza che contraddice la validità del Criterio di Cauchy per la convergenza. L'assurdo ottenuto permette di provare la seconda parte della tesi, quando $p = 0$; lasciamo al lettore la facile dimostrazione della tesi per i valori negativi di $p \in \mathbb{Z}$. Infine, si consideri la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2$ che diverge e si osservi che, al contrario, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s_{n+1}}$ converge e, quindi, anche $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s_{n+p}}$ converge, per $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$. La dimostrazione è conclusa. ■

Come già annunciato, si vuole, adesso, sottolineare che le condizioni contenute nel Criterio di Kummer sono anche necessarie per la convergenza o divergenza di serie a termini positivi, come la seguente Proposizione (che utilizza anche il precedente Criterio di Abel) dimostra

Proposizione 2.9. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Si supponga che essa sia convergente. Allora, posto $p_n = \frac{R_{n+1}}{a_n}, n \in \mathbb{N}$, (R_k resto k -esimo) si ha $p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} = 1$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se, invece, si suppone che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sia divergente, posto $p_n = \frac{s_n}{a_n}, n \in \mathbb{N}$, (s_k termine k -esimo della successione delle somme parziali) si ha $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ divergente ed anche $p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} = -1$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

La dimostrazione, molto semplice, viene lasciata al lettore.

Proponiamo, anche, il seguente interessante

Esercizio 2.10. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi convergente. Sia R_k il resto k -esimo della serie data. Provare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{R_n}$ diverge, mentre la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{R_n}}$ converge (si osservi che $\lim_n \frac{1}{\sqrt{R_n}} = +\infty$). ■

Altro fondamentale risultato per lo studio di ampie classi di serie a termini non negativi è il seguente

Criterio di Condensazione di Cauchy. Sia data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a termini non negativi tale che la successione (a_n) sia non crescente. Allora, la serie data ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Dimostrazione. Notiamo che dalle ipotesi fatte segue (la dimostrazione viene lasciata al lettore) che, per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, si ha

$$a_{2^n} + \dots + a_{2^{n+1}-1} \leq 2^n a_{2^n}$$

da cui segue facilmente che se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge anche $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ diverge; mentre, se $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. D'altra parte (la dimostrazione viene lasciata al lettore) si ha

$$a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n} \geq \frac{1}{2} 2^n a_{2^n}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$; ne viene facilmente che se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge, mentre, se $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ diverge anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge. ■

Esempio 2.10. Si studi la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ al variare di $\alpha, \beta \in]0, +\infty[$.

Poiché la serie data è una serie a termini positivi ed $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, possiamo utilizzare il Criterio di Condensazione di Cauchy; dobbiamo allora studiare la serie seguente

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\alpha \ln^\beta(2^n)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n n^\beta \ln^\beta 2}$$

che può essere agevolmente studiata con il Corollario 2.6; si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(2^{\alpha-1})^{n+1} (n+1)^\beta \ln^\beta 2}}{\frac{1}{(2^{\alpha-1})^n n^\beta \ln^\beta 2}} = \frac{1}{2^{\alpha-1}} \left(\frac{n}{n+1} \right)^\beta$$

da cui segue che

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2^{\alpha-1}}.$$

Ne viene che la serie in esame converge se $\alpha > 1$, con β arbitrario e diverge se $\alpha < 1$, con β arbitrario; se $\alpha = 1$ nulla possiamo dire utilizzando il Corollario 2.6; tuttavia, per $\alpha = 1$, sempre applicando il Criterio di Condensazione, si ricava facilmente che la serie da studiare ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \ln^\beta(2^n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^\beta(2^n)}$$

che, come si vede facilmente, ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata; concludiamo, quindi, che la serie da studiare converge per $\alpha = 1, \beta > 1$, mentre diverge per $\alpha = 1, \beta \leq 1$. ■

§3. Maggiorazione dell'errore.

I termini della successione delle somme parziali di una serie convergente forniscono una approssimazione del valore del numero somma della serie stessa; è chiaro che sarebbe auspicabile, in ogni caso, conoscere una stima di tale approssimazione, ottenere cioè quella che viene comunemente chiamata *maggiorazione dell'errore* che si commette sostituendo al valore della somma di una serie convergente un opportuno termine della successione delle somme parziali della stessa serie. In tale paragrafo vogliamo osservare che maggiorazioni simili possono essere ottenute per serie a termini positivi convergenti, qualora esse verifichino le ipotesi del Criterio del Rapporto o della Radice oppure quelle del Criterio di Raabe; infatti, un'analisi attenta delle loro dimostrazioni prova che nei primi due casi il resto n -esimo della serie viene maggiorato, definitivamente, dal termine generale di una serie geometrica, mentre nell'altro caso esso viene maggiorato, sempre definitivamente, dal termine generale di una serie telescopica, serie delle quali sappiamo calcolare la somma; cosicché possiamo maggiorare la quantità $|S - s_n|$, definitivamente, con quantità che permettono la valutazione dell'errore. I seguenti esempi illustrano quanto detto

Esempio 3.1. Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ e dimostriamone la convergenza attraverso l'uso del Criterio di Raabe; a tal fine si ha

$$n \left(\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{(n+1)^3}} - 1 \right) = n \frac{(n+1)^3 - n^3}{n^3} = \frac{3n^2 + 3n + 1}{n^2} > 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Dalla dimostrazione del suddetto Criterio segue che il termine generale della serie data è maggiorato dal termine generale della serie telescopica seguente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(n \frac{1}{n^3} - (n+1) \frac{1}{(n+1)^3} \right)$; allora detta S la somma di tale serie si ha

$$0 \leq S - \sum_{n=1}^p \frac{1}{n^3} = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = \frac{1}{(p+1)^2} \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

che è la maggiorazione richiesta. ■

Esempio 3.2. Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ ed applichiamo ad essa il Criterio del Rapporto; sappiamo già che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

ne viene che (si veda la dimostrazione del Criterio del Rapporto)

$$a_{n+p} \leq \frac{1}{2^p} a_n \quad \forall n, p \in \mathbb{N}$$

e quindi, detta S la somma di tale serie, si ha che

$$0 \leq S - \sum_{n=1}^p \frac{n!}{n^n} = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{(p+h)!}{(p+h)^{p+h}} \leq \frac{p!}{p^p} \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{1}{2^h} = \frac{p!}{p^p}$$

che è la maggiorazione richiesta. ■

Osserviamo anche che per avere una maggiorazione dell'errore è in realtà sufficiente essere in grado di maggiorare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il resto n -esimo della serie data con una serie della quale sappiamo calcolare la somma; in questo modo è stato provato che il resto q -esimo della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ può essere maggiorato con $\frac{1}{q!q}$; ne viene che vale la disuguaglianza seguente

$$0 \leq e - \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{q!q}$$

che, ancora una volta, permette di valutare l'errore che si commette sostituendo al reale valore di "e" il numero $\sum_{n=0}^q \frac{1}{n!}$; se, per esempio, si vuole calcolare "e" a meno di $\frac{1}{10^4}$ è sufficiente fare in modo che $\frac{1}{q!q} \leq \frac{1}{10^4}$, il che avviene per $q = 7$ (primo intero per cui la precedente disuguaglianza è vera); allora siamo sicuri che

$$0 \leq e - \sum_{n=0}^7 \frac{1}{n!} < \frac{1}{10^4}$$

ottenendo così l'approssimazione cercata.

Esempio 3.3. *Trovare una maggiorazione dell'errore per la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$, che, come è noto, converge.*

Notiamo che si ha

$$\frac{1}{n^6} \leq \frac{1}{n^4} \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n^4} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Per $p, q \in \mathbb{N}, q \geq p \geq 2$, otteniamo allora

$$\sum_{n=p}^q \frac{1}{n^6} \leq \sum_{n=p}^q \frac{1}{n^4} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{p^4} \sum_{n=p}^q \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) =$$

$$\frac{1}{p^4} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{q} \right) \xrightarrow{q \rightarrow \infty} \frac{1}{p^5 - p^4}.$$

Detta S la somma della serie si ha così

$$\left| S - \sum_{n=1}^p \frac{1}{n^6} \right| \leq \frac{1}{p^5 - p^4} \quad \forall p \in \mathbb{N}, p \geq 2. \blacksquare$$

§4. Convergenza assoluta. Proprietà Commutativa. Proprietà associativa..

Se i termini di una serie reale non sono di segno costante o se abbiamo da studiare una serie a termini complessi possiamo utilizzare pochi dei precedenti risultati. In questo paragrafo vogliamo, innanzitutto, illustrare una condizione sufficiente per la convergenza di serie generali.

Definizione 4.1. Data una serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diremo che essa converge assolutamente se converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Lo studio della serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ può essere effettuato più agevolmente dello studio della serie iniziale perché essa è a termini reali non negativi e quindi possiamo utilizzare un buon numero di Criteri; la convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ implica, poi, la convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ come il seguente risultato di immediata dimostrazione prova

Teorema 4.1. Ogni serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ assolutamente convergente è convergente.

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata conseguenza dell'applicazione del Criterio di Convergenza di Cauchy alle serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, una volta che si tenga conto della ben nota disuguaglianza

$$|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| \quad \forall n, p \in \mathbb{N}. \blacksquare$$

Esercizio 4.1. Provare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$. ■

Lo studio della serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ non ha, invece, alcuna utilità per lo studio di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, quando $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty$, come il seguente esempio dimostra

Esempio 4.1. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge, come dimostreremo fra poco, ma non assolutamente; consideriamo la successione (s_n) delle somme parziali di tale serie, cioè la successione di termine generale

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ed osserviamo che

$$s_{2n+2} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

poiché $\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+2}$ si deduce che

$$s_{2n+2} > s_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

quindi la successione (s_{2n}) è crescente e può solo convergere o divergere positivamente (Capitolo 5); in maniera analoga (la dimostrazione viene lasciata al lettore) si prova che la successione (s_{2n+1}) è decrescente e può solo convergere o divergere negativamente (Capitolo 5); d'altra parte

$$s_{2n+1} - s_{2n} = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

fatto da cui segue facilmente che né (s_{2n}) né (s_{2n+1}) possono divergere; quindi entrambi queste successioni devono convergere ed anzi esse devono convergere allo stesso numero; poiché ogni termine della successione

delle somme parziali appartiene a (s_{2n}) oppure a (s_{2n+1}) , possiamo concludere che (s_n) deve convergere che è quanto volevamo dimostrare. ■

Esempio 4.2. Determinare i valori del parametro $x \in \mathbb{R}$ per i quali converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) x^n$.

Innanzitutto, osserviamo che essa converge per $x = 0$; quindi consideriamo la serie dei valori assoluti ed applichiamo ad essa il Corollario 2.6

$$\frac{\frac{e^{\frac{1}{n+1}} - 1}{\frac{1}{n+1}} |x|^{n+1}}{\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} |x|^n} \rightarrow |x| \quad \text{se} \quad n \rightarrow \infty$$

(si noti che si è fatto uso di un limite notevole provato nel Capitolo 5); quindi la serie data converge se $|x| < 1$; possiamo, anche, dire che la serie diverge per $x > 1$, mentre per $x < -1$ si ha $n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) |x|^n \rightarrow \infty$, cosicché la serie non può convergere; studiamo adesso la serie per $|x| = 1$, osservando che $\lim_n \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1$; possiamo concludere che la serie non può convergere per $|x| = 1$. ■

Una nozione molto importante, strettamente legata a quella di assoluta convergenza, è la seguente

Definizione 4.2. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie numerica reale o complessa e sia $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una applicazione biunivoca; la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)}$ si chiama riordinamento della serie data. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ viene detta incondizionatamente convergente se ogni suo riordinamento converge (in questo caso, si dice anche che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ gode della proprietà commutativa).

Si ha il seguente importante risultato

Teorema 4.2. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie assolutamente convergente. Allora, essa è incondizionatamente convergente. Inoltre, ogni suo riordinamento ha la stessa somma.

Dimostrazione. Innanzitutto, supponiamo che $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una applicazione biunivoca e sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)}$ il relativo riordinamento; detta A la somma della serie, si ha che

$$a_{\pi(0)} + a_{\pi(1)} + \dots + a_{\pi(m)} \leq A \quad \forall m \in \mathbb{N};$$

quindi la successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)}$ è monotona e superiormente limitata; allora converge e il suo limite B non supera A ; d'altra parte, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ può essere vista come riordinamento della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)}$; si ottiene così che $B \geq A$, da cui segue che $A = B$. Sia, ora, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a termini di segno arbitrario; posto

$$a_n^+ = \max(a_n, 0), \quad a_n^- = \max(-a_n, 0), \quad a_{\pi(n)}^+ = \max(a_{\pi(n)}, 0), \quad a_{\pi(n)}^- = \max(-a_{\pi(n)}, 0) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

si ha

$$0 \leq a_n^+, a_n^- \leq |a_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dalla assoluta convergenza segue allora la convergenza delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+, \sum_{n=0}^{\infty} a_n^-.$$

Poiché $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)}^+$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)}^-$ sono riordinamento delle serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$, rispettivamente, esse convergono con somma uguale a quella delle serie di cui sono riordinamento, per la prima parte della dimostrazione. D'altra parte si ha

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, \quad a_{\pi(n)} = a_{\pi(n)}^+ - a_{\pi(n)}^-, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

uguaglianza da cui segue facilmente la tesi. ■

L'ipotesi di assoluta convergenza non può essere tolta dal precedente risultato come dimostra l'importantissimo

Teorema di Riemann-Dini. *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie reale convergente, ma non assolutamente convergente. Allora, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$ esiste un riordinamento $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)}$ di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ tale che, detta (σ_n) la successione delle somme parziali della serie riordinata, si ha*

$$\liminf_n \sigma_n = \alpha, \quad \limsup_n \sigma_n = \beta.$$

Dimostrazione. Le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+, \sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ sono entrambi regolari, ma nessuna delle due può convergere; infatti, se fossero entrambi convergenti, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sarebbe assolutamente convergente, mentre se una sola convergesse allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sarebbe divergente. Siano $(k_n), (h_n)$ sottosuccessioni crescenti della successione $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ tali che $a_{k_n} \geq 0, a_{h_n} < 0, n \in \mathbb{N}$; allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k_n} = +\infty, \sum_{n=0}^{\infty} a_{h_n} = -\infty$. Siano $(\alpha_n), (\beta_n) \subset \mathbb{R}$ tali che

$$\beta_0 > 0, \alpha_n \rightarrow \alpha, \beta_n \rightarrow \beta, \alpha_n \leq \alpha \leq \beta \leq \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Siano $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ i più piccoli interi tali che

$$\sum_{n=0}^{n_0} a_{k_n} > \beta_0, \quad \sum_{n=0}^{n_0} a_{k_n} + \sum_{n=0}^{m_0} a_{h_n} < \alpha_0;$$

siano, poi, $n_1, m_1 \in \mathbb{N}, n_1 > n_0, m_1 > m_0$, i più piccoli interi tali che

$$\sum_{n=0}^{n_0} a_{k_n} + \sum_{n=0}^{m_0} a_{h_n} + \sum_{n=n_0+1}^{n_1} a_{k_n} > \beta_1, \quad \sum_{n=0}^{n_0} a_{k_n} + \sum_{n=0}^{m_0} a_{h_n} + \sum_{n=n_0+1}^{n_1} a_{k_n} + \sum_{n=m_0+1}^{m_1} a_{h_n} < \alpha_1;$$

in generale, per ogni $p \in \mathbb{N}$, siano $n_p, m_p \in \mathbb{N}, n_p > n_{p-1}, m_p > m_{p-1}$, i più piccoli interi tali che

$$\sum_{n=0}^{n_0} a_{k_n} + \sum_{n=0}^{m_0} a_{h_n} + \sum_{n=n_0+1}^{n_1} a_{k_n} + \sum_{n=m_0+1}^{m_1} a_{h_n} + \dots + \sum_{n=n_{p-1}+1}^{n_p} a_{k_n} > \beta_p$$

$$\sum_{n=0}^{n_0} a_{k_n} + \sum_{n=0}^{m_0} a_{h_n} + \sum_{n=n_0+1}^{n_1} a_{k_n} + \sum_{n=m_0+1}^{m_1} a_{h_n} + \dots + \sum_{n=n_{p-1}+1}^{n_p} a_{k_n} + \sum_{n=m_{p-1}+1}^{m_p} a_{h_n} < \alpha_p.$$

Si ottiene quindi un riordinamento della serie data tale che

$$0 \leq \left[\sum_{n=0}^{n_0} a_{k_n} + \sum_{n=0}^{m_0} a_{h_n} + \sum_{n=n_0+1}^{n_1} a_{k_n} + \sum_{n=m_0+1}^{m_1} a_{h_n} + \dots + \sum_{n=n_{p-1}+1}^{n_p} a_{k_n} \right] - \beta_p =$$

$$\left[\sum_{n=0}^{n_0} a_{k_n} + \sum_{n=0}^{m_0} a_{h_n} + \sum_{n=n_0+1}^{n_1} a_{k_n} + \sum_{n=m_0+1}^{m_1} a_{h_n} + \dots + \sum_{n=n_{p-1}+1}^{n_p} a_{k_n} - a_{k_{n_p}} \right] - \beta_p + a_{k_{n_p}} \leq a_{k_{n_p}}$$

$$0 \leq \alpha_p - \left[\sum_{n=0}^{n_0} a_{k_n} + \sum_{n=0}^{m_0} a_{h_n} + \sum_{n=n_0+1}^{n_1} a_{k_n} + \sum_{n=m_0+1}^{m_1} a_{h_n} + \dots + \sum_{n=n_{p-1}+1}^{n_p} a_{k_n} + \sum_{n=m_{p-1}+1}^{m_p} a_{h_n} \right] = \alpha_p -$$

$$\left[\sum_{n=0}^{n_0} a_{k_n} + \sum_{n=0}^{m_0} a_{h_n} + \sum_{n=n_0+1}^{n_1} a_{k_n} + \dots + \sum_{n=n_{p-1}+1}^{n_p} a_{k_n} + \sum_{n=m_{p-1}+1}^{m_p} a_{h_n} - a_{h_{m_p}} \right] - a_{h_{m_p}} \leq -a_{h_{m_p}}$$

per ogni $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$; poiché $a_n \rightarrow 0$, si può concludere che esistono due estratte di (σ_n) convergenti, una ad α , l'altra a β . Inoltre, se si considera una qualunque altra estratta convergente di (σ_n) è facile vedere (la dimostrazione viene lasciata al lettore; si usi la minimalità degli indici n_p, m_p) che il suo limite non può essere inferiore ad α né superiore a β , cosicché la tesi è acquisita.■

Esercizio 4.1. Enunciare, e poi dimostrare, la versione complessa del Teorema di Riemann-Dini.■

Accanto alla proprietà commutativa è naturale considerare la proprietà associativa per le serie numeriche.

Definizione 4.3. Diremo che una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ gode della proprietà associativa se raggruppando in maniera arbitraria un qualunque numero finito di suoi termini consecutivi si ottiene una serie che ha lo stesso carattere di quella iniziale.

Le serie regolari godono della proprietà associativa, mentre essa non vale per le serie non regolari, come il seguente teorema ed i seguenti esempi provano

Teorema 4.3. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie regolare. Se (k_n) denota una successione crescente in $\mathbb{N}$, con $k_0 = 0$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \text{dove} \quad b_n = \sum_{p=k_n}^{k_{n+1}-1} a_p$$

ha lo stesso carattere della serie data; in particolare $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Dimostrazione. La tesi segue immediatamente dall'osservazione che la successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è una sottosuccessione della successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. ■

Esempio 4.3. Si consideri la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, che è indeterminata. È semplice vedere che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ converge ed ha somma 0, mentre la serie $a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{2n+1} + a_{2n+2})$ converge ed ha somma 1. ■

Esercizio 4.2. Data la serie dell'Esempio 4.3 dire se è possibile associare i suoi termini in modo che la serie così ottenuta sia indeterminata; dire anche se è possibile associare i suoi termini in modo che la serie così ottenuta sia divergente. ■

Esercizio 4.3. Dire se esiste una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ indeterminata tale che sia possibile associare in due differenti modi i suoi termini in modo da ottenere una volta una serie convergente ed una volta una serie divergente. ■

§5. Serie del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$

In questo paragrafo studieremo una classe di serie molto interessanti, cioè le serie del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ dove $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{C}$. Per lo studio di tali serie è particolarmente utile la seguente *Formula di Sommazione per Parti (di Abel)* (dove $A_n = \sum_{h=0}^n a_h, n \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{h=p}^q a_h b_h = \sum_{h=p}^{q-1} (A_h - A_{p-1})(b_h - b_{h+1}) + (A_q - A_{p-1})b_q \quad \forall q, p \in \mathbb{N}, p \geq 1, q \geq p$$

che utilizzeremo per provare alcuni Criteri di Convergenza; si ha, per $q > p \geq 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{h=p}^q a_h b_h &= \sum_{h=p}^q (A_h - A_{h-1})b_h = \sum_{h=p}^q A_h b_h - \sum_{h=p}^q A_{h-1} b_h = \\ &= \sum_{h=p}^q A_h b_h - \sum_{h=p-1}^{q-1} A_h b_{h+1} = \sum_{h=p}^{q-1} A_h (b_h - b_{h+1}) - A_{p-1} b_p + A_q b_q = \\ &= \sum_{h=p}^{q-1} A_h (b_h - b_{h+1}) + A_q b_q - \sum_{h=p}^{q-1} A_{p-1} (b_h - b_{h+1}) - A_{p-1} b_q = \\ &= \sum_{h=p}^{q-1} (A_h - A_{p-1})(b_h - b_{h+1}) + (A_q - A_{p-1})b_q \quad \forall q, p \in \mathbb{N}, p \geq 1, q \geq p. \end{aligned}$$

Dimostriamo subito il primo dei Criteri annunciati, notando che la Formula di Sommazione per Parti serve non solo per garantire la convergenza della serie data (sotto opportune ipotesi), ma anche interessanti maggiorazioni dell'errore per serie trattabili con i Criteri seguenti

Criterio di Dirichlet. Siano $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{C}$, $A_n = \sum_{h=1}^n a_h$ con (A_n) limitata da $M > 0$ e (b_n) a variazione totale limitata (cioè tale che $\sum_{h=0}^{\infty} |b_h - b_{h+1}|$ converga) ed infinitesima; allora la serie $\sum_{h=0}^{\infty} a_h b_h$ converge e si ha la seguente maggiorazione dell'errore

$$\left| \sum_{h=p}^{\infty} a_h b_h \right| \leq 2M \sum_{h=p}^{\infty} |b_h - b_{h+1}| \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione. Applicando la Formula di Sommazione per Parti si ha facilmente che

$$\left| \sum_{h=p}^q a_h b_h \right| \leq 2M \sum_{h=p}^q |b_h - b_{h+1}| + |b_q| \quad \forall p, q \in \mathbb{N}, q > p;$$

fissato, adesso, $\epsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{h=p}^q |b_h - b_{h+1}| < \frac{\epsilon}{4M} \quad \forall p, q \in \mathbb{N}, q > p > \bar{n}$$

$$|b_q| < \frac{\epsilon}{4M} \quad \forall q \in \mathbb{N}, q > \bar{n}$$

grazie alle ipotesi; da tali disuguaglianze segue la convergenza della serie data. La maggiorazione dell'errore si ottiene facendo tendere $q \rightarrow \infty$ nella Formula di Sommazione per Parti. ■

Esercizio 5.1. Dimostrare che ogni successione reale monotona e convergente ha variazione totale limitata. ■

Esercizio 5.2. Siano $\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ successioni reali assolutamente convergenti ed $\alpha \in]0, +\infty[$. Dimostrare che la successione $(a_n) \subset \mathbb{C}$, dove

$$a_n = \begin{cases} (1+x_n)^\alpha + i y_n & n = 2h, h \in \mathbb{N} \\ 1 & n = 2h+1, h \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ha variazione totale limitata. ■

Una importante conseguenza del Criterio di Dirichlet è il seguente Criterio di Leibnitz, che si utilizza molto spesso per determinare la convergenza di serie numeriche reali con termini di segno alternato

Criterio di Leibnitz. Sia (z_n) una successione di numeri reali non negativi, non crescente ed infinitesima. Allora la serie a segni alterni $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z_n$ converge. Inoltre, detta S la somma della serie e (s_n) la successione delle somme parziali, si ha la seguente maggiorazione dell'errore

$$|S - s_{p-1}| = \left| \sum_{h=p}^{\infty} (-1)^h z_h \right| \leq a_p \quad \forall p \in \mathbb{N}, p \geq 1.$$

Dimostrazione. È sufficiente applicare il Criterio di Dirichlet con $a_n = (-1)^n, b_n = z_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per avere la convergenza; inoltre, dalla Formula di Sommazione per Parti segue facilmente la maggiorazione richiesta dopo aver osservato che $A_h - A_{p-1}$ può assumere solo i valori $-1, 0, 1$. ■

Esercizio 5.3. Dare una dimostrazione del Criterio di Leibnitz basandosi sulla tecnica usata nello studio della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ dell'Esempio 4.1. Detta, come uso comune, (s_n) la successione delle somme parziali della serie in esame, dimostrare anche la maggiorazione dell'errore ottenuta nel suddetto Criterio utilizzando la monotonia di (s_{2n}) e di (s_{2n+1}) . ■

Criterio di Abel. Siano $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{C}, A_n = \sum_{h=0}^n a_h$ con (A_n) convergente, (b_n) a variazione totale limitata; allora la serie $\sum a_n b_n$ converge. Inoltre, si ha la seguente maggiorazione dell'errore

$$\left| \sum_{n=k}^{\infty} a_n b_n \right| \leq \sup_{h \in \mathbb{N}, h \geq k} |A_h - A_{k-1}| \left[2 \sum_{n=k}^{\infty} |b_n - b_{n+1}| + |b_k| \right]$$

Dimostrazione. Appliciamo la Formula di Sommazione per Parti ottenendo facilmente quanto segue

$$\left| \sum_{h=p}^q a_h b_h \right| \leq \sup_{h \geq p} |A_h - A_{p-1}| \left(\sum_{h=p}^q |b_h - b_{h+1}| + |b_q| \right);$$

la prima parte della tesi segue subito se osserviamo che la quantità in parentesi tonda è limitata, diciamo da $k > 0$, e che fissato $\epsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|A_h - A_{p-1}| < \frac{\epsilon}{K}$ per ogni $h > p - 1 > \bar{n}$. Per quanto riguarda la maggiorazione dell'errore, direttamente dalla maggiorazione e dalla semplice maggiorazione $|b_q| \leq \sum_{h=p}^q |b_h - b_{h+1}| + |b_p|$ si ricava che

$$\left| \sum_{h=p}^q a_h b_h \right| \leq \sup_{h \geq p} |A_h - A_{p-1}| \left(2 \sum_{h=p}^q |b_h - b_{h+1}| + |b_p| \right)$$

da cui, per $q \rightarrow \infty$, la seconda parte della tesi. ■

Esempio 5.1. Si studi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^\alpha}$ con i parametri $\theta \in [0, 2\pi], \alpha \in]0, +\infty[, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Se $\alpha > 1$ la serie converge assolutamente, poiché $|\frac{\sin n\theta}{n^\alpha}| \leq \frac{1}{n^\alpha}$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$. Se, adesso, $\alpha \leq 1$, supponendo $\theta \neq 2h\pi, h = 0, 1, 2$, possiamo applicare il Criterio di Dirichlet con $a_n = \sin n\theta$ e $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$, se riusciamo a far vedere che la successione di termine generale $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ è limitata (si noti che tale successione non può convergere per i valori di θ in esame, altrimenti $\lim_n \sin n\theta = 0$, mentre sappiamo che $(\sin n\theta)$ non converge (Capitolo 5, §9); quindi non possiamo applicare il Criterio di Abel); a tal fine si ha

$$\sum_{h=1}^n (\cos h\theta + i \sin h\theta) = \sum_{h=1}^n (\cos \theta + i \sin \theta)^h = (\cos \theta + i \sin \theta) \times$$

$$\frac{1 - (\cos \theta + i \sin \theta)^{n+1}}{1 - (\cos \theta + i \sin \theta)} = (\cos \theta + i \sin \theta) \frac{1 - (\cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta)}{1 - (\cos \theta + i \sin \theta)}$$

da cui segue

$$\left| \sum_{h=1}^n (\cos h\theta + i \sin h\theta) \right| = \frac{\sqrt{(1 - \cos(n+1)\theta)^2 + \sin^2(n+1)\theta}}{\sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta}} =$$

$$\frac{\sqrt{2 - 2 \cos(n+1)\theta}}{\sqrt{2 - 2 \cos \theta}} \leq \frac{2}{\sqrt{2 - 2 \cos \theta}} \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

poiché

$$\sum_{h=1}^n (\cos h\theta + i \sin h\theta) = \sum_{h=1}^n \cos h\theta + i \sum_{h=1}^n \sin h\theta$$

ricaviamo che

$$\left| \sum_{h=1}^n \sin h\theta \right| \leq \left| \sum_{h=1}^n (\cos h\theta + i \sin h\theta) \right| \leq \frac{2}{\sqrt{2 - 2 \cos \theta}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

da cui la richiesta limitatezza; osserviamo infine che se $\theta = 2h\pi$, $h = 0, 1, 2$, la serie converge perché con termine generale nullo. ■

Esercizio 5.4. Studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^\alpha}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$, $\alpha \in]0, +\infty[$. ■

Esempio 5.2. Sia (s_p) la successione delle somme parziali della serie armonica, cioè sia $s_p = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$; si studi la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{ns_n}$$

al variare del parametro reale x .

Osserviamo subito che per $x = 0$ la serie è convergente; possiamo quindi supporre $x \neq 0$ e studiare, per cominciare, la serie dei valori assoluti; ciò equivale ad analizzare la serie data per x positivo. Appliciamo il Corollario 2.6, ottenendo

$$\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)s_{n+1}}}{\frac{x^n}{ns_n}} = x \frac{n}{n+1} \frac{s_n}{s_{n+1}} = x \frac{n}{n+1} \left(1 - \frac{1}{(n+1)s_{n+1}} \right) \rightarrow x \quad \text{se } n \rightarrow \infty;$$

la serie data convergerà allora assolutamente per $|x| < 1$, mentre non convergerà (e quindi divergerà) per $x > 1$. Studiamo, adesso, la serie per $x = 1$; la serie data diverge, come segue subito applicando il Criterio di Abel del §2. Se adesso $x = -1$ otteniamo una serie a segni alterni, che converge per il Criterio di Leibnitz (la dimostrazione viene lasciata al lettore). Infine, proviamo che la serie data non converge per $x < -1$, dimostrando che per tali x il termine generale della serie non tende a zero; scriviamo il valore assoluto di tale termine come segue

$$\frac{|x|^n}{ns_n} = \frac{|x|^n}{n^2} \frac{1}{\frac{s_n}{n}}$$

ed osserviamo che $\frac{|x|^n}{n^2} \rightarrow \infty$ poiché $|x| > 1$ (si usi uno dei limiti notevoli studiati nel Capitolo 5), mentre $\frac{s_n}{n} \rightarrow 0$ grazie al Teorema di Cesaro relativo al limite della Media Aritmetica di una successione (Capitolo 5); quindi $\frac{|x|^n}{ns_n} \rightarrow +\infty$; possiamo così concludere che la serie data converge se e solo se $x \in [-1, 1]$. ■

Infine, dimostriamo un semplice, ma interessante, risultato relativo alle serie con termini di segno alterno

Proposizione 5.1. *Sia data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ a termini reali e si supponga che (a_n) è definitivamente monotona. Allora la serie data non può divergere.*

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che possiamo supporre che (a_n) sia monotona non solo definitivamente, grazie all'Esercizio 1.3. Si ha

$$s_{2n} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \dots - (a_{2n-1} - a_{2n}) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$s_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{2n} - a_{2n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

se (a_n) è non decrescente (risp. non crescente) si ha $s_{2n} \geq a_0$ (risp. $s_{2n} \leq a_0$), cosicché (s_n) non può divergere negativamente (risp. positivamente); se (a_n) è non decrescente (risp. non crescente) si ha $s_{2n+1} \leq 0$ (risp. $s_{2n+1} \geq 0$), cosicché (s_n) non può divergere positivamente (risp. negativamente). La tesi è così acquisita. ■

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{ns_n}$ dell'Esempio 5.2 è indeterminata per $x \leq -1$ (il lettore provi che la successione che genera tale serie è definitivamente monotona, per $|x| > 1$).

Esempio 5.3. *Si studi il carattere della successione $\left\{ \binom{\alpha}{n} \right\}_{n=0}^{\infty}$ e della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}$, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.*

Innanzitutto, consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \binom{\alpha}{n} \right|$ e la studiamo attraverso il Criterio di Raabe; per n tale che $n - \alpha > 0$ si ha

$$n \left[\frac{\left| \binom{\alpha}{n} \right|}{\left| \binom{\alpha}{n+1} \right|} - 1 \right] = n \left[\frac{n+1}{|\alpha-n|} - 1 \right] = n \left[\frac{n+1}{n-\alpha} - 1 \right] \rightarrow \alpha + 1;$$

quindi se $\alpha > 0$ la serie data converge assolutamente e si ha anche $\binom{\alpha}{n} \rightarrow 0$. Esaminiamo, adesso, il caso $\alpha < 0$; osserviamo, intanto, che

$$\frac{\left| \binom{\alpha}{n+1} \right|}{\left| \binom{\alpha}{n} \right|} = \frac{n-\alpha}{n+1} \geq 1 \Leftrightarrow \alpha \leq -1;$$

quindi, se $\alpha \leq -1$, la successione $\left\{ \left| \binom{\alpha}{n} \right| \right\}_{n=0}^{\infty}$ è non decrescente e quindi non infinitesima; allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}$ non può convergere, così come non può essere regolare la successione $\left\{ \binom{\alpha}{n} \right\}_{n=0}^{\infty}$ che, essendo

con termini di segno alterno (la dimostrazione viene lasciata al lettore), se fosse stata regolare avrebbe potuto aver solo limite nullo; inoltre, applicando la Proposizione 5.1 possiamo concludere che la serie data è indeterminata. Adesso proviamo che la successione da studiare è infinitesima per $-1 < \alpha < 0$; a tal fine osserviamo che $\left\{ \left| \binom{\alpha}{n} \right| \right\}_{n=0}^{\infty}$ è decrescente, come già provato, e che ogni suo termine è positivo se n è pari, mentre negativo se n è dispari; quindi $\left\{ \binom{\alpha}{2n} \right\}_{n=0}^{\infty}$ è decrescente, mentre $\left\{ \binom{\alpha}{2n+1} \right\}_{n=0}^{\infty}$ è crescente; allora esistono $l_p \in [0, +\infty]$, $l_d \in [-\infty, 0]$ tali che

$$l_p = \lim_n \binom{\alpha}{2n}, \quad l_d = \lim_n \binom{\alpha}{2n+1};$$

quindi

$$\liminf_n \binom{\alpha}{n} = l_d, \quad \limsup_n \binom{\alpha}{n} = l_p.$$

Usiamo adesso il Teorema 8.1 di Cesaro (Capitolo 5) per ottenere

$$\liminf_n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n+1)+1) - \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n+1)! - n!} \leq l_d \leq$$

$$l_p \leq \limsup_n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n+1)+1) - \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n+1)! - n!}$$

equivalente a

$$\liminf_n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \frac{\alpha-n-1}{n+1-1} \leq l_d \leq l_p \leq \limsup_n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \frac{\alpha-n-1}{n+1-1}$$

cioé

$$\liminf_n \binom{\alpha}{n} \frac{\alpha-n-1}{n} \leq l_d \leq l_p \leq \limsup_n \binom{\alpha}{n} \frac{\alpha-n-1}{n}$$

da cui segue che

$$-l_d \leq l_d \leq l_p \leq -l_p$$

e quindi che

$$l_d = l_p = 0;$$

quindi la successione data è infinitesima se e solo se $\alpha > -1$; nel caso $-1 < \alpha < 0$, da quanto sin qui ottenuto si ricava facilmente, attraverso il Criterio di Leibnitz, che la serie da studiare converge. ■

§6. Prodotto secondo Cauchy di due serie.

In questo paragrafo facciamo alcune osservazioni relative ad un particolare modo di moltiplicare due serie, dovuto a Cauchy e perciò detto *prodotto secondo Cauchy* di due serie numeriche.

Definizione 6.1. Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie numeriche; chiameremo *serie prodotto secondo Cauchy* delle due serie date la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ dove $c_n = \sum_{h=0}^n a_h b_{n-h}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

La definizione di prodotto secondo Cauchy potrebbe a prima vista sembrare “strana” ed inutilmente complicata; tuttavia chiediamo al lettore di accettarla, senza porsi, per il momento, troppe domande; quando si studieranno le serie di potenze (Capitolo 17) si capirà il vero motivo di tale definizione; per il momento possiamo limitarci ad osservare che il prodotto così definito ha alcune buone proprietà, che fra poco illustriamo. Avendo introdotto il prodotto di due serie è del tutto naturale chiedersi se il prodotto di due serie convergenti (assolutamente) è convergente (assolutamente) e se, una volta acquisita la convergenza della serie prodotto di due serie convergenti, la somma di tale serie prodotto non sia il prodotto delle somme delle due serie fattori; purtroppo (o fortunatamente ?) non tutto quanto è desiderabile accada si verifica, come il seguente esempio dimostra.

Esempio 6.1. Presentiamo un esempio di serie convergenti il cui prodotto secondo Cauchy non converge.

Sia data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ che è una serie convergente, poichè il suo termine generale verifica, come è facile vedere, tutte le ipotesi del Criterio di Leibnitz per le serie a termini di segno alterno. Proviamo che il prodotto secondo Cauchy di tale serie per se stessa non converge; ricordiamo che il termine generale della serie prodotto di due serie date $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è il numero $c_n = \sum_{h=0}^n a_h b_{n-h}$, cosicchè si ha

$$c_n = \sum_{h=0}^n a_h b_{n-h} = \sum_{h=0}^n \frac{(-1)^h}{\sqrt{h+1}} \frac{(-1)^{n-h}}{\sqrt{n-h+1}} = (-1)^n \sum_{h=0}^n \frac{1}{\sqrt{(h+1)(n-h+1)}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Operiamo adesso come segue

$$0 \leq (\sqrt{h+1} - \sqrt{n-h+1})^2 = (h+1) + (n-h+1) - 2\sqrt{(h+1)(n-h+1)} =$$

$$(n+2) - 2\sqrt{(h+1)(n-h+1)} \Leftrightarrow (n+2) \geq 2\sqrt{(h+1)(n-h+1)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{(h+1)(n-h+1)}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ogni addendo della somma $\sum_{h=0}^n \frac{1}{\sqrt{(h+1)(n-h+1)}}$ è allora minorato dalla stessa quantità, cioè $\frac{2}{n+2}$, cosicchè possiamo scrivere, per n pari,

$$c_n = \sum_{h=0}^n \frac{1}{\sqrt{(h+1)(n-h+1)}} \geq 2 \frac{n+1}{n+2};$$

se la serie prodotto convergesse, dovremmo avere $\lim c_n = 0$, fatto che sicuramente non può verificarsi, dal momento che $\liminf c_{2n} \geq 2$.■

Esercizio 6.1. Provare che la serie prodotto secondo Cauchy delle serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+2)}$ non converge.■

Visti gli esempi precedenti e visto che sarebbe naturale pretendere la convergenza della serie prodotto di due serie convergenti, ci si chiede quali condizioni vanno aggiunte alla semplice convergenza delle due serie per ottenere la convergenza della serie prodotto; enunceremo due di tali condizioni, la prima delle quali è forse la più nota

Teorema di Mertens. *Siano date due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergenti, una assolutamente. Allora la serie prodotto converge.*

Dimostrazione. Indichiamo con $(A_n), (B_n), (C_n)$ le successioni delle somme parziali delle serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, rispettivamente e con A la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Ricordiamo che, a norma di definizione, si ha

$$c_0 = a_0 b_0$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

.....

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

.....

Ne segue che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$C_n = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 + \dots +$$

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 =$$

$$a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + a_2 B_{n-2} + \dots + a_n B_0$$

e quindi

$$C_n = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + a_2 B_{n-2} + \dots + a_n B_0 =$$

$$a_0 (B_n - B + B) + a_1 (B_{n-1} - B + B) + a_2 (B_{n-2} - B + B) + \dots + a_n (B_0 - B + B) =$$

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)B + a_0(B_n - B) + a_1(B_{n-1} - B) + a_2(B_{n-2} - B) + \dots + a_n(B_0 - B) =$$

$$BA_n - a_0R_{n+1} - a_1R_n - a_2R_{n-1} - \dots - a_nR_1$$

dal momento che $BA_n \rightarrow BA$, la tesi sarà acquisita una volta che faremo vedere che $a_0R_{n+1} + a_1R_n + a_2R_{n-1} + \dots + a_nR_1 \rightarrow 0$; a tal fine si ha, intanto,

$$|a_0R_{n+1} + a_1R_n + a_2R_{n-1} + \dots + a_nR_1| \leq |a_0R_{n+1}| + |a_1R_n| + |a_2R_{n-1}| + \dots + |a_nR_1| \quad (6.1).$$

Per ipotesi sappiamo che esiste $A^* \in \mathbb{R}$ che è somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ e che $\lim_n R_n = 0$ (Esercizio 1.2) cosicché esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che $|R_n| \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; fissiamo, adesso, $\epsilon > 0$; esiste $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|R_n| < \frac{\epsilon}{A^* + L} \quad \forall n > \nu_1 \quad (6.2)$$

ed esiste $\nu_2 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + |a_{n+3}| + \dots + |a_{n+p}| < \frac{\epsilon}{A^* + L} \quad \forall n > \nu_2, p \in \mathbb{N}, p \geq 1 \quad (6.3);$$

applicando alla (6.1) le relazioni (6.2) e (6.3) otteniamo, scegliendo $n > \nu_1 + \nu_2$ (da cui $n - \nu_1 + 1 > \nu_2$)

$$|a_0R_{n+1} + a_1R_n + a_2R_{n-1} + \dots + a_nR_1| \leq (|a_0| |R_{n+1}| + \dots + |a_{n-\nu_1}| |R_{\nu_1+1}|) + (|a_{n-\nu_1+1}| |R_{\nu_1}| + \dots + |a_n| |R_1|) <$$

$$(|a_0| + \dots + |a_{n-\nu_1}|) \frac{\epsilon}{A^* + L} + L(|a_{n-\nu_1+1}| + \dots + |a_n|) \leq A^* \frac{\epsilon}{A^* + L} + L \frac{\epsilon}{A^* + L} = \frac{\epsilon}{A^* + L} (A^* + L) = \epsilon.$$

L'ultima disuguaglianza è quanto si voleva ottenere. ■

Teorema di Hardy. Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie convergenti con somma A, B , rispettivamente, e sia $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ la loro serie prodotto secondo Cauchy. Supponiamo che le successioni $(na_n), (nb_n)$ siano limitate. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge (ad AB).

La dimostrazione di tale Criterio viene postposta di poco, poiché essa utilizza alcune osservazioni che serviranno anche per provare il successivo Teorema di Abel.

Risultati totalmente positivi si ottengono, invece, quando si considera la convergenza assoluta o quando si cerca di calcolare la somma della serie prodotto (convergente) di due serie convergenti come i teoremi seguenti dimostrano

Teorema di Cauchy. Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie assolutamente convergenti. Allora la serie prodotto secondo Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge assolutamente.

Dimostrazione. Osserviamo che si ha

$$\sum_{h=0}^n |c_h| = \sum_{h=0}^n \left| \sum_{k=0}^h a_k b_{h-k} \right| \leq \sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^h |a_k| |b_{h-k}| \leq$$

$$\left(\sum_{h=0}^n |a_h| \right) \left(\sum_{h=0}^n |b_h| \right) \leq \left(\sum_{h=0}^{+\infty} |a_h| \right) \left(\sum_{h=0}^{+\infty} |b_h| \right) \in \mathbb{R}$$

da cui, per il Teorema di Confronto relativo alle successioni, segue la tesi. ■

Sotto le ipotesi dei tre precedenti risultati è possibile applicare il seguente Teorema di Abel che permette di conoscere la somma della serie prodotto di due serie convergenti, note le rispettive somme

Teorema di Abel. *Siano date due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergenti ad $A, B \in \mathbb{R}$, rispettivamente. Supponiamo che la serie prodotto secondo Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converga a $C \in \mathbb{R}$. Allora $AB = C$.*

Dimostrazione (dovuta a Cesaro). Con le stesse notazioni del Teorema di Mertens si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + a_2 B_{n-2} + \dots + a_n B_0$$

e quindi

$$C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_n = a_0 B_0 + a_0 B_1 + a_1 B_0 + a_0 B_2 + a_1 B_1$$

$$+ a_2 B_0 + \dots + a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + a_2 B_{n-2} + \dots + a_n B_0 =$$

$$A_n B_0 + A_{n-1} B_1 + A_{n-2} B_2 + \dots + A_1 B_{n-1} + A_0 B_n.$$

Dividiamo adesso per $n+1$ sia il primo che l'ultimo membro della precedente uguaglianza, ottenendo quindi

$$\frac{C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_{n-1} + C_n}{n+1} =$$

$$\frac{A_n B_0 + A_{n-1} B_1 + A_{n-2} B_2 + \dots + A_1 B_{n-1} + A_0 B_n}{n+1}.$$

Ricordando adesso il Teorema sulla Successione delle Medie Aritmetiche (Capitolo 5, §8) possiamo concludere che $\frac{C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_{n-1} + C_n}{n+1} \rightarrow C$, mentre ricordando il Teorema 8.3 del Capitolo 5 abbiamo che $\frac{A_n B_0 + A_{n-1} B_1 + A_{n-2} B_2 + \dots + A_1 B_{n-1} + A_0 B_n}{n+1} \rightarrow AB$, relazioni da cui segue che $AB = C$. ■

Possiamo, adesso, presentare la prova del già enunciato Teorema di Hardy; ad essa premettiamo i seguenti lemma

Lemma 6.1. *Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie convergenti con somma A, B , rispettivamente. Sia $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ la loro serie prodotto secondo Cauchy e sia (C_n) la sua successione delle somme parziali. Posto $\overline{C}_n = \sum_{k=1}^n k c_k$, si ha che $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge se e solo se $\lim_n \frac{\overline{C}_n}{n} = 0$.*

Dimostrazione. Si prova facilmente (la dimostrazione viene lasciata al lettore) che

$$\frac{\overline{C}_n}{n} = \frac{n+1}{n} C_n - \frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Ricordando la dimostrazione del Teorema di Abel di questo paragrafo si ha che

$$\lim_n \frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n} = AB.$$

Se, allora, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, la successione (C_n) converge proprio ad AB , per il Teorema di Abel appena citato; quindi, $\lim_n \frac{\overline{C}_n}{n} = 0$. Viceversa, se $\lim_n \frac{\overline{C}_n}{n} = 0$ esiste $\lim_n C_n$ e vale proprio AB . ■

Lemma 6.2. *Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie e sia $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ la loro serie prodotto secondo Cauchy; si denotino con $(A_n), (B_n), (C_n)$ la successioni delle somme parziali di $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$, rispettivamente. Posto $\overline{A}_n = \sum_{k=1}^n k a_k, \overline{B}_n = \sum_{k=1}^n k b_k, \overline{C}_n = \sum_{k=1}^n k c_k$, si ha*

$$\overline{C}_n + C_n = a_1 \overline{B}_n + a_2 \overline{B}_{n-1} + \dots + a_{n-1} \overline{B}_2 + a_n \overline{B}_1 + b_1 \overline{A}_n + b_2 \overline{A}_{n-1} + \dots + b_{n-1} \overline{A}_2 + b_n \overline{A}_1.$$

Dimostrazione. La dimostrazione sarà fatta per induzione su $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Per $n = 1$ la tesi è banale, poiché $\overline{C}_1 + C_1 = a_1 b_1 + a_1 b_1 = a_1 \overline{B}_1 + b_1 \overline{A}_1$. Sia $n = 2$; si ha

$$\begin{aligned} \overline{C}_2 + C_2 &= a_1 b_1 + 2(a_1 b_2 + a_2 b_1) + a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) = \\ &= [a_1(b_1 + 2b_2) + a_2 b_1] + [b_1(a_1 + 2a_2) + b_2 a_1] = a_1 \overline{B}_2 + a_2 \overline{B}_1 + b_1 \overline{A}_2 + b_2 \overline{A}_1. \end{aligned}$$

Supponiamo la tesi vera per n e la dimostriamo per $n+1$; sappiamo, allora, che $\overline{C}_n + C_n = a_1 \overline{B}_n + a_2 \overline{B}_{n-1} + \dots + a_{n-1} \overline{B}_2 + a_n \overline{B}_1 + b_1 \overline{A}_n + b_2 \overline{A}_{n-1} + \dots + b_{n-1} \overline{A}_2 + b_n \overline{A}_1$. Al fine di provare tale uguaglianza per $n+1$ si noti che

$$\begin{aligned} \overline{C}_{n+1} + C_{n+1} &= \overline{C}_n + (n+1)c_{n+1} + C_n + c_{n+1} = \\ &= a_1 \overline{B}_n + a_2 \overline{B}_{n-1} + \dots + a_{n-1} \overline{B}_2 + a_n \overline{B}_1 + b_1 \overline{A}_n + b_2 \overline{A}_{n-1} + \dots + b_{n-1} \overline{A}_2 + b_n \overline{A}_1 + \\ &+ (n+1)[a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots + (a_1 b_{n+1} + a_2 b_n + \dots + a_n b_2 + a_{n+1} b_1)] + \\ &+ [a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots + (a_1 b_{n+1} + a_2 b_n + \dots + a_n b_2 + a_{n+1} b_1)] = \\ &= a_1(\overline{B}_n + (n+1)b_{n+1}) + a_2(\overline{B}_{n-1} + n b_n) + \dots + a_n(\overline{B}_1 + 2b_2) + a_{n+1} b_1 + \\ &+ b_1(\overline{A}_n + (n+1)a_{n+1}) + b_2(\overline{A}_{n-1} + n a_n) + \dots + b_n(\overline{A}_1 + 2a_2) + b_{n+1} a_1 = \\ &= a_1 \overline{B}_n + a_2 \overline{B}_{n-1} + \dots + a_{n-1} \overline{B}_2 + a_n \overline{B}_1 + b_1 \overline{A}_n + b_2 \overline{A}_{n-1} + \dots + b_{n-1} \overline{A}_2 + b_n \overline{A}_1. \blacksquare \end{aligned}$$

Lemma 6.3. *Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie convergenti con somma A, B , rispettivamente e sia $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ la loro serie prodotto secondo Cauchy; si denoti con (C_n) la successione delle somme parziali di $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Posto $\bar{A}_n = \sum_{k=1}^n a_k, \bar{B}_n = \sum_{k=1}^n b_k, \bar{C}_n = \sum_{k=1}^n c_k$ e*

$$X_n = a_1 \bar{B}_n + a_2 \bar{B}_{n-1} + \dots + a_{n-1} \bar{B}_2 + a_n \bar{B}_1, Y_n = b_1 \bar{A}_n + b_2 \bar{A}_{n-1} + \dots + b_{n-1} \bar{A}_2 + b_n \bar{A}_1$$

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge se e solo se

$$\lim_n \frac{X_n + Y_n}{n} = 0.$$

Dimostrazione. Dal Lemma 6.2 segue che

$$\frac{C_n}{n} = -\frac{\bar{C}_n}{n} + \frac{X_n + Y_n}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge si ha $C_n \rightarrow AB$ (Teorema di Abel in questo paragrafo) ed anche $\frac{\bar{C}_n}{n} \rightarrow 0$ (Lemma 6.1); dalla precedente uguaglianza deriva che $\lim_n \frac{X_n + Y_n}{n} = 0$. Viceversa, sia $\lim_n \frac{X_n + Y_n}{n} = 0$; allora, $\frac{\bar{C}_n + C_n}{n} \rightarrow 0$; poiché come già osservato risulta $\lim_n \frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n} \rightarrow AB$, esiste una successione infinitesima (γ_n) tale che $C_1 + C_2 + \dots + C_n = n(AB + \gamma_n)$, per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$; ne segue che (la dimostrazione viene lasciata al lettore)

$$\frac{C_n}{n} = \frac{AB}{n} + \gamma_n - \frac{n-1}{n} \gamma_{n-1} \rightarrow 0$$

da cui deriva che $\frac{\bar{C}_n}{n} \rightarrow 0$ e quindi la tesi (Lemma 6.1).■

Finalmente, arriviamo a provare il Teorema di Hardy, che viene rinunciato

Teorema di Hardy. *Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie convergenti con somma A, B , rispettivamente, e sia $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ la loro serie prodotto secondo Cauchy. Supponiamo che le successioni $(na_n), (nb_n)$ siano limitate. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge (ad AB).*

Dimostrazione. Siano X_n, Y_n le quantità definite nel Lemma 6.3. Utilizzando la Formula di Sommazione di Abel con $p = 1, q = n, a_0 = b_0 = 0, b_k = \bar{B}_{n+1-k}$ si può scrivere che

$$X_n = b_1 A_n + 2b_2 A_{n-1} + \dots + nb_n A_1, Y_n = a_1 B_n + 2a_2 B_{n-1} + \dots + na_n B_1.$$

Se, poi, $\alpha_n = A_n - A, \beta_n = B_n - B$, per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, si ha $\alpha_n \rightarrow 0, \beta_n \rightarrow 0$; inoltre (la dimostrazione viene lasciata al lettore) per $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$X_n = A \bar{B}_n + b_1 \alpha_n + 2b_2 \alpha_{n-1} + \dots + nb_n \alpha_1, Y_n = B \bar{A}_n + a_1 \beta_n + 2a_2 \beta_{n-1} + \dots + na_n \beta_1.$$

Posto $X_{n,\alpha} = b_1\alpha_n + 2b_2\alpha_{n-1} + \dots + nb_n\alpha_1$, $Y_{n,\beta} = a_1\beta_n + 2a_2\beta_{n-1} + \dots + na_n\beta_1$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si ha

$$\frac{X_n + Y_n}{n} = A \frac{\bar{B}_n}{n} + B \frac{\bar{A}_n}{n} + \frac{X_{n,\alpha} + Y_{n,\beta}}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Dimostriamo, adesso, che $\frac{\bar{B}_n}{n} \rightarrow 0$, $\frac{\bar{A}_n}{n} \rightarrow 0$. Ovviamente, basterà provare una sola di tali relazioni di limite, poiché l'altra è analoga. Dalla convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ segue che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \nu$, $p \in \mathbb{N}$ si ha $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \frac{\epsilon}{3}$. Allora, si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{\bar{A}_{\nu+p}}{\nu+p} \right| &\leq \left| \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + \nu a_\nu}{\nu+p} \right| + \left| \frac{(\nu+1)a_{\nu+1} + (\nu+2)a_{\nu+2} + \dots + (\nu+p)a_{\nu+p}}{\nu+p} \right| \leq \\ &\left| \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + \nu a_\nu}{\nu+p} \right| + \frac{\nu+1}{\nu+p} |a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \dots + a_{\nu+p}| + \left| \frac{a_{\nu+2} + 2a_{\nu+3} + \dots + (p-1)a_{\nu+p}}{\nu+p} \right| \leq \\ &\left| \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + \nu a_\nu}{\nu+p} \right| + \frac{\epsilon}{3} + \underbrace{\frac{|a_{\nu+2} + \dots + a_{\nu+p}|}{\nu+p} + \frac{|a_{\nu+3} + \dots + a_{\nu+p}|}{\nu+p} + \dots + \frac{|a_{\nu+p-1} + a_{\nu+p}|}{\nu+p} + \frac{|a_{\nu+p}|}{\nu+p}}_{p-1 \text{ addendi}} < \\ &\left| \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + \nu a_\nu}{\nu+p} \right| + \frac{\epsilon}{3} + \frac{p-1}{\nu+p} \frac{\epsilon}{3} < \epsilon \quad \text{per } p \text{ sufficientemente grande.} \end{aligned}$$

Ma si ha anche

$$\left| \frac{X_{n,\alpha}}{n} \right| \leq \sup_n |n a_n| \frac{|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n|}{n} \rightarrow 0, \quad \left| \frac{Y_{n,\beta}}{n} \right| \leq \sup_n |n b_n| \frac{|\beta_1| + |\beta_2| + \dots + |\beta_n|}{n} \rightarrow 0.$$

Da tutte queste relazioni di limite discende che $\frac{X_n + Y_n}{n} \rightarrow 0$. Il Lemma 6.3 permette di concludere che la serie prodotto converge, come si voleva. ■

Esempio 6.2. Si determini una serie numerica avente per somma il numero e^2 .

Sappiamo già che $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$, con convergenza assoluta, perché la serie è a termini positivi; per i precedenti risultati di Abel e di Cauchy, la serie prodotto di tale serie per se stessa converge al numero e^2 : cerchiamo di individuare il termine generale c_n di tale serie prodotto; a tal fine si ha

$$c_n = \sum_{h=0}^n \frac{1}{h!} \frac{1}{(n-h)!} = \sum_{h=0}^n \frac{1}{n!} \frac{n!}{h!(n-h)!} = \frac{1}{n!} \sum_{h=0}^n \frac{n!}{h!(n-h)!} =$$

$$\frac{1}{n!} \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} = \frac{1}{n!} (1+1)^n = \frac{2^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

da cui segue che

$$e^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}. \blacksquare$$

Esercizio 6.2. Dimostrare che $e^p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p^n}{n!}$, per ogni $p \in \mathbb{N}, p \geq 3$. ■

Esempio 6.3. Come applicazione del risultato del precedente Esercizio 6.2 dimostriamo il seguente interessante limite

$$\lim_n \frac{n! e^n}{n^n} = +\infty.$$

Osserviamo che dalla uguaglianza provata nel suddetto Esercizio 6.2 segue che

$$e^p > \sum_{h=k}^s \frac{p^h}{h!} \quad \forall p, k, s \in \mathbb{N}, s \geq k.$$

Fissato $M \in \mathbb{N}$ scriviamo la precedente disuguaglianza per $p = k = n, s = n + M$, con $n \in \mathbb{N}$, ottenendo quindi

$$e^n > \frac{n^n}{n!} + \frac{n^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{n^{n+2}}{(n+2)!} + \dots + \frac{n^{n+M}}{(n+M)!} =$$

$$\frac{n^n}{n!} \left[1 + \frac{n}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{n^M}{(n+1)(n+2)\dots(n+M)} \right] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ed ancora

$$\frac{n! e^n}{n^n} > 1 + \frac{n}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{n^M}{(n+1)(n+2)\dots(n+M)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

disuguaglianza da cui segue che

$$\liminf_n \frac{n! e^n}{n^n} \geq \lim_n \left[1 + \frac{n}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{n^M}{(n+1)(n+2)\dots(n+M)} \right] = M + 1.$$

L'arbitrarietà di $M \in \mathbb{N}$ permette di acquisire quanto si voleva. ■

§7. Alcuni esempi ed esercizi.

In questo paragrafo finale vogliamo presentare alcuni interessanti esempi di studio di serie e quindi proporre alcuni esercizi al lettore

Esempio 7.1. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n}$ converge se $|a| > 1$ (la dimostrazione viene lasciata al lettore); vogliamo calcolarne la somma S . A tal fine si ha

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n} = \frac{1}{a} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{a^n} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{a^{n+1}}$$

e quindi

$$\frac{S}{a} = \frac{1}{a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{a^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^{n+1}};$$

ne viene che

$$S - \frac{S}{a} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{a^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^{n+1}} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}} = \frac{1}{a} \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{1}{a-1}$$

da cui segue facilmente che

$$S = \frac{a}{(a-1)^2}.$$

È possibile determinare una maggiorazione dell'errore per la serie qui studiata?■

Esempio 7.2. Dimostriamo che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} \right]$$

converge. Infatti, dalla nota disuguaglianza

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

segue che

$$\frac{1}{n+1} < \log \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

ne viene innanzitutto che la serie data è a termini positivi e quindi o converge o diverge positivamente; detta

(s_n) la successione delle sue somme parziali si ha

$$s_n + \frac{1}{n+1} = 1 - \left(\log \frac{2}{1} - \frac{1}{2}\right) - \left(\log \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) - \dots - \left(\log \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

disuguaglianza dalla quale segue che (s_n) non può divergere. La tesi è così acquisita. La somma di questa serie è solitamente denotata con γ e si chiama “*costante di Eulero-Mascheroni*.” Notiamo che il termine generale della successione delle somme parziali della serie in esame è $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$ (la dimostrazione viene lasciata al lettore) e che in alcuni testi la costante di Eulero-Mascheroni è definita proprio come il limite di tale successione. Dimostriamo, anche, una semplice maggiorazione dell'errore relativo a tale serie. Sfruttando il fatto che tale serie ha successione delle somme parziali crescente e le disuguaglianze $\frac{1}{n+1} < \log \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$, valide per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, possiamo scrivere

$$0 \leq s_{n+p} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} - \log(n+p+1) + \log(n+1) =$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} + \log \frac{n+1}{n+p+1} < \log \frac{n+1}{n} + \log \frac{n+2}{n+1} + \dots + \log \frac{n+p+1}{n+p} + \log \frac{n+1}{n+p+1} =$$

$$\log \frac{n+p+1}{n} + \log \frac{n+1}{n+p+1} = \log \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, p \in \mathbb{N};$$

ne segue che

$$|\gamma - s_n| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Utilizziamo quanto provato per calcolare la somma della serie studiata nell'Esempio 4.1; precisamente dimostreremo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \log 2.$$

Abbiamo già visto che tale serie converge, cosicché rimane solo da calcolare la sua somma. Si ha

$$s_{2n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} - \log(2n+1) + \log(2n+1) - 2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right] =$$

$$\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} - \log(2n+1) \right] - \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n+1) \right] - \log(n+1) + \log(2n+1) =$$

$$\left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - \log(2n+1) \right] - \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n+1) \right] + \log \left(\frac{2n+1}{n+1} \right) \longrightarrow \gamma - \gamma + \log 2 = \log 2. \blacksquare$$

Esempio 7.3. Studiamo la *serie ipergeometrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{x^n}{n!}$$

dove

$$\alpha_0 = 1, \alpha_n = \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

al variare di $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} \cap]-\infty, 0])$ ed $x \in \mathbb{R}$ (si noti che per $a = c, b = 1$ si ottiene la serie geometrica).

Per iniziare tale studio notiamo che

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\frac{a(a+1)\dots(a+n)b(b+1)\dots(b+n)}{c(c+1)\dots(c+n)}}{\frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)}} = \frac{(a+n)(b+n)}{c+n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1;$$

dal momento che

$$\frac{(a+n)(b+n)}{c+n} > 0 \quad \text{definitivamente}$$

possiamo affermare che gli α_n hanno definitivamente tutti lo stesso segno; grazie alla Proposizione 1.4 ed al risultato dell'Esercizio 1.3 non è restrittivo supporre che ogni α_n sia positivo, cosa che, quindi, faremo nel seguito. Iniziamo ora lo studio del carattere della serie data cercando di applicare il Corollario 2.6 alla serie $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{|x|^n}{n!}$, supponendo che $x \neq 0$, dal momento che è ovvia la convergenza della serie se $x = 0$; si ha

$$\frac{\alpha_{n+1} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\alpha_n \frac{|x|^n}{n!}} = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} |x| \longrightarrow |x| \quad (7.1);$$

quindi se $|x| < 1$ la serie converge assolutamente, mentre diverge se $|x| > 1$; se $|x| = 1$ si ottiene una serie a segni alterni nella quale la successione $\left(\alpha_n \frac{|x|^n}{n!}\right)$ risulta, definitivamente, crescente, grazie alla (7.1); è facile vedere che tutte le ipotesi della Proposizione 5.1 sono verificate, cosicché si può asserire che la serie ipergeometrica è indeterminata per $x = -1$. Rimane da analizzare il caso $|x| = 1$; iniziamo ponendo $x = 1$ ed cercando di applicare il Criterio di Gauss alla serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!}$; in un primo momento supponiamo che esistano $K \in \mathbb{R}, p \in]0, +\infty[$ e (ψ_n) limitata tali che, almeno definitivamente, si abbia

$$\frac{\frac{\alpha_n}{n!}}{\frac{\alpha_{n+1}}{(n+1)!}} = 1 + \frac{K}{n} + \frac{\psi_n}{n^{1+p}} \quad (7.2)$$

cercando quindi di determinare sia K che p e (ψ_n) ; dalla (7.2) deriva

$$\begin{aligned} \left[\frac{(c+n)(n+1)}{(a+n)(b+n)} - 1 \right] n &= K + \frac{\psi_n}{n^p} \iff \\ \left[\frac{n^2 + (c+1)n + c - ab - (a+b)n - n^2}{ab + (a+b)n + n^2} \right] n &= K + \frac{\psi_n}{n^p} \iff \\ \frac{(c+1-a-b)n^2 + (c-ab)n}{ab + (a+b)n + n^2} &= K + \frac{\psi_n}{n^p} \end{aligned} \quad (7.3);$$

passando al limite nella (7.3) per $n \rightarrow \infty$ si ricava che deve essere

$$K = c + 1 - a - b;$$

tenendo conto di ciò, sempre dalla (7.3) si deduce che

$$\begin{aligned} \frac{(c+1-a-b)n^2 + (c-ab)n - (c+1-a-b)n^2 - (c+1-a-b)ab - (c+1-a-b)(a+b)n}{ab + (a+b)n + n^2} &= \frac{\psi_n}{n^p} \iff \\ \frac{n[c-ab - (c+1-a-b)(a+b)] - (c+1-a-b)ab}{ab + (a+b)n + n^2} &= \frac{\psi_n}{n^p} \iff \\ \frac{n^{1+p}[c-ab - (c+1-a-b)(a+b)] - (c+1-a-b)ab n^p}{ab + (a+b)n + n^2} &= \psi_n \end{aligned}$$

da cui segue facilmente che, se $p \in]0, 1]$, (ψ_n) è convergente e quindi limitata; si può così concludere che, posto

$$K = c + 1 - a - b, p \in]0, 1], \frac{n^{1+p}[c - ab - (c + 1 - a - b)(a + b)] - (c + 1 - a - b)ab n^p}{ab + (a + b)n + n^2} = \psi_n,$$

il Criterio di Gauss può essere applicato; ne deriva che la serie ipergeometrica converge se $x = 1$ e $K = c + 1 - a - b > 1 \iff c > a + b$, mentre diverge se $x = 1$ e $K = c + 1 - a - b \leq 1 \iff c \leq a + b$. Vediamo, adesso, quale comportamento ha tale serie se $x = -1$; notiamo subito che per $c > a + b$ essa converge assolutamente (per quanto appena visto nel caso $x = 1$) ed allora occorre solo esaminare il comportamento della serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha_n}{n!}$ quando $c \leq a + b$; studiamo la monotonia di $(\frac{\alpha_n}{n!})$; a tal proposito si ha, definitivamente,

$$\frac{\frac{\alpha_{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{\alpha_n}{n!}} \geq 1 \iff \frac{ab + (a + b)n + n^2}{n^2 + (c + 1)n + c} \geq 1 \iff ab + (a + b)n + n^2 \geq n^2 + (c + 1)n + c \quad (7.4);$$

se $a + b > c + 1$ oppure se $a + b = c + 1, ab > c$ la (7.4) è vera definitivamente; quindi, in questo caso, $(\frac{\alpha_n}{n!})$ è definitivamente monotona non decrescente; poiché, come detto all'inizio, ogni α_n è stato supposto positivo definitivamente, concludiamo che $(\frac{\alpha_n}{n!})$ non può essere infinitesima e quindi la serie non può convergere (Corollario 1.2); dalla Proposizione 5.1 segue, poi, che la serie è indeterminata. Sia, adesso, $a + b = c + 1, ab = c$; la successione $(\frac{\alpha_n}{n!})$ è allora costante e quindi la serie data è, ovviamente, indeterminata. Infine, si supponga che $a + b < c + 1$ oppure che $a + b = c + 1, ab < c$ di modo che $(\frac{\alpha_n}{n!})$ sia non crescente definitivamente; proveremo che, in certi casi, la serie non può convergere utilizzando il Corollario 1.3 (dobbiamo quindi far vedere che $n \frac{\alpha_n}{n!} = \frac{\alpha_n}{(n-1)!}$ non è infinitesima), cosicché dalla Proposizione 5.1 seguirà che essa è indeterminata; si ha

$$\frac{\alpha_{n+1}}{n!} \geq \frac{\alpha_n}{(n-1)!} \iff ab + (a + b - c)n \geq 0 \quad (7.5);$$

la (7.5) è vera, definitivamente, se $a + b > c$ oppure se $a + b = c, ab > 0$; in questi casi la successione $(n \frac{\alpha_n}{n!})$ è definitivamente non decrescente e quindi, essendo definitivamente a termini positivi, non può essere infinitesima, come si voleva; per completare lo studio occorre solo esaminare il caso $a + b = c, ab < 0$. In questo caso si ha che la successione $(\frac{\alpha_n}{n!})$ è non crescente definitivamente; inoltre, anche la successione $(\frac{n \alpha_n}{n!}) = (\frac{\alpha_n}{(n-1)!})$ è, definitivamente, non crescente e quindi superiormente limitata da un certo $H \in \mathbb{R}$; ne viene che

$$0 \leq \frac{n \alpha_n}{n!} \leq H \iff 0 \leq \frac{\alpha_n}{n!} \leq \frac{H}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

da cui segue che $(\frac{\alpha_n}{n!})$ è infinitesima; per il Criterio di Leibnitz la serie ipergeometrica, con $a + b = c, ab < 0$, è dunque convergente. ■

Esempio 7.4. Consideriamo il prodotto secondo Cauchy della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ per se stessa e proviamo che la serie prodotto converge; detto c_n il termine generale della serie prodotto si ha

$$c_n = \sum_{h=0}^n \frac{(-1)^{h+1}}{h+1} \frac{(-1)^{n-h+1}}{n-h+1} = (-1)^{n+2} \sum_{h=0}^n \frac{1}{(h+1)(n-h+1)} = (-1)^n \sum_{h=0}^n \frac{1}{n+2} \left[\frac{1}{h+1} + \frac{1}{n-h+1} \right] =$$

$$\frac{(-1)^n}{n+2} \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n-1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + 1\right) \right] =$$

$$\frac{2(-1)^n}{n+2} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right] \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dimostriamo, adesso, che $c_n \rightarrow 0$; infatti, si ha

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)}{n+3 - (n+2)} = \frac{1}{n+2} \rightarrow 0;$$

quanto affermato segue allora dal Teorema 8.1 di Cesaro (Capitolo 5). Dimostriamo, adesso, che $|c_{n+1}| \leq |c_n|$, per ogni $n \in \mathbb{N}$; potremo quindi concludere, grazie al Criterio di Leibnitz, che la serie converge; si ha, per $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$,

$$\frac{2}{n+2} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right] \geq \frac{2}{n+3} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right] \iff$$

$$\frac{n+3}{n+2} \geq \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}} \iff 1 + \frac{1}{n+2} \geq 1 + \frac{\frac{1}{n+2}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}} \iff$$

$$1 \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}};$$

poiché l'ultima disuguaglianza è vera, possiamo concludere che la serie converge. ■

Esempio 7.5. Provare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ converge.

Innanzitutto cerchiamo di capire come sono fatti i termini della serie; osserviamo che, fissato $n \in \mathbb{N}$, i termini con indice compreso fra n^2 e $(n+1)^2 - 1$ hanno tutti lo stesso segno; quindi possiamo scrivere la serie nel seguente modo

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} - \frac{1}{13} - \frac{1}{14} - \frac{1}{15} + \dots +$$

$$(-1)^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{n^2} + (-1)^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{n^2+1} + \dots + (-1)^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{(n+1)^2-1} + \dots$$

che suggerisce di studiare la serie seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[\sqrt{n}]} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2-1} \right] \quad (7.6).$$

La serie (7.6) è una serie a segni alterni, dove $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2-1}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, è il termine generale di una successione non crescente ed infinitesima; infatti, dalla nota catena di disuguaglianze $\frac{1}{n+1} \leq \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, si deduce (la dimostrazione viene lasciata al lettore) che

$$0 \leq a_n \leq \log \frac{n^2+2n}{n^2-1} \rightarrow 0, \quad a_n \geq \log \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \geq \log \left(\frac{(n+2)^2-1}{(n+1)^2-1} \right) \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1,$$

da cui quanto asserito; per il Criterio di Leibnitz la serie (7.6) converge; notiamo adesso che la successione delle somme parziali (σ_n) della (7.6) è una estratta dalla successione delle somme parziali (s_n) della serie data; se S denota la somma della (7.6), proveremo che S è anche la somma della serie oggetto dell'Esempio; infatti, fissato $n^* \in \mathbb{N}, n^* \geq 1$, esiste $n_k \in \mathbb{N}, n_k \geq 1$, tale che $n_k^2 \leq n^* \leq (n_k+1)^2-1$; quindi (la dimostrazione viene lasciata al lettore)

$$|\sigma_{(n_k+1)^2-1} - s_{n^*}| \leq \frac{1}{n_k^2} + \frac{1}{n_k^2+1} + \dots + \frac{1}{(n_k+1)^2-1} \rightarrow 0 \quad (7.7);$$

dalla (7.7) segue facilmente che

$$s_n \rightarrow S.$$

Lasciamo il compito di derivare una maggiorazione dell'errore al lettore.■

Concludiamo, come al solito, presentando alcuni esercizi lasciati al lettore

Esercizio 7.1. Determinare il carattere delle serie seguenti

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4+\frac{1}{3})(4+\frac{1}{5}) \dots (4+\frac{1}{2n+1})}{2^n(2+\frac{1}{2})(2+\frac{1}{4}) \dots (2+\frac{1}{2n})}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{2^{4n-3}[(n-1)!]^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-3)^n}{n^{n+1}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} \right) \log(n+1), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)!+2^n}{(n+3)!+3^n} \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{2n}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}. \end{aligned}$$

Quando possibile si determinino maggiorazioni dell'errore.■

Esercizio 7.2. Dire per quali valori del parametro $x \in \mathbb{R}$ convergono le serie reali

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{2}{n} \right) x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{1+|x|^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{3^n+4^n} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{e} + \dots + \frac{1}{e^n} \right) x^{2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2 - \log n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log 2 - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \right] x^n.$$

Quando possibile si determinino maggiorazioni dell'errore.■

Esercizio 7.3. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+d)\dots(a+nd)}{b(b+d)\dots(b+nd)}$$

al variare dei parametri reali $a, b, d \in]0, +\infty[$. Se possibile si determini una maggiorazione dell'errore.■

Esercizio 7.4. Studiare la convergenza e la convergenza assoluta delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2 x^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\log \left(1 + \frac{1}{n} \right) + 1 \right]^2 - 1 \right\} x^n$$

al variare del parametro reale x . Quando possibile si determinino maggiorazioni dell'errore.■

Esercizio 7.5. Per ogni $x \in]-1, 1[$ trovare una serie avente per somma il numero $\frac{1}{(1-x)^2}$. È possibile determinare una maggiorazione dell'errore?■

Esercizio 7.6. Detta $f(x), x \in \mathbb{C}$, la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, dimostrare che

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{C}. \blacksquare$$

Esercizio 7.7. Trovare una serie la cui somma è il numero $\sqrt{e}$.■

Esercizio 7.8. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Provare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \quad \text{converge}.$$

È vero che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n} \quad \text{converge?}$$

È vero che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2} \quad \text{converge?}$$

Esercizio 7.9. Studiare il carattere delle serie seguenti

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[\frac{n}{4}]} \left[\frac{1}{n} - \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[\frac{n}{4}]} \left[\frac{1}{n} - \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] a_n \quad \text{dove} \quad a_n = \begin{cases} 1 & \text{n pari} \\ n^2 \sqrt{2} & \text{n dispari} \end{cases}$$

Esercizio 7.10. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi; supponiamo che esistano $K \in [0, 1[, p \in \mathbb{N}, p \geq 2, \nu \in \mathbb{N}$, tali che $\frac{a_{n+p}}{a_n} \leq K$, per ogni $n \geq \nu$; provare che la serie converge. ■

Esercizio 7.11. Sia $(d_n) \subset \mathbb{R}$ con $\inf d_n > 0$. Studiare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{1+n^\alpha d_n}$ al variare del parametro reale positivo α . ■

Esercizio 7.12. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad \text{dove} \quad a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} & n = 2h-1, h \in \mathbb{N}, h \geq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} & n = 2h, h \in \mathbb{N}, h \geq 1 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Esercizio 7.13. Data la successione seguente definita per ricorrenza ponendo

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = -\frac{a_n}{1+a_n^2} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. La serie in esame converge assolutamente? ■

Esercizio 7.14. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{4}{5}n \rfloor}}{n} \quad \blacksquare$$

Esercizio 7.15. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} - 1 \right) n^b$$

al variare dei parametri reali positivi a, b . ■

Esercizio 7.16. Dato $h \in \mathbb{N}$, determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^h}{(n+h)!} \quad \blacksquare$$