

Laboratorio di calcolo

AlpT (@freaknet.org)

February 4, 2008

Copyright ©2007 Andrea Lo Pumo aka AlpT <alpt@freaknet.org>. All rights reserved.

This document is free; you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or (at your option) any later version.

This document is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for more details.

You should have received a copy of the GNU General Public License along with this document; if not, write to the Free Software Foundation, Inc., 675 Mass Ave, Cambridge, MA 02139, USA.

1 Risoluzione di equazioni

1.1 Equazioni reciproche

Un'equazione $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ e' detta **reciproca di prima specie** quando

$$a_0 = a_n, \quad a_1 = a_{n-1}, \quad a_2 = a_{n-2}, \quad \dots$$

. E' invece di **seconda specie** quando

$$a_0 = -a_n, \quad a_1 = -a_{n-1}, \quad a_2 = -a_{n-2}, \quad \dots$$

.

Nota: quando il monomio e' nel caso $a_i = -a_i$, allora $a_i = 0$

1.1.1 Proprieta'

Nelle equazioni reciproche di prima specie, se esiste una radice α allora esiste la radice $\frac{1}{\alpha}$

1.1.2 Terzo grado prima specie

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

$x = -1$ e' una radice di questa equazione.

1.1.3 Terzo grado seconda specie

$$a_0x^3 + a_1x^2 - a_1x - a_0 = 0$$

$x = 1$ e' una radice di questa equazione.

1.1.4 Quarto grado prima specie

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Per risolvere questa equazione si adotta questo algoritmo:

1. Si divide tutto per x^2 :

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_0}{x^2} = 0$$

2. Si mettono in evidenza i coefficienti uguali:

$$a_0(x^2 + \frac{1}{x^2}) + a_1(x + \frac{1}{x}) + a_2 = 0$$

3. Si pone:

$$y = x + \frac{1}{x} \quad [1]$$

e

$$y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

4. Si riscrive l'equazione in funzione di y :

$$a_0(y^2 - 2) + a_1y + a_2 = 0$$

5. Si trovano le soluzioni della y

6. In base alla [1] si trovano le soluzioni della x .

1.1.5 Quarto grado seconda specie

$$a_0x^4 + a_1x^3 - a_1x - a_0 = 0$$

$x = 1$ e' una radice di questa equazione.

1.2 Disequazioni irrazionali

Dati due polinomi $A(x), B(x)$, le disequazioni:

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \quad (1)$$

$$\sqrt[n]{A(X)} > B(X) \quad (2)$$

Se n e' pari, si risolvono con questi sistemi equivalenti:

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B(x)^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(X)} > B(X) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A(X) \geq 0 \\ B(X) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) > B(x)^n \\ B(X) \geq 0 \end{cases}$$

1.3 Formule varie

1.

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$$

2.

$$x^n - y^n = (x-y) \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k \right)$$

3.

$$\arccos y = \frac{\pi}{2} - \arcsin y \quad \forall y \in [-1, 1]$$

Proof: $\arccos x, \arcsin x$ hanno le derivate opposte, quindi per il cor. di Lagrange, si ha che $\arccos x, -\arcsin x$ differiscono per una costante k . Scegliendo una particolare x (ad esempio $x = 0$), si scopre chi e' k , ovvero, $k = \frac{\pi}{2}$. $\square$

2 Funzioni iperboliche

Siano date le seguenti funzioni, che vengono chiamate funzioni trigonometriche iperboliche (vedi figura [2,pg.8])

$$\begin{aligned}\sinh x &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh x &: \mathbb{R} \longrightarrow [1, +\infty[\\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \tanh x &: \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[\\ \tanh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\end{aligned}$$

Le loro inverse sono:

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsinh} y &= \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \\ \operatorname{arccosh} y &= \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) & y \geq 1 \\ \operatorname{arctanh} y &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+y}{1-y} \right) & -1 < y < 1\end{aligned}$$

Valgono le seguenti identita' (**!nota!** ¹)

$$\begin{aligned}
&\cosh x > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \cosh x = 1 \quad \forall x = 0 \\
&\sinh x > 0 \quad \forall x > 0, \quad \sinh x < 0 \quad \forall x < 0, \quad \sinh x = 0 \quad \forall x = 0 \\
&\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \text{identita' fondamentale} \\
&\sinh(-x) = -\sinh(x) \\
&\cosh(-x) = \cosh(x) \\
&\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
&\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y \\
&\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x \\
&\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
&\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y \\
&\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x \\
&\cosh^2 x = \frac{1 + \cosh(2x)}{2} \\
&\sinh^2 x = \frac{-1 + \cosh(2x)}{2}
\end{aligned}$$

Dimostriamo l'identita' $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Proof:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \\
&= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^{x-x}}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2e^{x-x}}{4} = \\
&= \frac{4}{4} = 1
\end{aligned}$$

□

Calcoliamo l'inversa di $\sinh x$ (per l'inversa di $\cosh x$, $\tanh x$ si procede analogamente):

¹tutte le identita' date si possono ricavare da quelle trigonometriche utilizzando la regola di Osborne, che consiste nelle seguenti sostituzioni:

$$\begin{aligned}
\cos x &\longrightarrow \cosh x \\
\sin x &\longrightarrow \sinh x \\
\sin^2 x &\longrightarrow -\sinh^2 x
\end{aligned}$$

Ad esempio:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \longrightarrow \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Questa regola deve essere usata con le dovute cautele, ad esempio, anche se

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$$

non e' vero nella versione iperbolica:

$$\sinh\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \neq \sinh(x)$$

Proof: Dobbiamo risolvere la seguente equazione in x :

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

allora

$$2y = e^x - \frac{1}{e^x}$$

$$2ye^x = e^{2x} - 1$$

$$t^2 - 2yt - 1 = 0 \quad \text{con } t = e^x$$

$$t = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

$$e^x = y - \sqrt{y^2 + 1} \quad \text{imp. perche' } y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$$

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Rightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

□

Dimostriamo la formula di addizione:

Proof:

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{x+y} - \frac{1}{2}e^{-x-y} = \left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}\right)\left(\frac{1}{2}e^y + \frac{1}{2}e^{-y}\right) + \left(\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}\right)\left(\frac{1}{2}e^y - \frac{1}{2}e^{-y}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{x+y} - \frac{1}{2}e^{-x-y} = \frac{1}{2}e^{x+y} - \frac{1}{2}e^{-x-y} \Leftrightarrow 0 = 0$$

□

Da quest'ultima e dalla $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ si deduce la formula di sottrazione.

3 Punti angolosi e cuspidali

Data $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}, x_0 \in]a, b[$, continua in x_0 e $\nexists f'(x_0)$. Chiamiamo derivata destra questo limite:

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e la derivata sinistra:

$$\beta = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

3.0.1 Punto angoloso

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$, allora $p_0 = (x_0, f(x_0))$ viene chiamato *punto angoloso* e le rispettive tangenti destra e sinistra sono:

$$y - f(x_0) = \alpha(x - x_0)$$

$$y - f(x_0) = \beta(x - x_0)$$

Ad esempio, $f(x) = |x|$, $(0, |0|)$ e' un punto angoloso e le tangenti destra e sinistra sono $y = x$, $y = -x$.

3.0.2 Punto angoloso con tg distinte

Se $\alpha = \pm\infty, \beta \in \mathbb{R}$ (o viceversa), allora $p_0 = (x_0 f(x_0))$ viene chiamato *punto angoloso con tangenti distinte* e le rispettive tangenti destra e sinistra sono:

$$y - f(x_0) = \alpha(x - x_0)$$

$$x = x_0$$

(o viceversa)

Ad esempio,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ x^2 & \leq 0 \end{cases}$$

$(0, 0)$ e' il punto angoloso e le tangenti sono gli assi cartesiani.

3.0.3 Punto cuspidale

Se $\alpha = \pm\infty, \beta = -\alpha$ (cioe' sono tutte e due infiniti ma con segno opposto), allora $p_0 = (x_0 f(x_0))$ viene chiamato *punto cuspidale* per f . e le rispettive tangenti destra e sinistra sono:

$$x = x_0$$

$$x = x_0$$

Ad esempio,

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

$(0, 0)$ e' il punto cuspidale e $\alpha = +\infty, \beta = -\infty$.

3.0.4 Punto di flesso

Se $\alpha = \beta = \pm\infty$, allora $p_0 = (x_0 f(x_0))$ viene chiamato *punto di flesso a tg verticale* per f e le rispettive tangenti destra e sinistra (verticali) coincidono. Ad esempio,

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$(0, 0)$ e' il punto di flesso e $\alpha = \beta = +\infty$

3.1 Lagrange e derivata destra e sinistra

Data $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[\setminus \{x_0\}$, dove $x_0 \in]a, b[$, allora valgono per Lagrange le seguenti proprieta':

1.

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

Ovvero la derivata destra di x_0 e' uguale a $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

Proof: Considerando il teorema di Lagrange, per le $x > x_0$, abbiamo:

$$\exists c \in]x_0, x[: \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$$

Quando $x \rightarrow x_0+$, per il teorema del confronto, anche $c \rightarrow x_0+$, quindi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{c \rightarrow x_0^+} f'(c)$$

Ovviamente questo vale solo se $\exists \lim_{c \rightarrow x_0^+} f'(c)$. □

2.

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$$

Ovvero la derivata sinistra di x_0 e' uguale a $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$$

3. Se i due limiti di sopra sono equivalenti, allora:

$$\begin{aligned} \exists \text{finito } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = l &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &\Rightarrow \exists f'(x_0) = l \end{aligned}$$

4 Appendice

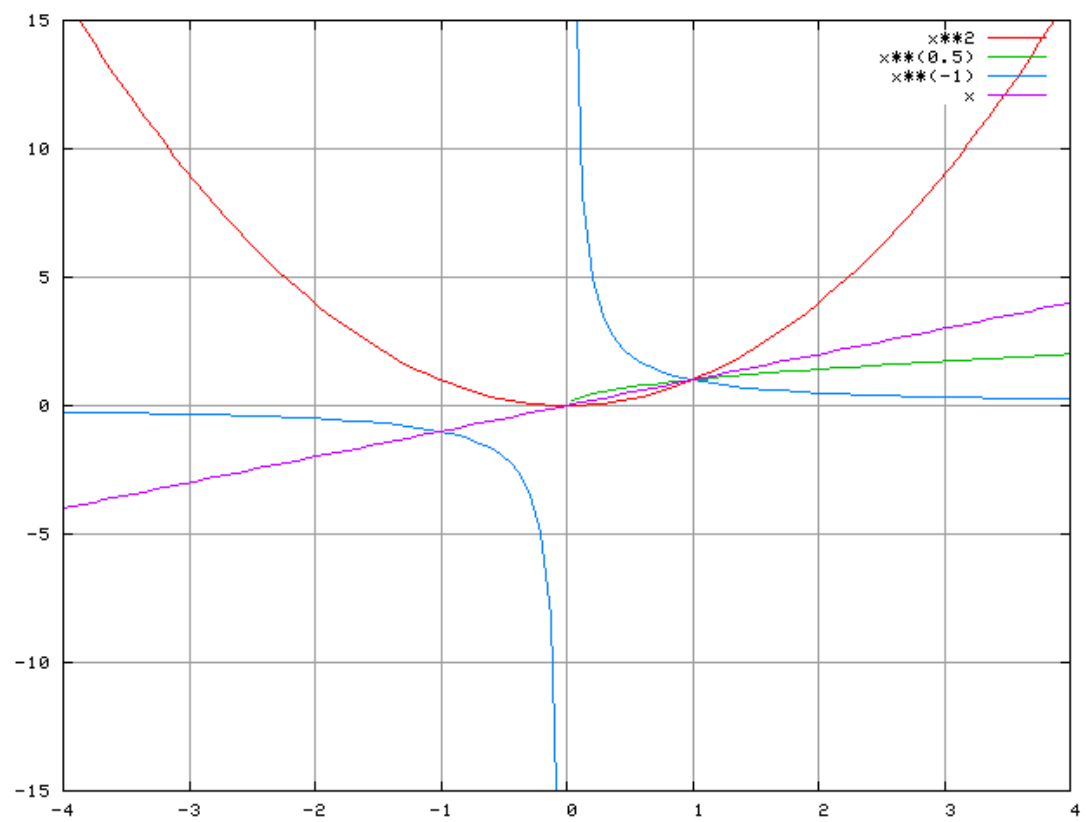


Figure 1: Potenze

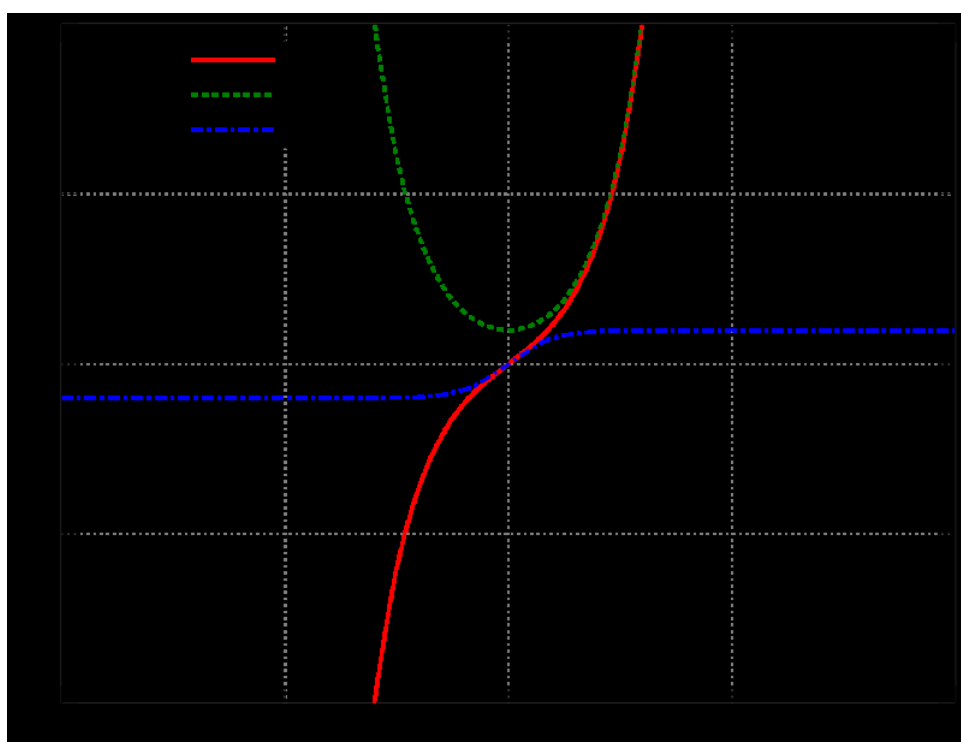


Figure 2: Funzioni trigonometriche iperboliche