

Analisi I

AlpT (@freaknet.org)

<http://freaknet.org/alpt>

September 14, 2013

Abstract

Questo testo e' una rielaborazione personale degli appunti presi durante il corso di Analisi I, tenuto dalla Prof.ssa Di Vincenzo presso il dipartimento di Matematica, Catania, A.A. 2006/2007.

Nota bene: questo e' uno dei miei primi appunti, quindi e' molto probabile che troverai numerose sviste. Saro' ben lieto di correggere ogni eventuale errore che mi comunicherai.

Buon lettura.

~ ~

Copyright ©2012 Andrea Lo Pumo aka AlpT <alpt@freaknet.org>. All rights reserved.

This document is free; you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or (at your option) any later version.

This document is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for more details.

You should have received a copy of the GNU General Public License along with this document; if not, write to the Free Software Foundation, Inc., 675 Mass Ave, Cambridge, MA 02139, USA.

Contents

1	Operazioni	1
1.1	Valore assoluto	1
1.1.1	Proprieta'	1
1.2	Logaritmi	2
1.2.1	Proprieta'	2
2	Limiti	3
2.1	Proprieta' d'Archimede	3
2.2	Densita'	3
2.2.1	Proprieta'	4
2.3	Partizione di $\mathbb{R}$	5
2.3.1	Proprieta'	5
2.4	X limitato superiormente (maggiorante)	5
2.5	X limitato inferiormente (minorante)	5
2.6	X limitato	5
2.7	Massimo di X	6
2.7.1	Proprieta'	6
2.8	Minimo di X	6
2.8.1	Proprieta'	6
2.9	Estremo superiore	6
2.9.1	Proprieta'	6
2.10	Estremo inferiore	8
2.10.1	Proprieta'	8
2.11	X illimitato superiormente	10
2.12	X illimitato inferiormente	10
2.13	Insiemi numerici separati	10
2.13.1	Proprieta'	10
2.14	Insiemi contigui	10
2.14.1	Proprieta'	11
3	I numeri Complessi	11
3.1	$\mathbb{C}$	11
3.1.1	Proprieta'	12
3.2	Addizione	12
3.2.1	Proprieta'	12
3.3	Moltiplicazione	12
3.3.1	Proprieta'	12
3.4	Forma algebrica	13
3.5	Coniugato di z	13
3.5.1	Proprieta'	13
3.6	Divisione	13
3.7	Rappresentazione cartesiana	13
3.8	Modulo	13
3.8.1	Proprieta'	13
3.9	Argomento	14
3.10	Forma trigonometrica	14
3.10.1	Proprieta'	14

3.10.2	Moltiplicazione	14
3.10.3	Divisione	14
3.10.4	Potenza	14
3.10.5	Radice n-esima	14
4	Funzioni	15
4.1	Funzione limitata	15
4.2	Massimo e punto di massimo	15
4.3	Minimo e punto di minimo	15
5	Successioni	15
5.1	Limite di successione	16
5.2	Unicità del limite	16
5.3	Permanenza del segno	16
5.4	Successione convergente e limitata	17
5.5	Limite di successioni prodotto	17
5.5.1	Successione infinitesima per una successione limitata	17
5.6	Teorema del limite assoluto	18
5.7	Successione infinitamente grande	18
5.8	Operazioni con i limiti	18
5.9	Successioni divergenti	19
5.9.1	Successione somma	19
5.9.2	Successione prodotto	19
5.9.3	Successione reciproca	20
5.9.4	Successione quoziente	20
5.9.5	Successione esponenziale	20
5.9.6	Forme indeterminate	21
5.10	Successioni monotone	21
5.10.1	Proprietà	21
5.11	Teoremi di confronto	21
5.11.1	Confronto di successioni convergenti	21
5.11.2	Confronto di successioni divergenti	21
5.12	Successione estratta	22
5.12.1	Esempio	22
5.12.2	Teorema sulle succ. estratte	22
5.13	Teorema di Bolzano-Weierstrass	22
5.14	Criterio di convergenza di Cauchy	22
6	Limiti di funzioni	24
6.1	Intorno	24
6.2	Punto di accumulazione	24
6.2.1	Esempi	24
6.3	Limiti convergenti	24
6.4	Limiti divergenti positivamente	24
6.5	Limiti divergenti negativamente	25
6.6	Confronto di limiti	25
6.7	Intorno destro (sinistro)	25
6.8	Teorema dell'intorno destro e sinistro	25
6.9	Limiti di funzioni composte	26

6.10	Limiti di funzioni e successioni	26
6.11	Limiti notevoli	28
7	Funzioni continue	29
7.0.1	Esempio	29
7.1	Teorema dell'esistenza degli zeri	29
7.1.1	Corollario	30
7.2	Teorema dei valori intermedi	31
7.3	Limiti di funzioni continue e successioni	31
7.4	Teorema di continuit� delle funzioni composte	31
7.5	Teorema di Weierstrass	31
7.6	Punti di discontinuit�	32
7.6.1	Discontinuit� di prima specie	33
7.6.2	Discontinuit� di seconda specie	33
7.6.3	Discontinuit� di terza specie	33
8	Funzioni monotone	33
9	Funzioni uniformemente continue	34
10	Derivata	35
10.1	Derivate notevoli (regole di derivazione)	36
10.1.1	Alcune dimostrazioni	37
10.2	Derivate di funzioni composte	39
11	Funzioni invertibili	40
11.0.1	Propriet�	40
11.1	Monotonia e invertibilit�	40
11.2	Continuit� e invertibilit�	41
11.3	Teorema di derivazione delle funzioni inverse	41
11.4	Teorema di Rolle	42
11.5	Teorema di Cauchy	42
11.6	Teorema di Lagrange	43
11.6.1	Corollario I	43
11.6.2	Corollario II	43
11.6.3	Corollario III	44
11.7	Funzioni crescenti e derivate	44
11.8	Teorema di De l'Hopital	45
12	Massimi e minimi relativi	45
12.1	Teorema di Fermat	46
13	Concavit�, convessit� e flessi	47
14	Asintoti	48
15	Studio del grafico di una funzione	49

1 Operazioni

1.1 Valore assoluto

$$|a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

1.1.1 Proprieta'

1. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2. $-|a| \leq a \leq |a|$
3. $|ab| = |a||b|$
4. $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$
5. $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$
6. $|a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b \vee a \geq b$
7. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (disuguaglianza triangolare)
8. $|a + b| \geq ||a| - |b||$
9. $|a| = \sqrt{a^2}$
10. $|a - b| = 0 \Leftrightarrow a = b$
11. $|a| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow a = 0$

Proof: Dimostriamo per assurdo. Supponiamo che $a \neq 0$. Allora possiamo fissare una $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$, che e' sempre > 0 E abbiamo:

$$|a| < \frac{|a|}{2}$$

Il che e' assurdo, quindi $a = 0$. □

12. Avendo $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{cases} \alpha \leq a \leq \beta \\ \alpha \leq b \leq \beta \end{cases} \Rightarrow |a - b| \leq \beta - \alpha$$

Proof: Sia $\alpha \leq a \leq b \leq \beta$.

$$\beta - \alpha = (a - \alpha) + (b - a) + (\beta - b)$$

$$|\beta - \alpha| = |a - \alpha| + |b - a| + |\beta - b|$$

$$|\beta - \alpha| = |\alpha - a| + |a - b| + |b - \beta| \Rightarrow |a - b| + \underbrace{|\alpha - a| + |b - \beta|}_k = |\beta - \alpha|$$

$$\Rightarrow |a - b| \leq |\beta - \alpha|$$

□

1.2 Logaritmi

Il logaritmo nasce dal voler risolvere le equazioni esponenziali di tipo:

$$a^x = b$$

Analizziamo tutti i casi.

$$\begin{array}{ll} a = 1 & 1^x = b \rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & b = 1 \\ \text{non ha sol.} & b \neq 1 \end{cases} \\ a > 0, b \leq 0 & a^x = b \rightarrow \text{non ha sol.} \\ a > 0, b > 0 & a^x = b \rightarrow x = \log_a b \end{array}$$

Quindi il $\log_a b$ e' quel numero reale tale che:

$$a^{\log_a b} = b$$

Il logaritmo e' definito esclusivamente per:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad a > 0, a \neq 1$$

1.2.1 Proprieta'

$$1. \log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

$$2. \log_a b^t = t \log_a b$$

Proof: Prova.

$$\log_a b^t = \log_a \underbrace{b \cdots b \cdots b \cdots b}_{t \text{ volte}} = \underbrace{\log_a b + \log_a b + \cdots + \log_a b}_{t \text{ volte}} = t \log_a b$$

□

$$3. \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Proof: Ecco qua:

$$l_1 = \log_a b, \quad l_2 = \log_a c$$

$$a^{l_1} = b, \quad a^{l_2} = c$$

$$\frac{a^{l_1}}{a^{l_2}} = \frac{b}{c}$$

$$a^{l_1 - l_2} = \frac{b}{c}$$

$$l_1 - l_2 = \log_a \frac{b}{c}$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

□

$$4. \log_a b > 0 \text{ se } a > 1 \wedge b > 1 \text{ oppure se } 0 < a < 1 \wedge 0 < b < 1$$

$$5. \log_a b < 0 \text{ se } a > 1 \wedge 0 < b < 1 \text{ oppure se } 0 < a < 1 \wedge b > 1$$

6. Se $a > 1$ e $0 < x < y$ allora $\log_a x < \log_a y$.

Proof:

$$x < y \rightarrow \frac{x}{y} < 1$$

$$\log_a \frac{x}{y} < 0$$

$$\log_a x - \log_a y < 0$$

$$\log_a x < \log_a y$$

□

7. Se $1 < a < 0$ e $0 < x < y$ allora $\log_a x > \log_a y$.

8. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

9. $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

Proof:

$$x = a^{\log_a x}$$

$$x^{\log_a y} = (a^{\log_a x})^{\log_a y} = (a^{\log_a y})^{\log_a x} = y^{\log_a x}$$

□

2 Limiti

2.1 Proprieta' d'Archimede

Questa proprieta' afferma che dati due numeri $x, y \in \mathbb{R}^+$:

$$\exists n \in \mathbb{N} : xn > y$$

Proof: Per la dimostrazione utilizziamo le troncature.

$$\frac{x}{y} = M, c_1 c_2 c_3 \dots$$

Poniamo:

$$n > \text{int} \left(\frac{x}{y} \right) = M$$

Poiche' n e' maggiore della parte intera di x/y allora sara' sicuramente maggiore di $\frac{x}{y}$:

$$n > \frac{x}{y} \Rightarrow xn > y$$

□

2.2 Densita'

Si dice che l'insieme T e' denso in $\mathbb{R}$ se:

$$\exists t \in T : a < t < b, \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Ovvero, e' sempre possibile trovare un numero appartenente a T tra due numeri in $\mathbb{R}$.

2.2.1 Proprieta'

1. $\mathbb{Q}$ e' denso in $\mathbb{R}$.

Proof: Dobbiamo dimostrare che:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \quad \exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y$$

.

$$x < y, \quad 1 > 0$$

$$y - x > 0$$

$$\text{Per la proprieta' di Archimede} \quad \exists n \in \mathbb{N} : n(y - x) > 1$$

$$y - x > \frac{1}{n}$$

Ora scegliamo il piu' piccolo $m \in \mathbb{Z}$ tale che sia $m > nx$:

$$\exists m \in \mathbb{Z} : m > nx \quad \Rightarrow \quad m - 1 < nx < m \quad \Rightarrow \quad \frac{m - 1}{n} < x < \frac{m}{n}$$

Ora completiamo:

$$x < \left(\frac{m}{n} = \frac{m - 1 + 1}{n} = \frac{m - 1}{n} + \frac{1}{n} \right)$$

$$x < \frac{m - 1}{n} + \frac{1}{n} < x + \frac{1}{n} < (y - x + x = y)$$

$$x < \frac{m - 1}{n} + \frac{1}{n} < y$$

$$x < \frac{m}{n} < y$$

□

2. $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e' denso in $\mathbb{R}$

Proof: Deve accadere che:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : x < \alpha < y$$

Procediamo:

$$x < y$$

$$\sqrt{2}x < \sqrt{2}y$$

Per la densita' di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, dimostrata prima, possiamo scrivere:

$$\exists q \in \mathbb{Q} : \sqrt{2}x < q < \sqrt{2}y$$

$$x < \frac{q}{\sqrt{2}} < y$$

Ora dobbiamo dimostrare che $\frac{q}{\sqrt{2}}$ e' irrazionale. Supponiamo per assurdo che non lo sia:

$$\frac{q}{\sqrt{2}} = s, \quad s \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{q}{s} = \sqrt{2}$$

$$\frac{q^2}{s^2} = 2$$

Ma sappiamo che l'ultima eguaglianza e' impossibile, perche' non esiste alcun numero razionale che elevato al quadrato dia 2. □

2.3 Partizione di $\mathbb{R}$

La partizione si indica con (A, B) . Partizionare $\mathbb{R}$ in (A, B) vuol dire che:

$$\begin{aligned}A, B &\neq \emptyset \\A \cap B &= \emptyset \\A \cup B &= \mathbb{R} \\ \forall a \in A, \forall b \in B \quad a < b\end{aligned}$$

2.3.1 Proprieta'

1. Data una partizione (A, B) di $\mathbb{R}$ esiste sempre, ed e' unico l'elemento separatore γ , tale che:

$$a \leq \gamma \leq b, \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

γ appartiene o ad A o a B .

2.4 X limitato superiormente (maggiorante)

L'insieme numerico X , si dice limitato superiormente se:

$$\exists L \in \mathbb{R} | L \geq x, \quad \forall x \in X$$

L e' detto il *maggiorante* di X .

2.5 X limitato inferiormente (minorante)

L'insieme numerico X , si dice limitato inferiormente se:

$$\exists L \in \mathbb{R} | l \leq x, \quad \forall x \in X$$

l e' detto il *minorante* di X .

2.6 X limitato

X e' limitato se e' limitato sia superiormente che inferiormente.

$$\exists L, l \in \mathbb{R} | l \leq x \leq L \quad \forall x \in X$$

Possiamo usare anche questa scrittura:

$$\exists L > 0 : |x| \leq L \quad \forall x \in X$$

Proof: Dimostriamo l'equivalenza delle scritture.

$$\begin{aligned}l &\leq x \leq L \\l &\leq x \leq L \leq |L| \leq |L| + |l| \\-|L| - |l| &\leq -|l| \leq l \leq x \\-(|L| + |l|) &\leq x \leq |L| + |l| \\k = |L| + |l|, \quad -k &\leq x \leq k \quad \Leftrightarrow \quad |x| \leq k\end{aligned}$$

Ora dobbiamo dimostrare l'inverso.

$$\begin{aligned} |x| \leq k &\Leftrightarrow -k \leq x \leq k \\ l = -k, \quad L = k \\ l \leq x \leq L \end{aligned}$$

□

2.7 Massimo di X

M e' il massimo di X se:

$$M \geq x, \forall x \in X \quad \wedge \quad M \in X$$

Il massimo di X si indica con

$$\max X$$

2.7.1 Proprieta'

1. Se il massimo esiste e' unico.

Proof: Supponiamo per assurdo che esistano due massimi m_1 e m_2 , allora e' vero che $m_1 \geq m_2$ e che $m_2 \geq m_1$, ma per la proprieta' antisimmetrica deduciamo che $m_1 = m_2$. □

2.8 Minimo di X

m e' il minimo di X se:

$$m \leq x, \forall x \in X \quad \wedge \quad m \in X$$

Il minimo di X si indica con

$$\min X$$

2.8.1 Proprieta'

1. Se il minimo esiste, e' unico.

2.9 Estremo superiore

Sia $X \neq \emptyset$ limitato superiormente. L'estremo superiore dell'insieme X e' il minimo dei maggioranti di X e si indica con:

$$\sup X = \sup_{x \in X} x$$

2.9.1 Proprieta'

Il $\sup X$ gode di due proprieta' che lo caratterizzano, i.e. se si provano che queste proprieta' sono vere, siamo sicuri che $\sup X$ e' l'estremo superiore di X .

1. $\sup X \geq x, \forall x \in X$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X : x > \sup X - \varepsilon$

L'ultima proprietà dice che se esiste il massimo di X , allora coincide con il suo estremo superiore:

$$\exists \max X \Rightarrow \max X = \sup X$$

Proof: Per provare questo basta considerare $M = \max X$ come estremo superiore e applicare la definizione.

$$\begin{aligned} M &\geq x, \quad \forall x \in X \quad \text{def. stessa di massimo} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x \in X : x &> M - \varepsilon \\ x &= M, \quad M > M - \varepsilon \end{aligned}$$

□

Proposition 2.1.

$$X \text{ limitato superiormente} \Rightarrow \exists \text{ finito } \sup X$$

Ovvero, se esiste almeno un maggiorante per X , allora esiste finito il $\sup X$

Proof: Dimostriamo che esiste sempre il minimo dei maggioranti di X .

$$B = \{\text{insieme dei maggioranti di } X\}$$

$$A = \mathbb{R} \setminus B$$

$$(A, B)$$

Verifichiamo che (A, B) è una partizione di $\mathbb{R}$.

1. $A, B \neq \emptyset$. Per ipotesi $B \neq \emptyset$. Poiché $X \neq \emptyset$ esiste almeno un $x \in \mathbb{R}$ che non è maggiorante di X e questo x si troverà in A , quindi $A \neq \emptyset$.
2. $A \cap B = \emptyset$. Questo è vero per costruzione, infatti, $(\mathbb{R} \setminus B) \cap B = (\mathbb{R} \cap B) \setminus (B \cap B) = B \setminus B = \emptyset$
3. $A \cup B = \mathbb{R}$. Anche questo è vero per costruzione.
4. $\forall a \in A, \forall b \in B \quad a < b$ Sappiamo che a non è un maggiorante e b è un maggiorante. quindi

$$\exists y \in X : y > a, \quad \forall a \in A$$

$$x < b, \quad \forall x \in X$$

Ma b , dato che è un maggiorante, è sicuramente maggiore di y , e quindi di a :

$$b \geq y > a \rightarrow b > a$$

Che è quello che volevamo dimostrare

Ok, adesso sappiamo che (A, B) è una partizione di $\mathbb{R}$ e quindi esiste l'elemento separatore L tale che:

$$a \leq L \leq b, \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

Dato che $L \leq b \quad \forall b \in B$, allora L è un minorante di tutti gli elementi di B . Se riusciamo a dimostrare che $L \in B$, allora potremo affermare che L è il minimo dei maggioranti di X . Supponiamo per assurdo che non lo sia:

$$L \notin B$$

Ma se L non è in B , allora non è un maggiorante per l'insieme X , ovvero

$$\exists x \in X : x > L$$

Per la densità di $\mathbb{R}$ possiamo scegliere un α compreso tra x e L :

$$L < \alpha < x$$

Ora deve accadere che $\alpha \in B$ oppure che $\alpha \in A$. Ma $\alpha > L$, quindi dato che L è l'elemento separatore di (A, B) , deduciamo che $\alpha \in B$. Ma, prima abbiamo detto che $\alpha < x$, e quindi non è un maggiorante di X e quindi $\alpha \notin B$. Questo è un assurdo, perché un elemento o sta' in un insieme o non ci sta', quindi concludiamo che $L \in B$ e che L è effettivamente il minimo dei maggioranti di X . □

2.10 Estremo inferiore

Definition 2.2. Sia $X \neq \emptyset$ limitato inferiormente. L'estremo inferiore dell'insieme X e' il massimo dei minoranti di X e si indica con:

$$\inf X = \inf_{x \in X} x$$

Proposition 2.3.

$$X \text{ limitato inferiormente} \Rightarrow \exists \text{ finito } \inf X$$

Ovvero, se esiste almeno un minorante per X , allora esiste finito $\inf X$

Proof: Si procede analogamente alla dimostrazione della prop [2.1,pg.7]. $\square$

2.10.1 Proprieta'

Proposition 2.4. $\inf X$ gode di due proprieta' che lo caratterizzano, i.e. se si provano che queste proprieta' sono vere, siamo sicuri che $\inf X$ e' l'estremo inferiore di X . Le proprieta' sono:

1. $\inf X \leq x, \forall x \in X$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X : x < \inf X + \varepsilon$

In altre parole

$$\inf X \text{ e' l'estremo inferiore di } X \Leftrightarrow \begin{cases} 1. \inf X \leq x, \forall x \in X \\ 2. \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X : x - \varepsilon < \inf X \end{cases}$$

Proof: Dimostriamo la caratterizzazione dell' $\inf$. La definizione di $\inf$ e':

$$\inf X \text{ e' l'estremo inferiore di } X \Leftrightarrow \begin{cases} 1'. \inf X \leq x \forall x \in X \\ 2'. m \leq x \forall x \in X \Rightarrow m \leq \inf X \end{cases} \quad [\inf X \text{ e' il max dei minoranti}]$$

Poiche' la 1. e' chiaramente equivalente alla 1', bastera' dimostrare l'equivalenza tra la 2. e la 2'.

(1) Dim 2' $\Rightarrow$ 2.

Fissiamo un $\varepsilon > 0$, dobbiamo dimostrare che:

$$\exists x^* \in X : x^* - \varepsilon < \inf X$$

(1.1) Sia A un insieme limitato inferiormente, $A \neq \emptyset$. Fissato $\varepsilon > 0$, si ha:

$$\exists \bar{a} \in A : \bar{a} - \varepsilon \notin A$$

infatti, se per assurdo $\forall a \in A \ a - \varepsilon \in A$, si ha:

$$a_1 := a - \varepsilon \in A$$

$$a_2 := a_1 - \varepsilon \in A = a - 2\varepsilon \in A$$

...

$$a_n := a - n\varepsilon \in A$$

$$\Rightarrow a - n\varepsilon \in A \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

$$A \text{ limitato inferiormente} \Rightarrow \exists l \in \mathbb{R} : l \leq a \quad \forall a \in A \Rightarrow l \leq a - n\varepsilon \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad (*)$$

$$\text{Sia } n_0 \in \mathbb{N}^* : n_0 > \frac{a-l}{\varepsilon} \text{ ovvero } n_0\varepsilon > a-l \Leftrightarrow l > a - n_0\varepsilon \quad (**)$$

$$(*) \Rightarrow l \leq a - n_0\varepsilon \text{ assurdo contro } (**)$$

(1.2) Sia $\underline{X} = \{x \in X \mid x - \varepsilon \notin X\}$, si ha
 $\underline{X} \neq \emptyset$
 $\underline{x} := \inf \underline{X}$ e' finito

Il passo 1.1 garantisce che $\underline{X} \neq \emptyset$.

$$X \text{ limitato inferiormente} \Rightarrow \exists l : l \leq x \quad \forall x \in X \xRightarrow{\substack{X \subseteq X \\ \underline{X} \subseteq X}} l \leq x \quad \forall x \in \underline{X} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X} \text{ e' limitato inferiormente} \xRightarrow{[2.3, \text{pg.8}]} \inf \underline{X} \text{ e' finito}$$

(1.3) $\underline{x} \leq x \quad \forall x \in X$

Supponiamo per assurdo che $\exists x \in X : \underline{x} > x$.

$$X' := X \cap]-\infty, \underline{x}[$$

$$x < \underline{x}, x \in X \Rightarrow x \in X' \Rightarrow X' \neq \emptyset$$

$$X' \subseteq X, \quad X \text{ limitato inferiormente} \Rightarrow X' \text{ limitato inferiormente}$$

$$\xRightarrow{\text{passo 1.1}} \exists x' \in X' : x' - \varepsilon \notin X'$$

$$x' \in X' \Rightarrow x' < \underline{x} \xRightarrow{\varepsilon > 0} x' - \varepsilon < x' < \underline{x} \Rightarrow x' - \varepsilon \in]-\infty, \underline{x}[\quad (1)$$

$$x' - \varepsilon \notin X' = X \cap]-\infty, \underline{x}[\Rightarrow x' - \varepsilon \notin X \vee x' - \varepsilon \notin]-\infty, \underline{x}[\xRightarrow{(1)} x' - \varepsilon \notin X \Rightarrow x' \in \underline{X} \quad (1.1)$$

$$\underline{x} = \inf \underline{X} \Rightarrow \underline{x} \leq x \quad \forall x \in \underline{X} \xRightarrow{(1.1)} \underline{x} \leq x' \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow x' < \underline{x} \leq x' \quad \text{assurdo}$$

(1.4) $\exists x^* \in X : \underline{x} > x^* - \varepsilon$

Per il passo 1.3, abbiamo

$$\underline{x} \leq x \quad \forall x \in X \xRightarrow{2'} \underline{x} \leq \inf X \quad (3)$$

Supponiamo per assurdo $\forall x \in X \quad \underline{x} \leq x - \varepsilon$, allora

$$\forall x \in X \quad \underline{x} \leq x - \varepsilon \xRightarrow{\substack{X \subseteq X \\ \underline{X} \subseteq X}} \underline{x} \leq x - \varepsilon \quad \forall x \in \underline{X} \Leftrightarrow \underline{x} + \varepsilon \leq x \quad \forall x \in \underline{X} \xRightarrow{2'} \underline{x} + \varepsilon \leq \inf \underline{X} = \underline{x} \Leftrightarrow \varepsilon \leq 0 \quad \text{assurdo}$$

Quindi, abbiamo

$$\exists x^* \in X : x^* - \varepsilon < \underline{x} \leq \inf X \quad (3)$$

Abbiamo cosi' ottenuto la tesi.

(2) Dim 2. $\Rightarrow 2'$.

Consideriamo un minorante m di X . Per Hp abbiamo:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon - \varepsilon < \inf X$$

$$m \leq x \quad \forall x \in X \Rightarrow m \leftarrow x_\varepsilon < \inf X + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$m < \inf X + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

Da cui prendendo il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$m < \inf X + \varepsilon \xRightarrow{[6.1, \text{pg.25}]} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\inf X + \varepsilon) \Leftrightarrow m \leq \inf X$$

□

Proposition 2.5. *Se esiste il minimo di X , allora coincide con il suo estremo inferiore.*

$$\exists \min X \Rightarrow \min X = \inf X$$

2.11 X illimitato superiormente

X e' illimitato superiormente se non ha un estremo superiore. Questo fatto si indica con:

$$\sup X = +\infty$$

Possiamo scrivere, la negazione dell'estremo superiore:

$$\sup X = +\infty \Leftrightarrow \forall k > 0, \exists x \in X : x > k$$

2.12 X illimitato inferiormente

X e' illimitato inferiormente se non ha un estremo inferiore. Questo fatto si indica con:

$$\inf X = -\infty$$

Possiamo scrivere, la negazione dell'estremo inferiore:

$$\inf X = -\infty \Leftrightarrow \forall k > 0, \exists x \in X : x < -k$$

2.13 Insiemi numerici separati

X e Y sono separati se:

$$\forall x \in X, \forall y \in Y : x \leq y$$

2.13.1 Proprieta'

Se X, Y sono separati:

1. X e' limitato superiormente, Y inferiormente.
2. $\sup X \leq \inf Y$

Proof: Per definizione:

$$\forall x \in X, \forall y \in Y : x \leq y$$

Questo vuol dire che tutti gli elementi di Y sono dei maggioranti per X . Quindi X e' limitato superiormente e poiche' $\sup X$ e' il minimo dei suoi maggioranti, allora:

$$\sup X \leq y, \forall y \in Y$$

Ma questo significa che Y e' limitato inferiormente e che $\sup X$ e' un suo minorante. Ma allora il massimo dei minoranti di Y sara' sicuramente maggiore o uguale di $\sup X$, ovvero:

$$\sup X \leq \inf Y$$

□

2.14 Insiemi contigui

X, Y sono separati e non nulli.

$$X, Y \equiv \text{contigui} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists y \in Y, x \in X : y - x < \varepsilon$$

2.14.1 Proprieta'

$$X, Y \equiv (\text{separati}) \text{ e contigui} \Leftrightarrow \sup X = \inf Y$$

Proof: Intanto poiche' i due insiemi sono separati scriviamo:

$$\sup X \leq \inf Y$$

$$\inf Y - \sup X \geq 0$$

$$|\inf Y - \sup X| = \inf Y - \sup X$$

Ora scriviamo la definizione dei due insiemi contigui:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists y' \in Y, x' \in X : y' - x' < \varepsilon$$

Tenendo presente il significato di $\sup X$ e $\inf Y$ possiamo scrivere:

$$\inf Y \leq y'$$

$$\sup X \geq x'$$

$$-\sup X \leq -x'$$

Sommiamo ambo i membri della prima e della terza disuguaglianza:

$$\inf Y - \sup X \leq y' - x' \leq \varepsilon$$

Ovvero:

$$|\inf Y - \sup X| \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

E per le proprieta' del valore assoluto possiamo dedurre che:

$$|\inf Y - \sup X| = 0 \Leftrightarrow \inf Y = \sup X$$

Adesso dimostriamo l'inverso, ovvero partendo da $\inf Y = \sup X$ possiamo dedurre che X e Y sono contigui.

Scriviamo allora le definizioni del $\sup X$ e dell' $\inf Y$ usando un ε opportuno:

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists x'' \in X : x'' > \sup X - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists y'' \in Y : y'' < \sup X + \frac{\varepsilon}{2}$$

Allora

$$-x'' < -\sup X + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$y'' < \inf Y + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$y'' - x'' < \underbrace{\inf Y - \sup X}_0 + \varepsilon$$

$$y'' - x'' < \varepsilon$$

□

3 I numeri Complessi

3.1 $\mathbb{C}$

Un numero complesso e' una coppia ordinata (a, b) di due numeri reali.

- a e' la parte reale, e b quella immaginaria.
- $(a, 0)$ corrisponde al reale a
- $(0, b)$ e' l'immaginario puro b
- $(0, 1) = i$ e' l'unita' immaginaria

3.1.1 Proprieta'

1. $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$
2. $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots,$

3.2 Addizione

Si definisce in questo modo:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

3.2.1 Proprieta'

1. Gode della proprieta' commutativa e associativa
2. $(0, 0) = 0_c$ e' l'elemento neutro dell'addizione: $z + 0_c = 0_c + z = z$

3.3 Moltiplicazione

Si definisce in questo modo:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

3.3.1 Proprieta'

1. Gode della proprieta' commutativa, associativa e distributiva rispetto alla somma
2. $(1, 0)$ e' l'elemento neutro della moltiplicazione: $z(1, 0) = (1, 0)z = z$
3. $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots,$
4. $zw = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee w = 0$

Proof:

$$\begin{aligned} z &= (a, b), \quad w = (c, d) \\ zw &= (ac - bd, bc + ad) = (0, 0) \Leftrightarrow ac - bd = 0 \wedge bc + ad = 0 \\ \begin{cases} ac - bd = 0 \\ bc + ad = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \begin{cases} (ac - bd)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd = 0 \\ (bc + ad)^2 = b^2c^2 + a^2d^2 + 2abcd = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \begin{cases} a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2 = 0 \\ a^2(c^2 + d^2) + b^2(d^2 + c^2) = 0 \\ (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 0 \\ a^2 + b^2 = 0 \vee c^2 + d^2 = 0 \\ z = 0 \vee w = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□

3.4 Forma algebrica

Possiamo scrivere un num complesso in una forma piu' comoda:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + ib$$

3.5 Coniugato di z

$$z = (a, b), \quad \bar{z} = (a, -b) = a - ib$$

3.5.1 Proprieta'

1. $\overline{\bar{z}} = z$
2. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
3. $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
4. $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
5. $z + \bar{z} = 2a$
6. $z\bar{z} = a^2 + b^2$

3.6 Divisione

Si definisce cosi':

$$\frac{z}{w} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{a + ib}{c + id} \frac{\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

3.7 Rappresentazione cartesiana

Poche' un complesso e' una coppia di reali, possiamo rappresentarli sul piano, cioe', a ogni complesso corrisponde un punto del piano cartesiano.

3.8 Modulo

Dato $z = a + ib$ il suo modulo e':

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Il modulo di z corrisponde alla distanza del segmento che va dall'origine fino a (a, b) .

3.8.1 Proprieta'

La cosa figa e' che ha le stesse proprieta' del valore assoluto:

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 + i0$
2. $|zw| = |z||w|$
3. $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$
4. $||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$

3.9 Argomento

L'argomento di z si indica con θ e corrisponde all'angolo che forma la retta $\overline{PO}$ con l'asse delle x .

Poichè è un angolo: $\theta = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'argomento principale è θ compreso tra π e $-\pi$.

3.10 Forma trigonometrica

Adesso abbiamo tutti gli elementi per esprimere z in forma trigonometrica, ovvero usando le coordinate polari:

$$\begin{aligned}a &= \rho \cos \theta \\b &= \rho \sin \theta \\z &= \rho(\cos \theta + i \sin \theta)\end{aligned}$$

3.10.1 Proprietà

Dato $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ e $w = r(\cos \phi + i \sin \phi)$

$$z = w \Leftrightarrow \rho = r \wedge \theta = \phi + 2k\pi$$

3.10.2 Moltiplicazione

$$\begin{aligned}z &= \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \\w &= r(\cos \phi + i \sin \phi) \\zw &= r\rho((\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) + i(\cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi)) = \\&= r\rho(\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi))\end{aligned}$$

3.10.3 Divisione

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{r}(\cos(\theta - \phi) + i \sin(\theta - \phi))$$

3.10.4 Potenza

Si vede subito che usando la formula della moltiplicazione per n volte si ricava:

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Si può generalizzare con $n \in \mathbb{Z}$.

3.10.5 Radice n-esima

$$\sqrt[n]{z} = w_k = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

per $k \in \mathbb{Z}$.

Si nota subito che ammette infinite soluzioni. Quelle distinte sono date da $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Nel piano cartesiano, tutte le radici appartengono alla circonferenza di centro $(0, 0)$ che ha raggio $r = \sqrt[n]{\rho}$. Le radici distinte si dispongono nei vertici di un poligono regolare di n lati.

4 Funzioni

Le funzioni che analizzeremo in analisi matematica sono del tipo:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ovvero, sono funzioni reali.

Con $f(A)$ indichiamo la sua immagine.

4.1 Funzione limitata

Una funzione f è limitata superiormente se $f(A)$ è un insieme limitato superiormente, e' invece limitata inferiormente se $f(A)$ è limitato inferiormente.

E' limitata se:

$$\exists h, k : h \leq f(x) \leq k, \quad \forall x \in A$$

che equivale a scrivere:

$$\exists L > 0 : |f(x)| \leq L, \quad \forall x \in A$$

4.2 Massimo e punto di massimo

Data $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, il massimo di $f(x)$, se esiste e' $\max f(A) = M$, ed e' definito come:

$$M \geq f(x), \quad \forall x \in A \quad \wedge \quad M \in f(A) \Leftrightarrow \exists x_M \in A : f(x_M) = M$$

x_m viene chiamato punto di massimo e' puo' anche non essere unico.

4.3 Minimo e punto di minimo

Data $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, il minimo di $f(x)$, se esiste e' $\min f(A) = m$, ed e' definito come:

$$m \leq f(x), \quad \forall x \in A \quad \wedge \quad m \in f(A) \Leftrightarrow \exists x_m \in A : f(x_m) = m$$

x_m viene chiamato punto di minimo e' puo' anche non essere unico.

5 Successioni

Una successione e' una funzione:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Si usa la notazione a_n che equivale a:

$$f(n) = a_n$$

a_n si chiama *termine della successione*.

Per indicare l'intera successione:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots, \}$$

5.1 Limite di successione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists v \in \mathbb{N} : n > v \quad |a_n - l| < \varepsilon$$

Se il limite l esiste, allora la successione si dice convergente a l .

Se $l = 0$ allora si dice che la successione e' infinitesima.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall k > 0 ; \exists v \in \mathbb{N} : n > v, \quad a_n > k$$

In questo caso la successione e' divergente positivamente e non e' limitata superiormente.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall k > 0 ; \exists v \in \mathbb{N} : n > v, \quad a_n < -k$$

In questo caso la successione e' divergente negativamente e non e' limitata negativamente.

Se la successione rientra in uno di questi tre casi appena descritti, allora si dice che e' regolare, altrimenti si dice che e' oscillante o non regolare.

5.2 Unicit  del limite

Se esiste il limite di $\{a_n\}$ allora e' unico.

Proof: Per assurdo supponiamo che esista un altro limite m e quindi scriviamo:

$$\begin{aligned} \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists v \in \mathbb{N} : n > v \quad |a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists v \in \mathbb{N} : n > v \quad |a_n - m| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Proseguiamo cos :

$$|l - m| = |(l - a_n) + (a_n - m)| \leq |l - a_n| + |a_n - m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$|l - m| < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow |l - m| = 0 \Rightarrow l = m$$

Quindi i due limiti coincidono. □

5.3 Permanenza del segno

Se un limite e' positivo (negativo), allora da un certo punto in poi, nella successione, tutti i termini saranno positivi (negativi).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l > 0 \Rightarrow \exists v \in \mathbb{N} : n > v, \quad a_n > 0$$

Proof: Ipotesi: $l > 0$

$$\begin{aligned} \varepsilon = l > 0, \exists v \in \mathbb{N} : n > v, \quad |a_n - l| < l \\ -l < a_n - l < l \Rightarrow 0 < a_n < 2l \Rightarrow a_n > 0 \end{aligned}$$

□

Il corollario dice che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l > M \Rightarrow \exists v \in \mathbb{N} : n > v, \quad a_n > M$$

L'inverso del teorema della permanenza del segno dice che se i termini sono positivi, allora il limite e' ≥ 0 :

$$a_n > 0 \Rightarrow l \geq 0$$

Proof: Per assurdo supponiamo $l < 0$. Per il teorema della permanenza del segno: $\exists v \in \mathbb{N} : \forall n > v \quad a_n < 0$, il che e' assurdo. □

5.4 Successione convergente e limitata

Se la successione $\{a_n\}$ e' convergente, allora e' limitata. Non e' pero' vero il contrario.

Proof: Hp: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$

Ts: $\{a_n\} \equiv$ limitata

Riscriviamo l'Hp secondo la definizione, usando un ε opportuno:

$$\begin{aligned} \varepsilon = 1 : \exists v \in \mathbb{N} : n > v \quad |a_n - a| < 1 \\ |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \\ |a_n| \leq 1 + |a| \quad \forall n > v \\ M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_v|, 1 + |a|\} > 0 \\ |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

L'ultima e' proprio la definizione di insieme numerico limitato:

$$\exists M > 0 : |x| \leq M \quad \forall x \in X$$

□

Proof: Con un controesempio dimostriamo che non e' vero il contrario:

$$\{(-1)^n\}$$

Questa successione e' limitata, ma e' oscillante.

□

5.5 Limite di successioni prodotto

5.5.1 Successione infinitesima per una successione limitata

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ e $\{b_n\}$ e' limitata, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = 0$$

Proof: Hp: $\{b_n\}$ e' limitata:

$$\exists L > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \quad |b_n| \leq L$$

e inoltre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

Dobbiamo dimostrare che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v \in \mathbb{N} : n > v, \quad |a_n b_n - 0| < \varepsilon$$

Cominciamo:

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq L |a_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{L} > 0 \exists v_1 \in \mathbb{N} : n > v_1, \quad |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{L}$$

$$L |a_n| < \varepsilon$$

$$|a_n b_n| \leq L |a_n| < \varepsilon, \quad n > v_1 \Rightarrow |a_n b_n| < \varepsilon$$

$|a_n b_n| < \varepsilon$ e' proprio la tesi. Possiamo anche osservare che $v = v_1$ dato che quest'ultima disuguaglianza vale solo per $n > v_1$. □

Alcuni esempi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$$

oppure:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n^3 - 7)}{n} = 0$$

5.6 Teorema del limite assoluto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = |l|$$

Non vale il viceversa, ad esempio:

$$\{(-1)^n\}$$

e' oscillante ma

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |(-1)^n| = 1$$

.

5.7 Successione infinitamente grande

Una successione $\{a_n\}$ si dice *infinitamente grande* se

$$\{a_n\} \equiv \text{infinitamente grande} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = +\infty$$

Teorema. Se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \vee \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \Rightarrow \{a_n\} \equiv \text{infinitamente grande}$$

Proof: Dimostriamo solo un caso.

Hp:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$

Ts:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = +\infty$$

Per definizione:

$$\begin{aligned} \forall k > 0 \exists v \in \mathbb{N} : n > v \quad a_n < -k \\ \forall k > 0 \exists v_1 \in \mathbb{N} : n > v_1 \quad |a_n| > k \\ |a_n| = -a_n > k \Rightarrow |a_n| > k \end{aligned}$$

□

Non vale sempre il viceversa, ad esempio:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |n(-1)^n| = +\infty$$

ma

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(-1)^n$$

e' oscillante e quindi non ha limite.

5.8 Operazioni con i limiti

Se i seguenti limiti esistono e sono **finiti**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$$

allora valgono le seguenti relazioni:

1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = a + b$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n) = ab$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

Proof: Dimostriamo la (2).

Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v \in \mathbb{N} : n > v, \quad |a_n b_n - ab| < \varepsilon$$

Se $a = 0$, il teorema e' vero, perche' ci riconduciamo a un prodotto di una successione infinitesima per una limitata (vedi 5.5.1).

Supponiamo quindi $a \neq 0$:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab| = |a_n - a| |b_n| + |a| |b_n - b|$$

Poiche' $\{b_n\}$ converge a b , per il teorema 5.4, b_n e' limitata, cioe':

$$\exists L > 0 : |b_n| < L, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

allora:

$$|a_n - a| |b_n| + |a| |b_n - b| \leq L |a_n - a| + |a| |b_n - b|$$

Per ipotesi:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a &\Rightarrow \frac{\varepsilon}{2L} > 0 \exists v_1 : n > v_1 \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2L} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = b &\Rightarrow \frac{\varepsilon}{2|a|} > 0 \exists v_2 : n > v_2 \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|} \end{aligned}$$

Scegliamo $v' = \max(v_1, v_2)$.

$$|a_n b_n - ab| < L \frac{\varepsilon}{2L} + |a| \frac{\varepsilon}{2|a|} = \varepsilon$$

□

5.9 Successioni divergenti

Premessa: scrivendo $a_n \rightarrow l$ intendiamo $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$

5.9.1 Successione somma

Scrivendo $+\infty - l = +\infty$ intendiamo: $a_n \rightarrow +\infty, b_n \rightarrow l \Rightarrow a_n + b_n = +\infty$

1. $+\infty + l = +\infty$
2. $-\infty + l = -\infty$
3. $+\infty + \infty = +\infty$
4. $-\infty - \infty = -\infty$
5. $+\infty - \infty = \text{forma indeterminata}$

5.9.2 Successione prodotto

1. $l > 0, +\infty \cdot l = +\infty$
2. $l < 0, +\infty \cdot l = -\infty$
3. $l > 0, -\infty \cdot l = -\infty$

4. $l < 0, -\infty \cdot l = +\infty$
5. $+\infty \cdot +\infty = +\infty$
6. $-\infty \cdot -\infty = +\infty$
7. $\pm\infty \cdot 0 = \text{forma indeterminata}$
8. $k > 0, n^k \rightarrow +\infty$
9. $k < 0, n^k = \frac{1}{n^{|k|}} \rightarrow -\infty$

5.9.3 Successione reciproca

1. $\frac{1}{+\infty} = 0$
2. $\frac{1}{0^+} = +\infty$
3. $\frac{1}{0^-} = -\infty$

5.9.4 Successione quoziente

1. $\frac{\infty}{0^+} = +\infty$
2. $\frac{\infty}{0^-} = -\infty$
3. $l > 0 \quad \frac{l}{0^+} = +\infty$
4. $l < 0 \quad \frac{l}{0^+} = -\infty$
5. $l > 0 \quad \frac{l}{0^-} = -\infty$
6. $l < 0 \quad \frac{l}{0^-} = +\infty$
7. $\frac{l}{\pm\infty} = 0$
8. $\frac{\infty}{\infty} = \text{forma indeterminata}$
9. $\frac{0}{0} = \text{forma indeterminata}$
- 10.

$$\frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p}{b_0 n^r + b_1 n^{r-1} + \dots + b_r} \rightarrow \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} & p = r \\ \infty \cdot \frac{a_0}{b_0} & p > r \\ 0 & p < r \end{cases}$$

5.9.5 Successione esponenziale

- 1.

$$a^n \rightarrow \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & 0 < a < 1 \\ \nexists & a < 0 \end{cases}$$

2. $0^0, 1^0, \infty^0$ sono forme indeterminate

5.9.6 Forme indeterminate

1. $+\infty - \infty$
2. $\infty \cdot 0$
3. $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$
4. $0^0, \infty^0, 1^\infty$

5.10 Successioni monotone

$$\{a_n\} \text{ e' monotona di tipo } \begin{cases} \text{crescente} & a_n < a_{n+1} \\ \text{non decrescente} & a_n \leq a_{n+1} \\ \text{decrescente} & a_n > a_{n+1} \\ \text{non crescente} & a_n \geq a_{n+1} \end{cases}$$

5.10.1 Proprieta'

1. Una successione crescente e' sempre limitata inf. e $\min\{a_n\} = a_1$, inoltre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_n\} & \text{se limitata sup.} \\ +\infty & \text{se non e' limitata sup.} \end{cases}$$

2. Una successione decrescente e' sempre limitata sup. e $\max\{a_n\} = a_1$, inoltre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} \inf\{a_n\} & \text{se limitata inf.} \\ -\infty & \text{se non e' limitata inf.} \end{cases}$$

5.11 Teoremi di confronto

5.11.1 Confronto di successioni convergenti

$$\begin{aligned} a_n \rightarrow l \wedge c_n \rightarrow l, l \in \mathbb{R} \\ a_n \leq b_n \leq c_n \Rightarrow b_n \rightarrow l \end{aligned}$$

il viceversa vale solo in alcuni casi particolari, e cioe':

5.11.2 Confronto di successioni divergenti

Proposition 5.1.

$$\begin{aligned} a_n \rightarrow +\infty \\ a_n \leq b_n \Rightarrow b_n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

e anche:

$$\begin{aligned} b_n \rightarrow -\infty \\ a_n \leq b_n \Rightarrow a_n \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

Proof: Dimostriamo il primo confronto.

La tesi e' che $b_n \rightarrow +\infty$, cioe'

$$\forall k > 0 \exists v \in \mathbb{N} : n > v \quad b_n > k$$

Per Hp sappiamo che:

$$k > 0 \exists v' \in \mathbb{N} : n > v' \quad a_n > k$$

Inoltre sempre per Hp $a_n \leq b_n$ e quindi:

$$b_n \geq a_n > k \Rightarrow b_n > k$$

Che e' quello che volevamo dimostrare. In definitiva, l'indice v cercato e'

$$v = v'$$

□

5.12 Successione estratta

Date le seguenti successioni,

$$\{a_n\} \equiv \text{succ.}$$

$$\{k_n\} \equiv \text{succ. crescente}$$

la *successione estratta* da $\{a_n\}$ e':

$$\{a_{k_n}\}$$

5.12.1 Esempio

$$k_n = 2n$$

$$\{a_{k_n}\} = \{a_2, a_4, a_6, \dots, \}$$

5.12.2 Teorema sulle succ. estratte

Questo teorema dice semplicemente che se una successione $a_n \rightarrow l$ allora anche la sua estratta $a_{k_n} \rightarrow l$. cioe':

$$\{a_n\} \equiv \text{succ.}$$

$$\{k_n\} \equiv \text{succ. crescente}$$

$$a_n \rightarrow l \Rightarrow a_{k_n} \rightarrow l$$

Non vale sempre il viceversa. Alcuni casi in cui vale il viceversa sono quando: $k_n = n + c$ dove c e' una costante, oppure quando $a_{2n+1} \rightarrow l \wedge a_{2n} \rightarrow l$.

5.13 Teorema di Bolzano-Weierstrass

$$\{a_n\} \equiv \text{limitata} \Rightarrow \text{esiste sempre una sua estratta convergente}$$

Cioe':

$$\exists h, m : h \leq a_n \leq m \Rightarrow \exists a_{k_n} : a_{k_n} \rightarrow l$$

Un corollario: se a_n e' limitata da h, m , si ha

$$a_n \rightarrow l \Rightarrow h \leq l \leq m$$

5.14 Criterio di convergenza di Cauchy

Cauchy, il dice che:

$$\{a_n\} \equiv \text{convergente} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists v \in \mathbb{N} : \forall n, m > v \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Proof: Dimostriamo $\Rightarrow$. Ovvero la tesi e':

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v \in \mathbb{N} : \forall n, m > v \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Per Hp $a_n \rightarrow l$, cioè

$$\frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists v' \in \mathbb{N} : p > v \quad |a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Adesso riconduciamoci alla Ts:

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - a_m - l + l| = |a_n - l - a_m + l| \\ |a_n - l - a_m + l| &\leq |a_n - l| + |a_m - l| \\ |a_n - l| + |a_m - l| &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad n, m > v' \\ |a_n - a_m| &\leq |a_n - l| + |a_m - l| < \varepsilon \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon \\ v &= v' \end{aligned}$$

□

Proof: Dimostriamo $\Leftarrow$.

Dimostrare alcuni singoli passi:

1. Dimostriamo che $\{a_n\}$ è limitata.

Per Hp:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 \exists v : n, m > v \quad |a_n - a_m| < 1 \\ |a_n - a_m| &< 1 \\ \text{fissiamo } m &= v + 1 > v \\ -1 &< a_n - a_{v+1} < 1 \\ -(1 - a_{v+1}) &< a_n < 1 + a_{v+1} \Leftrightarrow |a_n| < L \quad \forall n > v \end{aligned}$$

L'ultima disequaglianza è vera per $n > v$. Se lo fosse per $\forall n \in \mathbb{N}$, allora equivarrebbe alla definizione di ins. numerico limitato. Poniamo:

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_v|, L\}$$

Allora è vero che:

$$|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

cioè, $\{a_n\}$ è limitata.

2. Dimostriamo per induzione che se (k_n) è crescente, allora $k_n \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Base: per $n = 1$, è vera poiché $k_1 \geq 1$. (nota che in $\mathbb{N}$ non stiamo includendo lo 0).

Hp: supponiamo che $k_n \geq n$

Tesi: Per l'Hp di crescita $k_n < k_{n+1}$, per l'Hp induttiva $n \leq k_n$, allora

$$n \leq k_n < k_{n+1} \Rightarrow k_{n+1} > n$$

Ma poiché stiamo lavorando in $\mathbb{N}$:

$$k_{n+1} \geq n + 1$$

3. Ora poiché (a_n) è limitata, per Bolzano è vero che esiste una sua estrazione convergente.

Cioè, $\exists a_{k_n} \rightarrow y_0$. Se dimostriamo che anche $a_n \rightarrow y_0$ allora abbiamo finito.

Per quanto detto a_{k_n} è convergente:

$$\frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists v' : n > v' \quad |a_{k_n} - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Inoltre, per Hp soddisfa la condizione di Cauchy:

$$\frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists v'' \in \mathbb{N} : n, m > v'' \quad |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Quest'ultima relazione vale per $n > v''$, e per quanto abbiamo visto nel passo 2 $k_n \geq n$, allora:

$$k_n \geq n > v'' \Rightarrow k_n > v''$$

Quindi possiamo porre $m = k_n > v''$:

$$|a_n - a_{k_n}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ora (per la prima volta) espandiamo $|a_n - y_0|$:

$$|a_n - y_0| = |a_n - y_0 + a_{k_n} - a_{k_n}| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - y_0|$$

Adesso prendiamo $v''' = \max(v', v'')$. In questo modo abbiamo un indice che verifica sia la relazione di convergenza che quella di cauchy e possiamo scrivere:

$$|a_n - y_0| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n > v'''$$

Cioè:

$$|a_n - y_0| < \varepsilon \quad \forall n > v'''$$

Che è proprio quello che volevamo dimostrare.

□

6 Limiti di funzioni

6.1 Intorno

Intorno di x_0 di raggio $\delta > 0 = I_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$

6.2 Punto di accumulazione

x_0 è un punto di accumulazione per l'insieme X se in ogni suo intorno esiste una $x' \in X$, ovvero se:

$$\forall I_\delta(x_0) \exists x' \in X, x' \neq x_0 : x' \in I_\delta(x_0)$$

L'insieme dei punti di accumulazione di X si indica con DX .

6.2.1 Esempi

$\mathbb{N}$ non ha punti di accumulazione: $DX = \emptyset$.

6.3 Limiti convergenti

In questo caso la funzione è definita nell'intervallo $(a, b) \setminus \{x_0\}$, dove $x_0 \in]a, b[$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, b), x \neq x_0, |x - x_0| < \delta : |f(x) - l| < \varepsilon \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, b), x \neq x_0, |x - x_0| < \delta : f(x) > k \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall k > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, b), x \neq x_0, |x - x_0| < \delta : f(x) < -k \quad (3)$$

Se non si verificano questi tre casi, allora la successione è oscillante.

Per i limiti delle funzioni valgono tutti i teoremi delle successioni, tranne quello che dice che se una successione è convergente allora è limitata.

6.4 Limiti divergenti positivamente

In questo caso la funzione è definita nell'intervallo $(a, +\infty) \setminus \{x_0\}$, dove $x_0 \in]a, b[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x' > 0 : \forall x > x', |f(x) - l| < \varepsilon \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k > 0 \exists x' > 0 : \forall x > x', f(x) > k \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall k > 0 \exists x' > 0 : \forall x > x', f(x) < -k \quad (6)$$

6.5 Limiti divergenti negativamente

In questo caso la funzione e' definita nell'intervallo $] - \infty, b) \setminus \{x_0\}$, dove $x_0 \in]a, b[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x' > 0 : \forall x < x', |f(x) - l| < \varepsilon \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k > 0 \exists x' > 0 : \forall x < x', f(x) > k \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall k > 0 \exists x' > 0 : \forall x < x', f(x) < -k \quad (9)$$

6.6 Confronto di limiti

Proposition 6.1. Siano date due funzioni reali $f(x), g(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ e sia

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$$

si ha

$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in X \Rightarrow l \leq m$$

Proof: Se $l = m$, allora la tesi e' vera, supponiamo $l \neq m$. Supponiamo per assurdo che $l > m$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in X \cap]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : |g(x) - m| < \varepsilon \quad \forall x \in X \cap]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[$$

Sia $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, si ha

$$\begin{cases} |f(x) - l| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon \\ |g(x) - m| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < g(x) - m < \varepsilon \end{cases} \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap X$$

$$-\varepsilon < f(x) - l \quad \underbrace{\leq}_{f(x) < g(x)} \quad g(x) - l \quad \underbrace{\leq}_{l > m} \quad g(x) - m < \varepsilon \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < g(x) - l < \varepsilon \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap X \quad (1)$$

Per l'arbitrarieta' di ε , la (1) equivale a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$ e quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{unicita' del limite}} \quad m = l$$

assurdo. □

6.7 Intorno destro (sinistro)

Dato l'intorno x_0 e il suo raggio δ ,

$$x_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 < x < x_0 + \delta\}$$

$$x_0^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \delta < x < x_0\}$$

6.8 Teorema dell'intorno destro e sinistro

$$\lim_{n \rightarrow x_0} f(x) = \bar{l}, \bar{l} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{n \rightarrow x_0^-} f(x) = \bar{l}$$

6.9 Limiti di funzioni composte

Data la funzione:

$$f(y) : (\alpha, \beta) \setminus \{y_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

e

$$y = g(x) : (a, b) \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Ponendo $g(x) \in (\alpha, \beta) \setminus \{y_0\}$ definiamo la funzione composta:

$$H(x) = f(g(x)) : (a, b) \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Il teorema dice che:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = \bar{l}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \bar{l}$$

Proof: Dobbiamo dimostrare che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in (a, b) \setminus \{x_0\} \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - \bar{l}| < \varepsilon$$

Per Hp $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = \bar{l}$, cioè:

$$\varepsilon > 0 \exists \rho > 0 : y \in (\alpha, \beta) \setminus \{y_0\} \quad |y - y_0| < \rho \Rightarrow |f(y) - \bar{l}| < \varepsilon$$

e sempre per Hp $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$; prendendo un ε opportuno, otteniamo::

$$\rho > 0 \exists \rho' > 0 : x \in (a, b) \setminus \{x_0\} \quad |x - x_0| < \rho' \Rightarrow |g(x) - y_0| < \rho$$

e poichè $|g(x) - y_0| < \rho$ equivale alla condizione di sopra $|y - y_0| < \rho$ possiamo sostituire $y = g(x)$ ottenendo che per $g(x) \in (\alpha, \beta) \setminus \{y_0\}$:

$$|f(g(x)) - \bar{l}| < \varepsilon$$

Quindi il δ cercato è $\delta = \rho'$

□

6.10 Limiti di funzioni e successioni

Data $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, \quad l \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall \{x_n\} : x_n \in (a, b) \setminus \{x_0\} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l \right)$$

Questa è una caratterizzazione dei limiti delle funzioni e vale per $l \in \overline{\mathbb{R}}$ e anche per $x = \pm\infty$

Proof: In questa dimostrazione, consideriamo sono $l \in \mathbb{R}$.

Dimostriamo $\Rightarrow$.

Dobbiamo dimostrare che se

$$\{x_n\} : x_n \in (a, b) \setminus \{x_0\} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$$

Ovvero, la nostra tesi equivale a:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v \in \mathbb{N} : n > v \Rightarrow |f(x_n) - l| < \varepsilon$$

Per Hp sappiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, cioè:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Adesso prendiamo una successione $\{x_n\}$ t.c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$, cioè:

$$\varepsilon = \delta > 0 \exists v_1 > 0 : n > v_1 \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta$$

Se poniamo come condizione che $n > v_1$, $x_n \in (a, b) \setminus \{x_0\} : |x_n - x_0| < \delta$, allora possiamo concludere che

$$|f(x_n) - l| < \varepsilon, \quad \forall n > v_1$$

Quindi $v = v_1$. □

Proof: Dimostriamo il viceversa.

Ora la nostra tesi e'

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

cioe':

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Utilizziamo una dimostrazione per assurdo e neghiamo la tesi:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 : \exists x \in (a, b) \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| \geq \varepsilon$$

Per contraddire l'Hp, dobbiamo pero' prima ricondurci alle sue condizioni, cioe' dobbiamo rientrare nel caso in cui:

$$\{x_n\} : x_n \in (a, b) \setminus \{x_0\} \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$$

Allora adesso costruiamo la seguente successione:

$$\delta = 1 \quad \exists \varepsilon > 0 \forall 1 > 0 : \exists x_1 \in (a, b) \setminus \{x_0\}, |x_1 - x_0| < 1 \Rightarrow |f(x_1) - l| \geq \varepsilon$$

$$\delta = \frac{1}{2} \quad \exists \varepsilon > 0 \forall \frac{1}{2} > 0 : \exists x_2 \in (a, b) \setminus \{x_0\}, |x_2 - x_0| < \frac{1}{2} \Rightarrow |f(x_2) - l| \geq \varepsilon$$

$\vdots$

$$\delta = \frac{1}{n} \quad \exists \varepsilon > 0 \forall \frac{1}{n} > 0 : \exists x_n \in (a, b) \setminus \{x_0\}, |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n) - l| \geq \varepsilon$$

Cioe':

$$\{x_n\} : x_n \in (a, b) \setminus \{x_0\}, |x_n - x_0| < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Siccome:

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$$

per il teorema del confronto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - x_0| = 0$$

Questo implica che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$$

A questo punto siamo riusciti a ricondurci nelle condizioni richieste dall'Hp, ora la contraddicemo, trovando l'assurdo.

Per Hp:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$$

cioe':

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v \in \mathbb{N} : n > v \Rightarrow |f(x_n) - l| < \varepsilon$$

Ma poiche' prima abbiamo trovato $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$, allora abbiamo trovato l'assurdo.
fin. □

6.11 Limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

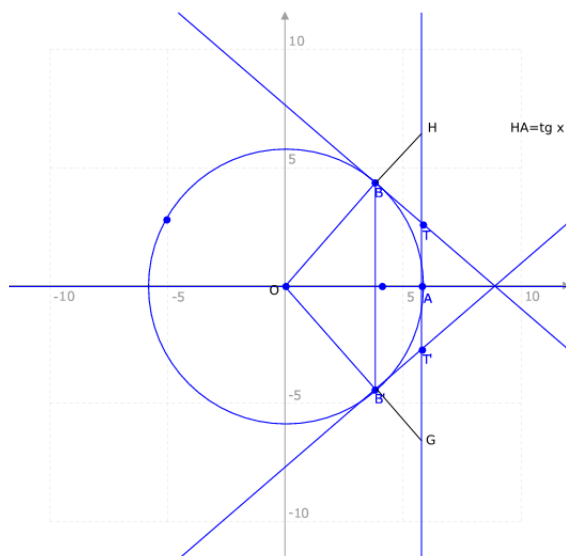
$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0$$

Proof: Dimostriamo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
 $\therefore x$ e' l'angolo BOA .



$|BB'| = 2|\sin x|$ per il postulato di archimede e' minore dell'arco $|(\widehat{BAB'})|$. Sempre per il

postulato di archimede $|(B'A)| < |B'T'| + |T'A|$ e quindi:

$$2|\sin x| < |(BAB')| < |B'T'| + |T'A| + |AT| + |BT| = |B'T| + |TT'| + |TB|$$

$$|B'T| + |TT'| + |TB| < |HT| + |TT'| + |T'G| = 2|\tan x|$$

ovvero:

$$2|\sin x| < 2|x| < 2|\tan x| = 2\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right|$$

dividendo per $2|\sin x|$:

$$1 < \frac{|x|}{|\sin x|} < \frac{1}{|\cos x|}$$

elvando per -1 :

$$|\cos x| < \frac{|\sin x|}{|x|} < 1$$

restringendo la x a $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ possiamo eliminare il valore assoluto e quindi:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Prendendo i limiti $x \rightarrow 0$, $1 \rightarrow 1$ quindi per il confronto $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

□

7 Funzioni continue

Data una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, e $c \in (a, b)$, $\exists f(c)$, allora

$$f \equiv \text{continua in } c \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Una funzione e' continua in un insieme numerico X , se e' continua in ogni suo punto.

7.0.1 Esempio

Dimostriamo che $\sin x$ e' continua in $]-\infty, +\infty[$.

Per definizione di continuit :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in]-\infty, +\infty[, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$$

Con la formula di prostaferesi:

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} \right| = 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right|$$

Considerando la proprieta' del seno che $|\sin x| \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e che $\cos x < 1$

$$2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \cdot \left| \frac{x - x_0}{2} \right| \cdot 1$$

$$|\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0| < \varepsilon$$

Quindi $\delta = \varepsilon$.

7.1 Teorema dell'esistenza degli zeri

Data la funzione continua

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

se esistono due punti:

$$\exists x_1, x_2 \in (a, b), \quad x_1 < x_2 \mid f(x_1)f(x_2) < 0$$

ovvero $f(x_1)$ e $f(x_2)$ devono essere discordi come segno, allora esiste almeno un punto x_0

$$\exists x_0 \in]x_1, x_2[\mid f(x_0) = 0$$

Proof: Come Hp fissiamo $f(x_1) > 0$ e $f(x_2) < 0$. Sia X il seguente insieme:

$$X = \{x \in]x_1, x_2[\mid f(x) > 0\}$$

$X \neq \emptyset$, perche' almeno $f(x_1) > 0$, inoltre, $X \subseteq [x_1, x_2[$ e quindi x_2 e' un suo maggiorante. Quindi,

$$\sup X = x_0$$

Ovviamente $x_1 \leq x_0 \leq x_2$.

1. Supponiamo che $f(x_0) > 0$:

$$f(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \in X \Rightarrow x_0 \neq x_2 \Rightarrow x_0 < x_2$$

Consideriamo il limite a x_0^+ da destra:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) > 0$$

questo perche' f e' continua per Hp. Allora per la permanenza del segno, a partire da un certo punto i valori di $f(x)$ saranno positivi:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \subseteq [x_1, x_2[, \Rightarrow f(x) > 0$$

Prendiamo una $t \in (x_0, x_0 + \delta)$:

$$\begin{aligned} x_0 < t < x_0 + \delta \\ f(t) > 0 &\Rightarrow t \in X \end{aligned}$$

ma questo e' assurdo, perche' se $t \in X$ allora t non puo' essere $t > x_0$, ovvero t non puo' superare il $\sup X$.

Quindi deduciamo che $f(x_0) \leq 0$

2. Supponiamo allora che $f(x_0) < 0$, e come prima arriviamo alla permanenza del segno partendo dal limite a x_0^- :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) < 0$$

$$\exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \subseteq [x_1, x_2[, \Rightarrow f(x) < 0$$

Sia $t \in (x_0 - \delta, x_0)$, allora

$$t < x_0 \Rightarrow t < \sup X \Rightarrow t \in X$$

, ma questo e' assurdo perche' $f(t) < 0 \Rightarrow t \notin X$. Alternativamente possiamo procedere usando la seconda proprieta' del $\sup X$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t \in (x_0 - \delta, x_0) \subset [x_1, x_2[\mid t > x_0 - \varepsilon$$

Allora $f(t) < 0$ perche' $t \in (x_0 - \delta, x_0)$. Inoltre, $t \in X$ e quindi $f(t) > 0$, ma questo e' assurdo.

Deduciamo quindi che non e' vero che $f(x_0) < 0$

Siccome non e' vero che $f(x_0) < 0$ e che $f(x_0) > 0$, allora $f(x_0) = 0$. □

7.1.1 Corollario

Il corollario sostituisce semplicemente lo zero con un numero $\gamma \in (a, b)$, cioe'

$$\exists x_1, x_2 \in (a, b), \quad x_1 < x_2 \mid f(x_1) < \gamma, \quad f(x_2) > \gamma$$

allora, esiste almeno un punto x_0

$$\exists x_0 \in]x_1, x_2[\mid f(x_0) = \gamma$$

Proof: Usiamo la funzione continua $F(x)$:

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - \gamma : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \\ F(x_1) &= f(x_1) - \gamma < 0 \\ F(x_2) &= f(x_2) - \gamma > 0 \end{aligned}$$

Allora per il teorema di prima,

$$\exists x' \in (a, b) \mid F(x') = 0$$

Cioè,

$$F(x') = 0 = f(x') - \gamma \Leftrightarrow f(x') = \gamma$$

□

7.2 Teorema dei valori intermedi

Data la solita $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, continua, e preso un γ

$$\inf(a, b) < \gamma < \sup(a, b)$$

allora,

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid f(x_0) = \gamma$$

Poiché γ può essere scelto a piacere, questo significa che la funzione assume tutti i valori tra il suo inf e il suo sup.

7.3 Limiti di funzioni continue e successioni

Data $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $c \in (a, b)$, f è continua in c se e solo se accade che:

$$\forall \{x_n\}, x_n \in (a, b), \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = c \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(c)$$

7.4 Teorema di continuità delle funzioni composte

Date

$$f : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

f continua in $g(x_0)$ e g continua in x_0 , allora il teorema dice che $f \circ g$ è continua in x_0 , cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$$

7.5 Teorema di Weierstrass

Data $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e continua in $[a, b]$, allora la f assume sia il massimo che il minimo dell'intervallo $[a, b]$, cioè:

$$\exists x_1 \in [a, b] : f(x_1) = \sup(f([a, b])) = \max(f([a, b]))$$

$$\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = \inf(f([a, b])) = \min(f([a, b]))$$

Proof: Dimostriamo solo la seconda proprietà.

Poniamo $M = \sup(f([a, b]))$

1. Consideriamo il caso in cui $M = +\infty$, ovvero quando f è illimitata superiormente:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) > n$$

Poiché $n \rightarrow +\infty$, allora per il teorema del confronto anche $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty = M$.

2. Se invece, $M \in \mathbb{R}$, allora, consideriamo la seconda proprieta' del sup:

$$\forall n > 0, \frac{1}{n} > 0 \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) > M - \frac{1}{n}$$

Poiche' M e' il sup di $[a, b]$ scriviamo:

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) < M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora per $n \rightarrow +\infty$, $M - \frac{1}{n} \rightarrow M$ e pure $M \rightarrow M$, quindi per il teorema del confronto segue che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M$

In entrambi i casi abbiamo visto che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M$.

Adesso per il teorema di Bolzano possiamo prendere una estratta di x_n che converge a un numero $x_0 \in [a, b]$, ovvero:

$$\exists x_{k_n} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x_0 \in [a, b]$$

Per il teorema sui limiti delle estratte e per la caratterizzazione delle funzioni continue tramite successioni, deduciamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Per il thm delle succ. estratte:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = M$$

quindi $M = f(x_0)$ ovvero $f(x_0) = M = \sup(f([a, b]))$, ma poiche' $f(x_0) \in f([a, b])$ allora M e' anche un massimo, quindi: $M = \sup(f([a, b])) = \max(f([a, b]))$ $\square$

7.6 Punti di discontinuita'

Data $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in DX$, x_0 si dice punto di discontinuita' se accade uno dei seguenti eventi:

1. $x_0 \notin X$
2. $\nexists$ finito $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
3. La f non e' continua in x_0 :

$$x_0 \in X, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Diremo che la discontinuita' di x_0 e' eliminabile se non e' vero il caso (2), cioe' se $\exists$ finito $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. In questo caso e' possibile estendere $f(x)$ in modo da renderla continua in x_0 . Basta prendere questa funzione:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & x = x_0 \end{cases}$$

Si dice che g e' un prolungamento per continuita' di f .

Analizziamo adesso le diverse specie di discontinuita'. Prima di tutto diamo queste ipotesi:

$$X \subset \mathbb{R}$$

$$X_{x_0}^+ := X \cap]x_0, +\infty[$$

$$X_{x_0}^- := X \cap]-\infty, x_0[$$

prendiamo un punto $x_0 \in DX_{x_0}^+ \cap X_{x_0}^-$

7.6.1 Discontinuità di prima specie

Data $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 e' un punto di discontinuità di prima specie se:

$$\begin{aligned} &\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \\ &\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \end{aligned}$$

Il salto di f in x_0 indica la seguente quantità:

$$s = \left| \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right|$$

7.6.2 Discontinuità di seconda specie

Data $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 e' un punto di discontinuità di seconda specie se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$$

Se consideriamo la restrizione $f|_{X_{x_0}^+}$ e' di seconda specie se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

7.6.3 Discontinuità di terza specie

Data $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 e' un punto di discontinuità di terza specie se:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)$$

Se consideriamo la restrizione $f|_{X_{x_0}^+}$ e' di terza specie se:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

8 Funzioni monotone

$f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ e' monotona di tipo

$$\begin{cases} \text{crescente} & \forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2, f(x_1) < f(x_2) \\ \text{non decrescente} & \forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2, f(x_1) \leq f(x_2) \\ \text{decrescente} & \forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2, f(x_1) > f(x_2) \\ \text{non crescente} & \forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2, f(x_1) \geq f(x_2) \end{cases}$$

Un esempio di funzione non decrescente e' $f(x) = \text{int}(x) = [x]$

Theorem 8.1. Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e' crescente o non decrescente, preso un punto $x_0 \in [a, b]$ allora:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup f([a, x_0]) = l \quad l \neq \pm\infty$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf f([x_0, b]) = L \quad L \neq \pm\infty$$

e inoltre

$$l \leq f(x_0) \leq L$$

Se $x_0 = a$ la tesi si trasforma in:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf f([a, b]) = L \quad L \neq \pm\infty$$

Se invece $x_0 = b$:

$$\exists \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup f([a, b]) = l \quad l \neq \pm\infty$$

Theorem 8.2. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e' decrescente o non crescente, preso un punto $x_0 \in [a, b]$ allora:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \inf f([a, x_0]) = l \quad l \neq \pm\infty$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sup f([x_0, b]) = L \quad L \neq \pm\infty$$

Se $x_0 = a$ la tesi si trasforma in:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \sup f([a, b]) = L \quad L \neq \pm\infty$$

Se invece $x_0 = b$:

$$\exists \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \inf f([a, b]) = l \quad l \neq \pm\infty$$

Theorem 8.3. Le funzioni monotone che assumono tutti i valori compresi tra il sup e l'inf della $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue. Formalmente, posto $l = \inf f((a, b))$, $L = \sup f((a, b))$,

$$\begin{cases} f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ monotona} \\ \forall \gamma \in]l, L[, \exists x' \in (a, b) : f(x') = \gamma \end{cases} \Rightarrow f \equiv \text{continua in } (a, b)$$

Questo teorema vale anche per $l = \pm\infty$, $L = \pm\infty$.

9 Funzioni uniformemente continue

Una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e' uniformemente continue se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in (a, b), |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Ovvero, a valori "vicini" nel dominio di $f(x)$ corrispondono valori vicini in nell'immagine $\text{Im } f$. Per abbreviare usiamo u.c. (uniformemente continua).

Theorem 9.1.

$$f \equiv \text{u.c. in } (a, b) \Rightarrow f \equiv \text{continua in } (a, b)$$

Proof: Prendiamo un generico punto del dominio $c \in (a, b)$. Dobbiamo dimostrare che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \rho > 0 : x \in (a, b), |x - c| < \rho \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

Per Hp:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in (a, b), |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Allora siccome questo vale per ogni x', x'' basta scegliere

$$x' = x, \quad x'' = c$$

e quindi otteniamo che:

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

Quindi il ρ che volevamo trovare e' $\rho = \delta$.

□

Non vale sempre il viceversa di questo teorema.

Theorem 9.2. *Il teorema di Cantor dice che:*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ continua in } [a, b] \Rightarrow f \equiv u.c.$$

Cioe' se f e' limitata e chiusa in $[a, b]$ allora e' u.c. in $[a, b]$. I corollari sono:

1.

$$\begin{cases} f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \text{ continua in } [a, +\infty[\\ \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow f \equiv u.c. \text{ in } [a, +\infty[$$

2.

$$\begin{cases} f :]-\infty, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ continua in }]-\infty, b] \\ \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow f \equiv u.c. \text{ in }]-\infty, b]$$

3.

$$\begin{cases} f :]-\infty, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \text{ continua in }]-\infty, +\infty[\\ \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \\ \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow f \equiv u.c. \text{ in }]-\infty, +\infty[$$

10 Derivata

Data la funzione $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ e un punto $c \in]a, b[$, il rapporto incrementale di f su c e' la seguente funzione:

$$R(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

La derivata prima nel punto c di f e' il limite finito

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} R(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

La derivata $f'(c)$ corrisponde al coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto c , quindi la retta tangente e' data da:

$$y - f(x) = f'(c)(x - c)$$

Se in ogni punto di $c \in (a, b)$ esiste $f'(c)$ allora si dice che f e' derivabile in (a, b) .

Ponendo $h = x - c$, $x = h + c$ e' possibile esprimere la derivata in un altro modo:

$$\lim_{x \rightarrow c} h = 0$$

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h + c) - f(c)}{h}$$

Theorem 10.1. *Se f e' derivabile in $c \in]a, b[$ allora e' continua in c .*

$$\exists f'(c) \Rightarrow f \equiv \text{continua in } c$$

Proof: Per Hp:

$$\exists f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Consideriamo

$$f(x) - f(c) = \frac{f(x) - f(c)}{(x - c)}(x - c)$$

Poiche'

$$\lim_{x \rightarrow c} x - c = 0$$

sara'

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} (x - c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \lim_{x \rightarrow c} x - c = f'(c) \cdot 0 = 0$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) - f(c) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Cioe' la tesi. □

Data la funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, si dice che f e' derivabile in a se:

$$\exists \text{ finito } \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

e' derivabile in b se:

$$\exists \text{ finito } \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

Se f e' derivabile in (a, b) possiamo calcolarne la derivata prima $f'(x)$. Se $f'(x)$ e' derivabile in (a, b) , possiamo calcolare la derivata seconda di f ovvero $f''(x)$, e cosi' via. La derivata n -esima si indica con $f^{(n)}(x)$.

10.1 Derivate notevoli (regole di derivazione)

$$D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

$$D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$D[kf(x)] = kf'(x)$$

$$D \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$Da^x = a^x \log_e a$$

$$D \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$D \ln x = \frac{1}{x}$$

$$D \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$D \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D \sin x = \cos x$$

$$D \cos x = -\sin x$$

$$\sin'' x = -\sin x, \quad \sin''' x = -\cos x, \quad \sin^{(4)} x = \sin x$$

$$D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$D \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

$$D [\arcsin y] = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$D [\arccos y] = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$D [\arctan y] = \frac{1}{1+y^2}$$

$$D [\operatorname{arccot} y] = -\frac{1}{1+y^2}$$

$$D [\operatorname{arsinh} y] = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

10.1.1 Alcune dimostrazioni

Proof: Dimostriamo $D \sin x = \cos x$.

$$\begin{aligned}
 D \sin x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x+h-x}{2} \cos \frac{x+h+x}{2}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(\frac{h}{2} + x\right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(\frac{h}{2} + x\right) = \cos x
 \end{aligned}$$

□

Proof: Dimostriamo $D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= f(x)g(x) \\
 D[f(x)g(x)]_{x=c} &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} \\
 &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} \\
 &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)g(x) - f(c)g(x) - f(c)g(c) + f(c)g(x)}{x - c} \\
 &= \lim_{x \rightarrow c} g(x) \frac{f(x) - f(c)}{x - c} + f(c) \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \\
 &= \lim_{x \rightarrow c} g(c) \frac{f(x) - f(c)}{x - c} + f(c) \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \\
 &= g(c) \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} + g(c) \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \\
 &= g(c)f'(c) + f(c)g'(c)
 \end{aligned}$$

□

Proof: Dimostriamo che

$$D[\arcsin y] = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

per Hp sappiamo che $\sin x$ e' continua e derivabile, e' anche invertibile in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, la sua inversa $\arcsin y$ e' continua. Quindi usando il teorema di derivazione delle funzioni inverse, deduciamo che

$$D[\arcsin y] = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x}$$

per le $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (altrimenti $\cos x = 0$). Per l'identita' fondamentale della trigonometria appiamo che $\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$ e poiche' stiamo considerando $\cos x > 0$, scegliamo solo il segno +:

$$D[\arcsin y] = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

Infine, poiche' $\sin x = y$, abbiamo:

$$D[\arcsin y] = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

□

Proof: Dimostriamo che

$$D [\arccos y] = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Si procede come la dimostrazione precedente, quindi: per Hp sappiamo che $\cos x$ e' continua e derivabile, e' anche invertibile in $[0, \pi]$, la sua inversa $\arccos y$ e' continua. Quindi usando il teorema di derivazione delle funzioni inverse, deduciamo che

$$D [\arccos y] = \frac{1}{\cos' x} = \frac{1}{-\sin x} = \frac{1}{-\sin(\arccos y)}$$

per le $y \in]-1, 1[$. Per l'identita' fondamentale della trigonometria appiamo che $\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$ e poiche' stiamo considerando $\sin x > 0$, scegliamo solo il segno +:

$$D [\arccos y] = \frac{1}{-\sin(\arccos y)} = \frac{1}{-\sqrt{1 - \cos^2 \arccos y}} = \frac{1}{-\sqrt{1 - y^2}}$$

□

Proof: Dimostriamo che

$$D \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e$$

Prima di tutto osserviamo che la funzione e' definita in

$$f(x) = \log_a x :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

calcoliamo il limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+x) - f(x)}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(h+x) - \log_a(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a \frac{h+x}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(\frac{h}{x} + 1 \right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(\frac{h}{x} + 1 \right) \frac{1}{\frac{h}{x}}}{\frac{h}{x}} \\ &= \frac{1}{x} \log_a e \end{aligned}$$

□

Proof: Dimostriamo che

$$Da^x = a^x \log_e a$$

Prima di tutto osserviamo che la funzione e' definita in

$$f(x) = a^x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

calcoliamo il limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+x) - f(x)}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{h+x} - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} \\ &= a^x \log_e a \end{aligned}$$

□

Proof: Dimostriamo che

$$Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

Prima di tutto osserviamo che la funzione e' è definita in

$$f(x) = x^\alpha :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

calcoliamo il limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+x) - f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+x)^\alpha - x^\alpha}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} x^\alpha \frac{\frac{h+x}{x}^\alpha - 1}{\frac{h}{x}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \frac{\frac{h+x}{x}^\alpha - 1}{\frac{h}{x}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \frac{\left(\frac{h}{x} + 1\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}} \\ &= \alpha x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

□

Proof: Dimostriamo che

$$D[\operatorname{arsinh} y] = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$\sinh x$ è crescente e continua in $\mathbb{R}$, quindi per il teorema (11.1) anche $\operatorname{arsinh} y$ è crescente e continua in $\mathbb{R}$. Quindi possiamo applicare il teorema (11.3). Calcoliamo

$$D[\sinh x] = D\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$$

e allora:

$$D[\operatorname{arsinh} y] = \frac{1}{\cosh x}$$

poiché l'identità fondamentale dice che

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh x = \pm \sqrt{1 + \sinh^2 x}$$

(siamo solo interessati nelle soluzioni positive), quindi:

$$D[\operatorname{arsinh} y] = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 x}}$$

e poiché $\sinh x = y$, arriviamo alla tesi:

$$D[\operatorname{arsinh} y] = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

□

10.2 Derivate di funzioni composte

Date

$$f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

f derivabile in $y_0 \in (\alpha, \beta)$ e g derivabile in $x_0 \in (a, b)$,

$$g(x) \in (\alpha, \beta) \quad \forall x \in (a, b), \quad \wedge g(x_0) = y_0$$

allora la funzione

$$F(x) = f(g(x))$$
$$F'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

11 Funzioni invertibili

Data $f : X \rightarrow Y$, $Z = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$, allora:

$$f \equiv \text{invertibile} \Leftrightarrow \forall y \in Z \exists! x \in X : f(x) = y$$

$\Leftrightarrow$ l'equazione $f(x) = y$ nell'incognita x , ammette una sola soluzione

se f e' biettiva, allora e' invertibile.

Per controllare graficamente l'invertibilita' di $f(x)$, basta controllare che ogni parallela all'asse delle x , incontri al massimo un solo punto del grafico di $f(x)$.

Se f e' invertibile possiamo definire la sua funzione inversa:

$$f^{-1} : Z \rightarrow X$$

$$f^{-1}(y) = x, \text{ dove } x \text{ e' l'unica soluzione dell'equazione } f(x) = y \text{ nell'incognita } x$$

11.0.1 Proprieta'

1. $f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in X$
2. $f(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in Z$

Proof: Sia $y \in Z$, allora

$$\exists! x \in X : f(x) = y$$

quindi

$$f^{-1}(y) = x$$

$$f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

□

11.1 Monotonia e invertibilita'

$$f \equiv \text{monotona crescente (decreciente)} \Rightarrow f \equiv \text{invertibile}$$

Proof: La tesi e':

$$\forall y \in \mathbb{Z} \exists! x \in X : f(x) = y$$

Dimostriamo per assurdo, neghiamo quindi la tesi:

$$\exists y \in \mathbb{Z} \exists x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) = y$$

A questo punto sfruttiamo l'ipotesi di monotonia, supponendo $x_1 < x_2$:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow y < y$$

il che e' assurdo, quindi f e' invertibile.

□

Ovviamente di questo teorema non vale sempre il viceversa.

11.2 Continuità e invertibilità

$$\begin{aligned} f : (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R}, \text{ crescente, continua in } (a, b) \\ \Rightarrow f^{-1} : (f(a), f(b)) &\longrightarrow (a, b), \text{ crescente, continua in } (f(a), f(b)) \end{aligned}$$

Proof: Dimostriamo solo per $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1} : [f(a), f(b)] \longrightarrow [a, b]$

Dimostriamo la prima parte, cioè Ts: f^{-1} crescente.

Dimostriamo per assurdo, negando la tesi:

$$\exists y_1, y_2 \ y_1 < y_2 : f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$$

poiché $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in [a, b]$, allora possiamo fare:

$$f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$$

(Nota che il verso non cambia perché $f(x)$ è monotona crescente) ma allora:

$$f(f^{-1}(y_1)) = y_1 \geq y_2 = f(f^{-1}(y_2))$$

Il che è contro Hp $y_1 < y_2$.

Adesso dimostriamo la seconda parte, cioè Ts: f^{-1} continua in $[f(a), f(b)]$. Poiché f^{-1} è monotona basta provare, per il teorema 8.3, che assume tutti i valori tra il suo inf e sup. Dato che $\inf[a, b] = a$ e $\sup[a, b] = b$, dobbiamo provare che:

$$\forall \gamma \in (a, b) \ \exists y \in [f(a), f(b)] : f^{-1}(y) = \gamma$$

La y cercata è $y = f(\gamma)$, infatti $f^{-1}(f(\gamma)) = \gamma$. □

11.3 Teorema di derivazione delle funzioni inverse

Date le seguenti ipotesi:

$$\begin{aligned} f : (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R}, \text{ continua, invertibile} \\ x_0 \in (a, b), \ f(x_0) &= y_0 \ \exists f'(x_0) \neq 0 \\ Z = f((a, b)), \ \exists f^{-1}(y) : Z &\longrightarrow (a, b), \text{ continua in } y_0 \end{aligned}$$

allora

$$D[f^{-1}(y_0)] = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Proof: Dobbiamo dimostrare che:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

ovvero che (1):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : y \in Z, y \neq y_0, |y - y_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon$$

per Hp sappiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

e prendendo il limite reciproco otteniamo che (2):

$$\varepsilon > 0 \exists \rho > 0 : x \in (a, b), x \neq x_0, |x - x_0| < \rho \Rightarrow \left| \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon$$

Poiché la f è invertibile, è anche iniettiva e quindi $f(x) \neq f(x_0)$, cioè $f(x) - f(x_0) \neq 0$, quindi quel denominatore ha senso. Sempre per Hp sappiamo che f^{-1} è continua in y_0 , cioè:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$$

ovvero:

$$\rho > 0 \exists \delta' > 0 : y \in Z, y \neq y_0, |y - y_0| < \delta' \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \rho$$

Per Hp sappiamo che $f(x_0) = y_0$, quindi $f^{-1}(y_0) = x_0$, sostituiamo:

$$\rho > 0 \exists \delta' > 0 : y \in Z, y \neq y_0, |y - y_0| < \delta' \Rightarrow |f^{-1}(y) - x_0| < \rho$$

considerando le y tali che

$$y \in Z, y \neq y_0, |y - y_0| < \delta'$$

, possiamo sostituire $x = f^{-1}(y)$ nella (2) perche' le sue condizioni $x \in (a, b), x \neq x_0, |x - x_0| < \rho$ vengono rispettate:

$$\left| \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon$$

sostituendo $f(f^{-1}(y)) = y, f(x_0) = y_0, x_0 = f^{-1}(y_0)$:

$$\left| \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon$$

e ponendo $\delta = \delta'$ otteniamo proprio la (1). □

Con questo teorema possiamo dimostrare che

$$D[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

vedi 10.1.1.

Questo teorema si completa in questo modo:

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow y_0} \left| \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \right| = +\infty$$

ovvero $D[f^{-1}(y_0)]$ non esiste.

Se invece $f(x_0)$ non e' derivabile, allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = +\infty \Rightarrow D[f^{-1}(y_0)] = 0$$

11.4 Teorema di Rolle

Data $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in]a, b[: f'(c) = 0$$

ovvero, esistera' almeno un punto in cui la derivata si annulla.

Geometricamente Rolle dice che ci deve essere almeno un punto del grafico in cui la sua tangente e' parallela all'asse delle x .

11.5 Teorema di Cauchy

Date $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue in $[a, b]$ e derivabili in $]a, b[$

$$g'(x) \neq 0, \forall x \in]a, b[\Rightarrow \exists c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

nota che $g(b) \neq g(a)$ perche' se cosi' fosse, per Rolle, si avrebbe che $\exists c \in]a, b[: g'(c) = 0$ ma questo e' assurdo contro Hp.

11.6 Teorema di Lagrange

Data $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$ accade che

$$\exists c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Geometricamente, Lagrange dice che esisterà' almeno un tangente al grafico parallela alla retta passante per i punti $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

Proof: Consideriamo $g(x) = x$, allora per Cauchy:

$$\exists c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

e quindi

$$\exists c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{1}$$

□

11.6.1 Corollario I

Data $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabile in (a, b) , allora si ha

$$f(x) = k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Proof: Abbiamo già visto che $D[f(x) = k] = 0$, quindi dimostriamo $\Leftarrow$. Consideriamo la restrizione

$$f : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$$

con $x_1 < x_2$.

Poiché f è derivabile e' anche continua e quindi per Lagrange

$$\exists c \in]x_1, x_2[: \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0$$

allora

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$$

siccome questo ragionamento può essere ripetuto per tutte le $x_1 < x_2 : x_1, x_2 \in (a, b)$, concludiamo che $f(x) = k \in \mathbb{R}$ □

11.6.2 Corollario II

Date $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabili allora $\forall x \in (a, b)$ accade che

$$f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f(x) - g(x) = k \in \mathbb{R}$$

Proof: Consideriamo $F(x) = f(x) - g(x)$. Questa è una funzione continua e derivabile in (a, b) perché differenza di funzioni derivabili. La sua derivata è

$$F'(x) = f'(x) - g'(x)$$

e poiché per Hp $f'(x) = g'(x)$

$$F'(x) = 0$$

Allora per il corollario I, deduciamo che $F(x) = k$, e quindi

$$f(x) - g(x) = k$$

□

11.6.3 Corollario III

Data $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile in (a, b)

$$f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f \equiv \text{non decrescente}$$

Proof: Dobbiamo dimostrare che

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

consideriamo la restrizione $f : [x_1, x_2]$ e per Lagrange:

$$\exists c \in]x_1, x_2[: f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Poichè $x_2 - x_1 \geq 0$ e $f'(c) \geq 0$ deduciamo che

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

□

Il simmetrico di questo corollario è che:

$$f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f \equiv \text{non crescente}$$

11.7 Funzioni crescenti e derivate

Data $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile in (a, b) ,

$$f \equiv \text{crescente} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b) \wedge \nexists [\alpha, \beta] \subset (a, b) : f'(x) = 0 \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Proof: Dimostriamo $\Rightarrow$. Dobbiamo dimostrare le due condizioni:

1. Per assurdo supponiamo che

$$\exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) < 0$$

cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) < 0$$

per la permanenza del segno

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

Poichè f è crescente, nel caso in cui $x < x_0$ si ha che $f(x) < f(x_0)$ e quindi

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Invece, nel caso in cui $x > x_0$, $f(x) > f(x_0)$ e quindi:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Ma tutti questi due casi sono assurdi.

2. Anche qui procediamo per assurdo, e quindi supponiamo che

$$\exists [x_1, x_2] \subseteq (a, b) : f'(x) = 0 \forall x \in [x_1, x_2]$$

Da $f'(x) = 0$ deduciamo che f è costante, ma questo è assurdo perchè f è crescente.

Dimostriamo adesso $\Leftarrow$.

Per il corollario III di Lagrange deduciamo che

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

ora supponiamo per assurdo che $\exists x', x'' \in (a, b) : f(x') = f(x'')$ allora considerando la restrizione $f : [x', x'']$ e adoperando Rolle:

$$\exists c \in [x', x''] : f'(c) = 0$$

ma questo è in contrasto con l'Hp, quindi deve essere che $f(x_1) \neq f(x_2)$, in conclusione:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

□

11.8 Teorema di De l'Hopital

Date $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, continue in $c \in (a, b)$:

$$f(c) = g(c) = 0 \wedge \exists f'(x), g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b) \setminus \{c\} \wedge \exists \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow g(x) \neq 0 \forall x \in (a, b) \setminus \{c\} \wedge \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

In sostanza, se abbiamo un limite che si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, possiamo usare l'Hopital e calcolarne il valore. Nota che la non esistenza del limite del quoziente delle derivate comunque non implica la non esistenza del limite del quoziente originale.

Proof: Dimostriamo intanto che

$$g(x) \neq 0 \forall x \in (a, b) \setminus \{c\}$$

e procediamo per assurdo supponendo che

$$\exists x_0 \in (a, b) \setminus \{c\} \mid g(x_0) = 0$$

supponendo per convenienza $x_0 < c$, usiamo la restrizione $g : [x_0, c]$. Poiche' $g(x_0) = g(c) = 0$ per Rolle:

$$\exists x' \in]x_0, c[: g'(x') = 0$$

e questo e' in contrasto con l'Hp

$$g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b) \setminus \{c\}$$

Adesso possiamo procedere a dimostrare

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

per definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, b) \setminus \{c\}, |x - c| < \delta : \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon$$

lavorando in $\forall x \in (a, b) \setminus \{c\}, |x - c| < \delta$ usiamo la seguente restrizione:

$$f, g : [c, x] \longrightarrow \mathbb{R}$$

e applichiamo Cauchy:

$$\exists t \in]c, x[: \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

e poiche' $f(c) = g(c) = 0$ abbiamo:

$$(*) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

inoltre, dato che

$$t \in]c, x[\Rightarrow |t - c| \leq |x - c| \leq \delta \Rightarrow |t - c| < \delta$$

e poiche' t sottosta' alle condizioni del limite possiamo scrivere

$$\left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - L \right| < \varepsilon$$

ritornando a (*) e sottraendo membro a membro L e prendendone il valore assoluto:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - L \right| < \varepsilon$$

che e' quello volevamo dimostrare. □

12 Massimi e minimi relativi

Data $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$,

$$x_0 \equiv \text{punto di massimo relativo} \Leftrightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

$x_0 \equiv$ punto di minimo relativo $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$

$x_0 \equiv$ massimo relativo proprio $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b) \Rightarrow f(x) < f(x_0)$

$x_0 \equiv$ minimo relativo proprio $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b) \Rightarrow f(x) > f(x_0)$

Se x_0 e' un punto di massimo assoluto, allora e' anche massimo relativo.

Si dice che x_0 e' un estremo relativo quando e' o un massimo relativo o un minimo.

x_0 e' un estremo relativo *proprio* quando solo per $x = x_0$ vale la disuguaglianza all'interno dell'intorno.

12.1 Teorema di Fermat

Data $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$

$x_0 \equiv$ estremo relativo, $\exists f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Proof: Supponiamo per convenienza che x_0 sia di massimo relativo:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta = (x - \delta, x + \delta) \cap (a, b) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

Lavoriamo sul segno del rapporto incrementale di f :

$$(*) \quad r(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 & x \in I_\delta, x > x_0 \\ \geq 0 & x \in I_\delta, x < x_0 \end{cases}$$

Supponiamo che $f'(x) > 0$, cioe'

$$\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) > 0$$

allora per la permanenza del segno:

$$\exists \rho < \delta \forall x \in I_\rho, x \neq x_0, r(x) > 0$$

ma questo e' in contrasto con (*), lo stesso vale considerando $f'(x) < 0$. Quindi, poiche' $f'(x)$ e' un numero, l'unica possibilita' rimasta e' che necessariamente $f'(x) = 0$ $\square$

Non vale sempre il viceversa del teorema, infatti, per $f(x) = x^3$:

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

ma $x = 0$ non e' affatto un punto di estremo relativo, dato che $f(x)$ e' crescente.

Inoltre, un punto potrebbe essere di estremo, ma non avere derivata, ad esempio $f(x) = |x|$ ha per minimo assoluto $x = 0$, ma $\nexists f'(0)$.

Theorem 12.1. Data $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$

$$\exists f'(x) \forall x \in (a, b), f'(x_0) = 0, \exists \delta > 0 : \begin{cases} f'(x) > 0 & x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap (a, b) \\ f'(x) < 0 & x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap (a, b) \end{cases}$$

$\Rightarrow x_0$ e' di massimo relativo proprio

Ovviamente x_0 e' di minimo relativo proprio se i segni di $f'(x)$ sono invertiti.

Theorem 12.2. Data $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$

$$\exists f'(x) \forall x \in (a, b), f'(x_0) = 0, \exists f''(x_0), f''(x_0) < 0$$

$\Rightarrow x_0$ e' di massimo relativo proprio

Proof: Per Hp:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) < 0$$

quindi per la permanenza del segno:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta = (x - \delta, x + \delta) \cap (a, b), x \neq x_0 \Rightarrow \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$$

Se $x > x_0$, $x \in I_\delta$, allora il denominatore di sopra e' sempre positivo, quindi deve per forza essere:

$$f'(x) - f'(x_0) < 0 \Rightarrow f'(x) < (f'(x_0) = 0)$$

Se invece $x < x_0$, $x \in I_\delta$, allora deve essere:

$$f'(x) - f'(x_0) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

Allora poiche'

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & x < x_0, x \in I_\delta \\ < 0 & x > x_0, x \in I_\delta \end{cases}$$

per il teorema precedente, concludiamo che x_0 e' di massimo relativo proprio, che e' quello che volevamo dimostrare. □

13 Concavita', convessita' e flessi

Data $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile in $f'(x_0)$, $x_0 \in]a, b[$, la retta tg al grafico di f (G_f) nel punto x_0 divide il piano cartesiano in due semipiani. Chiamiamo π_1 quello di sopra e π_2 quello di sotto. G_f volge la concavita' verso l'alto (convessita' verso il basso) se

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b), G_f \in \pi_1$$

poiche' t , la retta tangente, e' definita da $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, la relazione analitica diventa: $f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

La concavita' e' rivolta verso il basso se:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b), G_f \in \pi_2 \Leftrightarrow f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Se invece la situazione e' mista, allora x_0 e' un punto di flesso:

$$x_0 \equiv \text{punto di flesso} \Leftrightarrow \exists \delta > 0 : \begin{cases} \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap (a, b), G_f \in \pi_1 \\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap (a, b), G_f \in \pi_2 \end{cases}$$

Vale anche nel caso opposto, cioe' $G_f \in \pi_2$ per il primo intorno e $G_f \in \pi_1$ per il secondo.

Theorem 13.1. Usando le derivate possiamo capire dove sono i punti di flesso di una funzione e che concavita' ha in un punto.

Hp:

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \exists f'(x) \forall x \in (a, b), x_0 \in]a, b[$$

Sotto queste Hp valgono i seguenti teoremi:

$$\exists f''(x_0) < 0 \Rightarrow \text{in } x_0 \text{ la concavita' e' verso il basso}$$

$$\exists f''(x_0) > 0 \Rightarrow \text{in } x_0 \text{ la concavita' e' verso l'alto}$$

Proof: Dimostriamo solo il primo (che e' analogo al secondo).

La tesi e':

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b), f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Definiamo la seguente funzione:

$$F(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$$

Calcoliamone la derivata prima:

$$F'(x) = f'(x) - \underbrace{(f'(x_0))'(x - x_0)}_{f'(x_0) \text{ e' una const, quindi } (f'(x_0))' = 0} - f'(x_0) - 0 = f'(x) - f'(x_0)$$

Calcoliamo $F''(x)$ in x_0 :

$$F''(x) = f''(x) \Rightarrow F''(x_0) = f''(x_0)$$

allora

$$\begin{cases} F'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0 \\ F''(x_0) = f''(x_0) < 0 \end{cases}$$

Per il teorema 12.2, x_0 e' un punto di massimo relativo per F , quindi per definizione di max rel:

$$\exists \rho > 0 : \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \cap (a, b), \Rightarrow F(x_0) \geq F(x)$$

quindi convertendo in f :

$$F(x_0) \geq F(x) \Rightarrow f(x_0) - f'(x_0)(x_0 - x_0) - f(x_0) \geq f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$$

$$0 \geq f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$$

$$f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Che e' proprio quello che volevamo dimostrare. Quindi, in definitiva,

$$\delta = \rho$$

□

Theorem 13.2. Hp:

$$f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}, \exists f'(x) \forall x \in (a, b), x_0 \in]a, b[$$

$$\exists f''(x) \forall x \in (a, b) f''(x_0) = 0, \exists f'''(x_0) \neq 0$$

$$\Rightarrow x_0 \text{ e' un punto di flesso}$$

14 Asintoti

Data la $f : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, la retta r e' un suo asintoto se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} d((x, f(x)), r) = 0$$

ovvero se la distanza tra i punti di G_f e la retta r , tende a 0.

Esistono diversi tipi di asintoti:

1. r e' asintoto orizzontale se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = m$$

In questo caso

$$r : y = m$$

e anche

$$d((x, f(x)), r) = |f(x) - m|$$

2. r e' asintoto verticale destro se

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty, c \in \mathbb{R}$$

In questo caso

$$r : x = c$$

e anche

$$d((x, f(x)), r) = |x - c|$$

r e' asintoto verticale sinistro se

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty, c \in \mathbb{R}$$

3. Se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$$

allora possono essere eventuali asintoti obliqui.

$$r : y = mx + n \equiv \text{as. obliquo} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = n \in \mathbb{R} \end{cases}$$

in questo caso

$$d((x, f(x)), r) = \frac{|f(x) - mx - n|}{\sqrt{1 + n^2}}$$

L'algoritmo di ricerca di asintoti e' il seguente:

```
if f non e' limitata sup OR inf:
  if lim_{x to infy} f(x) = m:
    allora y=m e' l'asintoto orizzontale
  else
    si cercano gli asintoti obliqui
else if f non e' definito nel punto P:
  si cercano gli algoritmi verticali in P
```

15 Studio del grafico di una funzione

L'algoritmo per disegnare il grafico e' il seguente:

Trova il Campo di Esistenza

Studia le simmetrie

funzione pari: $f(-x)=f(x)$

simmetrica rispetto a y

funzione dispari: $f(-x)=-f(x)$

simmetria centrale rispetto a (0,0)

Intersezione con gli assi

$$f(x) = 0$$

$$f(0) = y$$

Studia il segno

$$f(x) > 0$$

Ricerca di asintoti

Ricerca di massimi, minimi, flesso, crescita, decrescenza

Concavità, convessità