

Teoria dei caratteri per gruppi finiti

Andrea Lo Pumo

Contents

1	Preliminari	1
2	Algebre	1
2.1	Moduli	5
2.2	Moduli semisemplici	11
2.3	Algebre semisemplici	13
3	Algebra di un gruppo	19
4	Rappresentazioni	23
5	*	32

1 Preliminari

Definition 1.1. . Sia A un anello (o gruppo). Se B e' un sottoanello (o sottogruppo) di A , scriveremo $B \leq A$.

1. Supporremo che in ogni anello unitario, $0_A \neq 1_A$, ovvero che lo zero dell'anello sia diverso dall'elemento unita', cioe'

$$\{0\} \subset \{0, 1\} \subseteq A$$

Quindi ogni anello unitario ha almeno 2 elementi.

2. Ogni anello sara' ritenuto implicitamente unitario.

Remark 1.1. Tutti gli spazi vettoriali che considereremo saranno di dimensione finita.

2 Algebre

Definition 2.1. Sia A un F -spazio vettoriale finitamente generato e un anello¹.

$$A \text{ e' un'algebra } \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) \quad \forall a, b \in A, \forall \lambda \in F$$

Definition 2.2. Sia $B \subseteq A$,

$$B \text{ e' una sottoalgebra di } A \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} B \begin{cases} \text{e' un sottospazio vettoriale di } A \\ \text{e' un sottoanello di } A \\ 1_A \in B \end{cases}$$

Se B e' una sottoalgebra di A utilizzeremo la seguente notazione:

$$B \preceq A$$

Remark 2.1. Una sottoalgebra e' un'algebra

Proposition 2.3.

$$B \preceq A \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \in B \\ \lambda x \in B \\ xy \in B \\ 1_A \in B \end{cases} \quad \forall x, y \in B, \forall \lambda \in F$$

Example 2.4. I seguenti insiemi sono delle algebre:

1. $A = F^{n \times n}$
2. $A = \text{Hom}(V, V)_F$, con V spazio vett. finitamente generato.

Definition 2.5. Definiamo il centro dell'algebra A :

$$Z(A) = \{a \in A \mid ab = ba \quad \forall b \in A\}$$

¹usiamo la stessa operazione di somma sia nello spazio che nell'anello. NOTA: l'anello e' unitario

Remark 2.2. $Z(A) \preceq A$

Proposition 2.6. Sia $e_1, \dots, e_n$ una base di A , allora

$$Z(A) = \{a \in A \mid ae_i = e_i a \quad \forall i = 1, \dots, n\}$$

Definition 2.7. Sia data una mappa $f : A \longrightarrow B$, con A, B algebre.

$$f \text{ e' un omomorfismo di algebre (alg-hom)} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f \text{ e' una applicazione lineare} \\ f \text{ e' un omomorfismo di anelli} \\ f(1_A) = 1_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \\ f(xy) = f(x)f(y) \\ f(1_A) = 1_B \end{cases}$$

Example 2.8. Sia A una F -algebra, allora la funzione

$$\begin{aligned} f : F &\longrightarrow A \\ \lambda &\mapsto \lambda 1_A \end{aligned}$$

e' un omomorfismo di algebre iniettivo.

Proof: E' facile vedere che e' f un omomorfismo, verifichiamo solo che $f(\lambda\mu) = f(\lambda)f(\mu)$

$$\begin{aligned} f(\lambda\mu) &= (\lambda\mu)1_A \stackrel{\text{assiomi dei vettori}}{=} \lambda(\mu 1_A) = \\ &= \lambda(1_A(\mu 1_A)) \stackrel{\text{assioma algebra}}{=} (\lambda 1_A)(\mu 1_A) = f(\lambda)f(\mu) \end{aligned}$$

f e' iniettiva, infatti,

$$\begin{aligned} \ker f &= \{\lambda \in F \mid \lambda 1_A = 0\} \\ \lambda 1_A = 0 &\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee 1_A = 0 \\ \lambda \neq 0 &\Rightarrow 1_A = 0 \text{ assurdo} \\ &\Rightarrow \ker f = \{0\} \end{aligned}$$

□

Definition 2.9. Con $I \trianglelefteq A$ indichiamo un ideale (bilatero) di A . Con $I \trianglelefteq^d A$ un ideale destro di A .

Proposition 2.10. Sia $I \trianglelefteq^d A$ un ideale destro di A , allora

$$I \trianglelefteq^d A \Rightarrow I \leq A$$

ovvero, I e' un sottospazio vettoriale di A .

Proof: Basta verificare che $\lambda x \in I \quad \forall x \in I, \forall \lambda \in F$.

$$\lambda x = \lambda(x 1_A) \stackrel{\text{Assioma algebra}}{=} x(\lambda 1_A) \stackrel{\text{I e' ideale destro e } x \in I}{\in} I$$

□

Proposition 2.11. Sia $\{e_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$ la base canonica di $F^{n \times n}$, ovvero e_{ij} e' la matrice formata tutta da zeri, con 1 nel posto i, j .

Sia $a \in F^{n \times n}$ Si ha,

1. $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$
2. $ae_{kl} = \sum_i a_{ik}e_{il} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{2k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{nk} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$
3. $e_{kl}a = \sum_i a_{li}e_{ki} = \begin{bmatrix} 0 & & \dots & 0 \\ 0 & & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & & \dots & 0 \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ 0 & & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & & \dots & 0 \end{bmatrix}$
4. $e_{rs}ae_{kl} = a_{sk}e_{rl}$

Intuitivamente,

1. ae_{kl} e' la matrice con la colonna k -esima di a messa nella colonna l e con tutti gli altri posti nulli
2. $e_{kl}a$ e' la matrice con la riga l -esima di a posta nella riga k e con tutti gli altri posti nulli.
3. $e_{rs}ae_{kl}$ e' la matrice che ha l'elemento a_{sk} nel posto r, l . Tutti gli altri suoi elementi sono nulli.

Proof:

(1) Dim 2.

$$a = \sum_{i,j} a_{ij}e_{ij}$$

$$ae_{kl} = \sum_{i,j} a_{ij}e_{ij}e_{kl} \underset{1.}{=} \sum_{i,j} a_{ij}\delta_{jk}e_{il} = \sum_i a_{ik}e_{il}$$

(2) Dim 4.

$$e_{rs}a \underset{3.}{=} \sum_i a_{si}e_{ri}$$

$$e_{rs}ae_{kl} = (e_{rs}a)e_{kl} = \sum_i a_{si}e_{ri}e_{kl} \underset{1.}{=} \sum_i a_{si}\delta_{ik}e_{rl} = a_{sk}e_{rl}$$

□

Proposition 2.12. Sia p_{ij} la matrice di permutazione che scambia la riga (colonna) i con la

riga (colonna) j . Allora si ha,

1. $p_{ij} = 1 - e_{jj} - e_{ii} + e_{ij} + e_{ji}$
2. $p_{ij}a$ e' la matrice ottenuta scambiando le righe i, j di a
3. ap_{ij} e' la matrice ottenuta scambiando le colonne i, j di a
4. $p_{ij}e_{jk} = e_{ik}$
5. $e_{ij}p_{jk} = e_{ik}$

Proposition 2.13.

$$Z(F^{n \times n}) = \{\text{diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda) \mid \lambda \in F\}$$

Proof:

$$Z(A) \stackrel{[2.6, \text{pg.2}]}{=} \{a \in A \mid ae_{ij} = e_{ij}a \quad \forall i, j = 1, \dots, n\}$$

$$ae_{ij} = e_{ij}a \stackrel{[2.11, \text{pg.2}]}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{2i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \underbrace{a_{ni}}_{\text{colonna } j} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & \underbrace{a_{jn}}_{\text{riga } i} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{jj} = a_{ii} \\ a_{ki} = 0 & k \neq i \\ a_{jh} = 0 & j \neq h \end{cases}$$

E poiche' questo vale per ogni i, j , si ha la tesi. □

Definition 2.14. Sia A un anello,

$$A \text{ e' semplice} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \forall I \trianglelefteq A \quad I = A \vee I = 0 \\ A \neq 0 \end{cases}$$

In altre parole, A e' semplice quando non ha ideali non banali.

Theorem 2.15. Sia $A = F^{n \times n}$, con F campo, allora,

A e' un'algebra semplice

Proof: Sia $I \trianglelefteq A$ e supponiamo che $I \neq 0$. Dimostriamo che $I = A$.

$$\begin{aligned}
I \neq 0 &\Rightarrow \exists a \neq 0 \in I \Rightarrow \exists a_{rs} \neq 0 \\
e_{sr}a &\in I \text{ perche' } a \in I \leq A \\
(e_{sr}a)e_{ss} &\in I \\
I \ni e_{sr}ae_{ss} &\stackrel{[2.11, \text{pg. 2}]}{=} a_{rs}e_{ss} \in I \\
\underbrace{a_{rs}}_{\in F} \neq 0 &\Rightarrow \exists a_{rs}^{-1} \in F \\
\begin{cases} a_{rs}e_{ss} \in I \\ I \stackrel{\text{sott. vettoriale}}{\leq} A \\ a_{rs}^{-1} \in F \text{ e' uno scalare} \end{cases} &\Rightarrow a_{rs}^{-1}(a_{rs}e_{ss}) \in I \Leftrightarrow e_{ss} \in I \\
e_{ss} \in I \leq A &\stackrel{\text{ideale}}{\Rightarrow} p_{is}e_{ss}p_{sj} \in I \Leftrightarrow e_{ij} \in I
\end{aligned}$$

e questo $\forall i, j$. Quindi

$$\{e_{ij} \mid i, j\} \text{ base di } A \subseteq I \Rightarrow A = I$$

□

Remark 2.3. Anche se non esistono ideali non banali, possono esistere ideali destri o sinistri. Ad esempio,

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in F \right\}$$

e' un ideale destro di $A = F^{n \times n}$

2.1 Moduli

Definition 2.16. Sia A un F -algebra, e V un F -spazio vettoriale, allora

$$\begin{aligned}
V \text{ e' un } A\text{-modulo, secondo l'operazione } \cdot : V \times A &\longrightarrow V \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \\
\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1. v1_A = v \\ 2. (v+w)a = va + wa \\ 3. (va)b = v(ab) \\ 4. v(a+b) = va + vb \\ 5. (\lambda v)a = v(\lambda a) = \lambda(va) \end{cases} &\quad \forall \lambda \in F, \forall a, b \in A, \forall v, w \in V
\end{aligned}$$

In pratica, si puo' pensare A come un particolare insieme di scalari per V (moltiplicati pero' a destra).

Example 2.17. 1. $A = F^{n \times n}$, $V = F^n$ e' un A -modulo con l'usuale operazione di moltiplicazione tra vettore (riga) e matrice²

2. A algebra, $V = A$. Questo A -modulo si chiama l' A -modulo regolare, e si indica con A°

²la moltiplicazione e' a destra: $v \cdot a$, con $a \in A$

Definition 2.18. Sia V un A -modulo, e $W \leq V$,

$$We' \text{ un sotto } A\text{-modulo di } V \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} wa \in W \quad \forall w \in W \quad \forall a \in A$$

Per indicare che W e' un A -sottomodulo di V useremo la seguente notazione:

$$W \stackrel{A}{\leq} V$$

Example 2.19. I sottomoduli di A° sono gli ideali destri.

Proposition 2.20. Sia V un A -mod e W un suo sottomodulo, allora

$$V/W \text{ e' un } A\text{-modulo con l'operazione } (v + W)a = va + W$$

Proof:

(1) L'operazione e' ben definita

$$v + W = v' + W \Rightarrow v - v' \in W \Rightarrow (v - v') \in \underbrace{W}_{W \text{ sottomodulo}} \Rightarrow (v - v')a \in W \Rightarrow va + W = v'a + W$$

□

Example 2.21. Dato V A -modulo e $v \in V$,

$$vA = \{va \mid a \in A\} \text{ e' un } A\text{-sottomodulo}$$

e in generale

$$v_1A + \dots + v_sA \text{ e' un } A\text{-sottomodulo}$$

Example 2.22. Sia V un A -mod, allora l'applicazione

$$\rho : A \longrightarrow \text{End}_F(V)$$

$$a \mapsto \rho_a$$

$$\text{dove } \rho_a : V \longrightarrow V$$

$$v \mapsto va$$

e' una algebra-omomorfismo.

Definition 2.23. Sia V un A -modulo,

$$\text{ann}_A(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid Va = 0\}$$

$\text{ann}_A(V)$ e' l'*annullatore* di V in A .

Proposition 2.24.

$$\text{ann}_A(V) \leq A$$

Definition 2.25. Sia V un A -modulo,

$$V \text{ e' semplice} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{gli unici sottomoduli di } V \text{ sono } 0, V$$

Theorem 2.26. Sia $A = F^{n \times n}$, $V = F^n$ A -mod con l'usuale moltiplicazione tra vettori e matrici, allora

V e' semplice

Proof: Supponiamo per assurdo che $\exists W$ sotto A -mod : $0 < W < V$, allora

$$\exists v \in V \setminus W, \exists w \in W \setminus \{0\}$$

Sia f un endomorfismo t.c.

$$f(w) = v$$

e sia $c \in A$ la sua matrice associata (secondo la base canonica), e quindi ³

$$wc = f(w) = v$$

ma essendo W un sottomodulo,

$$wc \in W \Rightarrow v \in W$$

assurdo contro $v \in V \setminus W$. □

Definition 2.27. Siano V, W due A -moduli.

$$f : V \longrightarrow W \text{ e' un } A\text{-omomorfismo} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1. f \text{ e' lineare} \\ 2. f(va) = f(v)a \quad \forall v \in V, \forall a \in A \end{cases}$$

Se f e' biettiva, diremo che f e' un A -isomorfismo e scriveremo:

$$V \stackrel{A}{\cong} W$$

Proposition 2.28. Sia $f : V \longrightarrow W$ un A -omomorfismo.

$\ker f$ e' un sottomodulo di V

$f(V)$ e' un sottomodulo di W

Example 2.29. Sia W un A -sottomodulo di V I seguenti sono A -omomorfismi:

1. $i : W \longrightarrow V$ inclusione
2. $\pi : V \longrightarrow V/W$ surriez. naturale

Sia U un A -sottomodulo di V e supponiamo $V = U \oplus W$, allora

$$\pi_U : V \longrightarrow U$$

$$v = u + w \mapsto u$$

e' un A -omomorfismo.

Proposition 2.30.

$$V \stackrel{A}{\cong} W \Rightarrow \text{ann}_A(V) = \text{ann}_A(W)$$

Ovvero, moduli isomorfi hanno lo stesso annulatore.

³stiamo usando una diversa notazione per le matrici: i vettori sono righe, e se A e' la matrice associata ad f , $v^t A = f(v)$ Come matrice associata intenderemo $B = {}^t A$, quindi $f(v) = w \Leftrightarrow vB = f(v)$

Proof:

$$V \stackrel{A}{\cong} W \Leftrightarrow \exists f : V \longrightarrow W \text{ } A\text{-isomorfismo}$$

$$a \in \text{ann}_A(V) \Leftrightarrow Va = 0 \Leftrightarrow f(Va) = 0 \Leftrightarrow f(V)a = 0 \Leftrightarrow Wa = 0 \Leftrightarrow a \in \text{ann}_A(W)$$

□

Proposition 2.31. *Siano V, W degli A -mod.*

$$\text{Hom}_A(V, W) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : V \longrightarrow W \mid f \text{ } A\text{-omo}\} \text{ e' uno spazio vettoriale}$$

$$\text{End}_A(V) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_A(V, V) \underbrace{\preceq}_{\text{sotto algebra}} \text{End}_F(V)$$

Theorem 2.32. *di Schur. Siano V, W degli A -mod.*

$$\begin{cases} f : V \longrightarrow W \text{ } A\text{-omo} \\ V, W \text{ semplici} \\ \text{Im } f \neq \{0\} \end{cases} \Rightarrow f \text{ e' un } A\text{-isomorfismo}$$

Proof: Per la prop [2.28,pg.7], $\text{Im } f$ e' un A -sottomod di W , e poiche' $\text{Im } f \neq 0$, si ha $0 < \text{Im } f \leq W$, W e' semplice $\Rightarrow \text{Im } f = W \Leftrightarrow f$ surriettiva

Analogamente:

$$\text{Im } f \neq \{0\} \Rightarrow \ker f < V \Rightarrow 0 \leq \ker f < V \underbrace{\Rightarrow}_{V \text{ semplice}} \ker f = \{0\} \Rightarrow f \text{ iniettiva}$$

□

Corollary 2.33. *Sia F campo algebricamente chiuso, V A -modulo semplice, allora*

$$f \in \text{End}_A(V) \Leftrightarrow \exists \lambda \in F : f = \lambda \text{id}_V$$

Proof:

(1) $\text{Dim} \Leftarrow$

$$f(va) = \lambda(va) = (\lambda v)a = f(v)a$$

(2) $\text{Dim} \Rightarrow$

Poiche' F e' chiuso, f ammette almeno un autovettore $v \in V \setminus \{0\}$ con autovalore $\lambda \in F$ (il polinomio caratteristico ammette radici in F). Allora,

$$f(v) = \lambda v$$

$$\text{Sia } g = f - \lambda \text{id}_V$$

$$f, \lambda \text{id}_V \in \text{End}_A(V) \Rightarrow g \in \text{End}_A(V)$$

$$g(v) = f(v) - \lambda v = 0 \Rightarrow v \in \ker g \Rightarrow \ker g \neq \{0\}$$

Allora per il teorema [2.32,pg.8] deve essere necessariamente $\text{Im } g = \{0\}$ e quindi

$$f = \lambda \text{id}_V$$

□

Proposition 2.34.

$$V \text{ } A\text{-modulo, } V \neq 0 \Rightarrow \exists W \stackrel{A}{\leq} V \text{ semplice}$$

In altre parole, in un A modulo possiamo sempre trovare un sottomodulo semplice.

Proof: Se V e' semplice, scegliamo $W = V$, altrimenti possiamo trovare un $V_1 \overset{A}{\leq} V$. A questo punto procediamo per induzione su V_1 . L'induzione dovra' arrestarsi perche' $\dim V < \infty$. $\square$

Proposition 2.35. *Sia I un insieme di indici qualunque (anche infinito), e sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottospazi di V . Definiamo la seguente somma:*

$$\sum_{i \in I} U_i \overset{def}{=} \left\{ \sum_{j \in J} u_j \mid J \subseteq I, |J| < \infty \right\}$$

allora si ha

$$V = \sum_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists \{i_1, \dots, i_m\} \subseteq I : V = U_{i_1} + \dots + U_{i_m}$$

Proof: Poiche' $V = \sum_{i \in I} U_i$, ogni vettore $v \in V$ si potra' scrivere come somma finita di elementi di certi U_i :

$$v = \sum_{j \in J} u_j, \quad u_j \in U_j \quad \forall j \in J$$

Quindi considerando la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V , avremo

$$v_k = \sum_{j_k \in J_k} u_{j_k} \quad \forall k = 1, \dots, n$$

e quindi

$$\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \sum_{k=1, \dots, n, j_k \in J_k} U_{j_k}$$

e poiche' $|J_k| < \infty$, abbiamo la tesi. $\square$

Proposition 2.36. *Sia W un sottomodulo di V .*

$$W \text{ e' massimale} \Leftrightarrow V/W \text{ e' semplice}$$

Proof: Sia $\pi : V \longrightarrow V/W$ la suriezione naturale,

(1) Dim. $\Rightarrow$

$$\overline{U} < V/W \Leftarrow \pi^{-1}(U) \supsetneq W \Rightarrow W \text{ non e' massimale}$$

(2) Dim. $\Leftarrow$

$$W < W' < V \Rightarrow \pi(W') < V/W \Rightarrow V/W \text{ non semplice}$$

$\square$

Proposition 2.37. *Sia V un A -mod.*

$$V \text{ e' semplice} \Leftrightarrow V \simeq A/I \text{ con } I \overset{d}{\leq} A \text{ massimale}$$

Proof:

(1) Dim. $\Rightarrow$

$$V \text{ semplice, } v \in V \setminus \{0\} \Rightarrow vA = V$$

$$f : A \longrightarrow vA, a \mapsto va \text{ e' un } A\text{-omomorfismo suriettivo} \Rightarrow A/\ker f \simeq vA = V \quad (1)$$

$$V \text{ semplice} \Rightarrow A/\ker f \text{ semplice} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{[2.36, \text{pg.9}]} \ker f \text{ massimale}$$

[2.36, pg.9]

Quindi scegliendo $I = \ker f$ si ha la tesi.

Nota: nell'usare la proposizione [2.36,pg.9], abbiamo implicitamente considerato A come modulo, ovvero, A° , e fatto ricorso all'esempio [2.19,pg.6].

(2) Dim. $\Leftarrow$

Si procede utilizzando le stesse idee di prima:

$$I \overset{d}{\leq} A \text{ massimale} \Leftrightarrow I \leq A^\circ \text{ massimale} \underset{[2.36,pg.9]}{\Rightarrow} A/I \text{ semplice}$$

□

Lemma 2.38. *Sia V un A -mod, $\{U_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sotto A -moduli semplici, con I insieme di indici qualsiasi, allora*

$$V = \sum_{i \in I} U_i \Rightarrow V = U_{i_1} \oplus \cdots \oplus U_{i_t}$$

Remark 2.4. Nella proposizione [2.35,pg.9] ottenevamo un risultato analogo. Stavolta, però, richiedendo la semplicità di U_i e la modularità di A e U_i , otteniamo come risultato una somma diretta.

Proof: Sia $\mathcal{W}$ l'insieme di tutti i sottomoduli che si possono scrivere come somma diretta di alcuni U_i :

$$\mathcal{W} = [W = U_{j_1} \oplus \cdots \oplus U_{j_t} \mid j_1, \dots, j_t \in I]$$

sia W il massimale di $(\mathcal{W}, \subseteq)$, che sicuramente esiste perché $\dim V < \infty$.

(1) Dimostriamo che $W = V$

Procediamo per assurdo:

$$\begin{aligned} W < V = \sum_{i \in I} U_i &\Rightarrow \exists U_i : U_i \not\subseteq W \Rightarrow \\ &\underset{U_i \subseteq W \Leftrightarrow U_i = U_i \cap W}{\Rightarrow} U_i \cap W < U_i \\ \begin{cases} U_i \cap W < U_i \\ U_i \text{ simple} \end{cases} &\Rightarrow U_i \cap W = 0 \Rightarrow W + U_i = W \oplus U_i \\ W \oplus U_i &\underset{\text{def. di } W}{=} (U_{i_1} \oplus \cdots \oplus U_{i_t}) \oplus U_i \end{aligned}$$

e questo è in contrasto con la massimalità di W .

□

Theorem 2.39. *Sia V un A -modulo, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. $\forall U \overset{A}{\leq} V \exists W \overset{A}{\leq} V : V = U \oplus W$
(E' possibile completare ogni sottomodulo di V)
2. $V = \sum_{i \in I} U_i$, con U_i A -sottomod semplice
3. $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$, con W_i A -sottomod semplice $\forall i = 1, \dots, k$

Proof:

(1) Dim. 2. $\Leftrightarrow$ 3.

Basta applicare il lemma [2.38,pg.10].

(2) 1. $\Rightarrow$ 2.

Sia

$$W = \sum_{U \stackrel{A}{\leq} V \text{ semplice}} U$$

se $W = V$ abbiamo la tesi. Supponiamo allora $W < V$. Per la 1. abbiamo:

$$\exists U \stackrel{A}{\leq} V : V = U \oplus W \quad (1)$$

$$W < V, (1) \Rightarrow U > 0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{[2.34, \text{pg.8}]} \exists U_1 \stackrel{A}{\leq} U \text{ semplice}$$

Per definizione di W : $U_1 \subseteq W$

$$\Rightarrow 0 < U_1 \leq W \cap U \Rightarrow W \cap U \neq 0$$

assurdo contro $W \oplus U$

(3) 2. $\Rightarrow$ 1.

Per Hp:

$$V = \sum_{i \in I} U_i, \text{ con } U_i \text{ } A\text{-sottomod semplice}$$

Fissato un $U \leq V$, sia W un massimale di

$$\{W \leq V \mid W \cap U = 0\}$$

Supponiamo per assurdo che $W + U \neq V$, allora

$$W + U \neq \sum_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists U_i : U_i \not\subseteq W + U \Rightarrow U_i \cap W + U < U_i \quad \underbrace{\Rightarrow}_{U_i \text{ e' semplice}} U_i \cap (W + U) = 0 \quad (2)$$

(3.1) Dimostriamo che $(W + U_i) \cap U = 0$

Sia $u \in (W + U_i) \cap U$, ovvero

$$u = w + u_i, \quad u \in U, \quad w \in W, \quad u_i \in U_i$$

$$\underbrace{u - w}_{\in U+W} = \underbrace{u_i}_{\in U_i} \xrightarrow{(2)} u_i = 0 \Rightarrow u = w \in U \cap W \quad \underbrace{=}_{\text{per def. di } W} 0 \Rightarrow u = 0$$

$$\Rightarrow (W + U_i) \cap U = 0$$

Inoltre, $W + U_i > W$, infatti,

$$W + U_i = W \Rightarrow U_i \subseteq W \subseteq W + U \text{ assurdo contro } U_i \not\subseteq W + U$$

Quindi,

$$\begin{cases} W + U_i > W \\ (W + U_i) \cap U = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{assurdo contro la massimalita' di } W$$

□

2.2 Moduli semisemplici

Definition 2.40. Un V A -modulo che soddisfa il teorema [2.39,pg.10] si dira' *semisemplice*.

Proposition 2.41.

$$\begin{cases} V \text{ semisemplice} \\ U \stackrel{A}{\leq} V \end{cases} \Rightarrow U \text{ e' semisemplice}$$

In altre parole, i sottomoduli di moduli semisemplici sono a loro volta semisemplici.

Proof: Sia $W \leq U$,

$$\begin{aligned}
 V \text{ ssemplce} &\stackrel{\text{[2.39,pg.10]}}{\Rightarrow} \exists V_0 : V = W \oplus V_0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow U \cap V = U \cap W + U \cap V_0 \stackrel{W \subseteq U}{=} W + (U \cap V_0) \\
 U &\stackrel{U \subseteq V}{=} U \cap V = W + (U \cap V_0) \stackrel{W \cap V_0 = 0}{=} W \oplus (U \cap V_0)
 \end{aligned}$$

□

Proposition 2.42.

$$\begin{cases} V \text{ semisemplice} \\ U \leq^A V \end{cases} \Rightarrow V/U \text{ e' semisemplice}$$

In altre parole, i quozienti di moduli semisemplici sono a loro volta semisemplici.

Proof:

$$\begin{aligned}
 V \text{ ssemplce} &\stackrel{\text{[2.39,pg.10]}}{\Rightarrow} \exists W : V = W \oplus U \\
 W \leq V, V \text{ ssempl.} &\stackrel{\text{[2.41,pg.11]}}{\Rightarrow} W \text{ ssempl.}
 \end{aligned}$$

Considerando la proiezione naturale $\pi_W : V \longrightarrow W$ si ha il seguente A -isomorfismo:
 $V/U \simeq W$

e per la semisemplicità di W si ha la tesi.

□

Proposition 2.43.

$$V = \sum_{i \in I} U_i, \text{ con } U_i \text{ semisemplice} \Rightarrow V \text{ semisemplice}$$

In altre parole, la somma di moduli semisemplici è un modulo semisemplice.

Proof: Basta usare il punto 2. del thm [2.39,pg.10].

□

Theorem 2.44. Sia A una F -algebra, allora

$$A^\circ \text{ e' semisemplice} \Leftrightarrow \text{Ogni } V \text{ } A\text{-mod e' semisemplice}$$

Proof:

(1) Dim. $\Rightarrow$

Sia V un A -mod e $v \in V$. L'applicazione

$$f : A \longrightarrow vA$$

$$a \mapsto va$$

è un A -omomorfismo suriettivo, quindi

$$A^\circ \text{ ssempl.} \Rightarrow A/\ker f \text{ ssempl.} \Rightarrow A/\ker f \simeq vA \Rightarrow vA \text{ ssempl.}$$

$$\begin{cases} V = \sum_{v \in V} vA \\ vA \text{ ssempl. } \forall v \in V \end{cases} \stackrel{\text{[2.43,pg.12]}}{\Rightarrow} V \text{ ssempl.}$$

(2) Dim. $\Leftarrow$

Basta scegliere $V = A^\circ$ per avere la tesi.

□

2.3 Algebre semisemplici

Definition 2.45. Sia A una F -algebra,

$$A \text{ e' semisemplice} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A^\circ \text{ e' semisemplice}$$

Proposition 2.46.

$$A \text{ e' semisemplice} \Leftrightarrow A = \sum_{I \trianglelefteq A^\circ, I \text{ semp.}} I = \sum_{I \trianglelefteq A \text{ minimale}} I$$

Proof:

$$A \text{ e' semisemplice} \Leftrightarrow A^\circ \text{ e' semisemplice} \stackrel{[2.39, \text{pg.10}]}{\Leftrightarrow} A^\circ = \sum_{W \leq A^\circ, W \text{ semp.}} W \quad (1)$$

Ricordando dall'esempio [2.19,pg.6] che i sottomoduli di A° sono gli ideali destri A , si ha

$$A^\circ \stackrel{(1)}{=} \sum_{I \trianglelefteq A, I \text{ semp.}} I$$

Infine,

$$I \text{ semplice (come } A^\circ \text{ modulo)} \Leftrightarrow I \text{ non ha } A^\circ\text{-sottomoduli} \Leftrightarrow I \text{ non ha ideali destri} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow I \text{ e' un ideale destro minimale}$$

□

Proposition 2.47. Sia V un A -mod. Definiamo $A(V)$ come la somma di tutti gli ideali destri di A che sono A -isomorfi a V (nota⁴):

$$A(V) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{I \trianglelefteq A^\circ: I \simeq V} I$$

Si ha,

$$V \text{ semplice} \Rightarrow A(V) \trianglelefteq A$$

Proof: Sia $\mathcal{I} = \left\{ I \trianglelefteq A^\circ : I \simeq V \right\}$.

Poiche' $A(V)$ e' formato da ideali destri di A , bastera' dimostrare che $A(V)$ e' un ideale sinistro di A , ovvero che

$$aI \subseteq A(V) \quad \forall a \in A \quad \forall I \in \mathcal{I}$$

Fissiamo un a ed I . L'applicazione

$$l_a : A \longrightarrow A \\ x \mapsto ax$$

e' un A -omomorfismo. Osserviamo che

$$I \in \mathcal{I} \Rightarrow I \simeq V, \quad V \text{ semplice} \Rightarrow I \text{ semplice}$$

Sia $f = l_a|_I : I \longrightarrow aI$ la restrizione surriettiva di l_a ad I .

Esistono due possibilita':

- se $\text{Im } f = 0$, allora $aI = 0 \subseteq A(V)$

⁴o in altre parole, la somma dei sottomoduli di A° , isomorfi a V

- se $\text{Im } f \neq 0$, allora

$$0 \leq \ker f < I \quad \underbrace{\Rightarrow}_{I \text{ semplice}} \quad \ker f = 0$$

f suriettiva

$$\Rightarrow f \text{ e' un } A\text{-isomorfismo} \Rightarrow V \simeq I \simeq aI \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{def. di } A(V)} \quad aI \subseteq A(V)$$

In ogni caso, $aI \subseteq A(V)$. □

Proposition 2.48. *Sia A una F -algebra, si ha*

$$A \text{ semplice} \Rightarrow A \text{ semisemplice}$$

Proof: Sia $0 \neq I \leq^A A^\circ$ semplice, che esiste per la prop [2.34,pg.8], allora

$$0 < A(I) \quad \underbrace{\leq}_{[2.47, \text{pg.13}]} \quad A \quad \underbrace{\Rightarrow}_{A \text{ semplice}} \quad A = A(I) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{I \leq^A A^\circ \text{ semp.}} I$$

e quindi per il teorema [2.39,pg.10] si ha la tesi. □

Lemma 2.49. *Sia V un A -mod.*

$$\begin{cases} V = \sum_{i \in I} V_i, & \text{con } V_i \text{ semplice } \forall i \in I \\ W \leq^A V \text{ semplice} \end{cases} \Rightarrow \exists i : W \simeq^A V_i$$

Proof: Per il teorema [2.39,pg.10] si ha

$$V = V_{i_1} \oplus \cdots \oplus V_{i_k}, \quad V_{i_j} \text{ semplice}$$

Sia $\pi_{ij} : V \longrightarrow V_{i_j}$ la proiezione naturale.

W semplice $\Rightarrow W \neq 0 \Rightarrow \exists w \in W \setminus \{0\} \Rightarrow \pi_{ij}(w) \neq 0$ per qualche j (1)

Sia $f = \pi_{ij}|_W : W \longrightarrow V_{i_j}$

$$\begin{cases} f \text{ e' un } A\text{-omomorfismo perche' e' una restrizione di un } A\text{-omomorfismo} \\ (1) \Rightarrow \text{Im } f \neq 0 \\ W, V_{i_j} \text{ semplici} \end{cases} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Schur [2.32,pg.8]}} \quad W \simeq^A V_{i_j}$$

□

Theorem 2.50. *di Wedderburn.*

Sia A una F -algebra semisemplice, allora

1.

$$V \text{ } A\text{-mod semplice} \Leftrightarrow \exists I \leq^d A \text{ minimale: } V \simeq^A I$$

Ovvero, gli A -moduli semplici sono isomorfi ad A° -sottomoduli.

2. $\exists I_1, \dots, I_k \leq^d A$ minimali tale che

$$I_i \not\simeq I_j \quad \forall i \neq j$$

$$I \leq^d A \text{ minimale} \Rightarrow \exists i : I \simeq^A I_i$$

Ovvero, se consideriamo la relazione d'equivalenza indotta da $\simeq^A$, otteniamo solo k classi di A° -sottomoduli semplici.

3. $A = A(I_1) \oplus \cdots \oplus A(I_k)$
4. $\text{ann}_A(I_i) = \sum_{j \neq i} A(I_j)$
5. $A(I_i) \trianglelefteq A$ e' minimale $\forall i = 1, \dots, k$
- 6.

$$\phi_i : A(I_i) \longrightarrow \underbrace{\text{End}_F(I_i)}_{\text{algebra}} \simeq F^{m_i \times m_i}, \quad m_i = \dim I_i$$

$$x \mapsto r_x : I_i \longrightarrow I_i$$

$$u \mapsto ux$$

ϕ_i e' un algebra-omomorfismo iniettivo.
Inoltre, se F e' algebricamente chiuso, ϕ_i e' biettiva e quindi si ha:

$$A(I_i) \simeq \text{End}_F(I_i) \simeq F^{m_i \times m_i}$$

Nota: questi sono isomorfismi di algebre. $A(I_i)$ e' un algebra la cui unita' e' e_i , dove $(e_1, \dots, e_k) \in A(I_1) \times \dots \times A(I_k)$ e' quell'unica n -upla t.c.

$$1 = e_1 + \cdots + e_k$$

Proof:

(1) Dim. 1.

$$V \text{ semplice} \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{[2.37, \text{pg.9}]} \quad V \overset{A}{\simeq} A/I, \quad I, \text{ con } I \overset{d}{\trianglelefteq} A$$

$$A \text{ semisemplice} \Leftrightarrow A^\circ \text{ semisemplice} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{[2.39, \text{pg.10}]} \quad \exists J \leq A^\circ : A^\circ = I \oplus J \Rightarrow A^\circ / I \overset{A}{\simeq} J$$

$$\begin{cases} V \overset{A}{\simeq} A^\circ / I \overset{A}{\simeq} J \\ V \text{ semplice} \end{cases} \Rightarrow J \text{ semplice} \Leftrightarrow J \overset{d}{\trianglelefteq} A \text{ minimale}$$

(2) Dim 2.

$$A^\circ \text{ ssemp} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{[2.39, \text{pg.10}]} \quad A^\circ = J_1 \oplus \cdots \oplus J_m \text{ con } J_i \text{ semplice in } A^\circ \quad (1)$$

$$I \leq A^\circ \text{ semplice}, \quad (1) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{[2.49, \text{pg.14}]} \quad \exists i : I \simeq J_i$$

Quindi ogni A° -sottomodulo semplice e' isomorfo a qualche J_i . Sia allora $\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_k\} \subseteq \{J_1, \dots, J_m\}$ l'insieme di addendi non isomorfi tra loro, ovvero, ovvero $I_i \not\simeq I_j \quad \forall i, j : 1 \leq i < j \leq k$.

I vari $\{I_i\}$ sono i rappresentanti delle k classi d'equivalenza indotte dalla relazione $\overset{A}{\simeq}$.

(3) Dim 3.

Dalla passo 2 sappiamo che

$$A = J_1 \oplus \cdots \oplus J_m \quad (2)$$

Inoltre, ogni A -modulo semplice e' isomorfo a qualche I_j , con $1 \leq j \leq k$. In particolare, ogni J_h sara' isomorfo a qualche I_j . Associamo allora gli addendi della (2) in modo opportuno,

sfruttando l'associativita' della somma diretta:

$$B_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1, \dots, m, \quad J_j \simeq I_i} J_j$$

$$A = B_1 \oplus \dots \oplus B_k$$

B_i e' quindi la somma di tutti i J_j isomorfi a I_i . Ricordiamo che $A(I_i)$ e' la somma di tutti i sottomoduli di A° isomorfi ad I_i .

Dimostriamo che $B_i = A(I_i)$.

(3.1) $B_i \subseteq A(I_i)$

Per definizione di $A(\cdot)$ (vedi [2.47,pg.13]).

(3.2) $A(I_i) \subseteq B_i$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = B_1 \oplus \dots \oplus B_k \\ B_i \underbrace{\leq}_{\text{passo 3.1}} A(I_i) \leq A \end{array} \right. \Rightarrow A(I_i) = B_i \oplus \underbrace{\left(A(I_i) \cap \bigoplus_{j \neq i, j=1, \dots, k} B_j \right)}_R$$

Supponiamo per assurdo che $R \neq 0$.

$R \neq 0 \Rightarrow \exists K \stackrel{A}{\leq} R$ semplice

$$\left\{ \begin{array}{l} K \leq R \leq A(I_i) = \sum_{I \trianglelefteq A^\circ: I \simeq I_i} I \underbrace{=}_{I_i \text{ semplice}} \sum_{I \trianglelefteq A^\circ: I \simeq I_i, I \text{ semplice}} I \\ K \text{ semplice} \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{K \stackrel{A}{\simeq} I}_{[2.49, \text{pg.14}]}, \text{ per qualche addendo } I =$$

$$\Rightarrow K \simeq I \simeq I_i \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K \leq R \leq \bigoplus_{j \neq i, j=1, \dots, k} B_j = \bigoplus_{j \neq i, j=1, \dots, k} \sum_{i=1, \dots, m, \quad J_i \simeq I_j} J_i \\ I_j, K \text{ semplici} \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\exists j \neq i: K \simeq I_j}_{[2.49, \text{pg.14}]} \quad (3.1)$$

$$(3), (3.1) \Rightarrow 0 \neq I_j \simeq K \simeq I_i \Rightarrow I_j \simeq I_i$$

Assurdo.

(4) Dim. 4.

Nel passo precedente abbiamo dimostrato che

$$A = B_1 \oplus \dots \oplus B_k, \quad (4)$$

$$\text{con } B_i = A(I_i) \quad \underbrace{\leq}_{I_i \text{ semplice, [2.47,pg.13]}} A$$

Quindi

$$B_i, B_j \leq A \Rightarrow B_i B_j \subseteq B_i \cap B_j \quad \underbrace{=}_{B_i, B_j \text{ addendi della somma diretta (4)}}$$

$$\Rightarrow b_i b_j = 0 \quad \forall i \neq j \quad (5)$$

$$1_A \in A \xRightarrow{(4)} \exists! (e_1, \dots, e_k) \in B_1 \times \dots \times B_k: \quad 1 = e_1 + \dots + e_k \quad (6)$$

Moltiplicando a sinistra ambo i membri della (6) per b_j otteniamo:

$$b_j = b_j e_1 + \dots + b_j e_k \quad \underbrace{=}_{(5)} b_j e_j$$

analogamente moltiplicando a destra:

$$b_j = e_j b_j$$

Possiamo cosi' concludere che B_j e' un'algebra la cui unita' e' e_j , ovvero $1_{B_j} = e_j$.

Sempre dalla (5) abbiamo:

$$B_j \subseteq \text{ann}_A(B_i) \underbrace{\subseteq}_{I_i \subseteq B_i} \text{ann}_A(I_i) \Rightarrow \sum_{j \neq i} B_j \subseteq \text{ann}_A(I_i) \quad (6.1)$$

e quindi

$$A = B_i \oplus \sum_{j \neq i} B_j \underbrace{\supseteq}_{(6.1)} \text{ann}_A(I_i) = (\text{ann}_A(I_i) \cap B_i) \oplus \sum_{j \neq i} B_j$$

Per avere la tesi basta quindi dimostrare che $\text{ann}_A(I_i) \cap B_i = 0$.

(4.1) Dim. $\text{ann}_A(I_i) \cap B_i = 0$

Sia $b \in \text{ann}_A(I_i) \cap B_i = 0$. Per vedere che $b = 0$ basta utilizzare la prop [2.30,pg.7]:

$$b \in \text{ann}_A(I_i) = \text{ann}_A(I) \quad \forall I \leq A^\circ : I \simeq I_i \quad (6)$$

$$B_i b = A(I_i) b = \sum_{I \leq A^\circ : I \simeq I_i} I b \underbrace{=}_{(6)} 0 \Rightarrow b \in \text{ann}_A(B_i) \quad (7)$$

$$b \in B_i \underbrace{\Rightarrow}_{(5)} B_j b = 0 \quad \forall j \neq i \quad (7.1)$$

$$(7), (7.1) \Rightarrow B_i b = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k \quad (7.2)$$

$$Ab = B_1 b \oplus \dots \oplus B_k b \underbrace{=}_{(7.2)} 0 \Rightarrow 1_A b = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

(5) Dim. 5.

Sappiamo già che

$$B_i = A(I_i) \trianglelefteq A$$

Resta da dimostrare la minimalità. Supponiamo che $\exists C \trianglelefteq A : 0 < C < B_i$,

$$B_i \trianglelefteq A \Rightarrow B_i \leq A^\circ, \quad A^\circ \text{ semisemplice} \Rightarrow B_i \text{ semisemplice}$$

$$C < B_i, \quad B_i \text{ ssemp.} \Rightarrow \exists R \trianglelefteq^A B_i : B_i = C \oplus R \quad (8)$$

$$C < B_i \Rightarrow R \neq 0$$

$$\begin{cases} R \trianglelefteq^A B_i \Leftrightarrow R \trianglelefteq^d B_i \\ C \trianglelefteq A \end{cases} \Rightarrow RC \subseteq R \cap C \underbrace{=}_{(8)} 0 \Rightarrow Rc = 0 \quad \forall c \in C \quad (8.1)$$

$$R \neq 0 \Rightarrow \exists J \leq R \text{ semplice}$$

$$J \subseteq R \subseteq B_i = \sum_{I \leq A^\circ : I \simeq I_i} I \underbrace{\supseteq}_{[2.49, \text{pg.14}]} J \simeq I_i$$

$$Jc = 0 \Rightarrow c \in \text{ann}_A(J) \underbrace{=}_{J \simeq I_i} \text{ann}_A(I_i)$$

$$c \in B_i$$

$$\Rightarrow c \in B_i \cap \text{ann}_A(I_i) \underbrace{=}_{\text{passo 4}} 0$$

Per l'arbitrarietà di c concludiamo che $C = 0$.

(6) Dim 6.

Innanzitutto, è facile verificare che

1. ϕ_i è ben posta: $r_x \in \text{End}_F(I_i)$

2. ϕ_i è un alg-omomorfismo

(6.1) ϕ_i è iniettivo

$$\ker \phi_i = \{x \in B_i \mid r_x \equiv 0 \Leftrightarrow ux = 0 \quad \forall u \in I_i \Leftrightarrow I_i x = 0 \Leftrightarrow x \in \text{ann}_A(I_i)\} = B_i \cap \text{ann}_A(I_i) \underbrace{=}_{\text{passo 4}} 0$$

Supponiamo che F sia algebricamente chiuso e consideriamo l' A -omomorfismo

$$l_x : I_i \longrightarrow I_i$$

$$u \mapsto xu$$

Poiche' I_i e' semplice, applicando il corollario di Schur (vedi [2.33,pg.8]) abbiamo

$$l_x = \lambda_x \text{id}, \quad \text{per qualche } \lambda_x \in F$$

(6.2) Dim. che ϕ_i e' surriettiva, ovvero che $\phi_i(B_i) = \text{End}_F(I_i)$

PROOF SKETCH: Dimostreremo che $\phi_i(B_i) \stackrel{d}{\leq} \text{End}_F(I_i)$ e che $\text{id} \in \phi_i(B_i)$. Chiaramente, se $I_i = 0$, ϕ_i e' surriettiva. Supponiamo $I_i \neq 0$.

$$\begin{aligned} B_i \leq A &\Rightarrow B_i I_i \subseteq B_i \\ I_i \neq 0 &\Rightarrow e_i I_i \subseteq B_i I_i \Rightarrow 0 < B_i I_i \\ &\Rightarrow 0 < B_i I_i \leq B_i \leq A \\ I_i \stackrel{d}{\leq} A, B_i \leq A &\Rightarrow B_i I_i \leq A \\ \begin{cases} 0 < B_i I_i \leq B_i \\ B_i I_i \leq A \\ B_i \leq A \text{ minimale (per il passo 5)} \end{cases} &\Rightarrow B_i I_i = B_i \quad (9) \end{aligned}$$

Sia $b \in B_i$.

(6.2.1) Dim. $\phi_i(b)f \in \phi_i(B_i) \quad \forall f \in \text{End}_F(I_i)$

$$b \in B_i \stackrel{(9)}{=} B_i I_i \Rightarrow b = \sum_{j \in J} x_j y_j \text{ con } x_j \in B_i, y_j \in I_i \quad \forall j \in J, |J| < +\infty$$

Per la linearita' di ϕ_i , basta considerare un solo addendo xy di b .

(6.2.1.1) Dimostriamo che $\phi_i(xy)f = r_{xy}f = r_{xf(y)} = \phi_i(xf(y)) \in \phi_i(B_i)$

Si ha⁵:

$$(r_{xy}f)(z) = f(r_{xy}(z)) = f(zxy) = f(l_{zx}(y)) = f(\lambda_{zx}y) \stackrel{f \in \text{End}_F}{=} \lambda_{zx}f(y) = l_{zx}(f(y)) = zxf(y) = r_{xf(y)}(z)$$

(6.2.1.2) Dim. $\text{id} \in \phi_i(B_i)$

$$\begin{aligned} \phi_i(e_i) &= r_{e_i} \\ r_{e_i}(z) &= ze_i, \quad z \in I_i \subseteq B_i, \quad e_i = 1_{B_i} \Rightarrow ze_i = z \Rightarrow r_{e_i} = z \\ &\Rightarrow r_{e_i} = \text{id} \end{aligned}$$

(6.2.1.3) Q.E.D.

$$\begin{cases} \phi_i(B_i) \stackrel{d}{\leq} \text{End}_F(I_i) \\ 1_{\text{End}_F(I_i)} = \text{id} \in \phi_i(B_i) \end{cases} \Rightarrow \phi_i(B_i) = \text{End}_F(I_i)$$

□

Corollary 2.51.

A algebra semisemplice $\Rightarrow A$ e' somma (diretta) di algebre semplici

Proof: Diretta conseguenza della 3. del teorema [2.50,pg.14].

□

⁵stiamo usando la composizione a sinistra, ovvero

$$fg(x) = g(f(x))$$

Corollary 2.52. *Sia A un'algebra semisemplice su F algebricamente chiuso. Si ha:*

1. $A \simeq F^{n_1 \times n_1} \oplus \dots \oplus F^{n_k \times n_k}$ dove $n_i = \dim I_i$
2. $k = \dim Z(A)$
3. $\dim A = \sum_{j=1}^n n_j^2$

dove $\{I_1, \dots, I_k\}$ sono i rappresentanti delle classi di isomorfismo di A -moduli semplici.

Proof: La 1. e' diretta conseguenza del teorema di Wedderburn (vedi [2.50,pg.14]). Dimostriamo la 2.:

$$1. \Rightarrow Z(A) \simeq Z(F^{n_1 \times n_1}) \oplus \dots \oplus Z(F^{n_k \times n_k}) \Rightarrow \dim Z(A) = \sum_{i=1}^k \dim Z(F^{n_i \times n_i}) = \sum_{i=1}^k 1 = k$$

$$1. \Rightarrow \dim A = \sum_{i=1}^k \dim F^{n_i \times n_i} = \sum_{i=1}^k n_i^2$$

□

3 Algebra di un gruppo

L'obiettivo di questa sezione sara' quello di sfruttare il teorema di Wedderburn per ricavare informazioni sui gruppi finiti. Per far cio', per ogni gruppo finito G costruiremo un'algebra semisemplice strettamente legata ad esso.

Definition 3.1. Sia G un gruppo finito, F un campo. Sia FG l'insieme delle combinazioni lineari formali⁶ di G su F :

$$FG \stackrel{\text{def}}{=} \langle G \rangle_F = \left\{ \sum_{g \in G} \lambda_g g \mid \lambda_g \in F \right\}$$

Possiamo rendere FG un'algebra ponendo:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g \in G} 0g \\ 1 &\stackrel{\text{def}}{=} 1_F 1_G + \sum_{g \in G \setminus \{1_G\}} 0g \end{aligned}$$

⁶possiamo considerare una somma formale $\sum_{g \in G} \lambda_g g$ come la scrittura simbolica di una funzione $\lambda : G \rightarrow F$ tale che $\lambda(g) = \lambda_g$. Avremo cosi' che:

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g = \sum_{g \in G} \mu_g g \leftrightarrow \lambda_g = \mu_g \quad \forall g \in G$$

e definendo le seguenti operazioni:

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} \lambda_g g + \sum_{g \in G} \mu_g g &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g \in G} (\lambda_g + \mu_g) g \\ \lambda \cdot \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g \in G} (\lambda \lambda_g) g \\ \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \cdot \left(\sum_{g \in G} \mu_g g \right) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g, h \in G} \lambda_g \mu_h gh = \sum_{z \in G} \left(\sum_{g, h \in G: gh=z} \lambda_g \mu_h \right) z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{z \in G} \left(\sum_{g \in G} \lambda_g \mu_{g^{-1}z} \right) z \end{aligned}$$

Proposition 3.2.

1. FG e' un'algebra
2. $\dim FG = |G|$

Proof: Per costruzione FG e' uno spazio vettoriale ed e' un anello unitario. Anche l'assioma delle algebre e' immediato:

$$a(\lambda b) = \lambda(ab) = (\lambda a)b$$

Infine, $\dim FG = |G|$ perche' G e' proprio la base dello spazio vettoriale FG . $\square$

Definition 3.3. Diamo alcune definizioni per i gruppi. Sia G un gruppo finito e $X \subseteq G$,

$$\begin{aligned} x^g &\stackrel{\text{def}}{=} g^{-1}xg \quad \forall x, g \in G \\ \underbrace{C_G(x)}_{\text{centralizzante di } x} &\stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid xg = gx\} \\ \underbrace{x \sim y}_{x \text{ coniugato con } y} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists g \in G : x = y^g \\ \underbrace{\text{cl}_G(x)}_{\text{classe di coniugio}} &\stackrel{\text{def}}{=} x^G \stackrel{\text{def}}{=} \{x^g \mid g \in G\} \\ \text{cl}(G) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\text{cl}_G(x) \mid x \in G\} \\ \widehat{X} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \in X} x \end{aligned}$$

Theorem 3.4. Sia $\text{cl}(G) = \{K_1, \dots, K_k\}$, allora

1. $Z(FG) = \langle \widehat{K_1}, \dots, \widehat{K_k} \rangle$
2. $\{\widehat{K_1}, \dots, \widehat{K_k}\}$ sono l.i.
3. $\dim Z(FG) = k$

$\{\widehat{K_1}, \dots, \widehat{K_k}\}$ e' quindi una base dello spazio vettoriale $Z(FG)$.

Proof:

(1) Dim. 1.

$$x \in Z(FG) \Leftrightarrow xy = yx \quad \forall y \in FG \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{G \text{ base di } FG} \quad xh = hx \quad \forall h \in G \Leftrightarrow h^{-1}xh = x \quad (1)$$

$$x \in FG \Leftrightarrow x = \sum_{g \in G} \lambda_g g \Leftrightarrow h^{-1}xh = \sum_{g \in G} \lambda_g h^{-1}gh \quad \underbrace{=}_{z=h^{-1}gh, \quad g=hzh^{-1}} \quad = \sum_{z \in G} \lambda_{hzh^{-1}} z \quad (2)$$

$$\sum_{z \in G} \lambda_{hzh^{-1}} z \underbrace{=}_{(2)} h^{-1}xh \underbrace{=}_{(1)} x = \sum_{z \in G} \lambda_z z \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{G \text{ base di } FG} \quad \lambda_z = \lambda_{hzh^{-1}} \quad \forall h, z \in G \quad (3)$$

$$\lambda_z = \lambda_{hzh^{-1}} \quad \forall h \in G \Leftrightarrow \lambda_z = \lambda_y \quad \forall y \in \text{cl}(z) \quad (4)$$

Per la (4) possiamo porre: $\lambda_{\text{cl}(z)} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_z \quad (4.1)$

$$x = \sum_{z \in G} \lambda_z z = \sum_{z \in G} \lambda_{\text{cl}(z)} z \quad (4.2)$$

Raggruppiamo per classe gli addendi nella (4.2):

Sia H l'insieme dei rappresentanti di $\text{cl}(G)$

$$x = \sum_{h \in H} \lambda_{\text{cl}(h)} \left(\sum_{z \in \text{cl}(h)} z \right) = \sum_{h \in H} \lambda_{\text{cl}(h)} \widehat{\text{cl}(h)} = \sum_{i=1}^k \lambda_{K_i} \widehat{K_i}$$

Quindi

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_{K_i} \widehat{K_i}$$

Poiche' abbiamo usato solo doppie implicazioni, abbiamo implicitamente dimostrato la doppia inclusione:

$$Z(FG) = \langle \widehat{K_1}, \dots, \widehat{K_k} \rangle$$

(2) Dim. 2.

Consideriamo una combinazione lineare nulla:

$$0 = \sum_{K \in \text{cl}(G)} a_K \widehat{K} \quad \underbrace{=}_{G = \bigcup K_j} \quad \sum_{g \in G} a_{\text{cl}(g)} g$$

Abbiamo cosi' ottenuto una combinazione lineare nulla di G . Poiche' G e' una base di FG , si deve avere:

$$a_{\text{cl}(g)} = 0 \quad \forall g \in G \Leftrightarrow a_K = 0 \quad \forall K \in \text{cl}(G)$$

□

Lemma 3.5. Sia $f : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare, con V, W FG -moduli, allora

$$\vartheta : V \longrightarrow W$$

$$v \mapsto \sum_{g \in G} f(vg^{-1})g$$

e' un FG -omomorfismo.

In altre parole, sfruttando l'algebra FG , da una applicazione lineare f possiamo indurre un FG -omomorfismo.

Proof:

- ϑ e' lineare (per la linearita' di f)
- ϑ e' un FG -omo: $\vartheta(va) = \vartheta(v)a$, infatti

$$\vartheta(va) = \sum_{g \in G} f(vag^{-1})g = \sum_{g \in G} f(v(ga^{-1})^{-1})ga^{-1}a \quad \underbrace{=}_{z=ga^{-1}} \quad \left(\sum_{z \in G} f(vz^{-1})z \right) a = \vartheta(v)a$$

□

Lemma 3.6. Siano V, W due spazi vettoriali e sia $\vartheta : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare, con $W \leq V$.

$$\vartheta^2 = \vartheta \Rightarrow V = \text{Im } \vartheta \oplus \ker \vartheta$$

Proof:

$$v = \vartheta(v) + (v - \vartheta(v)) \quad (1)$$

$$\vartheta(v - \vartheta(v)) = \vartheta(v) - \underbrace{\vartheta^2(v)}_{\vartheta^2 = \vartheta} = \vartheta(v) - \vartheta(v) = 0 \Rightarrow v - \vartheta(v) \in \ker \vartheta \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow v \in \text{Im } \vartheta + \ker \vartheta$$

Dimostriamo che la somma e' diretta:

$$w \in \text{Im } \vartheta \cap \ker \vartheta \Rightarrow w = \vartheta(v) \quad (3)$$

$$0 = \underbrace{\vartheta(w)}_{w \in \ker \vartheta} = \vartheta^2(v) = \vartheta(v) \underbrace{=}_{(3)} w = 0$$

$$\Rightarrow \text{Im } \vartheta \cap \ker \vartheta = 0$$

□

Theorem 3.7. di Maschke.

$$\text{ch } F \not\mid |G| \Rightarrow FG \text{ e' semisemplice}$$

dove $\text{ch } F$ e' la caratteristica del campo F .

Proof:

$$FG \text{ ssemp} \quad \Leftrightarrow \quad \forall V \text{ } FG\text{-mod e' ssemp}$$

thm[2.44,pg.12]

Prendiamo quindi un V FG -modulo arbitrario e dimostriamo che e' semisemplice, ovvero che $\forall W \leq^{\text{FG}} V \exists U \leq^{\text{FG}} V : V = U \oplus W$.

Sia $U_0 \leq V$ sottospazio vettoriale di V t.c. $V = W \oplus U_0$.

(1) Costruiamo un modulo $U \leq^{\text{FG}} V$ t.c. $V = W \oplus U$

Consideriamo la proiezione canonica:

$$\pi : V \longrightarrow W$$

$$w + u_0 \mapsto w$$

π e' lineare e surriettiva. Poiche' $\text{ch } F \not\mid |G|$, possiamo considerare la seguente applicazione lineare:

$$f : V \longrightarrow W$$

$$f(v) = \frac{1}{|G|} \pi(v)$$

Per il lemma [3.5,pg.21] possiamo costruire, a partire da f , la funzione $\vartheta : V \longrightarrow W$, che

risulta essere un FG -omomorfismo.

ϑ FG -omomorfismo $\Rightarrow U \stackrel{\text{def}}{=} \ker \vartheta$ e' un FG -modulo

$$w \in W \stackrel{FG}{\leq} V \Rightarrow wg \in W \quad \forall g \in G \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\pi|_W = \text{id}} \pi(wg^{-1})g = wg^{-1}g = w \quad (1)$$

$$\vartheta(w) \underbrace{=}_{\text{def.}} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi(wg^{-1})g \underbrace{=}_{(1)} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} w = \frac{|G|}{|G|} w = w \Rightarrow \vartheta|_W = \text{id} \quad (1.1)$$

$$\vartheta(v) \in W \quad \forall v \quad \underbrace{\Rightarrow}_{(1.1)} \vartheta(\vartheta(v)) = \vartheta(v) \quad \forall v \Leftrightarrow \vartheta^2 = \vartheta$$

Per il lemma [3.6,pg.22] abbiamo infine:

$$V = \text{Im } \vartheta \oplus \ker \vartheta = W \oplus U$$

□

Corollary 3.8. *Grazie al teorema di Maschke, se $\text{ch } F \nmid |G|$, possiamo applicare il teorema di Wedderburn all'algebra semisemplice FG . In piu', utilizzando il corollario [2.52,pg.19] e il teorema [3.4,pg.20] possiamo dire che:*

1. Se F e' algebricamente chiuso:

$$1. \quad FG \simeq F^{n_1 \times n_1} \oplus \dots \oplus F^{n_k \times n_k}$$

dove $n_i = \dim I_i$, $\{I_1, \dots, I_k\}$ rappresentanti delle classi di isomorfismo di FG -moduli semplici

$$2. \quad n_1^2 + \dots + n_k^2 = \dim FG = |G|$$

$$3. \quad k = \dim Z(FG) = |\text{cl}(G)|$$

$$2. \quad V \text{ } FG\text{-mod} \Rightarrow V \simeq m_1 I_1 \oplus \dots \oplus m_k I_k \text{ dove } m_i \geq 0, \quad m_i I_i = \underbrace{I_i \oplus \dots \oplus I_i}_{m_i \text{ volte}}$$

$$3. \quad FG \simeq n_1 I_1 \oplus \dots \oplus n_k I_k$$

Proof:

(1) Dim. 2.

$$\text{ch } F \nmid |G| \quad \underbrace{\Rightarrow}_{[3.7, \text{pg.22}]} FG \text{ ssem} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{[2.44, \text{pg.12}]} V \text{ ssem} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{[2.39, \text{pg.10}]} V = \sum_{i \in I} V_i = V_{j_1} \oplus \dots \oplus V_{j_k}, \quad \text{con } V_i \text{ semplice } \forall i \in I$$

Per il teorema di Wedderburn, $\forall i \in I \exists I \in \{I_1, \dots, I_k\} : V_i \simeq I$, e quindi la tesi e' acquisita.

(2) Dim. 3.

$$FG \text{ ssem} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{[2.50, \text{pg.14}]} FG \simeq B_1 \oplus \dots \oplus B_k \quad \underbrace{\simeq}_{\text{passo 1}} m_1 I_1 \oplus \dots \oplus m_k I_k$$

$$m_i I_i \simeq B_i \simeq F^{n_i \times n_i} \Rightarrow n_i^2 = \dim B_i = \dim m_i I_i = m_i \dim I_i = m_i n_i \Rightarrow n_i = m_i$$

□

4 Rappresentazioni

Definition 4.1. Sia G un gruppo finito e F un campo. Chiameremo *rappresentazione* di G un qualsiasi omomorfismo di gruppi $\mathfrak{X} : G \longrightarrow \text{GL}(n, F)$ ⁷.

La rappresentazione dell'algebra FG sara' un qualsiasi omomorfismo di algebre del tipo $\mathfrak{X} :$

$${}^7 \text{GL}(n, F) = \{M \in F^{n \times n} \mid \exists M^{-1}\}$$

$FG \longrightarrow F^{n \times n}$.
Poniamo inoltre

$$\dim \mathfrak{X} \stackrel{\text{def}}{=} n$$

Proposition 4.2. *Se $\mathfrak{X}$ e' una rappresentazione di G , l'applicazione $\mathfrak{X}' : FG \longrightarrow F^{n \times n}$, ottenuta estendendo linearmente $\mathfrak{X}$, e' una rappresentazione di FG . Viceversa, se $\mathfrak{X}'$ e' una rappresentazione di FG , $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}'|_G$ e' una rappresentazione di G .*

Proof: Ci limitiamo ad osservare perche' $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}'|_G$ e' ben definita, ovvero perche' $\mathfrak{X}(g) \in \text{GL}(n, F) \quad \forall g \in G$.

$$1 = \mathfrak{X}(1_G) = \mathfrak{X}(gg^{-1}) = \mathfrak{X}(g)\mathfrak{X}(g^{-1}) \Rightarrow \mathfrak{X}(g^{-1}) = (\mathfrak{X}(g))^{-1} \Rightarrow \mathfrak{X}(g) \in \text{GL}(n, F)$$

□

Proposition 4.3. *Illustriamo adesso un metodo per ottenere un FG -modulo da una rappresentazione $\mathfrak{X}$ di FG , e viceversa.*

1. Sia $\mathfrak{X} : FG \longrightarrow F^{n \times n}$ una rappresentazione di FG e sia $V = F^n$. V diventa un FG -modulo con l'operazione

$$v \cdot g = v\mathfrak{X}(g)$$

2. Sia V un FG -modulo. La funzione

$$\begin{aligned} f : G &\longrightarrow \text{GL}(V) \\ g &\mapsto r_g : V \longrightarrow V \\ v &\mapsto v \cdot g \end{aligned}$$

e' un omomorfismo di gruppi. Scelta una base $B = [v_1, \dots, v_n]$ di V , definiamo la funzione

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} : G &\longrightarrow \text{GL}(n, F) \\ g &\mapsto M_B(f(g)) = M_B(r_g) \end{aligned}$$

dove $M_B(r_g)$ e' la matrice associata dell'isomorfismo r_g , secondo la base B , ovvero

$$\underbrace{(M_B(r_g))_i}_{\text{riga } i\text{-esima}} = \underbrace{[r_g(v_i)]_B}_{\text{vettore delle componenti di } r_g(v_i) \text{ secondo } B} = [v_i \cdot g]_B$$

In altre parole,

$$v_i \cdot g = \sum_{j=1}^n x_{ij}(g)v_j \Rightarrow (\mathfrak{X}(g))_{ij} = x_{ij}(g)$$

Proof:

(1) Dim. 1.

E' facile verificare che $V = F^n$ con l'operazione

$$v \cdot g = v\mathfrak{X}(g)$$

rispetta gli assiomi dei moduli (vedi [2.16, pg.5]).

(2) Dim. 2.

1. f e' ben definita, ovvero $r_g \in \text{GL}(V)$:

$$r_g^{-1} = r_{g^{-1}}$$

r_g e' lineare

2. Anche $\mathfrak{X}$ e' ben definita: le matrici associate ad isomorfismi sono invertibili, quindi $M_B(r_g) \in \text{GL}(n, F) \forall g \in G$.

3. f e' un omomorfismo di gruppi

4. $\mathfrak{X}$ e' un omomorfismo di gruppi, infatti, per le proprieta' della matrice associata:

$$\mathfrak{X}(gh) = M_B(r_{gh}) = M_B(r_g r_h) = M_B(r_g) M_B(r_h) = \mathfrak{X}(g) \mathfrak{X}(h)$$

□

Proposition 4.4. Applicando le due costruzioni esposte in [4.3, pg. 24] in successione (usando la base canonica $B = \{e_1, \dots, e_n\}$), si riottiene il modulo o la rappresentazione di partenza.

Proof:

(1) Esaminiamo il caso

$$\text{Rappresentazione } \mathfrak{X} \longrightarrow \text{Modulo } v \cdot g \longrightarrow \text{Rappresentazione } \mathfrak{X}'$$

$$\mathfrak{X} \longrightarrow v \cdot g := v \mathfrak{X}(g) \longrightarrow \mathfrak{X}'(g) := \begin{bmatrix} e_1 \cdot g \\ \vdots \\ e_n \cdot g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \mathfrak{X}(g) \\ \vdots \\ e_n \mathfrak{X}(g) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathfrak{X}(g))_1 \\ \vdots \\ (\mathfrak{X}(g))_n \end{bmatrix} = \mathfrak{X}(g)$$

(2) Esaminiamo il caso

$$\text{Modulo } v \cdot g \in V = F^n \longrightarrow \text{Rappresentazione } \mathfrak{X} \longrightarrow \text{Modulo } v \bullet g \in V = F^n$$

$$\begin{aligned} v \cdot g \longrightarrow \mathfrak{X}(g) &:= \begin{bmatrix} [e_1 \cdot g]_B \\ \vdots \\ [e_n \cdot g]_B \end{bmatrix} \longrightarrow v \bullet g := v \mathfrak{X}(g) \underbrace{=}_{v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) \mathfrak{X}(g) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i \mathfrak{X}(g)) = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i [e_i \cdot g]_B = \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \cdot g \right]_B = [v \cdot g]_B \underbrace{=}_{B \text{ base canonica, } v \in V = F^n} v \cdot g \end{aligned}$$

□

Definition 4.5. Siano $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} : G \longrightarrow \text{GL}(n, F)$ due rappresentazioni. Diremo che $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ sono simili se:

$$\mathfrak{X} \sim \mathfrak{Y} \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists M \in \text{GL}(n, F) : \mathfrak{X}(g) = M^{-1} \mathfrak{Y}(g) M = \mathfrak{Y}(g)^M \quad \forall g \in G$$

Remark 4.1. Se $\mathfrak{X}$ e' una rappresentazione, lo e' anche $\mathfrak{X}(g)^M$, in quanto la coniugazione e' un isomorfismo di gruppi.

Definition 4.6. Sia $\mathfrak{X}$ una rappresentazione.

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} \text{ e' riducibile} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists M \in \text{GL}(n, F) : \forall g \in G \mathfrak{X}(g) = M^{-1} \begin{bmatrix} X(g) & Y(g) \\ \underline{0} & Z(g) \end{bmatrix} M \\ &\text{con } Z(g) \in F^{r \times r}, X(g) \in F^{s \times s}, Y(g) \in F^{s \times r} \end{aligned}$$

ovvero

$$\mathfrak{X} \text{ e' riducibile} \iff \mathfrak{X} \text{ e' simile ad una matrice a blocchi del tipo } \begin{bmatrix} X & Y \\ \underline{0} & Z \end{bmatrix}$$

Proposition 4.7. Sia $\mathfrak{X} : G \longrightarrow \text{GL}(n, F)$ una rappresentazione e $V = F^n$ il suo modulo indotto, allora

$$\mathfrak{X} \text{ irriducibile} \Leftrightarrow V \text{ semplice}$$

Proof:

(1) Dim. $\Rightarrow$

Supponiamo per assurdo che $\exists W$ V -sottomodulo t.c. $0 < W < V$.

Sia $\{w_{s+1}, \dots, w_n\}$ una base di W e completiamola ad una base $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ di V .

Consideriamo quindi la rappresentazione $\mathfrak{X}'$ indotta dal modulo V secondo la base C :

$$\mathfrak{X}'(g) = M_C(r_g) \quad (1)$$

Prima di continuare notiamo che:

$$W \stackrel{FG}{\leq} V \Rightarrow w_i \cdot g \in W = \langle w_{s+1}, \dots, w_n \rangle \quad \forall i \geq s+1 \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow w_i \cdot g = 0w_1 + \dots + 0w_s + *w_{s+1} + \dots + *w_n \Rightarrow [w_i \cdot g]_C = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ volte}}, *, *, \dots, *)$$

(con $*$ indichiamo un qualsiasi coefficiente)

$$\mathfrak{X}'(g) = M_C(r_g) = \begin{bmatrix} [w_1 \cdot g]_C \\ \vdots \\ [w_n \cdot g]_C \end{bmatrix} \stackrel{\text{e' del tipo}}{\equiv} \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix} \quad (3)$$

Infine, sfruttando la prop [4.3,pg.24] abbiamo

$$\mathfrak{X}(g) = M_B(r_g) \quad (4)$$

dove $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ e' la base canonica di V .

Possiamo cosi' concludere:

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathfrak{X}(g)}_{(4)} &\stackrel{\text{basta usare la mat. di passaggio}}{\sim} \underbrace{M_C(r_g)}_{(2)} \stackrel{(2)}{\equiv} \underbrace{\mathfrak{X}'(g)}_{(4)} \stackrel{(4)}{\equiv} \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \mathfrak{X}(g) \text{ non e' irriducibile} \end{aligned}$$

Assurdo contro ipotesi.

(2) Dim. $\Leftarrow$

Supponiamo per assurdo che $\mathfrak{X}$ sia riducibile, ovvero che

$$\mathfrak{X} \sim \mathfrak{Y} \equiv \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \exists M : \mathfrak{X}(g) = M^{-1} \mathfrak{Y}(g) M \quad (1)$$

$$\text{con } X \in F^{s \times s}, Y \in F^{n-s \times n-s}, 0 \in F^{n-s \times s}$$

Sia $c_i = M_i$ la riga i di M .

Poiche' M e' invertibile, fissata $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ esiste una sola base C di V tale che $M = P_{C \rightarrow B}$, dove $P_{C \rightarrow B}$ e' la matrice di passaggio da C a B . In particolare, poiche' B e' la base canonica si ha $C = \{c_1, \dots, c_n\}$.

Sia $h : s+1 \leq h \leq n$,

$$(1) \Rightarrow \mathfrak{Y}(g)_{hi} = 0 \quad \forall i \leq s \quad (1.1)$$

$$c_h \cdot g = c_h \cdot \mathfrak{X}(g) = c_h M^{-1} \mathfrak{Y}(g) M = c_h P_{B \rightarrow C} \mathfrak{Y}(g) P_{C \rightarrow B} = e_h \mathfrak{Y}(g) P_{C \rightarrow B} = \mathfrak{Y}(g)_h P_{C \rightarrow B} =$$

$$\stackrel{(1.1)}{\equiv} \sum_{i=s+1}^n \mathfrak{Y}(g)_{hi} c_i \in \langle c_{s+1}, \dots, c_n \rangle$$

Abbiamo così dimostrato che

$$c_h \cdot g \in \langle c_{s+1}, \dots, c_n \rangle \quad \forall h : s+1 \leq h \leq n, \quad \forall g \in G$$

Quindi $W = \langle c_{s+1}, \dots, c_n \rangle$ è un FG -modulo, in particolare è un sottomodulo di $\langle c_1, \dots, c_n \rangle = V$, e questo è assurdo contro la semplicità di V . □

Proposition 4.8. *Sia V un FG -modulo, $U, W \leq^{FG} V$ e sia $\mathfrak{X}$ la rappresentazione indotta da V secondo la base canonica. Infine, sia $B_U = \{u_1, \dots, u_s\}$ una base di U e $B_W = \{w_1, \dots, w_r\}$ una base di W . Si ha*

$$V = W \oplus U \Rightarrow \mathfrak{X} \sim \begin{bmatrix} \underline{W} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{U} \end{bmatrix}$$

dove $\underline{W}, \underline{U}$ sono rispettivamente le rappresentazioni indotte da W, U su B_W, B_U

Proof: La rappresentazione $\mathfrak{Y}$ indotta da V secondo la base $B = B_W \cup B_U = \{w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_s\}$ è una matrice a blocchi diagonale, infatti,

$$W \leq^{FG} V \Rightarrow w_i \cdot g \in W = \langle w_1, \dots, w_r \rangle$$

$$U \leq^{FG} V \Rightarrow u_i \cdot g \in U = \langle u_1, \dots, u_s \rangle$$

$$\mathfrak{Y}(g) = \begin{bmatrix} [w_1 \cdot g]_B \\ \vdots \\ [w_r \cdot g]_B \\ [u_1 \cdot g]_B \\ \vdots \\ [u_s \cdot g]_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{W} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{B_W}(r_g) & \underline{0} \\ \underline{0} & M_{B_U}(r_g) \end{bmatrix}$$

$\mathfrak{Y}$ e $\mathfrak{X}$ sono simili perché sono rappresentazioni indotte dallo stesso modulo V . □

Proposition 4.9. *Sia V, W due FG -moduli e sia $f : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare tra essi, allora*

$$f \text{ è un } FG\text{-omomorfismo} \Leftrightarrow \mathfrak{X}(g)M_{B,C}(f) = M_{B,C}(f)\mathfrak{Y}(g) \quad \forall g \in G$$

dove $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ sono le rappresentazioni indotte dai moduli V, W secondo le basi $B = \{v_i\}_{i=1}^n$, $C = \{w_i\}_{i=1}^m$, e $M_{B,C}(f)$ è la matrice associata a f .

Proof:

Sia $M = M_{B,C}(f)$

$$v_i \cdot g \in V = \langle B \rangle \Rightarrow v_i \cdot g = \sum_{j=1}^n x_{ij}(g) v_j \quad (1)$$

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^n ([v_i]_B M)_j w_j = \sum_{j=1}^n (e_i M)_j w_j = \sum_{j=1}^n M_{ij} w_j \quad (2)$$

$$w_j \cdot g \in W = \langle C \rangle \Rightarrow w_j \cdot g = \sum_{k=1}^n y_{jk}(g) w_k \quad (3)$$

$$\mathfrak{X}(g) = M_B(r_g) \Rightarrow (\mathfrak{X}(g))_i = [v_i \cdot g]_B \underbrace{=}_{(1)} (x_{i1}(g), \dots, x_{in}(g)) \Rightarrow (\mathfrak{X}(g))_{ij} = x_{ij}(g) \quad (4)$$

$$(\mathfrak{Y}(g))_{jk} \underbrace{=}_{(3)} y_{jk}(g) \quad (5)$$

$$f \text{ e' un } FG\text{-omo.} \Leftrightarrow f(vg) = f(v)g \quad \forall g \in G \quad \forall v \in V \Leftrightarrow f(v_i g) = f(v_i)g \quad \forall g \in G \quad \forall v_i \in B \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{(1),(2)} f \left(\sum_{j=1}^n x_{ij}(g) v_j \right) = \sum_{j=1}^n M_{ij} w_j g \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{f \text{ lineare, (3)}} \sum_{j=1}^n x_{ij}(g) f(v_j) = \sum_{j=1}^n M_{ij} \left(\sum_{k=1}^n y_{jk}(g) w_k \right) \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{(2)} \sum_{j=1}^n x_{ij}(g) \left(\sum_{k=1}^n M_{jk} w_k \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n M_{ij} y_{jk}(g) \right) w_k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_{ij}(g) M_{jk} \right) w_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n M_{ij} y_{jk}(g) \right) w_k \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\{w_k\}_{k=1}^n \text{ base}} \sum_{j=1}^n x_{ij}(g) M_{jk} = \sum_{j=1}^n M_{ij} y_{jk}(g) \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{(4),(5)} (\mathfrak{X}(g)M)_{ik} = (M\mathfrak{Y}(g))_{ik} \quad \forall i, k \Leftrightarrow \mathfrak{X}(g)M = M\mathfrak{Y}(g)$$

□

Proposition 4.10. *Siano $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ due rappresentazioni di FG e siano V_1, V_2 i moduli indotti, allora*

$$V_1 \stackrel{FG}{\simeq} V_2 \Leftrightarrow \mathfrak{X} \sim \mathfrak{Y}$$

Ovvero, le rappresentazioni sono simili se e solo se i loro moduli indotti sono isomorfi.

Proof:

$$\mathfrak{X} \sim \mathfrak{Y} \Leftrightarrow Y = M^{-1} \mathfrak{X} M \Leftrightarrow \mathfrak{X} M = M \mathfrak{Y} \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{[4.9, \text{pg. 27}]} f : V_1 \longrightarrow V_2 \text{ e' un } FG\text{-omo.}$$

dove f e' la mappa associata a M

$$\exists M^{-1} \Leftrightarrow f \text{ isomorfismo}$$

□

Proposition 4.11. *Supponendo di avere*

1. $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} : G \longrightarrow \text{GL}(n, F)$ rappresentazioni irriducibili di G
2. F campo algebricamente chiuso

3. $\mathfrak{X}(g)M = M\mathfrak{Y}(g) \quad \forall g \in G$ per qualche $M \in F^{n \times m}$

si ha

$$M = 0 \text{ oppure } M = \lambda I, \quad \lambda \in F^*, \quad \mathfrak{X} = \mathfrak{Y}, \quad n = m$$

Proof: Sia $V = F^n$ il modulo indotto da $\mathfrak{X}$, $W = F^m$ quello indotto da $\mathfrak{Y}$.

$$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \text{ irriducibili} \quad \Rightarrow \quad V, W \text{ semplici} \quad (1)$$

[4.7,pg.26]

Sia $f : V \longrightarrow W$ l'applicazione lineare indotta da M rispetto alle basi canoniche B, C di V, W , ovvero:

$$f(e_i) = e_i M$$

Si ha

$$\begin{cases} f \text{ lineare} \\ \mathfrak{X}(g)M = M\mathfrak{Y}(g) \quad \forall g \in G \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f \text{ e' un } FG\text{-omomorfismo} \quad (2)$$

[4.9,pg.27]

$$(1), (2) \quad \Rightarrow \quad f = 0 \vee f \text{ isomorfismo}$$

[2.32,pg.8]

Nel primo caso abbiamo $M = 0$. Nel secondo,

$$\dim V = \dim W \Rightarrow n = m \Rightarrow V = W \Rightarrow \mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$$

$$\begin{cases} f : V \longrightarrow V \\ V \text{ semplice} \\ F \text{ alg. chiuso} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f = \lambda \text{id} \Rightarrow e_i M = f(e_i) = \lambda e_i \Rightarrow M = \lambda I$$

[2.33,pg.8]

□

Proposition 4.12.

$$\begin{cases} \mathfrak{X} \text{ rappr. irriducibile} \\ \exists M \in F^{n \times n} : M\mathfrak{X}(g) = \mathfrak{X}(g)M \quad \forall g \in G \\ F \text{ alg. chiuso} \end{cases} \Rightarrow M = \lambda I, \quad \text{con } \lambda \in F$$

*Nota*⁸.

Proof: Basta applicare la prop [4.11,pg.28] con $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}$.

□

Proposition 4.13.

$$\begin{cases} h \in Z(G) \\ \mathfrak{X} \text{ rappr. irriducibile} \\ F \text{ alg. chiuso} \end{cases} \Rightarrow \mathfrak{X}(h) = \lambda I, \quad \text{con } \lambda \in F$$

Proof:

$$h \in Z(G) \Leftrightarrow hg = gh \quad \forall g \in G \Rightarrow \underbrace{\mathfrak{X}(g)}_M \underbrace{\mathfrak{X}(h)}_M = \underbrace{\mathfrak{X}(h)}_M \underbrace{\mathfrak{X}(g)}_M \quad \forall g \in G \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{X}(h) = \lambda I$$

[4.11,pg.28]

□

Proposition 4.14.

$$\begin{cases} G \text{ abeliano} \\ \mathfrak{X} \text{ rappr. irriducibile} \\ F \text{ alg. chiuso} \end{cases} \Rightarrow \dim \mathfrak{X} = n = 1, \quad \text{ovvero } \mathfrak{X} : G \longrightarrow F^*$$

In questo caso, diremo che $\mathfrak{X}$ e' lineare.

⁸Questa proposizione puo' sembrare banale, ma la includiamo perche' sara' utile nel seguito

Proof:

$$\begin{aligned} G \text{ abeliano} &\Rightarrow Z(G) = G \quad \underbrace{\Rightarrow}_{[4.13, \text{pg.} 29]} \mathfrak{X}(h) = \lambda_h I \quad \forall h \in G \\ \mathfrak{X} \text{ irriducibile} &\quad \underbrace{\Rightarrow}_{[4.7, \text{pg.} 26]} V = F^n \text{ modulo indotto e' semplice} \\ \text{Sia } v \in V \setminus \{0\} \\ \langle v \rangle &\stackrel{FG}{\leq} V, \text{ infatti,} \\ v \cdot g &= v\mathfrak{X}(g) = v\lambda_g I = \lambda_g v \in \langle v \rangle \\ \begin{cases} 0 < \langle v \rangle \leq V \\ V \text{ semplice} \end{cases} &\Rightarrow V = \langle v \rangle \Rightarrow \dim V = 1 \end{aligned}$$

☐

Remark 4.2. Da adesso in poi considereremo solo l'algebra $\mathbb{C}G$, così da assicurare la chiusura algebrica del campo e la condizione

$$\text{ch } \mathbb{C} \not\sim |G|$$

Theorem 4.15. *di Wedderburn per le rappresentazioni.*

Siano $I_1, \dots, I_k$ i rappresentanti delle classi di isomorfismo dei $\mathbb{C}G$ -moduli semplici e siano $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_k$ le relative rappresentazioni indotte. Allora,

1. $\mathfrak{X} : G \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *rapp. irriducibile* $\Rightarrow \exists ! i : \mathfrak{X} \sim \mathfrak{X}_i$
2. $k = |\mathrm{cl}(G)|, \quad |G| = n_1^2 + \cdots + n_k^2, \quad \text{con } n_i = \dim I_i$
3. $\mathfrak{Y} : G \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *rappresentazione* $\Rightarrow \mathfrak{Y} \sim \mathrm{diag}(\mathfrak{X}_{i_1}, \dots, \mathfrak{X}_{i_r})$ *matrice diagonale a blocchi*
4.
$$\begin{cases} \mathfrak{X}_i(B_j) = 0 \quad \forall j \neq i \\ \mathfrak{X}_i(B_i) = \mathbb{C}^{n_i \times n_i} \end{cases}, \quad \text{dove } B_i = A(I_i)$$
5. $1 = e_1 + \cdots + e_k, \quad e_i \in B_i \Rightarrow \mathcal{X}_i(e_j) = \mathcal{X}_i(1)\delta_{ij}$

dove, $\mathcal{X}_i(x) = \text{Tr} \mathfrak{X}_i(x)$, $\text{Tr} M$ e' la traccia della matrice M , $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Proof:

- $\langle 1 \rangle$ Dim. 1.

Sia V il modulo indotto da $\mathfrak{X}$.

$$\mathfrak{X} \text{ irrid.} \Rightarrow V \text{ semple} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{[2.50, \text{pg.14}]} \quad \exists ! i: V \simeq I_i \quad \underbrace{\Rightarrow}_{[4.10, \text{pg.28}]} \quad \mathfrak{X} \sim \mathfrak{X}_i$$

- $\langle 2 \rangle$ Dim. 2.

Basta rileggere la [3.8,pg.23], considerando che $F = \mathbb{C}$.

- ⟨3⟩ Dim. 3.

Sia V il modulo indotto da $\mathfrak{Y}$.

$$V \text{ CG-mod} \xrightarrow[\text{[3.8, pg. 23]}]{\wr} V = m_1 I_1 \oplus \cdots \oplus m_k I_k = I_{i_1} \oplus \cdots \oplus I_{i_r} \quad (1)$$

Ogni I_{i_j} induce una rappresentazione irriducibile $\mathfrak{Y}_{i_j}$,

$$\mathfrak{Y}_{i_j} \text{ irriducibile} \underbrace{\Rightarrow}_{1.} \mathfrak{Y}_{i_j} \sim \mathfrak{X}_{i'_j}$$

Infine, dalla (1), applicando la prop [4.8,pg.27] si ha

$$\mathfrak{Y} \sim \text{diag}(\mathfrak{Y}_{i_1}, \dots, \mathfrak{Y}_{i_r}) \sim \text{diag}(\mathfrak{X}_{i'_1}, \dots, \mathfrak{X}_{i'_r})$$

(4) Dim. 4.

Sia $C = \{v_1, \dots, v_{n_i}\}$ la base di I_i dal quale si ottiene la rappresentazione $\mathfrak{X}_i$. Sappiamo già che preso $g \in G$,

$$\mathfrak{X}_i(g) = M_C(r_g)$$

vale però anche la seguente proposizione: preso $x \in \mathbb{C}G$,

$$\mathfrak{X}_i(x) = M_C(r_x) \quad (1)$$

infatti,

$$x = \sum_{g \in G} \lambda_g g$$

$$\mathfrak{X}(x) = \sum_{g \in G} \lambda_g \mathfrak{X}(g) = \sum_{g \in G} \lambda_g \begin{bmatrix} [v_1 \cdot g]_C \\ \vdots \\ [v_{n_i} \cdot g]_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{g \in G} \lambda_g [v_1 \cdot g]_C \\ \vdots \\ \sum_{g \in G} \lambda_g [v_{n_i} \cdot g]_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [v_1 \cdot \sum_{g \in G} \lambda_g g]_C \\ \vdots \\ [v_{n_i} \cdot \sum_{g \in G} \lambda_g g]_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [v_1 \cdot x]_C \\ \vdots \\ [v_{n_i} \cdot x]_C \end{bmatrix} = M_C(r_x)$$

Per il teorema di Wedderburn (vedi [2.50, pg.14]) avevamo i seguenti isomorfismi di algebre:

$$\begin{aligned} B_i &\xrightarrow{\phi_i} \text{End}_F(I_i) \xrightarrow{f} \mathbb{C}^{n_i \times n_i} \\ x &\mapsto (r_x : I_i \longrightarrow I_i) \mapsto M_C(r_x) \end{aligned}$$

Nota: f è un isomorfismo di algebre.

Abbiamo,

$$(1) \Rightarrow \mathfrak{X}_{i|B_i} = \phi_i f \underbrace{\Rightarrow}_{f, \phi_i \text{ suriettive}} \mathfrak{X}_i(B_i) = \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$$

Infine, sempre per il teorema di Wedderburn abbiamo che $B_i B_j = 0$ per $j \neq i$, quindi

$$x_j \in B_j \Rightarrow v_h x_j = 0 \quad \forall h = 1, \dots, n_i$$

$$\mathfrak{X}_i(x_j) \underbrace{=}_{(1)} \begin{bmatrix} [v_1 \cdot x_j]_C \\ \vdots \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \mathfrak{X}_i(B_j) = 0$$

(5) Dim. 5.

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_i(B_j) = 0 \quad \forall i \neq j &\Rightarrow \mathfrak{X}_i(e_j) = 0 \Rightarrow \mathcal{X}_i(e_j) = 0 \\ e_i = 1_{B_i} &\underbrace{\Rightarrow}_{\mathfrak{X}_{i|B_i} = \phi_i f \text{ e' un alg-omomorfismo}} \mathfrak{X}_i(e_i) = I \Rightarrow \mathcal{X}_i(e_i) = \mathcal{X}_i(1) \end{aligned}$$

□

5 *

Index

$A(V)$, 13

A-omomorfismo, 7

Algebra di un gruppo, 19

Algebre, 1

Algebre semisemplici, 13

annullatore, 6

Maschke

teorema di, 22

Moduli, 5

Moduli semisemplici, 11

modulo, 5

semisemplice, 11

semplice, 6

modulo regolare, 6

Preliminari, 1

rappresentazione, 23

rappresentazione lineare, 29

Rappresentazioni, 23

rappresentazioni

irriducibili, 25

simili, 25

Schur, teorema di, 8

Wedderburn

teorema di, 14