

Algebra lineare

AlpT (@freaknet.org)

August 19, 2013

Copyright ©2007 Andrea Lo Pumo aka AlpT <alpt@freaknet.org>. All rights reserved.

This document is free; you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or (at your option) any later version.

This document is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for more details.

You should have received a copy of the GNU General Public License along with this document; if not, write to the Free Software Foundation, Inc., 675 Mass Ave, Cambridge, MA 02139, USA.

Contents

1	Matrici	1
1.1	Matrici	1
1.2	Tipo di una matrice	1
1.3	Matrice nulla (zero)	1
1.4	Matrice identica (identita')	1
1.4.1	Proprieta'	1
1.5	Somma	2
1.6	Somma diretta	2
1.7	Prodotto	2
1.7.1	Proprieta'	2
1.8	Prodotto scalare	3
1.8.1	Proprieta'	3
1.9	Matrice diagonale	3
1.9.1	Esempio	4
1.10	Matrice scalare	4
1.10.1	Esempio	4
1.11	Trasposizione	4
1.11.1	Esempio	4
1.11.2	Proprieta'	4
1.12	Matrici triangolari	5
1.12.1	Inferiori	5
1.12.2	Superiori	5
1.12.3	Proprieta'	5
1.13	Matrice simmetrica	5
1.13.1	Esempio	5
1.14	Matrice antisimmetrica	6
1.15	Traccia di una matrice	6
1.16	Permutazioni	6
1.16.1	Gruppo delle permutazioni	6
1.17	Trasposizione	6
1.18	Proprieta'	6
1.19	Parita' di una permutazione	7
1.19.1	Proprieta'	7
1.20	Prodotto dedotto	7
1.20.1	Esempio	7
1.21	Sgn	7
1.22	Determinante	7
1.22.1	Proprieta'	7
1.23	Sistema lineare	8
1.24	Sotto matrice (minore)	9
1.24.1	Proprieta'	9
1.24.2	Esempio	9
1.25	Minore complementare	9
1.26	Minore orlato	9
1.27	Minore principale	9
1.28	Complemento algebrico	10
1.29	Teorema di Laplace I	10

1.30	Teorema di Laplace II	10
1.31	Teorema di Laplace generalizzato	10
1.32	Caratteristica	11
1.32.1	Proprieta'	11
1.33	Rango di una matrice	11
1.34	Matrice aggiunta	11
1.34.1	Proprieta'	12
1.35	Matrice inversa	12
1.35.1	Proprieta'	12
1.36	Uso di sistemi vettoriali	13
1.37	Matrice invertibile	14
1.37.1	Proprieta'	15
2	Sistemi lineari	15
2.1	Sistema lineare $m \times n$	15
2.2	Cramer	15
2.3	Regola di Cramer	16
3	Spazi vettoriali	17
3.1	Vettore nullo	17
3.2	Legge di annullamento	17
3.3	Vettore opposto	18
3.4	Sottospazio vettoriale	18
3.4.1	Proprieta	18
3.4.2	Esempio	18
3.5	Forma lineare	18
3.5.1	Proprieta	19
3.6	Somma di sottospazi vettoriali	19
3.6.1	Proprieta	19
3.7	Somma diretta sottospazi vettoriali	19
3.7.1	Proprieta	20
3.8	Alcuni sottospazi	20
3.8.1	Matrici Sym e Asym	20
3.8.2	Matrici a traccia nulla	21
4	Dipendenza lineare	22
4.1	Combinazione lineare	22
4.2	Sottospazio generato	22
4.2.1	Proprieta'	22
4.3	Indipendenza lineare	23
4.4	Criterio degli scarti successivi	24
4.5	Base	24
4.6	Insieme minimale di generatori	25
4.6.1	Proprieta'	25
4.7	Insieme massimale di generatori	25
4.7.1	Componenti di un vettore	25
4.8	Lemma di Steinitz	26
4.8.1	Equicardinalita' delle basi	26
4.9	Complemento della base	26

4.10	Dimensione	26
4.10.1	Proprieta'	27
4.10.2	Altre proprieta'	27
4.11	Componenti e basi	28
4.12	Determinante e vettori l.i.	28
4.13	Teorema di Kroneker I	28
4.13.1	Corollario	28
4.14	Equazioni cartesiane di un sottospazio	29
4.14.1	Base dalle equazioni	29
5	Sistemi lineari	31
5.1	Rouche-Capelli I	31
5.2	Rouche-Capelli II	32
5.3	Corollario di Rouche-Capelli	32
5.4	Grassman	32
6	Applicazioni lineari	33
6.1	Nucleo	34
6.2	Immagine	35
6.3	Controimmagine	35
7	Spazio quoziente	36
7.1	Isomorfismo	37
7.2	Teorema dell'isomorfismo	37
7.3	Teorema delle dimensioni	39
7.4	Assegnazione di un'applicazione lineare	39
7.5	Prodotto cartesiano di spazi vettoriali	41
7.5.1	Formula di Grassman	42
7.6	Matrice associata	42
7.6.1	Proprieta'	43
7.7	Equazioni cartesiane del nucleo	44
7.8	Matrici associate di f compost	44
7.8.1	Matrici associate di isomorfismi	45
7.9	Matrici equivalenti	46
7.10	Matrici del cambiamento di base	46
7.11	Relazione tra matrici associate	48
7.12	Matrice invertibile e trasf. elementari	49
7.13	Matrice ortogonale	50
7.13.1	Proprieta'	50
8	Endomorfismi	50
8.1	Matrici simili	51
8.2	Matrici diagonalizzabili	51
8.3	Autovalore e autovettore	52
8.4	Autospazio	52
8.5	Polinomio caratteristico	52
8.6	Molteplicita' algebrica e geometrica	54
8.7	Autovettori linearmente indipendenti	55
8.8	Endomorfismo semplice	56
8.9	Equazioni cartesiane di un autospazio	57

8.10	Test di semplicità	58
8.11	Polinomio endomorfismo	58
8.11.1	Proprietà	58
8.11.2	Proprietà	59
8.12	Ideale dell'anello di T	60
8.13	Endomorfismo singolare (degenere)	61
8.14	Sottospazio invariante	61
8.15	Endomorfismi triangolizzabili	62
8.16	Teorema di Cayley-Hamilton	66
9	Spazio duale	66

1 Matrici

1.1 Matrici

Dati tre insiemi R, C, V , si dice matrice con le righe etichettate da R , le colonne etichettate da C e le entrate in V ogni funzione del tipo

$$A : R \times C \rightarrow V$$

Se consideriamo $R = \{1, 2, \dots, m\}$ ed $C = \{1, 2, \dots, n\}$, questa definizione corrisponde a quella comune.

Una matrice viene rappresentata in questo modo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$Q^{m \times n} =$ insieme delle matrici di tipo $m \times n$ (m righe, n colonne) a coefficienti razionali

1.2 Tipo di una matrice

Il **tipo** di una matrice e' la coppia (m, n) (m righe, n colonne).

1.3 Matrice nulla (zero)

E' quella matrice che ha tutte le entrate pari a 0.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

1.4 Matrice identica (identita')

E' quella matrice quadrata in cui tutti gli elementi della diagonale principale sono costituiti dal numero 1, La matrice identica si denota con I .

1.4.1 Proprieta'

1. $AI = A$
2. $IB = B$
3. Sia τ una trasformazione elementare della matrice A (scambio di due righe (o colonne), moltiplicazione di una riga (colonna) per uno scalare $\lambda \neq 0$, combinazione lineare di due righe (colonne)). Allora,

$$\begin{cases} \tau(A) = \tau(I)A & \text{(per trasformazioni su righe)} \\ \tau(A) = A\tau(I) & \text{(per trasformazioni su colonne)} \end{cases}$$

4. Se τ e' una trasformazione elementare che consiste nello scambio di righe o di colonne, allora

$$\tau(I)\tau(I) = I$$

Proof: Sia $T = \tau(I)$. Per la prop [3,pg.1], la matrice $\tau(I)T$ e' la matrice ottenuta effettuando le operazioni elementari τ su T :

$$\tau(I)T = \tau(T) = \tau(\tau(I))$$

Ma poiche' τ effettua solo scambi di righe (o colonne) si ha $\tau^2(I) = I$. □

1.5 Somma

La somma di due matrici dello stesso tipo e' una matrice $A + B$ dello stesso tipo le cui entrate sono ottenute sommando le entrate corrispondenti.

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \quad i \leq m, \quad j \leq n$$

1.6 Somma diretta

Un'altra operazione, usata meno frequentemente, e' la somma diretta. Date due matrici A e B di forma qualsiasi, rispettivamente $m \times n$ e $p \times q$, la somma diretta e' una matrice $(m + p) \times (n + q)$ definita nel modo seguente:

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{p1} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix}$$

1.7 Prodotto

Se A e' una matrice $m \times n$ e B e' una matrice $n \times p$, la matrice AB sara' di tipo $m \times p$, ed e' definita come:

$$(AB)_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir}b_{rj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Due matrici possono essere moltiplicate fra loro solo se il numero di colonne della prima e' uguale al numero di righe della seconda.

1.7.1 Proprieta'

1. In generale non vale la proprieta' commutativa: $AB \neq BA$
2. $A(B + C) = AB + AC$ (proprieta' distributiva rispetto alla somma).
3. $AI = IA = A$ (la mat identica e' l'elemento neutro della moltiplicazione).

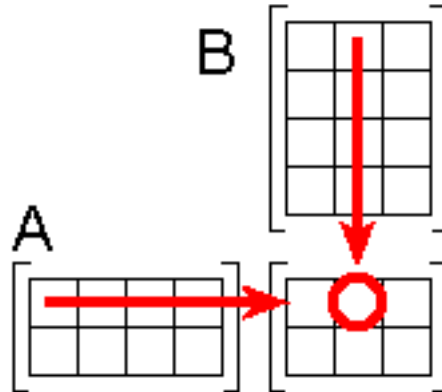


Figure 1: Moltiplicazione di una matrice $2 \times 4, 4 \times 3$

Proposition 1.1. *La moltiplicazione di una matrice A per un vettore colonna v a destra (Av) equivale a una combinazione lineare delle sue colonne, i cui coefficienti sono dati dal vettore v ; la matrice A formata dalle colonne $A_1, A_2, \dots, A_n$, moltiplicata a destra per la colonna v con componenti $v_1, v_2, \dots, v_n$ e' uguale alla colonna $v_1A_1 + v_2A_2 + \dots + v_nA_n$.*

La moltiplicazione di un vettore riga per una matrice a destra equivale a una combinazione lineare delle sue righe, i cui coefficienti sono dati dal vettore v ; la matrice A formata dalle righe $A_1, A_2, \dots, A_n$, moltiplicata a sinistra per la riga di componenti $v_1, v_2, \dots, v_n$ e' uguale alla riga $v_1A_1 + \dots + v_nA_n$.

1.8 Prodotto scalare

Il prodotto scalare kA e' definito come:

$$(kA)_{ij} = kA_{ij}$$

oppure come:

$$kA = (ka_{ij})$$

1.8.1 Proprieta'

1. $(kA)B = k(AB) = A(kB)$

1.9 Matrice diagonale

Una matrice quadrata e' diagonale se:

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ con } i \neq j : d_{i,j} = 0$$

Ovvero se tutti gli elementi, all'infuori di quelli contenuti nella sua diagonale sono uguale a 0.

1.9.1 Esempio

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

1.10 Matrice scalare

E' scalare quando e' una mat diagonale e tutti gli elementi sulla diagonale sono uguali a uno scalare k .

Usando gli indici possiamo definirla come:

$$a_{ij} = \begin{cases} k, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

1.10.1 Esempio

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

1.11 Trasposizione

Data una matrice $A \in Q^{m \times n}$, chiamiamo **trasposta** di A e la indichiamo con ${}^tA$, la matrice che si ottiene da A scambiando le righe con le colonne, ovvero:

$$({}^tA)_{ij} = A_{ji}, \quad \forall A \in Q^{m,n}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n,$$

L'applicazione della trasposizione viene chiamata in questo modo:

$$\tau : Q^{m \times n} \rightarrow Q^{n \times m}$$

1.11.1 Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

1.11.2 Proprieta'

1. ${}^t(AB) = {}^tB, {}^tA$ (non e' sempre commutativa!)
2. ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
3. ${}^t kA = k {}^tA$
4. $\det {}^tA = \det A$

1.12 Matrici triangolari

1.12.1 Inferiori

Le mat triangolari inferiori sono nella forma:

$$L = \begin{pmatrix} l_{1,1} & & & & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & & & \\ l_{3,1} & l_{3,2} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \dots & l_{n,m-1} & l_{n,m} \end{pmatrix}$$

Le possiamo definire come:

$$a_{ij} = 0 \text{ se } j > i$$

1.12.2 Superiori

Le mat triangolari superiori sono nella forma:

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \dots & u_{1,m} \\ & u_{2,2} & u_{2,3} & \dots & u_{2,m} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & u_{n-1,m} \\ 0 & & & & u_{n,m} \end{pmatrix}$$

Le possiamo definire come:

$$a_{ij} = 0 \text{ se } i < j$$

1.12.3 Proprieta'

Se A e' una matrice triangolare allora

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

cioe' e' il prodotto di tutti gli elementi della diagonale principale.

1.13 Matrice simmetrica

E' una mat che ha gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale. Si puo' definire piu' formalmente dicendo che una matrice e' simmetrica se:

$${}^tA = A$$

1.13.1 Esempio

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

1.14 Matrice antisimmetrica

E' antisimmetrica quando:

$${}^tA = -A$$

Ovvero e' una matrice simmetrica, ma tutti i suoi elementi sono gli opposti della matrice originale. Gli elementi della sua diagonale principale sono tutti uguali a zero.

1.15 Traccia di una matrice

La traccia di una mat e' la somma degli elementi sulla diagonale e si indica con:

$$t_r A$$

1.16 Permutazioni

$$\mathcal{S} = \{1, \dots, n\}$$

$\mathcal{S}_n$ e' l'insieme di tutte le corrispondenze biunivoche dell'insieme $\mathcal{S}$ in se stesso.

1.16.1 Gruppo delle permutazioni

Il gruppo delle permutazioni su n oggetti si scrive come:

$$(\mathcal{S}_n, \circ)$$

Dove $\circ$ e' un operazione di composizione tra applicazioni.

La cardinalita' di $(\mathcal{S}_n, \circ)$ e':

$$|(\mathcal{S}_n, \circ)| = n!$$

1.17 Trasposizione

Una trasposizione e' una permutazione che scambia due elementi e lascia fissi gli altri, ovvero:

$$\begin{aligned}\tau(i) &= j \\ \tau(j) &= i \\ \tau(k) &= k \quad \forall k \neq i, j\end{aligned}$$

1.18 Proprieta'

Una permutazione e' sempre esprimibile come prodotto di trasposizioni:

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_k$$

Dove ogni τ_i e' una trasposizione e σ e' la permutazione.

1.19 Parita' di una permutazione

La parita' di una permutazione σ e' **pari** se il numero di trasposizioni che si utilizza per ottenerla e' pari, altrimenti e' dispari.

La parita' puo' essere anche calcolata rappresentando il diagramma della permutazione: si contano il numero di incroci delle frecce, se e' pari, la parita' e' pari, altrimenti dispari. Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

In questo caso, esiste solo un incrocio (la freccia da 1 a 2 e quella da 2 a 1), quindi la parita' e' dispari.

1.19.1 Proprieta'

Il numero di trasposizioni necessarie per ottenere σ come composizione di trasposizioni e' sempre pari o dispari.

1.20 Prodotto dedotto

Un p. dedotto e' il prodotto di tutti gli elementi che non stanno sulla stessa riga e colonna. Il numero di prodotti dedotti di una matrice $n \times n$ e' pari a $n!$.

1.20.1 Esempio

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{33} \end{bmatrix}$$

Un possibile prodotto dedotto e': $a_{12}a_{23}a_{31}$

1.21 Sgn

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1, & \text{se la parita' di } \sigma \text{ e' pari} \\ -1, & \text{se dispari} \end{cases}$$

1.22 Determinante

Data una matrice $M \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, il suo determinante e' definito come:

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Dove a_{ij} e' un elemento della matrice.

1.22.1 Proprieta'

1. $\det(A) = \det({}^t A)$
2. Se A ha una riga (o colonna) nulla, allora $\det(A) = 0$
3. A' =matrice ottenuta scambiando due righe (colonne). Allora,

$$\det(A') = -\det(A)$$

4. Se A ha due righe (colonne) uguali, allora $\det(A) = 0$

5. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

6. Sia,

$$A = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R'_i + R''_j \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R'_i \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \quad A'' = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R''_j \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$$

oppure per colonne

$$A = (C_1 \quad \dots \quad C'_i + C''_j \quad \dots \quad C_n) \quad A' = (C_1 \quad \dots \quad C'_i \quad \dots \quad C_n) \quad A'' = (C_1 \quad \dots \quad C''_j \quad \dots \quad C_n)$$

allora, $\det(A) = \det(A') + \det(A'')$.

7. Sia,

$$A = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ \lambda R_i \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$$

oppure per colonne

$$A = (C_1 \quad \dots \quad C_n) \quad A' = (C_1 \quad \dots \quad \lambda C_i \quad \dots \quad C_n)$$

allora, $\det(A') = \lambda \det(A)$

In altre parole, possiamo mettere in evidenza un fattore da una riga o colonna del determinante.

8. Se in una matrice A ci sono due righe (colonne) proporzionali, allora $\det(A) = 0$.

9. Sia, A una matrice in cui la riga (colonna) i -esima e' combinazione lineare delle altre, allora $\det(A) = 0$

10. Data una matrice A' ottenuta da A aggiungendo alla riga i -esima di A una qualunque combinazione lineare delle righe (colonne) rimanenti, allora, $\det(A') = \det(A)$

1.23 Sistema lineare

Posso scrivere un sistema lineare in forma matriciale. Ad esempio, un sistema a tre incognite lo posso scrivere come:

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Dove M e' la matrice dei coefficienti delle equazioni e d_1, d_2, d_3 sono i termini noti delle tre equazioni.

1.24 Sotto matrice (minore)

Data una matrice A , indicheremo con $A(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_t)$ la matrice ottenuta da A ricopiando solo le i -esime righe e le j -esime colonne.

Invece, con $A(\overline{i_1}, \dots, \overline{i_k}; \overline{j_1}, \dots, \overline{j_t})$, indichiamo la matrice che si ottiene da A , ricopiando tutte le righe diverse dalle i -esime, e le colonne diverse dalle j -esime.

1.24.1 Proprieta'

Se il minore ha ordine k , ovvero e' $A(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k)$, e se $k \leq \min(m, n)$, allora il numero di minori estraibili da A e' pari a:

$$\binom{m}{k} \binom{n}{k}$$

1.24.2 Esempio

Consideriamo questa matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

La matrice $A(1, 3; 2)$ e' la seguente:

$$A(1, 3; 2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{32} \end{pmatrix}$$

La matrice $A(\overline{1}, \overline{3}; \overline{2})$ e' invece:

$$A(\overline{1}, \overline{3}; \overline{2}) = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}$$

1.25 Minore complementare

Il minore complementare di posto (i, j) della matrice A , e' la sottomatrice $A(\overline{(i)}, \overline{(j)})$.

1.26 Minore orlato

Sia M un minore. Il suo orlato M' e' ottenuto aggiungendo una riga e una colonna, ovvero se:

$$M = A(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k)$$

allora:

$$M' = A(i_1, \dots, i_k, i_n; j_1, \dots, j_k, j_m), \quad n, m \notin \{1, \dots, k\}$$

In poche parole se l'ordine di M e' r , allora gli orlati di M sono tutti i minori di ordine $r+1$ che lo contengono.

1.27 Minore principale

Sia A una matrice quadrata di ordine n , allora il suo minore principale di ordine k e' definito come

$$(D_k)_{ij} = a_{ij} \quad \forall i, j \leq k$$

ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

1.28 Complemento algebrico

Il complemento algebrico di posto (i, j) della matrice A e' la seguente quantita':

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A(\bar{i}, \bar{j}))$$

Ovvero e' il determinante del minore complementare di posto (i, j) moltiplicato per -1 se $i + j$ e' dispari.

1.29 Teorema di Laplace I

Il teorema di Laplace permette di calcolare il determinante delle matrici quadrate:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$$

Dove $A_{i,j}$ e' il complemento algebrico di posto (i, j) . La riga i , puo' essere scelta a piacere, ma conviene utilizzarne una dove ci sia il maggior numero di zeri.

Alternativamente si puo' scorrere su una colonna

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$$

1.30 Teorema di Laplace II

Questa versione dice semplicemente che:

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{h,j} = 0 \quad h \neq i$$

Lo stesso vale per le colonne.

1.31 Teorema di Laplace generalizzato

Scelte k righe della matrice A , e dette $i_1, \dots, i_k$, si ha:

$$\det(A) = \sum_{j_1, \dots, j_k} (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} \det(A(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k)) \det(A(\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_k; \bar{j}_1, \dots, \bar{j}_k))$$

In sostanza, scelte k righe, le utilizziamo in congiunzione con tutte le possibili combinazioni di k colonne. Ad esempio, se abbiamo una matrice 3×3 , e scegliamo le righe 1 e 2, le matrici che

dovremmo estrarre saranno:

$A(1, 2; 1, 2), A(1, 2; 1, 3), A(1, 2; 2, 3)$ e $A(\bar{1}, \bar{2}; \bar{1}, \bar{2}), A(\bar{1}, \bar{2}; \bar{1}, \bar{3}), A(\bar{1}, \bar{2}; \bar{2}, \bar{3})$

Si può anche utilizzare lo stesso procedimento facendo variare le colonne.

Il Teorema di Laplace generalizzato viene in genere usato per calcolare matrici “a blocco”.

1.32 Caratteristica

Data una matrice $A \in Q^{m,n}$, diremo che la *caratteristica* della matrice è r se esiste un minore, di ordine r , estraibile da A il cui determinante non è nullo e se tutti i minori di ordine $r + 1$ hanno determinante nullo.

La caratteristica della matrice si denota con: $\rho(A)$. L'algoritmo per calcolare $\rho(A)$ è il seguente:

1. Scelgo $r = \min(m, n)$.
2. Estraggo tutti i minori di ordine r . Se ne esiste uno non nullo, ho finito: $\rho(A) = r$.
3. Altrimenti setto $r := r - 1$ e rinvio al punto (2).

1.32.1 Proprietà

Se A' è una matrice ottenuta da A usando trasformazioni elementari, scambio di due righe (o colonne), moltiplicazione di una riga (colonna) per uno scalare $\lambda \neq 0$, allora:

$$\rho(A) = \rho(A')$$

1.33 Rango di una matrice

Data una matrice $A \in Q^{m,n}$, diremo che il rango per righe della matrice A è la dimensione del sottospazio K^n generato dalle righe di A , ovvero:

$$\rho_r(A) = \dim \mathcal{L}(A_1, \dots, A_m)$$

Il rango per colonne è:

$$\rho_c(A) = \dim \mathcal{L}(A^1, \dots, A^n)$$

1.34 Matrice aggiunta

La matrice aggiunta di A , si indica con il simbolo A_a , ed è quella matrice i cui elementi sono i complementi algebrici dei rispettivi elementi di A . Ovvero:

$$A_a = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

ed equivalentemente: $(A_a)_{ij} = A_{ij}$

1.34.1 Proprieta'

$$1. A^t A_a = \det A \cdot I$$

Proof: Costruiamo la matrice prodotto tra A e ${}^t A_a$ e chiamiamo un suo elemento generico: C_{ij} . Osserviamo che:

$$C_{11} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots a_{1n}A_{1n}$$

Ma questo non e' altro che lo sviluppo del determinante col metodo di Laplace, e quindi:

$$C_{11} = \det A$$

Questo vale per tutti gli C_{ij} con $i = j$.

$$C_{11} = C_{22} = \cdots = C_{mm} = \det A$$

Adesso notiamo che:

$$C_{12} = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \cdots a_{1n}A_{2n}$$

Ma questo equivale al secondo teorema di Laplace (1.30), quindi

$$C_{12} = 0$$

Questo vale per tutti gli C_{ij} con $i \neq j$.

In definitiva:

$$C_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \det A & i = j \end{cases}$$

q.e.d

□

$$2. {}^t A_a A = \det A \cdot I$$

$$3. {}^t(A_a) = ({}^t A)_a$$

Proof:

$$(A_a)_{ij} = A_{ij}$$

$$({}^t(A_a))_{ij} = A_{ji}$$

$$({}^t A)_a)_{ij} = A_{ji} = ({}^t(A_a))_{ij}$$

$$({}^t A)_a = {}^t(A_a)$$

□

1.35 Matrice inversa

Data la matrice quadrata A , la sua inversa e' una matrice tale che:

$$AB = BA = I$$

Dove I e' la matrice identita' (vedi 1.4). Se l'inversa di A esiste, allora e' unica. L'inversa di A si indica con: A^{-1} .

L'inversa si puo' calcolare attraverso l'uso dell'aggiunta di A (vedi 1.34);

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot {}^t A_a$$

1.35.1 Proprieta'

$$1. ({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

Proof:

$$\begin{aligned}
({}^tA)^{-1} &= \frac{1}{|{}^tA|} \cdot {}^t({}^tA)_a = \\
({}^tA)_a &\underbrace{=}_{prop[1.34.1, pg. 12]} {}^tA_a \Rightarrow {}^t({}^tA)_a = A_a \\
|{}^tA| &= |A| \\
&= \frac{1}{|A|} \cdot A_a = {}^t\left(\frac{1}{|A|} \cdot {}^tA_a\right) = {}^t(A^{-1})
\end{aligned}$$

□

1.36 Uso di sistemi vettoriali

Esiste anche un altro modo piu' pratico per calcolare l'inversa.

Con $A_1, A_2, \dots, A_m$ indichiamo le rispettive righe della matrice A .

Con $X^1, X^2, \dots, X^m$ indichiamo le rispettive colonne della matrice X .

Con e_i indichiamo la n -upla che ha tutti gli elementi uguali a 0 tranne l' i -esimo, ad esempio $e_4 = (0, 0, 0, 1, 0, \dots)$

X e' la matrice inversa di A se:

$$X = A^{-1} \Leftrightarrow AX = XA = I$$

Quindi:

$$AX = I \Leftrightarrow A_i X^j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Consideriamo al variare di j la seguente riga:

$$(A_i X^j)_{j=1, \dots, n} = e_i$$

Che per $i = 1$ vale:

$$(A_1 X^j)_{j=1, \dots, n} = (A_1 X^1, A_1 X^2, \dots, A_1 X^n) = e_1 = (1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ zeri}})$$

Il sistema equivalente ad $(A_1 X^j)_{j=1, \dots, n} = e_1$ e':

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \dots + a_{1n}x_{n1} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + \dots + a_{1n}x_{n2} = 0 \\ a_{11}x_{13} + a_{12}x_{23} + \dots + a_{1n}x_{n3} = 0 \\ \vdots \\ a_{11}x_{1n} + a_{12}x_{2n} + \dots + a_{1n}x_{nn} = 0 \end{cases}$$

Che possiamo riscrivere come:

$$a_{11} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} + \dots + a_{1n} \begin{pmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Che possiamo ancora riscrivere come¹:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = {}^t e_1 \quad (e_1 = (1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ zeri}}))$$

Adesso possiamo considerare X_i come una incognita della nostra equazione, perche', anche se e' un vettore, rispetta le proprieta' algebriche delle equazioni. Quindi basta risolvere il sistema formato da tutti questi tipi di equazioni:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = e_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = e_2 \\ \vdots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + a_{nn}X_n = e_n \end{cases}$$

A questo punto basta risolvere questo sistema nelle incognite X_i utilizzando la tecnica delle trasformazioni elementari operate sulla matrice dei coefficienti del sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & e_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & e_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & e_n \end{array} \right]$$

Le trasformazioni elementari che possiamo usare sono: scambio di righe, moltiplicazione per uno scalare $\lambda \neq 0$, aggiungere a una riga una combinazione lineare di un'altra. **Non** possiamo operare sulle colonne, dato che questa e' una matrice di un sistema.

Per ricordarsi questo procedimento baste tenere presente che: $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$ non e' nient'altro che I (la

matrice identica), quindi possiamo ricavare la matrice del sistema finale aggiungendo alla destra matrice iniziale A , la matrice I :

$$(A, I) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right]$$

Dopo diche' basta ricordarsi a:

$$(I, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix})$$

Dove v_i e' il valore di X_i .

1.37 Matrice invertibile

Diremo che la matrice A e' invertibile se esiste la sua inversa B .

¹ X_i e' la riga i -esima

1.37.1 Proprieta'

1. La matrice A e' invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

Proof: Dimostriamo che se A e' invertibile allora $\det A \neq 0$. Per definizione $AB = I$, allora calcoliamo il det di ambo i membri:

$$\det(AB) = \det(I) = 1$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1$$

$$\det(A) = \frac{1}{\det(B)}$$

$$\text{Ma } \frac{1}{\det(B)} \neq 0.$$

q.e.d. □

2. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2 Sistemi lineari

2.1 Sistema lineare $m \times n$

Un sistema lineare a m equazioni e a n incognite e' un sistema nella forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Dove b_i sono i termini noti dell'equazione, e a_{ij} sono i coefficienti delle incognite. Usando la notazione matriciale possiamo riscrivere il sistema in questa forma piu' comoda:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{m \times n} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{n \times 1} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{n \times 1}$$

$$AX = B$$

Se il sistema e' $n \times n$, si dice quadrato. Inoltre diremo α il vettore delle soluzioni del sistema:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}^n$$

${}^t\alpha$ e' soluzione del sistema se sostituendolo al posto di X otteniamo:

$$A{}^t\alpha = B$$

2.2 Cramer

Cramer dice che se e solo se $\det A \neq 0$ allora il sistema quadrato ammette una sola soluzione. Questa soluzione e':

$$\alpha = A^{-1}B$$

Proof: Dimostriamolo. Supponiamo che $\det A \neq 0$
 $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

Supponiamo che α sia soluzione del sistema:

$$A\alpha = B$$

Moltiplichiamo ambo i membri per l'inversa:

$$A^{-1}(A\alpha) = A^{-1}B$$

Per la proprieta' associativa del prodotto delle matrici scriviamo:

$$(A^{-1}A)\alpha = A^{-1}B \rightarrow I\alpha = A^{-1}B \rightarrow \alpha = A^{-1}B$$

Ora dobbiamo dimostrare che α e' davvero la soluzione del sistema:

$$AX = B, \quad X = \alpha = A^{-1}B$$

$$A(A^{-1}B) = B$$

$$(AA^{-1})B = B$$

$$IB = B$$

$$B = B$$

□

L'inverso si dimostra utilizzando Rouché-Capelli.

2.3 Regola di Cramer

Abbiamo sempre la nostra matrice quadrata A .

Chiamiamo C_j la colonna j -esima di A . Costruiamo una matrice in cui la i -esima colonna e' sostituita da B (il vettore dei termini noti):

$$B_i = (C_1, C_2, \dots, B_i, C_{i+1}, \dots, C_n)$$

La regola di Cramer afferma che l'incognita i -esima del sistema e' pari a:

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}$$

Proof: Dimostriamolo. Prima (vedi 2.2) abbiamo visto che la soluzione del sistema $AX = B$ e':

$$X = A^{-1}B$$

Ricordandoci quanto vale A^{-1} (vedi 1.35) possiamo scrivere:

$$X = \frac{1}{|A|} \cdot {}^t A_a B$$

Ovvero:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1}}{|A|} \\ \frac{b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \dots + b_n A_{n2}}{|A|} \\ \vdots \\ \frac{b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \dots + b_n A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

Ma e' facile verificare che $b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1}$ e' lo sviluppo di Laplace I della matrice B_1 secondo la colonna 1, quindi:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{|B_1|}{|A|} \\ \frac{|B_2|}{|A|} \\ \vdots \\ \frac{|B_n|}{|A|} \end{pmatrix}$$

□

3 Spazi vettoriali

Un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale V e' una quaterna $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$, dove:

V e' un insieme non vuoto

$+$ e' un operazione $(V \times V \rightarrow V)$ definita in V e che rende V un gruppo abeliano. Un gruppo abeliano e' un gruppo che gode anche della proprieta' commutativa. Un gruppo e' una struttura che gode della proprieta' associativa, dell'esistenza dell'opposto e dell'elemento neutro. Ovvero, per $v, w, z \in V$:

$v + (w + z) = (v + w) + z$	associativa
$v + \theta = \theta + v = v$	elem. neutro
$v + z = z + v = \theta$	inverso
$v + w = w + v$	commutativa

$\mathbb{K}$ puo' essere un qualsiasi campo, come ad esempio $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$\cdot$ e' un operazione esterna: $K \times V \rightarrow V$ che gode delle seguenti proprieta' $\forall x, y \in V, \forall a, b \in K$:

$1 \cdot x = x$	elem. neutro	(1)
$(ab) \circ x = a \circ (b \circ x)$	associativa	(2)
$(a + b) \circ x = a \circ x + b \circ x$	distributiva rispetto alla somma	(3)
$a \circ (x + y) = a \circ x + a \circ y$		(4)

3.1 Vettore nullo

L'elemento neutro rispetto alla somma definita in uno spazio vettoriale e' il vettore nullo che si indica con θ .

1. Il vettore nullo e' unico.

Proof: Supponiamo che esistano due vettori nulli θ, θ' , allora, poiche' per definizione $\forall x : x + \theta = x$, possiamo assegnare alternativamente a x il valore θ e θ'

$$\theta + \theta' = \theta \quad \text{considerando } \theta' \text{ come elem. neutro}$$

$$\theta + \theta' = \theta' \quad \text{considerando } \theta \text{ come elem. neutro}$$

Ovvero $\theta = \theta'$. □

2. $\forall x \in V \quad 0 \cdot x = \theta$

Proof:

$$0x = (1 - 1)x = x - x = \theta \quad \square$$

3.2 Legge di annullamento

La legge di annullamento dice che:

$$v + x = v + y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

Cioe', possiamo "semplificare" la v .

Proof:

$$v + x = v + y \rightarrow w + v + x = w + v + y$$

$$w = -v$$

poniamo $w = \text{opposto di } v$

$$(w + v) + x = (w + v) + y$$

$$\theta + x = \theta + y$$

$$x = y$$

□

3.3 Vettore opposto

Il vettore opposto di x si denota con $-x$, inoltre $-x = (-1)x$.

Proof: Dobbiamo dimostrare che $x + (-1)x = 0$:

$$x + (-1)x = 1x + (-1)x = (1 - 1)x = 0x = 0$$

□

3.4 Sottospazio vettoriale

Un sottoinsieme $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale se:

1. $\forall x, y \in W \Leftrightarrow x + y \in W$

2. $\forall \lambda \in K, \forall x \in W \Leftrightarrow \lambda x \in W$

Ovvero, W è un sottospazio se l'operazione di somma e di prodotto esterno generano degli elementi che sono contenuti in W . (in questo caso si dice che sono operazioni chiuse).

Un'altra definizione dice che W è un sottospazio di V se rimane uno spazio vettoriale rispetto alla somma e al prodotto ereditate da V .

Si può usare anche quest'ultima caratterizzazione che combina le due precedenti: W è sottospazio di V se e solo se

$$\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall x, y \in W, \quad ax + by \in W$$

3.4.1 Proprietà

1. Dati $U, W \subseteq V$, allora $U \cap W$ è un sottospazio di V .
2. In generale $U \cup W$ non è un sottospazio, infatti, $U \cup W$ è un sottospazio $\Leftrightarrow U \subseteq W \vee W \subseteq U$.
3. Un sottospazio deve necessariamente contenere il vettore nullo, quindi se $W \subseteq V$ e $0_v \notin W$ allora W non è un sottospazio di V .

3.4.2 Esempio

Ogni retta che passa per l'origine è un sottospazio vettoriale di $R \times R$.

3.5 Forma lineare

Una forma lineare è una espressione del tipo:

$$f = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n, \quad \forall a_1, \dots, a_n \in K$$

Con un sistema di forme lineari possiamo definire un sottospazio di K^n : un sottoinsieme $W \subseteq K^n$, costituito da vettori (n-uple ordinate) che annullano polinomi di primo grado e omogenei (senza termine noto), sono dei sottospazi di K^n . Formalmente W e' cosi' definito:

$$W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n \mid f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \dots = f_r(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0\}$$

3.5.1 Proprieta

1. Se esprimimo i due spazi vettoriali U, W nella loro forma lineare:

$$W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in W \mid f_1 = f_2 = \dots = f_r = 0\}$$

$$U = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in W \mid g_1 = g_2 = \dots = f_r = 0\}$$

Possiamo esprimere la loro intersezione $U \cap W$ cosi':

$$U \cap W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid f_1 = f_2 = \dots = f_r = g_1 = g_2 = \dots = f_r = 0\}$$

3.6 Somma di sottospazi vettoriali

Dati due sottospazi $U, W \in V$, definiamo il sottoinsieme $U + W$:

$$U + W = \{z \in V \mid \exists u \in U, w \in W \mid z = u + w\}$$

oppure,

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

In altre parole ogni suo elemento e' somma di altri due elementi, in cui il primo sta' in U e il secondo in W .

3.6.1 Proprieta

1. $U + W$ e' un sottospazio di V
2. $U \subseteq U + W$ e $W \subseteq U + W$. Infatti basta considerare $u + 0$ e $w + 0$.
3. $U + W$ e' il piu' piccolo sottospazio di V tra quelli che contengono sia U che W , cioe', se esiste un'altro sottospazio $Z \in V$, e $U \subseteq Z$, $W \subseteq Z \Rightarrow U + W \subseteq Z$.

Proof: Dimostriamolo. Ipotesi:

$$Z \subseteq V, U \subseteq Z, W \subseteq Z$$

Sappiamo che $u \in U \subseteq Z \Rightarrow u \in Z$ e che $w \in W \subseteq Z \Rightarrow w \in Z$.

Ma poiche' Z un sottospazio si ha che $u + w \in Z$, ovvero $U + W \subseteq Z$. □

Possiamo estendere facilmente la definizione di somma tra piu' sottospazi vettoriali:

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n = \{z \in V \mid \exists v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \dots \mid z = v_1 + v_2 + \dots + v_n\}$$

3.7 Somma diretta sottospazi vettoriali

Siano $V_1 + V_2 + \dots + V_n \in V$ dei sottospazi di V , diremo che la loro somma e' diretta e scriveremo:

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$$

se ogni vettore $z \in V_1 + V_2 + \dots + V_n$ si puo' esprimere in maniera unica come somma di vettori che appartengono a ciascun V_i :

$$z = v_1 + v_2 + \dots + v_n \quad v_i \in V_i$$

In maniera formale possiamo dire che la somma e' diretta se:

$$\forall z \in V_1 + \dots + V_n, \exists! v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \dots \mid z = v_1 + \dots + v_n$$

3.7.1 Proprieta

$$Z = U \oplus W \Leftrightarrow Z = U + W \wedge U \cap W = \{\theta\}$$

Nota che $U \cap W \neq \emptyset$, perche' contiene θ , il vettore nullo.

Proof: Dimostriamo l'implicazione verso destra $\Rightarrow$.

Per definizione $Z = U + W$. Scegliamo un qualsiasi vettore che appartiene sia a U che a W , $x \in U \cap W$, allora possiamo scrivere: $\theta = x + (-x) \in U + W$, $x \in U$, $(-x) \in W$.

Possiamo anche dire che: $\theta = \theta + \theta \in U + W$.

Ma poiche' $U + W$ e' una somma diretta, ogni suo vettore si esprime in maniera *unica* come somma di vettori, quindi, anche il vettore θ si deve esprimere in maniera unica. Allora $\theta + \theta$ e $x + (-x)$ sono la stessa cosa, e percio' $x = \theta$.

Poiche' x era un generico elemento di $U \cap W$ concludiamo che $U \cap W = \{\theta\}$ □

Proof: Adesso dimostriamo l'implicazione verso destra $\Leftarrow$.

Ragioniamo per assurdo e supponiamo che esistono due modi per esprimere un vettore $z \in Z$:

$$z = u_1 + w_1$$

$$z = u_2 + w_2$$

$$z - z = u_1 - u_2 + w_1 - w_2$$

$$0 = (u_1 - u_2) - (w_2 - w_1)$$

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \quad u_1 - u_2 \in U, \quad w_2 - w_1 \in W$$

$u_1 - u_2 \in U$, ma dato che e' uguale a $w_2 - w_1 \in W$ deve essere anche che $u_1 - u_2 \in W$, quindi $u_1 - u_2 \in U \cap W$.

Per motivo analogo: $w_2 - w_1 \in W \cap U$.

Per ipotesi sappiamo che $U \cap W = \{\theta\}$, quindi:

$$u_1 - u_2 = \theta \Rightarrow u_1 = u_2$$

$$w_1 - w_2 = \theta \Rightarrow w_1 = w_2$$

□

Theorem 3.1. Sia V uno spazio vettoriale e siano $V_1, \dots, V_r \subseteq$ suoi sottospazi, allora

$$V_1 + \dots + V_r = V_1 \oplus \dots \oplus V_r \Leftrightarrow \forall v_i \in V_i, v_i \neq 0, \quad v_1, \dots, v_r \equiv l.i.$$

3.8 Alcuni sottospazi

3.8.1 Matrici Sym e Asym

$M(n, \mathbb{R})$ e' lo spazio delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali. Consideriamo l'insieme delle matrici simmetriche e quello delle antisimmetriche:

$$Sym(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid {}^t A = A\}$$

$$Asym(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid {}^t A = -A\}$$

Sym e $Asym$ sono sottospazi di $M(n, \mathbb{R})$.

Proof: Dimostriamo la proprieta' (1) e (2) dei sottospazi per Sym :

1. Deve essere che la somma di due matrici simmetriche generi una matrice simmetrica: $\forall A, B \in Sym, A + B \in Sym$.

Dato che A, B sono simmetriche possiamo scrivere: ${}^tA = A, {}^tB = B$. Usiamo le proprieta' delle trasposte:

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB = A + B$$

$${}^t(A + B) = A + B$$

Quindi $A + B$ e' una matrice simmetrica.

2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in Sym, \lambda A \in Sym$ Per definizione sappiamo che ${}^tA = A$, allora:

$${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA = \lambda A$$

□

Proof: Dimostriamo la proprieta' (1) e (2) dei sottospazi per $Asym$:

1. Deve essere che la somma di due matrici asimmetriche generi una matrice asimmetrica: $\forall A, B \in Asym, A + B \in Asym$.

Dato che A, B sono asimmetriche possiamo scrivere: ${}^tA = -A, {}^tB = -B$. Usiamo le proprieta' delle trasposte:

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB = -A - B = -(A + B)$$

$${}^t(A + B) = -(A + B)$$

Quindi $A + B$ e' una matrice asimmetrica.

2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in Asym, \lambda A \in Asym$ Per definizione sappiamo che ${}^tA = -A$, allora:

$${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA = -\lambda A$$

□

Notiamo che:

$$Sym(n, \mathbb{R}) \cap Asym(n, \mathbb{R}) = \{\Omega\}$$

e che

$$Sym(n, \mathbb{R}) + Asym(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R})$$

Quindi, per quanto visto in 3.7, una qualunque matrice si puo' scrivere in forma unica come somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica:

$$Sym(n, \mathbb{R}) \oplus Asym(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R})$$

Proof: Considerando una qualsiasi matrice quadrata A , la possiamo scrivere in questa forma:

$$2A = A + A + {}^tA - {}^tA = (A + {}^tA) + (A - {}^tA)$$

$$A = \frac{1}{2}(\underbrace{A + {}^tA}_{Sym}) + \frac{1}{2}(\underbrace{A - {}^tA}_{Asym})$$

$${}^t(A + {}^tA) = ({}^tA + A) \Rightarrow ({}^tA + A) \in Sym$$

$${}^t(A - {}^tA) = ({}^tA - A) = -(A - {}^tA) \Rightarrow (A - {}^tA) \in Asym$$

□

3.8.2 Matrici a traccia nulla

Consideriamo l'insieme T di tutte le matrici a traccia nulla:

$$T = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid tr A = 0\}$$

Anche T e' un sottospazio di $M(m, \mathbb{R})$.

Proof:

1. La prima proprietà si verifica immediatamente usando le proprietà della traccia: $tr(A+B) = tr(A) + tr(B) = 0$
2. Anche qui basta usare le proprietà: $tr(\lambda A) = \lambda tr(A) = 0$

□

4 Dipendenza lineare

4.1 Combinazione lineare

Dati dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, dove V è uno spazio vettoriale, e degli scalari $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$, diremo che il vettore $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$ è combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$.

4.2 Sottospazio generato

$$\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_r) = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r \mid a_i \in K\}$$

Questo è l'insieme di tutte le combinazioni lineari di $v_1, v_2, \dots, v_r$, e viene chiamato *sottospazio generato* da $v_1, v_2, \dots, v_r$ che sono i *generatori*.

Quando accade che $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_r)$, allora diremo che V è finitamente generato.

4.2.1 Proprietà

1. $U = \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_r)$, $W = \mathcal{L}(w_1, w_2, \dots, w_s)$,
allora

$$U + W = \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_r, w_1, w_2, \dots, w_s)$$

2. Dato $U = \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_r)$, se un suo vettore generatore v_i è combinazione lineare dei suoi precedenti vettori, cioè:

$$u_i = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_{i-1}u_{i-1}$$

, allora:

$$U = \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_r)$$

Ovvero, possiamo togliere u_i da $\mathcal{L}$, e non cambierà nulla, cioè $U = \mathcal{L}$.

Proof: Dobbiamo dimostrare che il primo $\mathcal{L}$ è uguale al secondo, cioè:

$$\mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_r) \subseteq \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_r)$$

$$\mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_r) \supseteq \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_r)$$

L'inclusione $\subseteq$ è ovviamente vera. Consideriamo allora un generico vettore del secondo spazio:

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_{i-1}u_{i-1} + a_iu_i + a_{i+1}u_{i+1} + \dots + a_ru_r$$

Sostituiamo $u_i = b_1u_1 + b_2u_2 + \dots + b_{i-1}u_{i-1}$ e otteniamo:

$$u = (a_1 + b_1)u_1 + (a_2 + b_2)u_2 + \dots + (a_{i-1} + b_{i-1})u_{i-1} + a_{i+1}u_{i+1} + \dots + a_ru_r$$

cioè $u \in \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_r)$

□

3. Dato $U = \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_r)$, allora per ogni $\lambda \in K$ e $i = 1, 2, \dots, r$ si ha che:

$$U = \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_i + \lambda u_j, \dots, u_r), \quad i \neq j$$

In altre parole a ogni generatore u_i può essere aggiunto un multiplo di un qualsiasi altro generatore dello spazio, senza così alterare lo spazio stesso.

Proof: Un altro spazio generato equivalente a U e':

$$U = \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_i + \lambda u_j, \dots, u_r, u_i)$$

perche' stiamo semplicemente spostando u_i alla fine, e aggiungendo il vettore $u_i + \lambda u_j$.

Scriviamo u_i come:

$$u_i = (u_i + \lambda u_j) - \lambda u_j$$

Quindi per la proprieta' precedente possiamo scartare, ottenendo:

$$U = \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_i + \lambda u_j, \dots, u_r)$$

□

4.3 Indipendenza lineare

Un insieme di vettori e' linearmente indipendente (l.i.) se la sua combinazione lineare nulla ha i coefficienti tutti nulli:

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$$

Esiste un criterio piu' efficiente per verificare la dipendenza, ovvero l'insieme di vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ sono l.i. se e solo se:

$$v_1, v_2, \dots, v_n \equiv l.i. \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 \neq 0 \\ v_i \notin \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}), \quad i \neq 1 \end{cases}$$

Proof: Dimostriamo $\Rightarrow$. Se per assurdo $v_1 = 0$, allora potremmo scrivere:

$$1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n = 0$$

Ma questa e' una combinazione lineare nulla che ha un coefficiente (1) non nullo, e quindi i vettori non sono l.i., ma questo e' in contrasto contro l'ipotesi, quindi deve essere $v_1 \neq 0$.

Se per assurdo $v_i \in \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_{i-1})$, $i \neq 1$, allora v_i e' una combinazione lineare dei vettori che lo precedono, cioe':

$$v_i = a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1}$$

E quindi possiamo scrivere:

$$v_i - v_i = 0$$

$$a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} - v_i = 0$$

Ma l'ultima e' una combinazione lineare nulla con coefficienti non nulli ($-v_i$ ha coeff = -1), questo e' contro l'ipotesi. □

Proof: Dimostriamo $\Leftarrow$.

Adesso le nostre ipotesi sono:

$$\begin{cases} v_1 \neq 0 \\ v_i \notin \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}), \quad i \neq 1 \end{cases}$$

Supponiamo di avere una combinazione lineare nulla:

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$$

Se per assurdo $a_n \neq 0$, allora possiamo ricavarci v_n :

$$v_n = \frac{-(a_1 v_1 + \dots + a_{n-1} v_{n-1})}{a_n}$$

Ma questa non e' altro che una c.l. di v_n formata con i suoi precedenti vettori, e quindi siamo in contrasto con l'ipotesi 2. Ripetendo lo stesso ragionamento per $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2$ si vede che tutti i coeff devono essere per forza nulli. Ovvero arriviamo a $a_1 v_1 = 0$, ma per Hp $v_1 \neq 0$ e per la legge di annullamento dei prodotti $a_1 = 0$. Abbiamo cosi' visto che tutti i coeff sono nulli. Questo significa che $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ e' l.i. □

4.4 Criterio degli scarti successivi

Utilizzando le proprietà viste in 4.2.1 possiamo creare un algoritmo che genera un insieme S' l.i. a partire da un un insieme S . Dato $S = \{v_1, \dots, v_n\}$:

1. Se $v_i = 0 \vee v_i = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1})$ allora lo scartiamo e continuiamo
2. altrimenti aggiungiamo v_i in S'

S' sarà un insieme di vettori l.i.

4.5 Base

Una *base* di uno spazio vettoriale V è un insieme di vettori che genera tutto V , in modo unico, ovvero ogni vettore di V si può scrivere, in un solo modo, come combinazione lineare dei vettori della base.

Questo significa che se

$$\begin{aligned}v &= a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \\v &= b_1 v_1 + \dots + b_n v_n\end{aligned}$$

allora: $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.

Una definizione più comoda è la seguente:

$$v_1, \dots, v_n \equiv \text{base} \Leftrightarrow \begin{cases} V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) \\ v_1, \dots, v_n \text{ l.i.} \end{cases}$$

Proof: Dimostriamo $\Rightarrow$. $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ è vera proprio per la definizione di base.

Ora consideriamo un c.l. nulla:

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$$

Sicuramente $0v_1 + \dots + 0v_n = 0$, e allora per l'ipotesi di unicità della base, $a_1 = \dots = a_n = 0$, cioè $v_1, \dots, v_n$ sono l.i. $\square$

Proof: Dimostriamo $\Leftarrow$. Le ipotesi adesso sono:

$$\begin{cases} V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) \\ v_1, \dots, v_n \text{ l.i.} \end{cases}$$

Quindi per Hp, ogni vettore $v \in V$ è c.l. di $v_1, \dots, v_n$, allora ci rimane da dimostrare l'unicità della base.

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

$$v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$$

$$0 = (a_1 - b_1)v_1 + \dots + (a_n - b_n)v_n$$

Poiché per Hp $v_1, \dots, v_n$ sono l.i., allora:

$$0 = (a_1 - b_1)v_1 + \dots + (a_n - b_n)v_n \Rightarrow (a_1 - b_1) = \dots = (a_n - b_n)$$

Cioè, $a_1 = b_1 = \dots = a_n = b_n$

$\square$

Usando il criterio degli scarti successivi, possiamo partire da un $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ tale che $V = \mathcal{L}(S)$, e generare da S una base di V .

4.6 Insieme minimale di generatori

G e' un insieme minimale di generatori di V se:

$$G' \subsetneq G \Rightarrow \mathcal{L}(G') \neq \mathcal{L}(G)$$

Ovvero se ogni sottoinsieme proprio di G non e' piu' generatore di V . Potremmo anche dire che G e' il piu' piccolo degli insiemi generatori di V .

4.6.1 Proprieta'

1. Una base e' un insieme minimale di generatori di V .

$$B \equiv \text{base di } V \Leftrightarrow B \equiv \text{insieme minimale di generatori di } V$$

Proof: Dimostriamo $\Leftarrow$.

Prendiamo un insieme minimale di generatori di V e chiamiamolo G . Vogliamo provare che G e' una base di V .

Dato che G e' un generatore di V , ci resta da provare che G e' l.i.

Supponiamo per assurdo che non lo sia, quindi accade che per qualche $i \geq 2$, $v_i \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1})$.

Applicando il criterio degli scarti, possiamo eliminare v_i ottenendo $G' = G \setminus \{v_i\}$. Ma G' e' ancora un generatore di V , ovvero $\mathcal{L}(G') = V$, e questo va contro l'ipotesi di minimalita' di G .

Concludiamo quindi che G e' l.i. e quindi e' una base di V . $\square$

Proof: Dimostrare $\Rightarrow$ e' facile, infatti, una base B di V e' un suo generatore, cioe' $\mathcal{L}(B) = V$ e poiche' B e' l.i., appena togliamo un suo vettore otteniamo un generatore che non e' piu' uguale a V . $\square$

4.7 Insieme massimale di generatori

G e' un insieme massimale di generatori di V se:

$$G' \supsetneq G \Rightarrow \mathcal{L}(G') \neq \mathcal{L}(G)$$

Ovvero se ogni soprainsieme proprio di G non e' piu' generatore di V . Potremmo anche dire che G e' il piu' grande degli insiemi generatori di V .

4.7.1 Componenti di un vettore

Prendiamo un vettore $v \in V$ e una base $A = [v_1, \dots, v_n]$ di V . Diremo che $a_1, \dots, a_n \in K$ sono le componenti di v rispetto ad A quando

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

Per indicare le componenti di v rispetto ad A si scrive:

$$[v]_A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Ricordando la definizione di base, possiamo dire che rispetto a una base A , ogni vettore e' determinato univocamente da $a_1, \dots, a_n \in K$.

Inoltre, generalmente $[v]_A \neq [v]_B$.

4.8 Lemma di Steinitz

Dato un insieme generatore $G = \{v_1, \dots, v_n\}$ e un insieme di vettori l.i. $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ che appartengono allo stesso spazio V , il lemma di Steinitz afferma:

$$|G| \geq |U|$$

Proof: Quello che dobbiamo dimostrare è che $n \geq m$.

Consideriamo l'insieme $G' = \{u_1, v_1, \dots, v_n\}$. Questo insieme è sempre un generatore, inoltre è l.d., infatti $u_1 \in \mathcal{L}(G)$ perché G , per Hp, è un generatore di V .

Applichiamo allora il criterio degli scarti su G' . Poiché $u_1 \neq 0$, allora il primo vettore che scarteremo sarà compreso in $v_1, \dots, v_n$. Dato che possiamo riordinarli, supponiamo che v_1 sia il vettore scartato. Abbiamo ottenuto quindi il nuovo insieme $G'_1 = \{u_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Adesso, consideriamo $G_2 = \{u_1, u_2, v_2, \dots, v_n\}$. Questo nuovo insieme è sempre un generatore ed è, per il motivo di prima, l.d.. Poiché $u_1 \neq 0$ e $u_2 \notin \mathcal{L}(u_1)$, applicando il criterio degli scarti, elimineremo v_2 , ottenendo:

$$G'_2 = \{u_1, u_2, v_3, \dots, v_n\}$$

Possiamo reiterare questo stesso procedimento fino a quando arriviamo a G_k che rimane un generatore:

$$G_k = \{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

Supponiamo adesso per assurdo che $n < m$.

Se così fosse avremmo che $G_k = G_n = \{u_1, \dots, u_n\}$, e G_n sarebbe sempre un generatore, ma questo è assurdo, perché $u_{n+1} \notin \mathcal{L}(u_1, \dots, u_n)$. Detto questo, concludiamo che $n \geq m$, ovvero:

$$|G| \geq |U|$$

Dato che G_k è un generatore, ci accorgiamo subito che questo è assurdo. □

4.8.1 Equicardinalità delle basi

Due basi di uno stesso spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi:

$$|B| = |B'|$$

Proof: Una base è sia un generatore che un insieme di vettori l.i.

Poniamo $B = G$ e $B' = U$. Per il lemma di Steinitz otteniamo:

$$|B| \geq |B'|$$

adesso poniamo $B' = G$ e $B = U$ e otteniamo:

$$|B| \leq |B'|$$

Per la proprietà antisimmetrica concludiamo che

$$|B| = |B'|$$

□

4.9 Completamento della base

Questo procedimento è lo speculare del criterio degli scarti: partendo da un qualsiasi insieme di vettori l.i. possiamo costruire, aggiungendo vettori l.i., una base. Ovvero, avendo $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ l.i. esistono $v_1, \dots, v_m \in V$ tali che $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m\}$ è base di V .

4.10 Dimensione

Aaah, finalmente definiamo la dimensione.

Una dimensione di uno spazio vettoriale V è il numero di elementi di una qualsiasi sua base.

$$\dim V = |B|$$

4.10.1 Proprieta'

1. Se $\dim V = n$, allora le componenti di un vettore assegnato formeranno una n -upla.
2. Il vettore nullo ha per componenti la n -upla nulla.
3. Se le componenti di v sono

$$[v]_B = (x_1, \dots, x_n)$$

il vettore λv avra' come componenti:

$$[\lambda v]_B = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

4. Se

$$[v]_B = (x_1, \dots, x_n)$$

e

$$[w]_B = (y_1, \dots, y_n)$$

allora

$$[v + w]_B = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

5. Se $v_1, \dots, v_k$ soddisfano una relazione di dipendenza lineare allora lo faranno anche le loro componenti. Esempio:

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0 \Rightarrow a_1 [v_1]_B + \dots + a_k [v_k]_B = 0$$

4.10.2 Altre proprieta'

Se siamo in un K spazio vettoriale V di dimensione n , allora valgono le seguenti proprieta':

1. Se $v_1, \dots, v_n \in V$ l.i allora formano una base di V
2. Se $u_1, \dots, u_n \in V$ sono generatori allora formano una base di V
3. Se $v_1, \dots, v_m \in V$ con $m > n$, allora sono l.d.
4. Se $u_1, \dots, u_j \in V$ con $j < n$, allora non sono generatori.
5. Prendiamo un sottospazio W di V , allora
 - $\dim W \leq n$, e tra l'altro W e' f.g.
 - $\dim W = n \Leftrightarrow W = V$
6. Siano U, W sottospazi di V .

$$\dim U = \dim W, U \subseteq W \vee W \subseteq U \Leftrightarrow U = W$$

Proof: Supponiamo $U \subseteq W$. Sia B una base di U .

$B \subseteq U \subseteq W$, i vettori di B sono l.i. e $|B| = \dim U = \dim W$, quindi per la proprieta' 1., i vettori di B formano una base di W . Questo vuol dire che $U = \mathcal{L}(B) = W$.

Il viceversa e' immediato. □

4.11 Componenti e basi

Consideriamo un sottospazio W del K^n spazio vettoriale V . Per conseguenze delle proprietà precedenti si avrà che l'insieme:

$$W_B = \{[w]_B | w \in W\} \Leftrightarrow W_B \text{ e' uno sottospazio di } K^n$$

4.12 Determinante e vettori l.i.

Data una matrice quadrata $A \in K^{n \times n}$

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{le righe (colonne) di } A \text{ sono l.i.}$$

Proof: Dimostriamo $\Rightarrow$.

Se per assurdo due vettori fossero l.d. allora, per la proprietà dei determinanti, $\det A = 0$ $\square$

Proof: Dimostriamo $\Leftarrow$.

Le righe di A sono l.i. e quindi formano una base di K^n .

Proprio perché sono una base, possono generare qualsiasi tipo di vettore in K^n , e quindi a mezzo di trasformazioni elementari è possibile ricondurre A in $\mathbf{1}$, e quindi trasformeremo $\det A$ in $\lambda \det A = \mu \det \mathbf{1} \neq 0$. $\square$

4.13 Teorema di Kroneker I

Data $A \in K^{m \times n}$

$$\rho(A) = \rho_R(A) = \rho_C(A)$$

Ovvero, la caratteristica di A è uguale al rango per colonne e al rango per righe.

Proof: Dimostriamo che $\rho(A) \leq \rho_R(A)$

Se la caratteristica di A è k , cioè $\rho(A) = k$, allora esiste un minore M tale che $\det M \neq 0$, e quindi le righe di M saranno l.i. Anche le righe di A che contengono quelle di M saranno l.i. Quindi adesso sappiamo che $\rho(A) \leq \rho_R(A)$.

Viceversa, se $\rho_R(A) = k'$, allora esisteranno k' righe di A l.i. Sia B la matrice $k' \times n$ formata da tali righe. Riduciamo per righe B e prendiamo il minore formato da righe e colonne che contengono gli elementi speciali. Poiché le k' righe sono l.i., otterremo così un minore di ordine k' non nullo. Possiamo così concludere che $\rho(A) \geq k'$.

Infine, da $\rho(A) \geq k' = \rho_R(A) \wedge \rho(A) \leq \rho_R(A)$ segue che $\rho(A) = \rho_R(A)$. Possiamo utilizzare lo stesso ragionamento per le colonne, concludendo che:

$$\rho(A) = \rho_R(A) = \rho_C(A)$$

$\square$

4.13.1 Corollario

Per affermare che $\rho(A) = k$ è sufficiente trovare un minore M di A di ordine k , tale che $\det M \neq 0$ e che tutti i det dei suoi orlati siano nulli. Il numero di Tutti gli orlati è $(n - k)(m - k)$.

Proof: Per Hp $\det M \neq 0$. Quindi tutte le righe di A che contengono righe di M sono l.i. Scegliamo allora la matrice B formata dalle righe di A che contengono M e da una ulteriore riga di A . B sarà di tipo $(k + 1, n)$.

Le colonne k colonne di B che contengono le colonne di M saranno sempre l.i., ovvero $\rho_C(B) \geq k$. Ma è anche vero che tutti i minori di B di ordine $(k + 1, k + 1)$ sono nulli, perché per Hp tutti gli orlati di M sono nulli. Quindi, $\rho_C(B) = k$. Allora, per Kroneker, $\rho_R(B) = k$, ovvero le $k + 1$

righe di B sono l.d.

Poiché possiamo creare B a partire da qualsiasi riga di A , deduciamo che il $\rho_R(A) = k$ e quindi per Kroneker $\rho(A) = k$. $\square$

4.14 Equazioni cartesiane di un sottospazio

Avendo uno spazio vettoriale V , e una sua base B , possiamo facilmente verificare se un vettore v appartiene a un sottospazio $W \subseteq V$.

Per far questo consideriamo $W = \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_k)$. Le componenti di questi vettori rispetto a B saranno:

$$\begin{aligned} [v_1]_B &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ [v_2]_B &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ &\vdots \\ [v_k]_B &= (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}) \end{aligned}$$

Poiché sappiamo che $v_1, v_2, \dots, v_r$ sono l.i, lo saranno anche $[v_1]_B, [v_2]_B, \dots, [v_r]_B$.

Per verificare che $v \in W$, occorre controllare che $v \in \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_r)$ e cioè $[v]_B \in \mathcal{L}([v_1]_B, [v_2]_B, \dots, [v_r]_B)$. Ovvero, v deve essere c.l. dei vettori base di W e perciò, le sue componenti $x_1, x_2, \dots, x_n$ dovranno essere c.l. delle componenti dei vettori base di W .

Basta quindi controllare che la seguente matrice abbia rango k :

$$\rho \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{kn} & \dots & a_{kn} \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} = k$$

Per il teorema di Kroneker, affinché $\rho(A) = k$ si deve semplicemente imporre che tutti i determinanti dei minori di ordine $k+1$ siano nulli. In questo modo, abbiamo $(n-k) = \dim V - \dim W$ equazioni che descrivono W rispetto alla base B di V .

4.14.1 Base dalle equazioni

Supponiamo di avere le equazioni cartesiane di un sottospazio W di V , dove $\dim W = m$, $\dim V = n$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{kn} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$k = n - m$

Questo è un sistema di k equazioni in n incognite, quindi per il thm di Rouché-Capelli (vedi [5.2,pg.32]) ammette ∞^{n-k} soluzioni. Supponiamo, a meno di riordinare le equazioni, che le $n-k$ incognite che possiamo fissare arbitrariamente siano $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$. Ogni volta che le fissiamo otteniamo un sistema $k \times k$, che ammette una ed una sola soluzione.

Poiche' vogliamo trovare una base di W , ci servono $m = n - k$ soluzioni l.i.
Sia

$$M = \begin{pmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{12} & \dots & \bar{x}_{1m} \\ \bar{x}_{21} & \bar{x}_{22} & \dots & \bar{x}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x}_{m1} & \bar{x}_{m2} & \dots & \bar{x}_{mm} \end{pmatrix}$$

una matrice $K^{m,m}$ con righe tutte l.i, ovvero $\rho(M) = m$
Scegliendo la riga j di M fissiamo le $n - k$ incognite di (1):

$$x_{k+i} = M_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

il sistema (1) si riduce cosi' a un sistema $k \times k$ che ammette una e una sola soluzione $(x_1, x_2, \dots, x_k)$.
Allora la soluzione completa di (1) e':

$$s = (x_1, x_2, \dots, x_k, M_{j1}, M_{j2}, \dots, M_{jm})$$

Se ripetiamo questo procedimento per ogni riga di M , otteniamo m soluzioni complete:

$$s_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jk}, M_{j1}, M_{j2}, \dots, M_{jm}) \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Queste m soluzioni sono l.i., infatti: consideriamo la matrice S che ha per righe le $\{s_j\}$ soluzioni:

$$S_j = s_j, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$S = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} & M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} & M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mk} & M_{m1} & M_{m2} & \dots & M_{mm} \end{pmatrix}$$

$$S \in K^{m, k+m} = K^{m, n}$$

Poiche' S contiene M come minore, $\rho(S) \geq \rho(M) = m$.
Per Kroneker, $\rho_r(S) = \rho(S) \geq m$. Poiche' le righe di S sono m , si ha $\rho_r(S) \leq m$. Allora

$$\begin{cases} \rho_r(S) \geq m \\ \rho_r(S) \leq m \end{cases} \Rightarrow \rho_r(S) = m$$

quindi le m righe di S sono l.i.
Ogni riga s_j di S e' soluzione del sistema (1), quindi ogni s_j e' il vettore delle componenti di un vettore di W . Abbiamo quindi trovato m vettori che hanno le loro componenti l.i., quindi sono essi stessi l.i.
Poiche' $\dim W = m$, l'insieme di questi vettori costituisce una base di W .

Nella pratica si adotta questo metodo: come matrice M si sceglie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Dal sistema (1) si ricava il vettore generico di W . Per ogni riga i di M , si sostituiscono le incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$ del vettore generico con M_{ij} , cioè

$$x_j = M_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Si ricavano così m vettori di $K^{1,n}$:

$$\begin{aligned} &(M_{11}, M_{12}, \dots, M_{1n}) \\ &(M_{21}, M_{22}, \dots, M_{2n}) \\ &\dots \\ &(M_{m1}, M_{m2}, \dots, M_{mn}) \end{aligned}$$

ognuno dei quali rappresenta le componenti di un vettore $w_i \in W$. I vettori $\{w_1, \dots, w_m\}$ rappresentano infine una base per W .

5 Sistemi lineari

5.1 Rouché-Capelli I

Sia $Ax = b$ un sistema lineare, dove

$$A \in K^{m,n}, \quad b \in K^m, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Questo sistema ammette soluzione se e solo se

$$rk(A) = rk(A, b)$$

Proof: Dimostriamo $\Rightarrow$.

Per Hp il sistema ammette soluzioni, quindi esiste un vettore $\alpha = {}^t(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ tale che $A\alpha = b$. Espandendo l'equazione vettoriale otteniamo:

$$\alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_n A^n = b$$

(A^i è la i -esima colonna di A).

Questo significa che b è una combinazione lineare di α e che quindi dipende da loro. Possiamo esprimere lo stesso concetto dicendo:

$$b \in \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n) = \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n, b)$$

Ma allora,

$$\dim \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n) = \dim \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n, b)$$

Il che è lo stesso di dire:

$$rk(A) = rk(A, b)$$

□

Proof: Dimostriamo il viceversa, basta procedere a ritroso.

Per Hp sappiamo che

$$\dim \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n) = \dim \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n, b)$$

È anche vero che:

$$\mathcal{L}(A_1, \dots, A_n) \subseteq \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n, b)$$

Per la proprietà delle basi segue che:

$$\mathcal{L}(A_1, \dots, A_n) = \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n, b)$$

Allora, applicando il criterio degli scarti, deduciamo che:

$$b \in \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n)$$

Ovvero, b si può esprimere tramite una c.l. di quei vettori, quindi:

$$b = \alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_n A^n$$

e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ è proprio la soluzione del sistema, infatti,

$$A\alpha = b$$

□

5.2 Rouché-Capelli II

Se il sistema ammette $rk(A) = rk(a, b) = k$, il sistema ammette soluzioni che dipendono da $n - k$ parametri. (n è il numero di incognite).

Proof: Per Hp $rk(A) = rk(a, b) = k$, quindi per Kroneker esisterà un minore di A non nullo con k righe e k colonne l.i.

A meno di riordinare le equazioni, possiamo supporre che il minore sia formato dalle prime k righe e colonne:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \neq 0$$

Considerando $n - k$ incognite come parametri, cioè fissandole arbitrariamente, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k = b_1 - a_{1, k+1}x_{k+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2k}x_k = b_2 - a_{2, k+1}x_{k+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kk}x_k = b_k - a_{k, k+1}x_{k+1} - \dots - a_{kn}x_n \end{cases}$$

Quest'ultimo sistema è in accordo con l'ipotesi di Cramer, perché il suo det è diverso da 0, e quindi ammette una sola soluzione.

Ecco quindi che al variare dei parametri, cioè dando valori arbitrari alle incognite fissate, otteniamo infinite equazioni. Si suole indicare questo fatto scrivendo ∞^{n-k} . □

5.3 Corollario di Rouché-Capelli

$$W \subseteq V,$$

$$\dim W = \dim V - |\{\text{equazioni indipendenti che definiscono } W\}|$$

5.4 Grassman

$$U, W \subseteq V,$$

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Se invece la somma è diretta, abbiamo:

$$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$$

Proof: Consideriamo $U \cap W = \{v_1, \dots, v_k\}$, la sua dimensione è k . Completiamolo con dei vettori di U ottenendo la base C di U :

$$C = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}, \quad |C| = n$$

Analogamente troviamo la base D di W :

$$D = \{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_m\}, \quad |D| = m$$

Consideriamo $C \cup D$ e applicando il criterio degli scarti successivi otteniamo:

$$C \cup D = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n, w_{k+1}, \dots, w_m\}$$

Questo insieme, per una proprieta' della somma di sottospazi vettoriali, e' un generatore di $U + W$, e la sua dimensione e' proprio $n + m - k$, cioe':

$$U + W = \mathcal{L}(C \cup D)$$

$$|C \cup D| = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$$

Per ultimare la dimostrazione dobbiamo provare che $\dim U + W = |C \cup D|$, ovvero che $C \cup D$ e' anche una base di $U + W$. Poiche' sappiamo gia' che $C \cup D$ e' un generatore di $U + W$, dobbiamo dimostrare che e' una un insieme di vettori l.i.

Cioe', considerando un c.l. dei suoi vettori,

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n + b_{k+1} w_{k+1} + \dots + b_m w_m = 0$$

deve accadere che:

$$a_1 = \dots = a_{k+1} = 0, b_{k+1} = \dots = b_m = 0$$

Il che' equivale a:

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n = -b_{k+1} w_{k+1} - \dots - b_m w_m$$

Il vettore del primo membro appartiene a U , il secondo a W , ma poiche' sono uguali, allora entrambi appartengono a $U \cap W$, cioe':

$$\begin{aligned} -b_{k+1} w_{k+1} - \dots - b_m w_m &\in U \cap W \\ -b_{k+1} w_{k+1} - \dots - b_m w_m &\in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

Questo significa che possiamo esprimere $-b_{k+1} w_{k+1} - \dots - b_m w_m$ tramite una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_k$:

$$\begin{aligned} -b_{k+1} w_{k+1} - \dots - b_m w_m &= c_1 v_1, \dots, c_k v_k \\ b_{k+1} w_{k+1} + \dots + b_m w_m + c_1 v_1, \dots, c_k v_k &= 0 \end{aligned}$$

E poiche' $D = \{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_m\}$, segue che quella di prima e' una combinazione linearmente indipendente, cioe':

$$b_{k+1} = \dots = b_m = c_1 = \dots = c_k = 0$$

Ritornando a:

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n = -b_{k+1} w_{k+1} - \dots - b_m w_m = 0$$

e sostituendo le $b_i = 0$, otteniamo:

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n = 0$$

E poiche' $C = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$, allora anche quella di prima sara' una combinazione linearmente indipendente, cioe':

$$a_1 = \dots = a_n = 0$$

Questo e' quello che volevamo dimostrare, infatti,

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n + b_{k+1} w_{k+1} + \dots + b_m w_m = 0$$

e' una combinazione linearmente indipendente, perche' ha tutti i suoi coefficienti nulli, e quindi $C \cup D$ e' una base. Possiamo quindi concludere che:

$$\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim W \cap U$$

□

6 Applicazioni lineari

Le applicazioni lineari sono applicazioni tra spazi vettoriali che conservano la loro struttura algebrica. In dettaglio

Definition 6.1. Siano V, W due K -spazi vettoriali. Data la funzione

$$f : V \longrightarrow W$$

diremo che f e' lineare se:

$$\begin{aligned}f(v + v') &= f(v) + f(v') \\f(\lambda v) &= \lambda f(v)\end{aligned}$$

Questo e' equivalente a:

$$f(\lambda v + \mu v') = \lambda f(v) + \mu f(v')$$

Definition 6.2. Dati due K spazi vettoriali V, W , definiamo il seguente insieme:

$$\text{hom}(V, W) = \{f \mid f : V \longrightarrow W, \quad f(\lambda v + \mu v') = \lambda f(v) + \mu f(v'), \quad \lambda, \mu \in K\}$$

Cioe', l'insieme di tutte le applicazioni lineari da V a W .

Possiamo dotare hom della struttura di K spazio vettoriale definendo le seguenti operazioni:

$$\begin{aligned}f[+]g &: V \longrightarrow W \\f[+]g(x) &= f(x) + g(x) \\ \lambda * f &: V \longrightarrow W \\ \lambda * f(x) &= \lambda f(x)\end{aligned}$$

$[+]$ e' una operazione in $\text{hom}(V, W) \times \text{hom}(V, W) \longrightarrow \text{hom}(V, W)$ e $*$ e' una operazione esterna in $K \times \text{hom}(V, W) \longrightarrow \text{hom}(V, W)$. Si verifica che gli assiomi degli spazi vettoriali vengono rispettati. Quindi, $\text{hom}(V, W)$ e' uno spazio vettoriale.

Definition 6.3. Sia V un K spazio vettoriale.

$\text{hom}(V, K)$ si chiama spazio duale di V e si indica con V° .

Vedremo piu' avanti ([9,pg.66]) alcune sue proprieta'.

6.1 Nucleo

Data l'applicazione lineare f ,

$$\ker f = \{v \mid f(v) = 0\}$$

Cioe', l'insieme di tutte i vettori del dominio, le cui immagini sono 0.

$\ker f$ e' un sottospazio di V .

Proof: Per dimostrare che $\ker f$ e' un sottospazio di V dobbiamo verificare le due proprieta' dei sottospazi:

1. $\forall v, v' \in \ker f, \Rightarrow v + v' \in \ker f$

Consideriamo $f(v + v')$, per la linearita' di f possiamo scrivere:

$$f(v + v') = f(v) + f(v')$$

E poiche' $v, v' \in \ker f$,

$$f(v) = 0, \quad f(v') = 0, \quad \Rightarrow \quad f(v) + f(v') = 0 + 0 = 0$$

e cioe'

$$f(v + v') = 0$$

2. $\forall \lambda \in K, \quad \forall x \in \ker f, \Rightarrow \lambda x \in \ker f$

Come prima:

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda 0 = 0$$

□

6.2 Immagine

$$f : V \longrightarrow W$$

$$\text{Im} f = \text{Im } f = \{w \in W \mid \exists v \in V : f(v) = w\} = \{f(v) \mid v \in V\}$$

L'immagine di f e' un sottospazio di W .

Proof:

$$1. \forall x, y \in \text{Im } f \Rightarrow x + y \in \text{Im } f$$

Per Hp $\exists v, v' \in V \mid f(v) = x, f(v') = y$, allora

$$x + y = f(v) + f(v') = f(v + v') \in \text{Im } f$$

$$2. \forall \lambda \in K, w \in \text{Im } f, \Rightarrow \lambda w \in \text{Im } f$$

Per Hp $\exists v \in V \mid f(v) = w$, allora

$$\lambda w = \lambda f(v) = f(\lambda v) \in \text{Im } f$$

□

Theorem 6.4. Sia $G = \{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di generatori per V , allora $\text{Im } f$ e' generata da $f(v_1), \dots, f(v_n)$, ovvero

$$\text{Im } f = \mathcal{L}(f(v_1), \dots, f(v_n))$$

Proof: Per Hp $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$. Prendiamo un vettore generico $v \in V$, che possiamo esprimere attraverso una sua c.l.:

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

Allora,

$$f(v) = f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n)$$

Cioe' $f(v) \in \mathcal{L}(f(v_1), \dots, f(v_n))$

□

Theorem 6.5.

$$f \equiv \text{iniettiva} \Leftrightarrow \ker f = \{0\}$$

Proof: Dim $\Rightarrow$.

Poiche' f e' iniettiva, esistara' un solo $v \mid f(v) = 0$, e poiche', per qualsiasi f lineare, $f(0) = 0$, allora questo unico $v \in \ker f$ sara' proprio 0. □

Proof: Dim $\Leftarrow$. Dobbiamo dimostrare che $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Consideriamo $x, y \in V \mid f(x) = f(y)$:

$$f(x) - f(y) = 0$$

$$f(x - y) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

$f(x - y) = 0 \Rightarrow x - y = 0$ e' vera perche' per Hp $\ker f = \{0\}$ e quindi l'unico $v \mid f(v) = 0$ deve essere $v = 0$. □

6.3 Controimmagine

$$f : V \longrightarrow W$$

$$Y \subseteq W$$

$$f^{-1}(Y) = \{v \mid v \in V : f(v) \in Y\}$$

$$f^{-1}(y_0) = \{v \mid v \in V : f(v) = y_0\}$$

Theorem 6.6.

$$f(v_0) = w, f^{-1}(w) = v_0 + \ker f$$

Proof: Consideriamo $y \in f^{-1}(w)$, ovvero $f(y) = w$. Allora,

$$f(y - v_0) = f(y) - f(v_0) = w - w = 0$$

e perciò:

$$f(y - v_0) = 0 \Leftrightarrow y - v_0 \in \ker f \Leftrightarrow y \in \ker f + v_0$$

Ovvero, poichè y era un generico vettore di $f^{-1}(w)$, deduciamo che $f^{-1}(w) \subseteq v_0 + \ker f$.

Viceversa se $y \in v_0 + \ker f$, cioè $y = v_0 + x$, $x \in \ker f$, allora

$$f(y) = f(v_0 + x) = f(v_0) + f(x) = w + 0 = w$$

e quindi $y \in f^{-1}(w)$, cioè $v_0 + \ker f \subseteq f^{-1}(w)$.

In conclusione, deduciamo che $f^{-1}(w) = v_0 + \ker f$ □

7 Spazio quoziente

Dato $W \subseteq V$, $x, y \in V$, stabiliamo la seguente rel. d'equiv.:

$$x \equiv y \pmod{, W} \Leftrightarrow x - y \in W$$

Lo spazio quoziente che si viene a creare è:

$$V/W$$

Definiamo le operazioni di somma e prodotto:

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in V/W, \quad \bar{x} + \bar{y} := \overline{x + y}$$

$$\forall \lambda \in K, \forall \bar{x} \in V/W, \quad \lambda + \bar{y} := \overline{\lambda x}$$

Proof: Queste definizioni sono bene poste. Dimostriamolo per il +.

Dato $\bar{x}' = \bar{x}$, $\bar{y}' = \bar{y}$, deve risultare che

$$\bar{y}' + \bar{x}' = \bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y} = \overline{x' + y'}$$

La tesi dice che:

$$x + y - (x' + y') \in W$$

cioè:

$$(x - x') + (y - y') \in W$$

Per Hp,

$$y - y' \in W, \quad x - x' \in W$$

e quindi la Ts è vera, perchè la somma di due vettori che stanno nello stesso sottospazio, è un vettore che sta' sempre nello stesso sottospazio. □

Con queste operazioni appena definite,

$$V/W$$

diventa uno spazio vett.

Consideriamo la seguente funzione:

$$\pi : V \longrightarrow V/W, \quad \pi(x) = \bar{x} := x + W$$

Alcune sue proprietà:

1. π è lineare

2. π e' surriettiva

3. $\ker \pi = W$

Proof:

$$\pi(x) = \bar{0} \Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod{W} \Leftrightarrow x - 0 \in W \Leftrightarrow x \in W$$

□

Theorem 7.1.

$$\dim V/W = \dim V - \dim W$$

Proof: Dobbiamo creare una base di V/W e contarne gli elementi.

Per prima cosa scegliamo una base di W :

$$B = \{w_1, \dots, w_k\}$$

e completiamola a una base di V :

$$B' = \{w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

Poiche' B' genera V , per il teorema 6.4, $\pi(B')$ genera V/W . In mod, W , accade che

$$\pi(w_1) = \dots = \pi(w_k) = 0$$

e quindi applicando il criterio degli scarti li eliminiamo da B' . I rimanenti $v_{k+1}, \dots, v_n$ sono l.i. perche' base di V . Quindi cio' che e' rimasto come generatore di V/W e':

$$\pi(v_{k+1}), \dots, \pi(v_n)$$

Consideriamo una loro c.l.:

$$a_{k+1}\pi(v_{k+1}) + \dots + a_n\pi(v_n) = \bar{0} \Leftrightarrow$$

$$\pi(a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_nv_n) = \bar{0} \Leftrightarrow$$

$$a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_nv_n \in \ker \pi = W$$

Quindi esisteranno $a_1, \dots, a_k \in K$ t.c.

$$a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_nv_n = a_1w_1 + \dots + a_kw_k$$

E poiche' $w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ sono base di V , sono l.i. e quindi $a_1 = \dots = a_k = 0$. E allora,

$$a_{k+1}\pi(v_{k+1}) + \dots + a_n\pi(v_n) = \bar{0}$$

e' una relazione di indipendenza lineare, e quindi questa e' una base di V/W , formata esattamente da $n - k$ elementi. □

7.1 Isomorfismo

Una applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$ si dice *isomorfismo* quando e' biettiva. Il suo dominio si dira' isomorfo al suo codominio e si indichera' con $V \simeq W$. Poiche' una applicazione e' invertibile se e solo se e' biettiva, vale questa proprieta':

$$f : V \longrightarrow W$$

$$f \equiv \text{isomorfismo} \Leftrightarrow f \equiv \text{invertibile}$$

7.2 Teorema dell'isomorfismo

Theorem 7.2. Data una funzione lineare $f : V \longrightarrow W$ possiamo fattorizzarla, ovvero, possiamo trovare due funzioni, che composte sono uguali a f . Come primo fattore di f utilizzeremo $\pi : V \longrightarrow V/\ker f$ (vedi 7). Ovvero:

$$\exists \varphi : f = \varphi \circ \pi$$

il cui diagramma e':

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \pi & \nearrow & \\ V/\ker f & & \end{array}$$

Si dice che questo diagramma e' commutativo. φ e' iniettiva. Inoltre,

$$V/\ker f \simeq \operatorname{Im} f$$

Proof: Definiamo $\varphi : V/\ker f \longrightarrow W$ in questo modo:

$$\varphi(\bar{x}) = f(x), \quad \bar{x} \in V/\ker f$$

Intanto osserviamo che φ e' ben definita, cioe' se

$$\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{\ker f}$$

deve accadere che $\varphi(\bar{x}) = \varphi(\bar{y})$, che equivale a dire:

$$f(x) = f(y)$$

Poiche' $x \equiv y \pmod{\ker f}$, allora per definizione

$$x - y \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0, f(y) = 0$$

cioe':

$$f(x) = f(y)$$

Quindi φ e' ben definita.

Dobbiamo dimostrare che φ e' lineare, perche' la $f = \varphi \circ \pi$ e' lineare, e quindi anche la sua fattorizzazione deve esserlo. Poiche' composizione di funzioni lineari e' una funzione lineare, basta verificare che sia π che φ siano lineari. Abbiamo gia' visto che π e' lineare, quindi dobbiamo dimostrarlo solo per φ :

$$\varphi(\bar{x} + \bar{y}) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{y})$$

$$\varphi(\lambda \bar{y}) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \varphi(\bar{x})$$

Adesso dimostriamo che φ e' iniettiva calcolando il suo $\ker \varphi$:

$$\begin{aligned} \ker \varphi &= \{\bar{x} \in V/\ker f : \varphi(\bar{x}) = 0\} \\ &= \{\bar{x} \in V/\ker f : f(x) = 0\} \\ &= \{\bar{x} \in V/\ker f : x \in \ker f\} \\ &= \overline{\ker f} = \{\bar{0}\} \end{aligned}$$

Quindi poiche' $\ker \varphi = \{\bar{0}\}$, φ e' iniettiva.

Se consideriamo la restrizione del codominio di φ ad $\operatorname{Im} f$, cioe'

$$\bar{\varphi} : V/\ker f \longrightarrow \operatorname{Im} f$$

avremo che $\bar{\varphi}$, oltre ad essere iniettiva, e' anche surriettiva, infatti,

$$\forall y \in \operatorname{Im} f \quad \exists x \in V : f(x) = y \Rightarrow \exists \bar{x} : \bar{\varphi}(\bar{x}) = f(x)$$

In conclusione:

$$V/\ker f \simeq \operatorname{Im} f$$

□

Corollary 7.3. Se $f : V \longrightarrow W$ e' surriettiva, ovvero $\operatorname{Im} f = W$, allora

$$W \simeq V/\ker f$$

Ovvero esiste un isomorfismo tra W e $V/\ker f$, e questo isomorfismo e' proprio φ .

Proof: Per il teorema precedente $V/\ker f \simeq \operatorname{Im} f = W$.

□

7.3 Teorema delle dimensioni

Theorem 7.4. Dato V f.g. e $f : V \longrightarrow W$, e lineare, allora

$$\dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f$$

Proof: Per quanto abbiamo visto prima, $\operatorname{Im} f \simeq V/\ker f$ quindi

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim V/\ker f$$

Per il teorema 7.1 possiamo scrivere

$$\dim V/\ker f = \dim V - \dim \ker f$$

Quindi:

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim V - \dim \ker f$$

ovvero:

$$\dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f$$

□

Proof: Questa e' una dimostrazione meno compatta.

Prendiamo una base di $\ker f$:

$$A = \{v_1, \dots, v_k\}$$

ed estendiamola a una base di V :

$$B = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

I vettori $f(v_1), \dots, f(v_n)$ generano $\operatorname{Im} f$.

Poiche' per i vettori $v_i \in \ker f$ accade che $f(v_i) = 0$, allora

$$f(v_1) = \dots = f(v_k) = 0$$

, e questo significa che applicando il criterio degli scarti, possiamo eliminare questi vettori da

$$\operatorname{Im} f = \mathcal{L}(f(v_1), \dots, f(v_n))$$

ottenendo:

$$\operatorname{Im} f = \mathcal{L}(f(v_{k+1}), \dots, f(v_n))$$

Se questi vettori fossero l.i. avremmo trovato una base di $\operatorname{Im} f$. Consideriamo allora una rel di dip. lineare tra questi vettori:

$$a_{k+1}f(v_{k+1}) + \dots + a_nf(v_n) = 0$$

poiche' f e' lineare:

$$f(a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_nv_n) = 0$$

quindi $a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_nv_n \in \ker f$. Possiamo quindi esprimere quest'ultimo vettore come c.l. rispetto alla base di $\ker f$, cioe':

$$a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_nv_n \in \ker f = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k) = 0$$

Ma poiche' $v_1, \dots, v_k$ sono l.i., allora lo saranno anche $v_{k+1}, \dots, v_n$ e quindi anche $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono l.i.

In definitiva si ha:

$$\dim \operatorname{Im} f = |\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}| = n - k$$

ovvero:

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim V - \dim \ker f$$

□

7.4 Assegnazione di un'applicazione lineare

Data la funzione lineare $f : V \longrightarrow W$ e la base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V :

$$f(v_1) = \dots = f(v_n) = \theta \Rightarrow f \equiv \text{applicazione nulla}$$

Proof: Esprimiamo $v \in V$ come un c.l. dei vettori di B :

$$v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$$

allora

$$f(v) = f(a_1 v_1) + \cdots + f(a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n)$$

Per Hp $f(v_i) = \theta$ quindi:

$$f(v) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n) = a_1 \theta + \cdots + a_n \theta = \theta$$

□

Come conseguenza, date due funzioni $f, g : V \longrightarrow W$,

$$f(v_1) = g(v_1), \dots, f(v_n) = g(v_n) \Rightarrow f = g$$

Consideriamo la funzione differenza $(f - g)$ e come prima consideriamo il vettore $v \in V$:

$$(f - g)(v) = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = a_1 (f - g)(v_1) + \cdots + a_n (f - g)(v_n)$$

Per come sono state definite le operazioni tra le funzioni lineari deduciamo che $(f - g)(v_1) = f(v_1) - g(v_1)$, ma poichè per Hp $f(v_1) = g(v_1)$ allora $f(v_1) - g(v_1) = \theta$, quindi sostituendo otteniamo:

$$(f - g)(v) = a_1 (f - g)(v_1) + \cdots + a_n (f - g)(v_n) = a_1 \theta + \cdots + a_n \theta = \theta$$

ovvero:

$$(f - g)(v) = \theta$$

quindi

$$f(v) - g(v) = \theta \Rightarrow f(v) = g(v), \forall v \in V \Rightarrow f = g$$

Theorem 7.5. Data una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ e n vettori arbitrari $w_1, \dots, w_n \in W$, allora

$$\exists! f : V \longrightarrow W \mid f(v_1) = w_1, \dots, f(v_n) = w_n$$

Se inoltre $\{w_1, \dots, w_n\}$ e' una base di W , allora f e' un isomorfismo.

Proof: Scriviamo $v \in V$ come c.l. di B :

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

allora possiamo definire $f(x)$ in questo modo:

$$f(v) = f(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n), \quad f(v_1) = w_1, \dots, f(v_n) = w_n$$

Per quanto abbiamo visto prima questa funzione e' unica.

Supponiamo adesso che $\{w_1, \dots, w_n\}$ sia una base di W . f e' biettiva.

f e' surriettiva: preso $w \in W$ esprimiamolo tramite la base di W

$$w = b_1 w_1 + \cdots + b_n w_n = b_1 f(v_1) + \cdots + b_n f(v_n) = f(b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n) = f(v')$$

quindi v' e' un vettore controimmagine di w

f e' iniettiva :

$$\begin{aligned} f(v) = f(w) &\Leftrightarrow f(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = f(a'_1 v_1 + \cdots + a'_n v_n) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n) = a'_1 f(v_1) + \cdots + a'_n f(v_n) \Leftrightarrow a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n = a'_1 w_1 + \cdots + a'_n w_n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a_1 - a'_1)w_1 + \cdots + (a_n - a'_n)w_n = 0 \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{w_1, \dots, w_n \text{ sono l.i.}} \begin{cases} a_1 - a'_1 = 0 \\ \dots \\ a_n - a'_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a'_1 \\ \dots \\ a_n = a'_n \end{cases} \Leftrightarrow v = w \end{aligned}$$

□

Proposition 7.6. Due K -spazi di ugual dimensione sono isomorfi. Ovvero, siano $\mathbf{V}, \mathbf{V}'$ due K -spazi vettoriali, allora

$$\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{V}' \Leftrightarrow \mathbf{V} \simeq \mathbf{V}'$$

Proof: Fissando una qualsiasi base B di $\mathbf{V}$, e una base C di $\mathbf{V}'$ consideriamo il seguente isomorfismo vettoriale:

$$f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}'$$

tale che $f(B) = C$

Il thm [7.5,pg.40] ci garantisce che f e' un isom. vettoriale:

$$\mathbf{V} \simeq \mathbf{V}'$$

□

Proposition 7.7. Sia $\mathbf{V}, \mathbf{V}'$ due spazi isomorfi, e siano rispettivamente B, B' due loro basi, allora

$\exists \varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}'$ isomorfismo tale che

$$[v]_B = [\varphi(v)]_{B'} \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

$$[\varphi^{-1}(v')]_B = [v']_{B'} \quad \forall v' \in \mathbf{V}'$$

in altre parole, e' sempre possibile trovare un isomorfismo in modo tale che le componenti di un vettore sono uguali alle componenti dell'altro vettore.

Proof: Così' come abbiamo fatto nella dim di [7.6,pg.40], consideriamo f , isomorfismo tale che, $f(B) = B'$, cioè'

$$B = \{v_1, \dots, v_n\}, \quad B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$$

$$f(v_i) = v'_i$$

ma allora, per definizione,

$$M_{B,B'}(f) = I \quad \text{la matrice identica}$$

e quindi

$${}^t[\varphi(v)]_{B'} = M_{B,B'}(f){}^t[v]_B = I{}^t[v]_B = {}^t[v]_B \Leftrightarrow [v]_B = [\varphi(v)]_{B'}$$

Infine, scegliendo $v = \varphi^{-1}(v')$, si ha

$$[\varphi^{-1}(v')]_B = [v']_{B'}$$

□

7.5 Prodotto cartesiano di spazi vettoriali

Dati due K spazi vettoriali V, W , possiamo rendere $V \times W$ uno spazio vettoriale. Infatti, basta definire le seguenti operazioni:

$$x, y \in V \times W, \quad x = (v_1, w_1), \quad y = (v_2, w_2)$$

$$v + w := (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$

$$\lambda y := (\lambda v_2, \lambda w_2)$$

Queste operazioni rendono $V \times W$ uno spazio vettoriale.

Sia $B = v_1, \dots, v_n$ una base di V e $C = w_1, \dots, w_m$ una base di W . Una base di $V \times W$ sarà:

$$D = \{(v_1, 0_w), \dots, (v_n, 0_w), (0_v, w_1), \dots, (0_v, w_m)\} = \{B \times \{0_w\} \cup \{0_v\} \times C\}$$

Poiché D e' una base di $V \times W$, allora $\dim V \times W = \dim V + \dim W$.

Le proiezioni canoniche sono lineari:

$$\pi_1 : V \times W \longrightarrow V, \quad \pi_1(v, w) = v$$

$$\pi_2 : V \times W \longrightarrow W, \quad \pi_2(v, w) = w$$

Inoltre

$$\ker \pi_1 = \{(0, w) \mid w \in W\}$$

$$\ker \pi_2 = \{(v, 0) \mid v \in V\}$$

7.5.1 Formula di Grassman

Proveremo con i nuovi strumenti che abbiamo acquisito la formula di Grassman: $V, W \subseteq U$,

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

Proof: Consideriamo la seguente applicazione:

$$\sigma : V \times W \longrightarrow V + W, \quad \sigma((v, w)) := v + w$$

Questa applicazione e' lineare, infatti,

$$\begin{aligned} \sigma((v_1, w_1) + (v_2, w_2)) &= \sigma(v_1 + v_2, w_1 + w_2) \\ &= v_1 + v_2 + w_1 + w_2 = v_1 + w_1 + v_2 + w_2 \\ &= \sigma(v_1, w_1) + \sigma(v_2, w_2) \end{aligned}$$

Calcoliamo il suo kernel:

$$\begin{aligned} \ker \sigma &= \{(v, w) \in V \times W \mid \sigma(v, w) = 0\} \\ &= \{(v, w) \in V \times W \mid v + w = 0 \Leftrightarrow w = -v\} \\ &= \{(v, w) \in V \times W \mid v + w = 0 \Leftrightarrow v = -w\} \\ &= \{(v, -v) \in V \times W\} \end{aligned}$$

Poiche' $-v \in W$ e $v \in V$, deduciamo che $v \in V \cap W$:

$$\ker \sigma = \{(v, -v) \mid v \in V \cap W\}$$

quindi $\dim \ker \sigma = \dim V \cap W$ A questo punto possiamo applicare il teorema delle dimensioni delle basi:

$$\begin{aligned} \dim V \times W &= \dim \operatorname{Im} \sigma + \dim \ker \sigma \\ &= \dim(V + W) + \dim V \cap W \end{aligned}$$

ovvero:

$$\dim(V + W) = \dim V \times W - \dim V \cap W$$

e siccome sappiamo che $\dim V \times W = \dim V + \dim W$, giungiamo alla tesi:

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim V \cap W$$

□

7.6 Matrice associata

E' possibile associare una matrice a una applicazione lineare f . Cosi' facendo saremo in grado di poter computare algebricamente tutti i problemi che ci siamo posti sulle applicazioni lineari. Data $f : V \longrightarrow W$, lineare, e $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V , $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W , la matrice associata $M_{B,C}(f)$ di tipo $\dim W \times \dim V$ si ottiene ponendo nelle sue colonne le componenti di $f(v_i)$ rispetto alla base C . Cioe':

$$f(v_1) = a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m$$

$$f(v_2) = a_{12}w_1 + \dots + a_{m2}w_m$$

$$\vdots$$

$$f(v_n) = a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m$$

$$M_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Inoltre, se $v \in V$ e $[v]_B = (x_1, \dots, x_n)$ allora

$${}^t[f(v)]_C = M_{B,C}(f) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

cioe':

$${}^t[f(v)]_C = M_{B,C}(f) {}^t[v]_B$$

Questo vuol dire che se abbiamo f e vogliamo calcolare $f(v)$, bastera' semplicemente fare la moltiplicazione riga per colonne di $M_{B,C}(f)$ e ${}^t[v]_B$, troveremo cosi' $[f(v)]_C$, cioe' le componenti dell'immagine di v rispetto alla base C .

Proof: Se non usassimo M , i passaggi per trovare $[f(v)]_C$ sarebbero:

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

$$f(v) = f(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n)$$

le $f(v_i)$ le abbiamo gia' calcolate prima

$$x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n) = x_1 (a_{11} w_1 + \dots + a_{m1} w_m) + \dots + x_n (a_{1n} w_1 + \dots + a_{mn} w_m) =$$

raggruppiamo i coeff dei vettori uguali

$$= (x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{1n}) w_1 + \dots + (x_1 a_{m1} + \dots + x_n a_{mn}) w_m$$

I coefficienti di w_i (ad esempio $x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{1n}$) sono proprio quelli che si ottengono usando il prodotto riga per colonne di $M_{B,C}(f)$ e ${}^t[v]_B$. $\square$

7.6.1 Proprieta'

$$\dim \text{Im } f = rk, M_{B,C}(f)$$

(Nota: il rango di $M_{B,C}$ non dipende ne' da B , ne' da C , ma solo da f)

Proof: Per il teorema 6.4, $\text{Im } f = \mathcal{L}(f(v_1), \dots, f(v_n))$, quindi

$$\dim \text{Im } f = \dim \mathcal{L}(f(v_1), \dots, f(v_n)) = \dim \mathcal{L}([f(v_1)]_C, \dots, [f(v_n)]_C) = rk, M_{B,C}(f)$$

$\square$

Theorem 7.8. Siano V, W due K -spazi vettoriali. L'applicazione

$$\begin{aligned} \Phi_{B,C} : \text{hom}(V, W) &\longrightarrow K^{m,n} \\ \Phi_{B,C}(f) &= M_{B,C}(f) \end{aligned}$$

e' un isomorfismo tra spazi vettoriali, dove $n = \dim V$, $m = \dim W$.

Proof: E' facile verificare che $\Phi_{B,C}$ e' lineare. Basta allora dimostrare che e' invertibile, ovvero che esiste la sua inversa:

$$\Psi_{B,C} : K^{m,n} \longrightarrow \text{hom}(V, W)$$

$$\Phi \circ \Psi = I_{K^{m,n}} \wedge \Psi \circ \Phi = I_{\text{hom}(V,W)}$$

Definiamo allora $\Psi_{B,C}$ in questo modo: data la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m,n}$$

poniamo

$$\Psi(M)(v_1) := a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m$$

$$\Psi(M)(v_2) := a_{12}w_1 + \cdots + a_{m2}w_m$$

$\vdots$

$$\Psi(M)(v_n) := a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m$$

dove v_i sono tutti i vettori di B e w_i sono tutti i vettori di C . In questo modo, $\Psi(M)$ determina unicamente una applicazione lineare, poiche' a ogni vettore della base di V ne abbiamo associato uno di W .

Quindi se $M = M_{B,C}(f)$, $\Psi(M)$ e' proprio f . $\square$

7.7 Equazioni cartesiane del nucleo

Possiamo ricavare le equazioni cartesiane del nucleo. Per definizione il nucleo e':

$$\ker f := \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

Quindi

$$v \in V : f(v) = 0 \Leftrightarrow [f(v)]_C = 0$$

ovvero:

$$[f(v)]_C = M_{B,C}(f)[v]_B = 0$$

Quest'ultimo corrisponde al seguente sistema lineare omogeneo:

$$[f(v)]_C = M_{B,C}(f) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

7.8 Matrici associate di f compost

Proposition 7.9. *Date due applicazioni lineari $f : V \longrightarrow W, g : U \longrightarrow V$, abbiamo:*

$$M_{B,C}(f)M_{A,B}(g) = M_{A,C}(fg)$$

Proof: Per il precedente teorema 7.8, date due

$$M_{B,C}(f) \xrightarrow{\Psi} f$$

$$M_{A,B}(g) \xrightarrow{\Psi} g$$

Poiche' Ψ e' lineare:

$$M_{B,C}(f)M_{A,B}(g) \xrightarrow{\Psi} fg \xrightarrow{\Phi} M_{A,C}(fg)$$

e poiche' Ψ, Φ sono biunivoche si ha: $M_{B,C}(f)M_{A,B}(g) = M_{A,C}(fg)$ $\square$

Proposition 7.10. *Data $f : V \longrightarrow V$ isomorfismo vettoriale, abbiamo*

$$M_{B,B}(f^{-1}) = M_{B,B}(f)^{-1}$$

Proof: Dalla prop [7.9,pg.44] segue:

$$M_{B,B}(f^{-1})M_{B,B}(f) = M_{B,B}(f^{-1}f) = M_{B,B}(I_v) = I$$

$$M_{B,B}(f)M_{B,B}(f^{-1}) = M_{B,B}(ff^{-1}) = M_{B,B}(I_v) = I$$

dove $I_v : V \longrightarrow V$ e' l'applicazione identica, I e' la matrice identica.

Quindi per definizione $M_{B,B}(f^{-1})$ e' l'inversa di $M_{B,B}(f)$. $\square$

7.8.1 Matrici associate di isomorfismi

Proposition 7.11. *Sia data una applicazione lineare $f : V \longrightarrow V$ e sia B una base di V .*

$$f \text{ e' un isom. vett. } \Leftrightarrow M_{B,B}(f) \text{ e' invertibile}$$

Proof:

(1) $\text{Dim} \Rightarrow$

$$f \text{ e' un isom. vett. } \underbrace{\Rightarrow}_{\text{prop}[7.10,pg.44]} M_{B,B}(f^{-1}) = M_{B,B}(f)^{-1}$$

quindi $M_{B,B}(f)$ e' invertibile .

(2) $\text{Dim} \Leftarrow$

$$M_{B,B}(f) \text{ e' invertibile } \Rightarrow \exists M_{B,B}(f)^{-1}$$

$$M_{B,B}(f)M_{B,B}(f)^{-1} = I = M_{B,B}(I_v) \quad (1)$$

$$M_{B,B}(f)^{-1}M_{B,B}(f) = I = M_{B,B}(I_v) \quad (2)$$

Per il thm [7.8,pg.43] $M_{B,B}(f)^{-1}$ sara' la matrice associata a qualche applicazione lineare $g : V \longrightarrow V$, cioe'

$$M_{B,B}(f)^{-1} = M_{B,B}(g)$$

Per la prop [7.9,pg.44], abbiamo allora

$$M_{B,B}(f)M_{B,B}(g) = M_{B,B}(fg)$$

$$M_{B,B}(g)M_{B,B}(f) = M_{B,B}(gf)$$

Quindi per la (1), (2),

$$M_{B,B}(fg) = M_{B,B}(I_v)$$

$$M_{B,B}(gf) = M_{B,B}(I_v)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{thm}[7.8,pg.43]} fg = gf = I_v \Rightarrow g = f^{-1}$$

quindi f e' invertibile, ed essendo lineare, e' anche un isomorfismo vettoriale. □

Theorem 7.12. *Dalla precedente prop. [7.11,pg.45] segue il seguente isomorfismo tra spazi vettoriali:*

$$GL(V) \simeq GL_n(K)$$

$$GL(V) = \{f \in \text{hom}(V, V) \mid f \text{ isomorfismo vett.} \}$$

$$GL_n(K) = \{M \in K^{n,n} \mid \det M \neq 0\}$$

con $\dim V = n$

Proof:

Basta riutare lo stesso isomorfismo definito in [7.8,pg.43]: fissiamo una base B di V ,

$$GL(V) \subseteq \text{hom}(V, V) \ni f \xrightarrow{\Phi_{B,B}} M_{B,B}(f) \in K^{n,n}$$

$$f \text{ isomorfismo vett.} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{prop.}[7.11,pg.45]} M_{B,B}(f) \text{ e' invertibile} \Leftrightarrow \det M_{B,B}(f) \neq 0 \Rightarrow M_{B,B}(f) \in GL_n(K)$$

Viceversa,

$$GL_n(K) \ni M \xrightarrow{\Psi_{B,B}} f \in \text{hom}(V, V)$$

$$M \in GL_n(K) \Rightarrow \det M_{B,B}(f) \neq 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{prop.}[7.11,pg.45]} f \text{ isomorfismo vett.} \Rightarrow f \in GL(V)$$

□

7.9 Matrici equivalenti

Date due matrici $A, B \in K^{m,n}$:

$$A \sim B \Leftrightarrow \exists U \in K^{m,m}, V \in K^{n,n} : U \cdot A \cdot V = B$$

U, V devono essere invertibili.

Questa relazione e' d'equivalenza.

Matrici equivalenti hanno lo stesso rango.

Proposition 7.13. *Date $A \in K^{n,n}$, $M \in GL_n(K)$*

$$\rho(A) = \rho(AM) = \rho(MA)$$

Proof:

Siano B, C basi di V , dove V e' uno spazio vettoriale di dimensione n .

Per l'isomorfismo [7.8,pg.43],

$$A = M_{B,C}(f)$$

dove $f : V \longrightarrow V$ e' una qualche applicazione lineare.

Per la prop [7.16,pg.48],

$$\exists! D \text{ base di } V : M = P_{D \rightarrow B} = M_{D,B}(I_v)$$

allora

$$AM = M_{B,C}(f)M_{D,B}(I_v) \underbrace{=}_{\text{prop}[7.9,pg.44]} M_{D,C}(f \circ I_v) = M_{D,C}(f)$$

$$\rho(AM) = \rho(M_{D,C}(f)) = \rho(\text{Im } f) = \rho(M_{B,C}(f)) = \rho(A)$$

$$\rho(AM) = \rho(A)$$

analogamente,

$$A = M_{C,D}(f')$$

$$MA = M_{D,B}(I_v)M_{C,D}(f') = M_{C,B}(f')$$

$$\rho(MA) = \rho(\text{Im } f') = \rho(A)$$

□

7.10 Matrici del cambiamento di base

Proposition 7.14. *Date due basi B, C di V e un vettore $v \in V$, abbiamo:*

$${}^t[v]_C = P_{B \rightarrow C} \cdot {}^t[v]_B$$

dove

$$P_{B \rightarrow C} = M_{B,C}(I_v)$$

I_v e' l'applicazione lineare $I_v : V \longrightarrow V$ identica.

$P_{B \rightarrow C}$ viene chiamata matrice del cambiamento di base o di passaggio.

Proof:

$$I_v(v) = v$$

Esprimiamo I_v tramite la sua matrice associata, utilizzando le basi B, C di V , ottenendo:

$${}^t[v]_C = M_{B,C}(I_v) \cdot {}^t[v]_B$$

□

Proof: Dimostrazione alternativa.

Date due basi $B, C \subseteq V$ e un vettore $v \in V$ le componenti di v rispetto a $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ e quelle rispetto a $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ saranno legate da una particolare relazione. Esprimiamo i vettori della base B tramite una c.l rispetto alla base C :

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}w_1 + \dots + a_{n1}w_n \\ v_2 &= a_{12}w_1 + \dots + a_{n2}w_n \\ &\vdots \\ v_n &= a_{1n}w_1 + \dots + a_{nn}w_n \end{aligned}$$

Siano le componenti di $v \in V$ rispetto a B

$$[v]_B = (x_1, \dots, x_n)$$

allora esprimiamo v come c.l.:

$$v = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$$

Sostituendo in questa espressione i valori di v_i otteniamo:

$$\begin{aligned} v &= x_1(a_{11}w_1 + \dots + a_{n1}w_n) + \\ &\quad + x_2(a_{12}w_1 + \dots + a_{n2}w_n) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + x_n(a_{1n}w_1 + \dots + a_{nn}w_n) \end{aligned}$$

e mettendo in evidenza i termini w_i otteniamo:

$$\begin{aligned} v &= w_1(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) + \\ &\quad + w_2(a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + w_n(a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n) \end{aligned}$$

Quindi le componenti $[v]_C$ sono i coefficienti dei vettori w_i di quest'ultima espressione appena calcolata, ovvero:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =: A \cdot \bar{x}$$

Le colonne della matrice A sono le componenti del vettore v_i rispetto a C , quindi questa matrice non e' nient'altro che la matrice associata all'applicazione identica rispetto alle basi B, C , cioe':

$$P_{B \rightarrow C} := A = M_{B,C}(I_v)$$

In definitiva, A e' la matrice del cambiamento di base $P_{B \rightarrow C}$ e risulta:

$${}^t[v]_C = P_{B \rightarrow C} \cdot {}^t[v]_B$$

□

Proposition 7.15.

$$P_{B \rightarrow C} = P_{C \rightarrow B}^{-1}$$

Da questo deduciamo che $P_{B \rightarrow C}$ e' invertibile e quindi ha determinate diverso da 0.

Proof:

$$P_{B \rightarrow C} = M_{B,C}(I_v)$$

$$P_{C \rightarrow B} = M_{C,B}(I_v)$$

Per la prop [7.9,pg.44], abbiamo

$$M_{B,C}(I_v)M_{C,B}(I_v) = M_{C,C}(I_v) = I \quad M_{C,B}(I_v)M_{B,C}(I_v) = M_{B,B}(I_v) = I$$

dove I e' la matrice identica.

Allora, per definizione, $P_{B \rightarrow C} = P_{C \rightarrow B}^{-1}$

□

Proposition 7.16. *Sia $\dim V = n$. Sia data una matrice P invertibile $n \times n$. Allora,*

$$C \text{ base di } V \Rightarrow \exists! B \text{ base di } V : P_{B \rightarrow C} = P$$

Proof:

Per il thm [7.12,pg.45], P e' la matrice associata di qualche $f : V \rightarrow V$ isomorfismo vettoriale:

$$P \xrightarrow{\Psi_{C,C}} \underbrace{f}_{\in GL(V)} \xrightarrow{\Phi_{C,C}} M_{C,C}(f) \xRightarrow{\quad} P = M_{C,C}(f)$$

Φ e' l'inversa di Ψ

Come base B scegliamo $B = f(C)$. Dobbiamo dimostrare che $P_{B \rightarrow C} = P$, ovvero:

$$P_{B \rightarrow C} = P \Leftrightarrow P_{f(C) \rightarrow C} = M_{C,C}(f) \Leftrightarrow M_{f(C),C}(I_v) = M_{C,C}(f)$$

(0.1) Dimostriamo allora che $M_{f(C),C}(I_v) = M_{C,C}(f)$

$$C = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \quad B = \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}.$$

La colonna i -esima di $M_{C,C}(f)$ e' $[f(v_i)]_C$

La colonna i -esima di $M_{f(C),C}(I_v)$ e' $[I_v(f(v_i))]_C$ e poiche' I_v e' l'identita': $[I_v(f(v_i))]_C = [f(v_i)]_C$.

Le colonne delle due matrici coincidono ordinatamente. Quindi le matrici sono uguali.

(0.2) Dimostriamo l'unicita' di B

Supponiamo che esista un'altra B' base di V t.c.

$$P_{B' \rightarrow C} = P$$

allora

$$M_{B',C}(I_v) = P_{B' \rightarrow C} = P = P_{B \rightarrow C} = M_{B,C}(I_v)$$

$$M_{B',C}(I_v) = M_{B,C}(I_v)$$

$$B' = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \quad B = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$$

La colonna i -esima di $M_{B,C}(I_v)$ e' $[I_v(v'_i)]_C = [v'_i]_C$

La colonna i -esima di $M_{B',C}(I_v)$ e' $[I_v(u_i)]_C = [u_i]_C$.

Poiche' le due matrici sono uguali, anche le loro colonne saranno uguali:

$$[v'_i]_C = [u_i]_C \Leftrightarrow v_i = u_i$$

quindi $B = B'$

□

7.11 Relazione tra matrici associate

Data $f : V \rightarrow W$ lineare, e due basi $B, B' \in V$ e $C, C' \in W$, esiste una relazione tra $M_{B,C}(f)$ e $M_{B',C'}(f)$.

La definizione di matrice associata dice che:

$$[f(v)]_C = M_{B,C}(f)[v]_B$$

Dove in questo caso con $[v]_B$ intendiamo la colonna delle componenti di v rispetto a B . Allora per il cambiamento di basi si ha:

$$\begin{aligned}
P_{B' \rightarrow B} &= M_{B', B}(I_v) \\
P_{C' \rightarrow C} &= M_{C', C}(I_v) \\
[v]_B &= P_{B' \rightarrow B} \cdot [v]_{B'} \\
[f(v)]_C &= P_{C' \rightarrow C} \cdot [f(v)]_{C'} \\
[f(v)]_C &= M_{B, C}(f)[v]_B \\
P_{C' \rightarrow C} \cdot [f(v)]_{C'} &= M_{B, C}(f)P_{B' \rightarrow B} \cdot [v]_{B'} \\
\underbrace{P_{C' \rightarrow C}^{-1} P_{C' \rightarrow C}}_I \cdot [f(v)]_{C'} &= P_{C' \rightarrow C}^{-1} M_{B, C}(f)P_{B' \rightarrow B} \cdot [v]_{B'} \\
[f(v)]_{C'} &= P_{C' \rightarrow C}^{-1} M_{B, C}(f)P_{B' \rightarrow B} \cdot [v]_{B'}
\end{aligned}$$

Quindi deduciamo che la matrice $P_{C' \rightarrow C}^{-1} M_{B, C}(f)P_{B' \rightarrow B}$ trasforma le componenti di v rispetto a B' nelle componenti di $f(v)$ rispetto alla base C' , quindi corrisponde alla matrice associata $M_{B', C'}(f)$, ovvero:

$$M_{B', C'}(f) = P_{C' \rightarrow C}^{-1} M_{B, C}(f)P_{B' \rightarrow B} = P_{C \rightarrow C'} M_{B, C}(f)P_{B' \rightarrow B}$$

Quindi questa e' la relazione di passaggio da una matrice associata all'altra:

$$M_{B', C'}(f) = P_{C \rightarrow C'} M_{B, C}(f)P_{B' \rightarrow B}$$

Nota: le matrici associate a basi diverse rispetto a una stessa f sono equivalenti. Matrici equivalenti hanno lo stesso rango.

Se in un'applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$, cambiamo la base associata al codominio da C a C' , allora, per quanto detto prima la nuova matrice associata sara':

$$M_{B, C'}(f) = P_{C \rightarrow C'} M_{B, C}(f)P_{B \rightarrow B} = P_{C \rightarrow C'} M_{B, C}(f)$$

Moltiplicare $M_{B, C}$ alla sinistra con una matrice invertibile, equivale a effettuare delle operazioni elementari di riga su $M_{B, C}$. Questo vuol dire che le equazioni di $\ker f$, che si ottengono usando la matrice associata $M_{B, C}$ (vedi 7.7), restano uguali a quelle ottenute da $M_{B, C'}$, infatti, non stiamo facendo altro che cambiare il loro ordine all'interno del sistema omogeneo o moltiplicarle per una costante o sommarle tra di loro.

Se invece cambiamo il dominio di f , da B a B' , allora:

$$M_{B', C}(f) = M_{B, C}(f)P_{B' \rightarrow B}$$

e questo vuol dire effettuare delle operazioni elementari di colonna. Come conseguenza, in questo caso, la descrizione del immagine di f non cambiera', infatti, gli elementi delle colonne di M sono le componenti dei vettori che generano $\text{Im } f$. Se cambiamo l'ordine di questi vettori, o gli applichiamo altre trasformazioni elementari, allora continueranno sempre a generare $\text{Im } f$.

7.12 Matrice invertibile e trasf. elementari

Data le matrici $P \in K^{n, n}$, $M \in K^{m, n}$ la matrice $M \cdot P$ si puo' ottenere da M effettuando sulle colonne di M una successione di trasformazioni elementari. Invece, $P \cdot M$ si puo' ottenere

effettuando una serie di successioni di trasformazioni elementari su righe di M .

Se P e' ottenuta, a seguito di trasformazioni elementari di riga dalla matrice identica I , allora $P \cdot M$ e' uguale alla matrice che si ottiene eseguendo le stesse trasformazioni elementari di riga su M . Ad esempio, se trasformiamo la riga di P in $R_2 \mapsto 2R_2$ e facciamo PM otteniamo una matrice che equivale a M trasformata con $R'_2 \mapsto 2R'_2$, dove R'_2 e' la riga 2 di M .

Viceversa MP equivale a trasformazioni di colonna.

7.13 Matrice ortogonale

Una matrice $P \in K^{n,n}$ si dira' ortogonale se

$$P^{-1} = {}^tP$$

(In uno spazio cartesiano, le matrici ortogonali sono quelle che descrivono le rotazioni).

7.13.1 Proprieta'

1. Se P e' ortogonale, allora $\det P = \pm 1$.

Proof: Poiche' P e' ortogonale:

$$(P^{-1} = {}^tP) \cdot P = I$$

cioe'

$${}^tP \cdot P = I$$

per il teorema di Binet:

$$\det({}^tP \cdot P) = \det(I) \Rightarrow \det({}^tP) \det(P) = 1$$

per la proprieta' delle trasposte

$$\det({}^tP) = \det(P)$$

quindi

$$\det(P)^2 = 1$$

e quindi

$$\det P = \pm 1$$

□

8 Endomorfismi

dato V spazio vettoriale, $f : V \longrightarrow V$, lineare si dira' endomorfismo. Si potrebbe dire la stessa cosa scrivendo:

$$f \in \text{hom}(V, V)$$

Alcuni endomorfismi:

1. $D : K[x] \longrightarrow K[x]$
2. $D : K[x]_n \longrightarrow K[x]_n$
3. Una matrice quadrata $M \in K^{n,n}$ induce un endomorfismo $m : K^n \longrightarrow K^n$ mediante il prodotto di riga per colonna tra matrici.

Proposition 8.1. Sia $f \in \text{hom}(V, V)$, con V spazio di dimensione finita, allora:

$$\ker f = \{\theta\} \Leftrightarrow \text{Im } f = V$$

cioe', se f , endomorfismo e' iniettiva, allora e' suriettiva, e viceversa. O anche, se f e' iniettiva, o suriettiva, allora e' un isomorfismo.

Proof:

(1) Dim. $\Rightarrow$

Per il teorema delle dimensioni:

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$$

in questo caso, per Hp $\dim \ker f = 0$, quindi $\dim V = \dim \operatorname{Im} f$. Allora,

$$\begin{cases} \operatorname{Im} f \subseteq V \\ \dim V = \dim \operatorname{Im} f \end{cases} \quad \xRightarrow{\substack{\text{[4.10.2, pg. 27]}}} \operatorname{Im} f = V$$

Quindi, f e' suriettiva.

(1) Dim. $\Leftarrow$

In questo caso

$$\dim V = \dim \ker f + \dim V$$

quindi, necessariamente $\dim \ker f = 0 \Rightarrow \ker f = \{0\}$

□

8.1 Matrici simili

Due matrici quadrata $A, B \in K^{n,n}$ sono simili se:

$$A, B \equiv \text{simili} \Leftrightarrow \exists P, \text{invertibile} \mid P^{-1} \cdot A \cdot P = B$$

Questa relazione di similitudine e' una relazione di equivalenza, valgono infatti le tre proprieta'.

1. Riflessiva: $I^{-1}AI = A \Rightarrow A \approx A$
2. Simmetrica: Se $A \approx B$, allora $\exists P \mid P^{-1} \cdot A \cdot P = B$, quindi $PP^{-1}APP^{-1} = PBP^{-1} = A$,
cioe' $PBP^{-1} = P^{-1-1}BP^{-1} = A$
3. transitiva: Se $A \approx B$, $B \approx C$, allora $B = P^{-1}AP$, $C = Q^{-1}BQ$, sostituendo:

$$C = Q^{-1}P^{-1}APQ$$

ponendo $R = PQ$ e sapendo che $R^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$

$$C = R^{-1}AR$$

ovvero $A \approx C$

Proposition 8.2. Date due basi B, C di V , e l'endomorfismo $f : V \longrightarrow V$, allora

$$M_{B,B}(f) \approx M_{C,C}(f)$$

ovvero le matrici associate ad un endomorfismo f sono tutte simili tra loro.

Proof:

$$M_{C,C}(f) = P_{B \rightarrow C} M_{B,B}(f) P_{C \rightarrow B} = P_{C \rightarrow B}^{-1} M_{B,B}(f) P_{C \rightarrow B}$$

Nota: non e' strettamente necessario che la base del dominio e del codominio coincidano. Per il calcolo di $\ker f$ e di $\operatorname{Im} f$, le basi possono essere scelte arbitrariamente. Quando, invece, si calcola il polinomio caratteristico, le due basi devono coincidere. □

8.2 Matrici diagonalizzabili

Una matrice A simile a una matrice diagonale (vedi 1.9), si dice diagonalizzabile.

Due matrici diagonali che differiscono per l'ordine degli elementi nella loro diagonale principale sono simili.

In una classe di similitudine di matrici, esiste al piu' una sola matrice diagonale.

8.3 Autovalore e autovettore

Dato $\lambda \in K$ e $f \in \text{hom}(V, V)$

$$\lambda \equiv \text{autovalore per } f \Leftrightarrow \exists v \in V, v \neq 0 \mid f(v) = \lambda v$$

In modo simile, dato $v \in V, v \neq 0$

$$v \equiv \text{autovettore per } f \Leftrightarrow \exists \lambda \in K \mid f(v) = \lambda v$$

Si dira' che v e' l'autovettore associato all'autovalore λ .

Definendo il seguente endomorfismo

$$f_\lambda : V \longrightarrow V, \quad f_\lambda(v) = f(v) - \lambda v, \quad \forall v \in V$$

valgono queste proprieta':

$$\lambda \equiv \text{autovalore per } f \Leftrightarrow \exists v \neq 0 \mid f_\lambda(v) = 0 \Leftrightarrow \ker f_\lambda \neq \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \dim \ker f_\lambda \geq 1 \Leftrightarrow \dim \text{Im } f_\lambda \leq \dim V - 1$$

L'ultima doppia implicazione e' vera perche' $\dim V = \dim \ker f_\lambda + \dim \text{Im } f_\lambda$.

Proof: Dimostriamo la prima doppia implicazione.

Dimostriamo $\Rightarrow$.

λ e' un autovalore per f , quindi esiste un v t.c. $f(v) = \lambda v$, quindi $f_\lambda(v) = f(v) - \lambda v = \lambda v - \lambda v = 0$.

Viceversa se $\ker f_\lambda \neq \{0\}$ allora esiste un v t.c. $f_\lambda(v) = 0$, ovvero

$$f_\lambda(v) = f(v) - \lambda v = 0 \Rightarrow f(v) = \lambda v$$

□

8.4 Autospazio

Dato $f \in \text{hom}(V, V)$ e λ autovalore, definiamo *autospazio* di λ il seguente insieme:

$$V_\lambda := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} = \ker f_\lambda$$

ovvero e' l'insieme di tutti gli autovettori associati a λ , con l'aggiunta del vettore nullo². Se λ non e' un autovalore, allora $V_\lambda = \{0\}$ perche' $f(0) = \lambda 0$

Come caso particolare $\lambda = 0$, accade che $\ker f_\lambda = \ker f$.

8.5 Polinomio caratteristico

Proposition 8.3. Siano $A, B \in K^{n,n}$ e sia dato il seguente polinomio, chiamato polinomio caratteristico di A :

$$p_A(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - x & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - x \end{pmatrix}$$

allora si ha

$$A, B \text{ simili} \Rightarrow p_A \equiv p_B$$

ovvero, matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

²La definizione di autovettore richiede che v non sia nullo

Proof:

A, B simili $\Rightarrow \exists P$ invertibile: $B = P^{-1}AP$

$$xI = xP^{-1}P = P^{-1}xP = P^{-1}xIP$$

$$p_B(x) = \det(B - xI) = \det(P^{-1}AP - xI) \det(P^{-1}AP - P^{-1}xIP) = \det P^{-1}(AP - xIP) = \det P^{-1}(A - xI)P =$$

$$\underbrace{=}_{\text{Binet}} \det P^{-1} \det(A - xI) \det P = \frac{1}{\det P} \det(A - xI) \det P = \det(A - xI) = p_A(x)$$

□

Definition 8.4. Dato $f \in \text{hom}(V, V)$, e B base di V chiameremo *polinomio caratteristico* di f il seguente polinomio:

$$p_f(x) = p_{M_B(f)} = \det(M_B(f) - x\mathbf{1}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - x & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - x \end{pmatrix}$$

E' chiaro che $\deg p_f(x) = n$. Inoltre, $p_f(x)$ non dipende dalla scelta di B ma solo da f .

Proof: Consideriamo due basi B, C . Per la prop [8.2,pg.51], B e C sono simili, quindi

$$B, C \text{ simili} \Rightarrow p_B \equiv p_C$$

[8.3,pg.52]

□

Theorem 8.5.

$$\lambda \equiv \text{autovalore di } f \Leftrightarrow p_f(\lambda) = 0$$

Ovvero se λ e' una radice di $p_f(x)$.

Proof: Dim $\Rightarrow$.

λ e' autovalore di f , quindi:

$$\dim \ker f_\lambda \geq 1 \Leftrightarrow \dim \text{Im } f_\lambda \leq \dim V - 1$$

poiche' $\dim \text{Im } f_\lambda = rk, M(f_\lambda)$ e $\dim V = n$ allora

$$rk, M(f_\lambda) \leq n - 1$$

questo vuol dire che il det del minore di ordine n e' nullo, cioe'

$$\det M(f_\lambda) = 0$$

Poiche'

$$M(f_\lambda) = M(f - \lambda I) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

dire che $\det M(f_\lambda) = 0$ equivale a dire che $p_f(\lambda)$ ammette come radice λ . Poiche' in queste dimostrazione abbiamo usato solo doppie implicazioni $\Leftrightarrow$, abbiamo automaticamente dimostrato anche il viceversa. □

Come corollario segue che se $\dim V = n$, allora un endomorfismo di V puo' avere al piu' n valori (perche' possono esistere al massimo n radici di $p_f(x)$).

Definition 8.6. Sia $A \in K^{n,n}$.

$$\lambda \text{ e' un autovalore di } A \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists v \in K^n \setminus \{0\} : A^t v = \lambda^t v$$

Proposition 8.7. Sia $A, B \in K^{n,n}$.

1. λ autovalore di $A \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0$
2. A, B simili $\Rightarrow A, B$ hanno gli stessi autovalori

Proof:

(1) Dim 1.

Sia B la base canonica di K^n , cioè $B = \{e_1, \dots, e_n\}$. Abbiamo:

$$v \in K^n \Rightarrow [v]_B = v \quad (*)$$

Per il thm [7.8,pg.43] possiamo associare ad A un endomorfismo f tale che

$$f : K^n \longrightarrow K^n$$

$$M_B(f) = A \quad (1)$$

Si ha

$$(1) \Rightarrow {}^t[f(v)]_B = A {}^t[v]_B \underbrace{\Leftrightarrow}^{(*)} {}^t f(v) = A {}^t v \quad (2)$$

$$f(v) = \lambda v \Leftrightarrow {}^t f(v) = \lambda {}^t v \underbrace{\Leftrightarrow}^{(2)} A {}^t v = \lambda {}^t v$$

quindi gli autovalori di f coincidono con quelli di A . Poiché per definizione si ha

$$p_f(x) = p_{M_B(f)}(x) = p_A(x) \quad (3)$$

basta applicare il thm [8.5,pg.53] per avere la tesi:

$$\lambda \text{ autovalore di } A \Leftrightarrow \lambda \text{ autovalore di } f \underbrace{\Leftrightarrow}_{[8.5,pg.53]} p_f(\lambda) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{(3)} p_A(\lambda) = 0$$

(2) Dim. 2.

Basta applicare la 1. e la prop. [8.3,pg.52]

□

8.6 Molteplicità algebrica e geometrica

Se λ è un autovalore di f e

$$p_f(x) = (x - \lambda)^m q(x), \quad q(x) \neq 0$$

allora la molteplicità algebrica dell'autovalore λ è

$$\mu_a(\lambda) = m$$

In sostanza è la normale molteplicità dei polinomi.

Invece, la molteplicità geometrica è definita come:

$$\mu_g(\lambda) := \dim V_\lambda$$

Theorem 8.8.

$$\mu_g(\lambda) \leq \mu_a(\lambda)$$

Proof: Sia $\{v_1, \dots, v_t\}$ una base di V_λ , quindi $\dim V_\lambda = t$, e completiamola a una base B di V :

$$B = \{v_1, \dots, v_t, v_{t+1}, \dots, v_n\}$$

allora abbiamo:

$$f(v_1) = \lambda v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_t + 0 \cdot v_{t+1} + \dots + 0 \cdot v_n$$

$$f(v_2) = 0 \cdot v_1 + \lambda v_2 + \dots$$

$$\vdots$$

$$f(v_t) = 0 \cdot v_1 + \dots + \lambda v_t + 0 \cdot v_{t+1} + \dots + 0 \cdot v_n$$

$$f(v_{t+1}) = a_{1,1}v_1 + a_{2,1}v_2 + \dots + a_{t,1}v_t + a_{t+1,1}v_{t+1} + \dots + a_{n,1}v_n$$

$$\vdots$$

$$f(v_n) = a_{1,n}v_1 + a_{2,n}v_2 + \dots + a_{t,n}v_t + a_{t+1,n}v_{t+1} + \dots + a_{n,n}v_n$$

Quindi la matrice associata diventa:

$$M_B(f) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \lambda & 0 & \dots & 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & a_{2,1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & 0 & \dots & & \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & a_{t,1} & \dots & a_{t,n} \\ \hline 0 & \dots & & 0 & a_{t+1,1} & \dots & a_{t+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \dots & & 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{array} \right)$$

quindi il polinomio caratteristico si ottiene:

$$p_f(x) = \det(M_B(f) - xI) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \lambda - x & 0 & \dots & 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda - x & \dots & 0 & a_{2,1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & 0 & \dots & & \\ 0 & \dots & \dots & \lambda - x & a_{t,1} & \dots & a_{t,n} \\ \hline 0 & \dots & & 0 & a_{t+1,1} - x & \dots & a_{t+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \dots & & 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,n} - x \end{array} \right)$$

e usando laplace generalizzato rispetto alle prime t colonne, otteniamo:

$$\det(M_B(f) - xI) = (\lambda - x)^t q(x)$$

dove $q(x)$ e' il det del blocco in basso a destra. Quindi $\mu_a(\lambda) \geq \mu_g(\lambda) = t$, perche' in $q(x)$ potrebbero esserci altri $(\lambda - x)$. $\square$

8.7 Autovettori linearmente indipendenti

Proposition 8.9. Autovettori associati ad autovalori distinti sono l.i. cioe'

$$\begin{cases} v_1 \in V_{\lambda_1}, v_2 \in V_{\lambda_2}, \dots, v_t \in V_{\lambda_t} \\ \lambda_i \neq \lambda_j \text{ per } i \neq j \end{cases} \Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_t \text{ sono l.i}$$

Equivalentemente possiamo dire che se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ allora $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2}$ e' una somma diretta.

Proof: Consideriamo gli autovettori $v_1, \dots, v_t$ associati agli autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_t$. Consideriamo su di essi una rel di dip. lineare:

$$a_1 v_1 + \dots + a_t v_t = 0$$

Applichiamo la f :

$$f(a_1 v_1 + \dots + a_t v_t) = f(0)$$

$$a_1 f(v_1) + \dots + a_t f(v_t) = 0$$

$$a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_t \lambda_t v_t = 0$$

moltiplichiamo la prima relazione per λ_1 :

$$a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_t \lambda_1 v_t = 0$$

e sottraiamola membro a membro dall'altra:

$$(a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_t \lambda_1 v_t) - (a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_t \lambda_t v_t) = 0$$

quindi espandendo e mettendo in evidenza viene eliminato $a_1 \lambda_1 v_1$ e resta:

$$a_2 (\lambda_1 - \lambda_2) v_2 + \dots + a_t (\lambda_1 - \lambda_t) v_t = 0$$

Ponendo $a'_i = a_i (\lambda_1 - \lambda_i)$, $i = 2, \dots, t$, abbiamo

$$a'_2 v_2 + a'_3 v_3 + \dots + a'_t v_t = 0$$

Ripetendo lo stesso ragionamento di prima:

$$f(a'_2v_2 + a'_3v_3 + \dots + a'_tv_t) = a'_2\lambda_2v_2 + \dots + a'_t\lambda_tv_t = 0$$

$$a'_2\lambda_2v_2 + a'_3\lambda_2v_3 + \dots + a'_t\lambda_2v_t = 0$$

$$a'_2(\lambda_2 - \lambda_3)v_3 + \dots + a'_t(\lambda_2 - \lambda_t)v_t = 0$$

Così procedendo arriveremo a:

$$a_t(\lambda_1 - \lambda_t)(\lambda_2 - \lambda_t) \dots (\lambda_{t-1} - \lambda_t)v_t = 0$$

Per ipotesi tutti i λ sono distinti, quindi nessun $\lambda_i - \lambda_j$ può essere uguale a zero. Poiché v_t è un autovettore, si ha $v_t \neq 0$ e quindi necessariamente si deve avere $a_t = 0$. Poiché possiamo ripetere lo stesso ragionamento per tutti gli altri a_i , segue che $a_1v_1 + \dots + a_tv_t = 0$ è una relazione di indipendenza lineare. $\square$

Theorem 8.10. *Un corollario che abbiamo già visto usando il polinomio caratteristico è:*

$$\dim V = n \Rightarrow \text{un endomorfismo di } V \text{ può avere al più } n \text{ autovalori distinti}$$

Proposition 8.11. *Vale questo risultato: dati $\lambda, \mu \in K$, $\lambda \neq \mu$*

$$f(v) = \lambda v \wedge f(v) = \mu v \Rightarrow v = 0$$

ovvero, a un autovettore (non nullo) può essere associato un unico autovalore. (un autovettore $\rightarrow$ un autovalore)

Proof: Per Hp

$$v \in V_\lambda \wedge v \in V_\mu$$

quindi

$$f(v) = \lambda v$$

$$\lambda v = \mu v$$

$$v(\lambda - \mu) = 0$$

e poiché per Hp $\lambda \neq \mu$ segue necessariamente che

$$v = 0$$

$\square$

8.8 Endomorfismo semplice

Dato un endomorfismo $f \in \text{hom}(V, V)$

$$f \equiv \text{semplice} \Leftrightarrow \exists B \text{ base di } V \mid \forall v \in B, v \equiv \text{autovettore}$$

Proposition 8.12.

1. Se B è una base formata solo da autovalori di f , allora $M_{B,B}(f)$ è diagonale.
2. Più in generale, se C è una base generica di V , allora $M_{C,C}(f)$ sarà diagonalizzabile, perché simile alla matrice diagonale $M_{B,B}(f)$
3. $M_{B,B}(f)$ è l'unica matrice diagonale nella classe di similitudine di $M_{C,C}(f)$.

Proof:

(1) Dim 1.

Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ e' base di V formata solo da autovettori di f , allora

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1$$

$\vdots$

$$f(v_n) = \lambda_n v_n$$

(nota: λ_i puo' coincidere con un λ_j)
la matrice associata e'

$$M_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(2) Dim. 2.

Se C e' una base generica di V , allora $M_C(f)$ sara' diagonalizzabile, perche' simile alla matrice diagonale $M_B(f)$, basta infatti usare il passaggio di base da C a B :

$$M_{B,B} = P_{C \rightarrow B} M_{C,C} P_{B \rightarrow C} = (P_{B \rightarrow C})^{-1} M_{C,C} P_{B \rightarrow C}$$

Poiche' in una classe di similitudine di matrici, esiste al piu' una sola matrice diagonale, allora M_B e' l'unica matrice diagonale nella classe di M_C .

□

Proposition 8.13. *Alcune caratterizzazioni di un endomorfismo semplice: dati tutti gli autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ di f , f sara' un endomorfismo semplice se e solo se accade uno dei seguenti fatti:*

1. $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t}$
2. $\dim V_{\lambda_1} + \dots + \dim V_{\lambda_t} = \dim V$
3. $\mu_a(\lambda_1) = \mu_g(\lambda_1), \dots, \mu_a(\lambda_t) = \mu_g(\lambda_t)$

Vale anchq questa proprieta': se $f : V \rightarrow V$ e' un endomorfismo, e $\dim V = n$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono suoi autovalori distinti, allora f e' semplice.

8.9 Equazioni cartesiane di un autospazio

Dato un endomorfismo f e $\lambda \in K$ un suo autovalore. Le equazioni cartesiane rispetto alla base B dell'autospazio V_λ sono descritte dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$(M_B(f) - \lambda I)\underline{x} = 0$$

che e' equivalente a

$$M_B(f)\underline{x} = \lambda \underline{x}$$

dove

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Proof: Questo e' vero perche' $V_\lambda = \ker f_\lambda$ e dato che le equazioni cartersiane di un nucleo si trovano come descritto in (7.7), ovvero

$$\ker f_\lambda = V_\lambda = M_B(f_\lambda)\underline{x} = M_B(f - \lambda I)\underline{x} = (M_B(f) - \lambda I)\underline{x}$$

8.10 Test di semplicità

Per controllare se un endomorfismo f , con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ e' semplice basta controllare l'eguaglianza:

$$\dim V_{\lambda_1} + \dots + \dim V_{\lambda_t} = \dim V$$

ricordando che

$$\begin{aligned} \dim V_{\lambda} &= \dim \ker f_{\lambda} \\ &= \dim V - \dim \operatorname{Im} f_{\lambda} \\ &= \dim V - \operatorname{rk}(M_B(f_{\lambda})) \\ &= \dim V - \operatorname{rk}(M_B(f) - \lambda I) \end{aligned}$$

□

8.11 Polinomio endomorfismo

Definiamo l'esponenziazione tra endomorfismi.

Dato l'endomorfismo $T : V \longrightarrow V$,

$$T^0 = I \quad T^1 = T \quad T^2 := T \circ T \quad T^3 := T \circ T \circ T$$

$$T^n := \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n \text{ volte}}$$

Adesso possiamo definire $p(T)$ di grado n :

$$p(T) := a_n T^n + \dots + a_1 T + a_0 I$$

dove il polinomio $p(t) \in K[t]$ e'

$$p(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$$

Nota che in $p(T)$ solo i suoi coefficienti appartengono in K , infatti, $p(T) \in \operatorname{hom}(V, V)$, cioe' e' un nuovo endomorfismo.

8.11.1 Proprieta'

λ e' autovalore di T , λ^n e' autovalore di T^n

$$\lambda \equiv \text{autovalore di } T \Rightarrow \lambda^n \equiv \text{autovalore di } T^n$$

Proof:

$$\exists v \in V : T(v) = \lambda v$$

$$T(v) = \lambda v$$

$$T^2(v) = T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda^2 v$$

$$T^3(v) = T(T(T(v))) = T(\lambda^2 v) = \lambda^2 T(v) = \lambda^3 v$$

$$\vdots$$

$$T^n(v) = \lambda^n v$$

□

$$\lambda \equiv \text{autovalore di } T \Rightarrow p(\lambda) \equiv \text{autovalore di } p(T)$$

Proof:

$$\exists v \in V : T(v) = \lambda v$$

$$T(v) = \lambda v$$

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

$$p(T) = a_n T^n + \dots + a_1 T + a_0 I$$

$$p(T)(v) = a_n \lambda^n v + \dots + a_1 \lambda v + a_0 v = v(a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0) = p(\lambda) v$$

□

Theorem 8.14. Dato $T : V \rightarrow V$ con $\dim V = n$, esiste un polinomio $p(t) \in K[t]$ con $\deg p(t) \leq n^2$ t.c. $p(T) = \theta$

Proof: Poiche' $\dim \text{hom}(V, V) = n^2$, allora $n^2 + 1$ elementi di $\text{hom}(V, V)$ sono l.d., ovvero presi $T^{n^2}, T^{n^2-1}, \dots, T, I$ devono esistere $a_{n^2}, a_{n^2-1}, \dots, a_0$, con almeno un $a_i \neq 0$, tali che:

$$a_{n^2} T^{n^2} + \dots + a_1 T + a_0 I = \theta$$

e quindi T e' "radice" del polinomio

$$p(t) = a_{n^2} t^{n^2} + \dots + a_1 t + a_0$$

□

Sia $M(T)$ la matrice associata a T rispetto a una base qualsiasi. Poiche' $M(T)^n = M(T^n)$, allora se T e' radice di $p(t)$, anche $M(T)$ lo sara', cioe'

$$P(M(T)) = \Omega$$

Ω e' la matrice nulla.

8.11.2 Proprieta'

Se $T : V \rightarrow V$ e' semplice con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, allora il suo polinomio caratteristico $p(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$ ha T come radice, cioe' $p(T) = \theta$.

Se la matrice M associata a T e' tale che $P(M) = \Omega$, allora pure qualsiasi sua matrice simile M' sara' tale che $P(M') = \Omega$

Proof: Per definizione, le matrice M' simile a M e' tale che: $P^{-1} M' P = M$, quindi

$$p(M) = p(P^{-1} M' P) = 0$$

Se riusciamo a dimostrare che $p(P^{-1} M' P) = P^{-1} p(M') P$ abbiamo finito.

Intanto osserviamo che

$$M^n = (P^{-1} M' P)^n = P^{-1} M' \underbrace{P \cdot P^{-1}}_I M' P \dots P^{-1} M' P = P^{-1} M'^n P$$

quindi nel polinomio accade questo:

$$\begin{aligned} p(M) &= p(P^{-1} M' P) = a_n M^n + \dots + a_1 M + a_0 I \\ &= a_n (P^{-1} M'^n P) + a_{n-1} (P^{-1} M'^{n-1} P) + \dots + \\ &\quad + a_1 (P^{-1} M' P) + a_0 P^{-1} I P \\ &= P^{-1} (a_n M'^n + \dots + a_1 M' + a_0 I) P \\ &= P^{-1} p(M') P \end{aligned}$$

□

8.12 Ideale dell'anello di T

Definiamo il seguente insieme:

$$I(T) := \{p \in K[t] \mid p(T) = 0\}$$

E si chiama *ideale* dell'anello di T .

Per il teorema precedente, abbiamo visto che $I(T) \neq \emptyset$, inoltre,

$$p(t)g(t) \in I(T), \quad \forall g(t) \in K[t]$$

$I(T)$ è un sottospazio di $K[t]$.

Proof:

$$I(T) \subseteq K[t]$$

$$\forall p(t), q(t) \in I(T), \quad p(t) + q(t) \in I(T)? \quad \text{Si, infatti,}$$

$$p(T) + q(T) = 0 + 0 = 0$$

$$\forall \lambda \in K, \forall p(t), q(t) \in I(T), \quad \lambda p(t) \in I(T)? \quad \text{Si, infatti,}$$

$$\lambda p(T) = \lambda \cdot 0 = 0$$

□

Theorem 8.15. *Sia*

$$p \in I(T) : \deg p = \min \{\deg q \mid q \in I(T)\}$$

allora

$$\forall f \in I(T) \Rightarrow f(t) = p(t)g(t)$$

Ovvero ogni polinomio di $I(T)$ è un multiplo di $p(t)$.

Proof: *Per la divisione di polinomi:*

$$(*) \quad f(t) = p(t)q(t) + r(t), \quad \deg r < \deg p$$

e q, r univocamente determinati.

Evalutiamo su T :

$$f(T) = p(T)q(T) + r(T)$$

$$0 = 0q(T) + r(T)$$

$$0 = r(T)$$

quindi $r(t) \in I(T)$. Ma $\deg r < \deg p$ e questo è un assurdo con l'ipotesi di minimalità del grado di p rispetto a tutti gli altri polinomi in $I(T)$. Quindi $r(t)$ non deve avere grado, ovvero deve essere il polinomio nullo, e quindi:

$$f(t) = p(t)q(t)$$

□

Da questo segue che a meno di coefficienti, il polinomio $p(t)$ è unico.

Definition 8.16. Il polinomio $p(t) \in I(T)$,

$$p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0$$

con $\deg p = \min \{\deg q \mid q \in I(T)\}$, si chiama *polinomio minimo* dell'endomorfismo T .

Da quello che abbiamo visto prima, deduciamo che questo polinomio è unico.

8.13 Endomorfismo singolare (degenere)

L'endomorfismo $T : V \longrightarrow V$ si dira' singolare o degenere se accade una delle seguenti condizioni:

1. T non e' invertibile
2. $\ker T \neq \{0\} \vee \dim \ker T \geq 1$
3. $\operatorname{Im} T \neq V \vee \dim \operatorname{Im} T \leq \dim V - 1$
4. $\det M(T) = 0$ (con qualsiasi base)
5. Il polinomio caratteristico $p_T(x)$ di T ha termine noto nullo, ovvero $p(x)$ ammette una radice nulla, ovvero se 0 e' un autovalore di T .
6. Il polinomio minimo di T ha termine noto nullo.

Inoltre, un endomorfismo $f - \lambda I$ e' singolare $\Leftrightarrow$ il polinomio di T ha λ come radice.

Proof: Dimostriamo la 5.

$$\begin{aligned} T \equiv \text{singolare} &\Leftrightarrow \exists v \in \ker T : v \neq 0 \\ &\Leftrightarrow v \text{ e' un autovettore dell'autovalore } \lambda = 0 \Leftrightarrow p_T(0) = a_0 = 0 \end{aligned}$$

□

Proof: Dimostriamo la 6.

Dimostriamo $\Rightarrow$.

Sia $p(t) = t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \dots + a_0$ il polinomio minimo di T . Poiche' T e' singolare, $\exists v \in \ker T : v \neq 0$ e si ha:

$$p(T)(v) = T^k(v) + a_{k-1}T^{k-1}(v) + \dots + a_0I(v) = \theta + \dots + \theta + a_0v = a_0v$$

inoltre, per definizione di polinomio minimo $p(T) = 0$, quindi $a_0v = 0$, poiche' $v \neq 0$ deduciamo che $a_0 = 0$.

Dimostriamo $\Leftarrow$.

Per Hp $a_0 = 0$, ovvero

$$p(t) = t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \dots + a_1t = t(t^{k-1} + a_{k-1}t^{k-2} + \dots + a_1)$$

e poiche' $p(t)$ e' il polinomio minimo, un qualsiasi suo fattore non appartiene a $I(T)$, cioe'

$$T^{k-1} + a_{k-1}T^{k-2} + \dots + a_1 \neq 0$$

ed esiste quindi un v tale che

$$(T^{k-1} + a_{k-1}T^{k-2} + \dots + a_1I)(v) = w \neq 0$$

allora

$$p(T) = T((T^{k-1} + a_{k-1}T^{k-2} + \dots + a_1I)(v)) = T(w) = 0$$

da cui $w \in \ker T$, $w \neq 0$.

□

8.14 Sottospazio invariante

Dato l'endomorfismo $f : V \longrightarrow V$, e il sottospazio $W \subseteq V$,

$$W \equiv \text{invariante rispetto a } f \Leftrightarrow f(W) \subseteq W$$

8.15 Endomorfismi triangolizzabili

Un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ si dice triangolizzabile se

$$f \equiv \text{triangolizzabile} \Leftrightarrow \exists B \equiv \text{base di } V : M_B(f) \equiv \text{triangolare}$$

Una matrice triangolare superiore e' sempre simile a una matrice triangolare inferiore.

Proof: Sia U la matrice triangolare superiore, allora prendendo la matrice K che ha' 1 nella sua seconda diagonale principale e 0 in tutti gli altri posti, otteniamo che $K^{-1} * U * K$ e' una matrice triangolare inferiore, ed esattamente e' la matrice U mirrorata in orizzontale e in verticale. $\square$

Theorem 8.17. Dato l'endomorfismo $f : V \rightarrow V$, con $\dim V = n$, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

1. f e' triangolizzabile

2. $\exists V_0, V_1, \dots, V_n$ sottospazi di V invarianti per f , tale che

$$(\{\theta\} = V_0) \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq (V_n = V)$$

3. Il polinomio caratteristico di f , cioe' $p_f(x)$, ha tutte le radici in K .

Proof: Dim $1 \Rightarrow 2$.

Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ la base per cui $M_B(f)$ e' triangolare, cioe':

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ & \lambda_2 & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Poniamo

$$V_0 = \{\theta\}, \quad V_i = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_i)$$

Questi sotto spazi di V sono invarianti per f , infatti,

$$f(V_i) = \mathcal{L}(f(v_1), \dots, f(v_i))$$

Ricordandoci che $M_B(f)$ e' triangolare, vediamo che

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1 \in \mathcal{L}(v_1) = V_1$$

$$f(v_2) = a_{12}v_1 + \lambda_2 v_2 \in \mathcal{L}(v_1, v_2) = V_2$$

$$\vdots$$

$$f(v_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + \lambda_n v_n \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) = V_n$$

quindi

$$f(V_i) = \mathcal{L}(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_i)) =$$

$$= \mathcal{L}(\lambda_1 v_1, a_{12}v_1 + \lambda_2 v_2, \dots, a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + \lambda_n v_n) \subseteq \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) = V_i$$

ovvero $f(V_i)$ e' invariante. Inoltre, proprio per costruzione

$$(\{\theta\} = V_0) \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq (V_n = V)$$

$\square$

Proof: Dimostriamo $2 \Rightarrow 1$.

Per ipotesi

$$(\{\theta\} = V_0) \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq (V_n = V)$$

sono una successione di sottospazi invarianti per f di V . Scegliamo una base B di V

$$B = \{v_1, \dots, v_n\}$$

tale che

$$\begin{aligned} \{v_1\} & \text{ base di } V_1 \\ \{v_1, v_2\} & \text{ base di } V_2 \\ & \vdots \\ \{v_1, \dots, v_i\} & \text{ base di } V_i \end{aligned}$$

Allora,

$$\begin{aligned} f(V_1) \in V_1 & \Rightarrow f(v_1) \in V_1 = \mathcal{L}(v_1) \Rightarrow f(v_1) = \lambda_1 v_1 \\ f(V_2) \in V_2 & \Rightarrow f(v_2) \in V_2 = \mathcal{L}(v_2) \Rightarrow f(v_1, v_2) = a_{12}v_1 + \lambda_2 v_2 \end{aligned}$$

$\vdots$

$$f(V_n) \in V_n \Rightarrow f(v_n) \in V_n = \mathcal{L}(v_n) \Rightarrow f(v_1, \dots, v_n) = a_{1n}v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

e quindi $M_B(f)$ e' triangolarizzabile, infatti:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ & \lambda_2 & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

Proof: Dimostriamo $1 \Rightarrow 3$.

f e' triangolarizzabile, quindi,

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ & \lambda_2 & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

e poiche' il det di una matrice triangolare e' il prodotto degli elementi sulla diagonale, deduciamo che il polinomio caratteristico (a meno del segno) e':

$$p_f(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n)$$

Quindi q.e.d.

□

Proof: Dimostriamo $3 \Rightarrow 1$.

Procediamo per induzione su $\dim V = n$, supponendo la tesi vera per $n - 1$ e dimostrandola per n .

Base: e' banale infatti la matrice e' 1×1 .

Hp induttiva: una matrice di ordine $n - 1$, il cui polinomio caratteristico ha tutte le radici in K , e' triangolarizzabile. Sia $\lambda_1 \in K$ un autovalore di f (che certamente esiste per Hp), associato all'autovettore $u_1 \in V$, definiamo $W := \mathcal{L}(u_1)$, e considerando V/W definiamo il seguente endomorfismo:

$$\tilde{f} : V/W \longrightarrow V/W \tag{5}$$

$$\tilde{f}(\bar{v}) = \tilde{f}(v + W) := \overline{\tilde{f}(v)} = f(v) + W \tag{6}$$

Tale endomorfismo e' ben definito.

Proof: Per dimostrare che e' ben definito, dobbiamo verificare che preso $[v'] = [v]$

$$\tilde{f}(\bar{v}) = \tilde{f}(\bar{v}')$$

allora

$$\begin{aligned} \left(\tilde{f}(\bar{v}) = f(v) + W \right) &= \left(\tilde{f}(\bar{v}') = f(v') + W \right) \\ \Leftrightarrow f(v) + W &= f(v') + W \Leftrightarrow f(v) \sim f(v') \\ \Leftrightarrow f(v) - f(v') &\in W = \mathcal{L}(u_1) \\ \Leftrightarrow f(v - v') &\in \mathcal{L}(u_1) \end{aligned}$$

Poiche'

$$\bar{v}' = \bar{v} \Rightarrow v' \sim v \Rightarrow w = v' - v \in W$$

e poiche' $f(W) = \mathcal{L}(u_1)$, allora

$$f(w) \in \mathcal{L}(u_1) \Rightarrow f(v' - v) \in W$$

e quindi abbiamo dimostrato la catena di doppie implicazioni di sopra. $\square$

Completiamo $\{u_1\}$ a una base di V :

$$B = \{u_1, v_2, \dots, v_n\}$$

sia

$$\bar{B} = \{\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$$

una base di V/W (nota che $\dim V/W = \dim V - \dim W = n - 1$). La matrice associata a f rispetto a B e':

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

il suo polinomio caratteristico e':

$$p_f(x) = \det(M_B(f) - xI) =$$

e usando laplace sulla prima colonna di $M_B(f) - xI$,

$$p_f(x) = \det(M_B(f) - xI) = (x - \lambda) \det \begin{pmatrix} a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{pmatrix}$$

Calcoliamo adesso $M_{\bar{B}}(\tilde{f})$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\bar{v}_2) &= \overline{f(v_2)} = a_{22}\bar{v}_2 + \dots + a_{n2}\bar{v}_n \\ \tilde{f}(\bar{v}_3) &= \overline{f(v_3)} = a_{23}\bar{v}_3 + \dots + a_{n3}\bar{v}_n \\ &\vdots \\ \tilde{f}(\bar{v}_n) &= \overline{f(v_n)} = a_{2n}\bar{v}_n + \dots + a_{nn}\bar{v}_n \end{aligned}$$

quindi

$$M_{\bar{B}}(\tilde{f}) = \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico e'

$$p_{\tilde{f}}(x) = \det(M_{\bar{B}}(\tilde{f}) - xI)$$

e quindi, utilizzando $p_f(x)$ ricaviamo la preziosa formula:

$$p_f(x) = (\lambda_1 - x)p_{\tilde{f}}(x)$$

Per Hp, $p_f(x)$ ha tutte le radici in K e quindi anche $p_{\tilde{f}}(x)$ avra' tutte le radici in K . Possiamo usare quindi l'Hp induttiva su V/W : poiche' $\dim V/W = n - 1$, esistera' una base $\bar{A}$ di V/W

rispetto alle quale $\tilde{f}$ e' triangolarizzabile. Sia $\overline{A} = \{\overline{u_2}, \dots, \overline{u_n}\}$ e quindi

$$\tilde{f}(\overline{u_2}) = \lambda_2 \overline{u_2}$$

$$\tilde{f}(\overline{u_3}) = a_{23} \overline{u_2} + \lambda_3 \overline{u_3}$$

$\vdots$

$$\tilde{f}(\overline{u_n}) = a_{2n} \overline{u_2} + a_{3n} \overline{u_3} + \dots + \lambda_n \overline{u_n}$$

Poiche' $\overline{u_2}, \dots, \overline{u_n}$ sono l.i, lo saranno anche i loro rappresentanti che quindi formeranno una base A di V , cioe' $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Nota1: $u_1 \notin \mathcal{L}(u_2, \dots, u_n)$.

Nota2: adesso stiamo passando proprio alla dimostrazione della tesi induttiva.

Calcoliamo allora $M_A(f)$ sfruttando i calcoli che abbiamo fatto su $\tilde{f}(\overline{u_i})$. Prima di tutto osserviamo che per costruzione

$$\tilde{f}(u_1) = \lambda_1 u_1$$

ora

$$\tilde{f}(\overline{u_2}) = \overline{f(u_2)} = \lambda_2 \overline{u_2} \Leftrightarrow f(u_2) - \lambda_2 u_2 \in W$$

$$\tilde{f}(\overline{u_3}) = \overline{f(u_3)} = a_{23} \overline{u_2} + \lambda_3 \overline{u_3} \Leftrightarrow f(u_3) - (a_{23} u_2 + \lambda_3 u_3) \in W$$

$\vdots$

$$\tilde{f}(\overline{u_n}) = \overline{f(u_n)} = a_{2n} \overline{u_2} + a_{3n} \overline{u_3} + \dots + \lambda_n \overline{u_n} \Leftrightarrow f(u_n) - (a_{23} u_2 + \dots + \lambda_n u_n) \in W$$

ovvero esisteranno degli $a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n} \in K$ tali che:

$$f(u_2) - \lambda_2 u_2 = a_{12} u_1$$

$$f(u_3) - (a_{23} u_2 + \lambda_3 u_3) = a_{13} u_1$$

$\vdots$

$$f(u_n) - (a_{23} u_2 + \dots + \lambda_n u_n) = a_{1n} u_1$$

adesso possiamo comporre $M_A(f)$:

$$M_A(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \lambda_2 & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ovvero e' triangolare, che e' proprio quello che volevamo dimostrare. $\square$

Theorem 8.18. Sia $T : V \longrightarrow V$ un endomorfismo, $p_T(x)$ ha tutte le radici in K , cioe' $p_T(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$, con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, allora T soddisfa il suo polinomio caratteristico, in breve:

$$\begin{cases} \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \\ p_T(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n) \end{cases} \Rightarrow p_T(T) = \theta$$

Proof: Per Hp e per il teorema precedentemente dimostrato, esiste una base $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V che triangolarizza T , cioe' $M_A(T)$ e' una matrice triangolare e si costruisce a partire da:

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1$$

$$T(v_2) = a_{12} v_1 + \lambda_2 v_2$$

$\vdots$

$$T(v_n) = a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

Per dimostrare che

$$p_T(T) = (T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \dots (T - \lambda_n I) = \theta$$

e' sufficiente verificare che

$$p_T(T)(v_1) = \theta, p_T(T)(v_2) = \theta, \dots, p_T(T)(v_n) = \theta$$

e infine che

$$(T - \lambda_i)(v_i) \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1})$$

□

8.16 Teorema di Cayley-Hamilton

Questo teorema generalizza brutalmente il teorema precedente:

$$\forall f \in \text{hom}(V, V), \dim V = n \Rightarrow p_f(f) = \theta, \deg p_f(x) = n$$

Corollario:

$$\forall M \in K^{n \times n} \Rightarrow p_M(M) = \Omega$$

9 Spazio duale

Ricorda la definizione di spazio duale (vedi [6.3,pg.34]).

Sia $\mathbf{V}$ un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale, poniamo

$$\mathbf{V}^\circ = \text{hom}(\mathbf{V}, \mathbb{K})$$

Proposition 9.1.

$$\dim \mathbf{V} = \dim \text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbb{K})$$

Proof: Per il thm [7.8,pg.43], si ha

$$\text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{m,n} \underset{n=\dim \mathbf{V}, m=\dim K=1}{\simeq} \mathbb{K}^{1,n} \simeq \mathbb{K}^n$$

$$\dim \text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbb{K}) = \dim \mathbb{K}^n = n = \dim \mathbf{V}$$

□

Proposition 9.2.

$$\mathbf{V} \simeq \mathbf{V}^\circ \simeq \mathbf{V}^{\circ\circ}$$

dove $\mathbf{V}^{\circ\circ} = \text{hom}(\mathbf{V}^\circ, \mathbb{K})$.

Questo significa che il duale di $\mathbf{V}$ e il duale del duale, non sono sostanzialmente diversi da $\mathbf{V}$ stesso.

Proof:

$$\dim \mathbf{V} \underset{[9.1,pg.66]}{\simeq} \dim \mathbf{V}^\circ \underset{[9.1,pg.66]}{\simeq} \dim \mathbf{V}^{\circ\circ} \underset{[7.6,pg.40]}{\Leftrightarrow} \mathbf{V} \simeq \mathbf{V}^\circ \simeq \mathbf{V}^{\circ\circ}$$

□

Proposition 9.3. Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V , allora $C = \{f_1, \dots, f_n\}$ e' una base di $\mathbf{V}^\circ$, dove f_i sono definite mediante le seguenti assegnazioni:

$$f_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

C si chiama base canonica di $\mathbf{V}^\circ$ rispetto a B .

Inoltre, preso $v \in \mathbf{V}$ e $f \in \mathbf{V}^\circ$, si ha

$$f(v) = [f]_C {}^t[v]_B$$

ovvero al prodotto tra il vettore delle componenti di f e il trasposto di quello delle componenti di v .

Proof:

(1) Dim 1.

Consideriamo $B' = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, base canonica di $\mathbb{K}^{1,n}$, ovvero $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$, $\dots$.

Scelta la base B di $\mathbf{V}$ e $\{1\}$ di $\mathbb{K}$, tramite l'isomorfismo [7.8,pg.43], abbiamo la base $C = \Psi_{B,\{1\}}^{-1}(B')$ di $\mathbf{V}^\circ$.

Piu' in dettaglio, consideriamo $e_i \in B'$: e_i e' la seguente matrice $1 \times n$:

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

Poniamo $f_i = \Psi_{B,\{1\}}^{-1}(e_i)$. Proprio per come e' definita Ψ , si ha

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

(2) Dim 2.

Calcoliamo $M = M_{B,\{1\}}(f)$, cioe' la matrice associata ad f .

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n$$

$$f(v_i) = (a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n)(v_i) = a_1 \underbrace{f_1(v_i)}_{=0} + \dots + a_i \underbrace{f_i(v_i)}_{=1} + a_n \underbrace{f_n(v_i)}_{=0} = a_i$$

quindi

$$M = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n) = [f]_C$$

E quindi

$${}^t[f(v)]_{\{1\}} = M {}^t[v]_B = [f]_C {}^t[v]_B$$

$$\dim \mathbb{K} = 1 \Rightarrow {}^t[f(v)]_{\{1\}} = [f(v)]_{\{1\}}$$

Ma poiche', usando la base $\{1\}$, in $\mathbb{K}$ le coordinate coincidono con i vettori, si ha

$$[f(v)]_{\{1\}} = f(v) = [f]_C {}^t[v]_B$$

□

Proposition 9.4. Considerata $f \in \mathbf{V}^\circ$, si ha

$$\dim \ker f = \dim \mathbf{V} - 1 \vee \dim \ker f = \dim \mathbf{V}$$

E inoltre,

$$\dim \ker f = \dim \mathbf{V} - 1 \Leftrightarrow f \in \mathbf{V}^\circ \setminus \{0\}$$

Proof: Per il thm [7.4,pg.39], si ha

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbf{V} \Leftrightarrow \dim \ker f = \dim \mathbf{V} - \dim \operatorname{Im} f \quad (1)$$

E poiche'

$$\operatorname{Im} f \leq \mathbb{K} \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f \leq \dim \mathbb{K} = 1 \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = 0 \vee \dim \operatorname{Im} f = 1$$

Quindi dalla (1)

$$\dim \ker f = \dim \mathbf{V} \vee \dim \ker f = \dim \mathbf{V} - 1$$

E poi chiaro, per definizione di nucleo, che $\dim \ker f = \dim \mathbf{V} \Leftrightarrow f = \underline{0}$, ovvero il nucleo e' tutto $\mathbf{V}$ sse f e' l'applicazione nulla. E quindi per esclusione si ha

$$\dim \ker f = \dim \mathbf{V} - 1 \Leftrightarrow f \in \mathbf{V}^\circ \setminus \{\underline{0}\}$$

□

Proposition 9.5. Considerati $f, g \in \mathbf{V}^\circ$,

$$\ker f = \ker g \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* : f = \lambda g$$

Proof:

(1) Dim. $\Rightarrow$

Si ha

$$f = \underline{0} \Leftrightarrow \ker f = \mathbf{V} \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\ker f = \ker g} \quad \ker g = \mathbf{V} \Leftrightarrow g = \underline{0}$$

Quindi, se una tra f e g e' nulla, anche l'altra lo e'. In questo caso, la tesi e' chiaramente vera.

Supponiamo quindi che $f, g \in \mathbf{V}^\circ \setminus \{\underline{0}\}$

Sia $v \in \mathbf{V} \setminus \ker f$

$$f \in \mathbf{V}^\circ \setminus \{\underline{0}\} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{[9.4, \text{pg. } 67]} \quad \dim \ker f = \dim \mathbf{V} - 1$$

$$v \in \mathbf{V} \setminus \ker f \Rightarrow \mathcal{L}(v) \cap \ker f = \emptyset \quad \underbrace{\Rightarrow}_{[5.4, \text{pg. } 32]} \quad \dim \mathcal{L}(v) \oplus \ker f = 1 + \dim \mathbf{V} - 1 - 0 = \dim \mathbf{V}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(v) \oplus \ker f = \mathbf{V} \quad (1)$$

Sia $w \in \mathbf{V}$

$$w \notin \ker f = \ker g \Rightarrow \underbrace{f(v), g(v)}_{\in \mathbb{K}} \neq 0 \Rightarrow \exists! c \in \mathbb{K}^* : f(v) = cg(v)$$

$$w \in \mathbf{V} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{(1)} \quad \exists! \bar{v} \in \mathcal{L}(v), \exists! u \in \ker f : w = \bar{v} + u$$

$$\bar{v} \in \mathcal{L}(v) \Rightarrow \exists! \lambda \in \mathbb{K} : \bar{v} = \lambda v$$

$$w = \lambda v + u$$

$$f(w) = \lambda f(v) + f(u) \quad \underbrace{=}_{u \in \ker f} \quad \lambda f(v) = \lambda cg(v) = cg(\lambda v) \quad \underbrace{=}_{u \in \ker g} \quad c(g(\lambda v) + g(u)) = cg(\lambda v + u) = cg(w)$$

$$f(w) = cg(w)$$

Per l'arbitrarieta' di w , concludiamo che

$$f = cg$$

(1) Dim. $\Leftarrow$

Per Hp $\exists c \in \mathbb{K}^*$ t.c. $f = cg$, allora preso $u \in \ker g$, si ha

$$f(u) = cg(u) = 0 \Rightarrow u \in \ker f$$

$$\Rightarrow \ker f \subseteq \ker g$$

Preso $u \in \ker f$, si ha

$$g(u) = c^{-1}f(u) = 0 \Rightarrow u \in \ker g$$

$$\Rightarrow \ker g \subseteq \ker f$$

□