Topologia

AlpT (@freaknet.org)

April 19, 2012

Abstract

Questo testo e' una rielaborazione personale degli appunti presi durante il corso di Topologia Generale, tenuto dalla Prof.ssa Sparacino Clara presso il dipartimento di Matematica, Catania, A.A. 2006/2007.
Saro' ben lieto di correggere ogni eventuale errore che mi comunicherai.

Buon lettura.

^_^

Contents

1 Spazio topologico

Uno spazio topologico e' un insieme X, non vuoto, associato a una collezione Θ di sottoinsiemi di X, strutturato dalle seguenti proprieta':

1. $X, \emptyset \in \Theta$
2. $A_1, A_2 \in \Theta \;\Rightarrow\; A_1 \cap A_2 \in \Theta$
3. $\forall i \in I,\; A_i \in \Theta \;\Rightarrow\; \bigcup_{i \in I} A_i \in \Theta$

Nota: nella 2 stiamo specificando che l'intersezione di un numero finito di aperti sia aperto, nella 3 che l'unione di un numero finito o infinito di aperti sia un aperto. "Infinito" e' inteso come "infinito qualsiasi", nel senso che I potrebbe essere di qualunque ordine infinito (numerabile, $\sim \mathbb{R}$ o altro).

(X, Θ) e' lo spazio topologico.
Θ e' la topologia definita su X.
X si chiama spazio.
Gli elementi di Θ si chiamano *insiemi aperti*.
Gli elementi di un insieme aperto si chiamano *punti*.

1.1 Topologia fine

Possiamo stabilire una relazione d'ordine tra topologie di uno stesso spazio X: date le topologie Θ_1 e Θ_2 su X,

$$\Theta_2 \text{ e' piu' fine di } \Theta_1 \;\Leftrightarrow\; \Theta_1 \subseteq \Theta_2$$

cioe' se ogni aperto di Θ_1 e' anche un aperto di Θ_2, allora diremo che Θ_2 e' piu' fine di Θ_1.
Si dice Θ_2 e' piu' fine di Θ_1, perche' Θ_2 ha piu' aperti di Θ_1 e quindi ne avra' anche di piu' "sottili".

Equivalentemente

$$\Theta_2 \text{ e' piu' fine di } \Theta_1 \;\Leftrightarrow \forall x \in X\; B_1(x) \subseteq B_2(x)$$

dove $B_1(x)$ e' la famiglia d'intorni del punto x in Θ_1. Ovvero, se ogni intorno di p in Θ_1 e' ancora un intorno di p in Θ_2. Brevemente si dice che ogni intorno di Θ_1 e' un intorno di Θ_2.

1.1.1 Esempi

Consideriamo le topologie su $\mathbb{R}$ (queste topologie vengono definite nei paragrafi successivi):

- Θ_d e' la piu' fine
- Θ_i e' la meno fine
- $\Theta_e < \Theta_s$, dove Θ_s e' la topologia della retta di Sorgenfrey.

  Proof:

⟨1⟩1. Verifichiamo che ogni aperto di Θ_e e' un aperto per Θ_s

Sia $]a,b[\in \mathbb{R}$ un aperto per Θ_e. Abbiamo che

$$]a,b[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a+\frac{1}{n}, b[$$

ovvero $]a,b[$ e' unione di aperti di Θ_s, quindi $]a,b[$ e' un aperto di Θ_s. □

⟨1⟩2. Dimostriamo che $\Theta_e \neq \Theta_s$

Un qualsiasi $[p,b[$ aperto di Θ_s, non puo' essere ne' intersezione ne' unione di aperti di Θ_e □

In $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y)|y \geq 0\}$ consideriamo $(\mathbb{R}^2_+, \Theta_{e'})$, la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}^2_+$, ovvero

$$\Theta_{e'} = \{\mathbb{R}^2_+ \cap E\}_{E\in\Theta_e}$$

consideriamo anche il piano di Niemytzki $L = (\mathbb{R}^2_+, \Theta_N)$, allora

$$\Theta_{e'} < \Theta_N$$

Proof:

⟨1⟩1. Lo dimostreremo facendo vedere che ogni intorno in $(\mathbb{R}^2_+, \Theta_{e'})$ e' anche un intorno di $(\mathbb{R}^2_+, \Theta_N)$

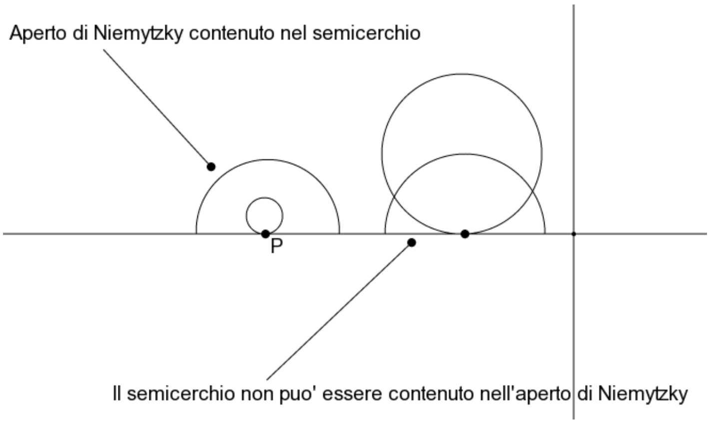


Figure 1: $\Theta_{e'} < \Theta_N$

Per la proposizione [1.12,pg.25], gli intorni aperti di $p \in \mathbb{R}^2_+$ in $(\mathbb{R}^2_+, \Theta_{e'})$ sono i dischi di centro p, intersecati con $\mathbb{R}^2_+$.

Case: $p = (x,y),\ y > 0$

In questo caso l'intorno aperto $S(p,r)$ (cioe' un disco) contiene un aperto di Niemytzki, cioe' un'altro disco $S(p,s)$ con $s < r$.

Case: $p = (x,y),\ y = 0$

$S(p,r)$, in $\Theta_{e'}$ e' un semicerchio, con il diametro sull'asse delle x e con p nel punto medio del diametro. Anche in questo caso, $S(p,r)$ contiene un aperto di Niemytzki, cioe' un disco $S(p,s)$ tangente in p con $s < r$. Vedi figura [1,pg.2]. □

⟨1⟩2. Dim che $\Theta_{e'} \neq \Theta_N$

Basta considerare $p = (x,y),\ y = 0$ e un aperto $S(p,r)$ di Niemytzki, cioe' un disco tangente a p: non esiste alcun semicerchio (ovvero un aperto di $\Theta_{e'}$) tutto contenuto nel disco. Vedi figura [1,pg.2]. □

Example 1.1.

$$(\mathbb{R}^2, \Theta_e) < (\mathbb{R}^2, \Theta)$$

dove

$$\Theta = \{A \subseteq \mathbb{R}^2 \mid A \cap \mathbb{R}_x \in \Theta_{\mathbb{R}_x},\ A \cap \mathbb{R}_y \in \Theta_{\mathbb{R}_y}\}$$

dove

$$\mathbb{R}_x = \{x\} \times \mathbb{R},\ \ \mathbb{R}_y = \mathbb{R} \times \{y\}$$

e $\Theta_{\mathbb{R}_x}$ e' la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}_x$.

Proof:
LET: $U \in \Theta_e$
notando che $\mathbb{R}_x$ e' una retta, si ha che $U \cap \mathbb{R}_x$ e' un aperto in $\Theta_{\mathbb{R}_x}$. Resta da provare che $\Theta_e \neq \Theta$.
Consideriamo

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$$

$\langle 1 \rangle$1. S e' un chiuso in Θ ma non lo e' in Θ_e
$A = \mathbb{R}^2 \setminus S$
$A \cap \mathbb{R}_x = \mathbb{R}_x$ XOR $A \cap \mathbb{R}_x = \mathbb{R}_x \setminus$ un punto, in ogni caso $A \in \Theta_{\mathbb{R}_x}$, quindi S e' chiuso.
$(0,0) \notin S$, ma in $(\mathbb{R}^2, \Theta_e)$, ogni intorno di $(0,0)$ interseca S, quindi $D(S) \neq \emptyset$ e percio' S non e' chiuso.

□

1.2 Alcune topologie

1. $\Theta_i = \{X, \emptyset\}$ e' detta topologia *indiscreta* ed e' la meno fine tra le topologie su X.

2. $\Theta_d = P(X)$ e' la topologia *discreta* ed e' la piu' fine. $P(X)$ e' l'insieme delle parti di X.
   In questa topologia, ogni sottoinsieme di X formato da un solo elemento (singoletto) e' un aperto. Vale anche il viceversa: se ogni singoletto di una topologia Θ su X e' un aperto, allora $\Theta = \Theta_d = P(X)$. Basta considerare la proprieta' 3: unione di singoletti e' ancora un aperto, quindi, dato un $Y \in P(X)$, $Y = \bigcup_{y \in Y} \{y\}$ e' un aperto.

3. Dato un insieme infinito X, la topologia *cofinita* su X e'

   $$\Theta_c = \{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ e' finito} \vee A = \emptyset\}$$

   Verifichiamo che Θ_c e' una topologia.

   (a) $X \subseteq X$ e $X \setminus X = \emptyset$ e' finito, quindi $X \in \Theta_c$. $\emptyset$, per definizione di Θ_c e' un aperto.

   (b) Dati $A_1, A_2 \in \Theta_c$, e' vero che $A_1 \cap A_2 \in \Theta_c$? Poiche' A_1 e' un aperto di Θ_c, abbiamo che

   $$A_1 = X \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$$

   lo stesso per A_2:

   $$A_2 = X \setminus \{q_1, \ldots, q_m\}$$

allora
$$A_1 \cap A_2 = X \setminus \{p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m\}$$
e quindi
$$X \setminus (A_1 \cap A_2) = \{p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m\}$$
e' finito[1]

(c) Sia D_i un insieme finito, allora

$$A_i \in \Theta_c \ \Rightarrow \ A_i = X \setminus D_i$$
$$A_1 \cup A_2 = (X \setminus D_1) \cup (X \setminus D_2) = X \setminus (D_1 \cap D_2) \ \text{[per De Morgan]}$$
$$\bigcup_{i \in I} A_i = X \setminus \bigcap_{i \in I} D_i$$
$$X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} D_i \ \text{ e' finito}$$
$$\Rightarrow \ \bigcup_{i \in I} A_i \in \Theta_c$$

4. Dato X e $A \subseteq X$, allora $\{X, \emptyset, A\}$ e' una topologia su X.

1.3 Topologia euclidea

Definiamo la topologia euclidea Θ_e su $\mathbb{R}$,
$$\Theta_e = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \forall x \in A \ \exists]a,b[\subseteq A : \ x \in]a,b[\}$$
dove $]a,b[$ e' un intervallo aperto. Equivalentemente possiamo dire che
$A \in \Theta_e \ \Leftrightarrow \ A$ e' unione di intervalli aperti.

$(\mathbb{R}, \Theta_e)$ e' la topologia euclidea su $\mathbb{R}$.

Proof:
$\emptyset \in \Theta_e$, infatti, se per assurdo $\emptyset \notin \Theta_e$ vorrebbe dire che la negazione di "$\forall x \in A \ \exists (a,b) \dots ,$" e' vera, ovvero che $\exists x \in A \nexists (a,b) \dots ,$, ma questo e' assurdo perche' $\emptyset$ non ha elementi.
Ovviamente $\mathbb{R} \in \Theta_e$.
$A_1, A_2 \in \Theta_e \ \Rightarrow \ A_1 \cap A_2 \in \Theta_e$?

$$x \in A_1 \cap A_2 \ \Rightarrow \ x \in A_1 \wedge x \in A_2$$
$$x \in A_1 \ \Rightarrow \ \exists \varepsilon > 0 : \ (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A_1$$
$$x \in A_2 \ \Rightarrow \ \exists \varepsilon' > 0 : \ (x - \varepsilon', x + \varepsilon') \subseteq A_2$$
supponiamo $\varepsilon' > \varepsilon$
$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (x - \varepsilon', x + \varepsilon') \subseteq A_2 \ \Rightarrow \ A_1 \subseteq A_2 \ \Rightarrow \ A_1 \cap A_2 = A_2 \in \Theta_e$$
Analogamente si vede che vale la terza proprieta'. □

La topologia euclidea $(\mathbb{R}^2, \Theta_e)$ e' definita usando *il disco*:
$$\Theta_e = \{A \subseteq \mathbb{R}^2 \mid \forall p \in A \ \exists \varepsilon > 0 : \ \exists \text{ un disco } S(p, \varepsilon) \subseteq A\}$$

[1] In questo passo abbiamo dimostrato anche un risultato piu' forte: due aperti di Θ_c si incontrano sempre (la loro intersezione non e' mai vuota). Questo risultato servira' piu' in la'.

dove

$$p = (x_0, y_0), \quad S(p, \varepsilon) = \{(x, y) | \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}$$

In poche parole, $S(p, \varepsilon)$ sono tutti i punti interni del cerchio di raggio ε e di centro p.
Analogamente in $\mathbb{R}^3$ si usa la sfera.

1.4 Intorno

In (X, Θ), dato $x_0 \in X$, $U \subseteq X$,

$$U \text{ intorno di } x_0 \ \Leftrightarrow \ \exists A \in \Theta : \ x_0 \in A \subseteq U$$

L'insieme di tutti gli intorni di x_0 si indica con $B(x_0)$.

Lemma 1.1. *Sia $A \neq \emptyset$, si ha*

$$A \in \Theta \ \Leftrightarrow \ \forall a \in A \ A \in B(a)$$

Ovvero, A e' un aperto se e solo se A e' intorno di ogni suo punto.

Proof *:*
$\langle 1 \rangle 1.$ *Dim* $\Rightarrow$
  Assume*:* $a \in A \in \Theta$
  Prove*:* $\exists B \in \Theta : \ a \in B \subseteq A$
  Allora basta scegliere $B = A$. □
$\langle 1 \rangle 2.$ *Dim* $\Leftarrow$
  Assume*:* $\forall a \in A, \ \exists B_a \in \Theta : \ a \in B_a \subseteq A$
  Prove*:* $A \in \Theta$
  Proof *:*
  Presi $B_{a_1}, B_{a_2} \in \Theta$ sappiamo che $B_{a_1} \cup B_{a_1} \in \Theta$. Allora

$$A = \bigcup_{a \in A} B_a \ \Rightarrow \ A \in \Theta$$

□

1.4.1 Proprieta' degli intorni

1. $\forall x \in X \ \ B(x) \neq \emptyset$, infatti, almeno $X \in B(x)$.
2. $B_1, B_2 \in B(x) \ \Rightarrow \ B_1 \cap B_2 \in B(x)$

   Proof:

$$\begin{aligned} B_1 \in B(x) \ &\Rightarrow \ \exists C_1 \in \Theta : \ x \in C_1 \subseteq B_1 \\ B_2 \in B(x) \ &\Rightarrow \ \exists C_2 \in \Theta : \ x \in C_2 \subseteq B_2 \\ &C_1 \cap C_2 \in \Theta \\ &C_1 \cap C_2 \subseteq B_1 \cap B_2 \ \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in B(x) \end{aligned}$$

□

3. $N \in B(x), \ \ N \subseteq M \subseteq X \ \Rightarrow \ M \in B(x)$
4. $N \in B(x) \ \Rightarrow \ \exists M \in B(x) : \ M \subseteq N \ \wedge \forall y \in M, \ M \in B(y)$
   Per il lemma [1.1,pg.5], possiamo anche dire:
   $N \in B(x) \ \Rightarrow \ \exists M \in B(x) : \ M \subseteq N \ \wedge M \in \Theta$

Proof:
Dalla definizione di intorno:
$$\exists M \in \Theta: \ x \in M \subseteq N$$
quindi ci basta provare che $M \in B(x)$, ovvero dobbiamo trovare un M' t.c. $M' \in \Theta$, $x \in M' \subseteq M$. Allora scegliamo $M' = M$. $\square$

1.5 Famiglia dei chiusi

In (X, Θ),
$$C \subseteq X \equiv \text{ chiuso } \Leftrightarrow X \setminus C \in \Theta$$
Ovvero, un chiuso e' il complementare di un aperto.
Indichiamo l'insieme di tutti i chiusi con
$$\mathcal{C} = \{C \subseteq X \mid X \setminus C \in \Theta\}$$
Partendo dalle proprieta' degli aperti, possiamo dedurre le seguenti proprieta' (sostanzialmente usando De Morgan):

1. $X, \emptyset \in \mathcal{C}$
2. $C_1, C_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}$
3. $\forall i \in I,\ C_i \in \mathcal{C} \Rightarrow \bigcap_{i \in I} C_i \in \mathcal{C}$

   Proof:
$$\begin{aligned} C_i \in \mathcal{C} &\Rightarrow X \setminus C_i \in \Theta \\ &\Rightarrow \bigcup_{i \in I} X \setminus C_i \in \Theta \\ \bigcup_{i \in I} X \setminus C_i &= X \setminus \bigcap_{i \in I} C_i \quad \text{[per De Morgan]} \\ &\Rightarrow X \setminus \bigcap_{i \in I} C_i \in \Theta \Rightarrow \bigcap_{i \in I} C_i \in \mathcal{C} \end{aligned}$$
$\square$

Altre proprieta' dei chiusi:

1. Aperto $\setminus$ Chiuso = Aperto

   Proof: Sia $A \in \Theta,\ B \in \mathcal{C}$,
$$A \setminus B = A \cap \underbrace{X \setminus B}_{\text{aperto}} \in \Theta$$

2. Chiuso $\setminus$ Aperto = Chiuso

   Proof: Sia $A \in \Theta,\ B \in \mathcal{C}$,
$$B \setminus A = B \cap \underbrace{X \setminus A}_{\text{chiuso}} \in \Theta$$

1.6 Limite

Possiamo copiare dall'analisi e generalizzare il concetto di limite.
Supponiamo di avere una successione $p_n : \mathbb{N} \longrightarrow X$, allora un limite delle successione e' definito cosi':

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = l \ \Leftrightarrow \ \forall U \in B(l), \ \exists v > 0 : \ \forall n > v, \ p_n \in U$$

Il limite non e' unico in ogni topologia.

Proof:
Consideriamo la topologia delle strisce $(\mathbb{R}^2, \Theta_s)$, dove
$$P \in \Theta_s \ \Leftrightarrow \ \forall p \in P, \ \exists \varepsilon > 0 : \ Striscia(p, \varepsilon) \subseteq P$$
dove
$$p = (x_0, y_0), \ \ Striscia(p, \varepsilon) = \{(x, y) \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$$
In sostanza, se disegniamo sul piano $Striscia(p, \varepsilon)$, otteniamo una striscia verticale di ampiezza ε che si estende all'infinito verso sopra e verso sotto, e x_0 e' sempre a meta' tra $x_0 - \varepsilon$ e $x_0 + \varepsilon$.

In questa topologia, la successione $p_n = (\frac{1}{n}, 0)$, non ha limite unico, infatti, tutti i punti dell'asse y sono suoi limiti. Per visualizzare: scegli un punto p dell'asse y, scegli la striscia $Str(p, \varepsilon)$; allora $\forall n > v = \frac{1}{\varepsilon} \ \ (\frac{1}{n}, 0) \in Str(p, \varepsilon)$. □

In sostanza, in $(\mathbb{R}^2, \Theta_e)$ il limite e' unico, perche' per ogni punto esiste un suo intorno che non puo' mai coincidere con l'intorno di un altro punto, invece, in $\mathbb{R}^2, \Theta_s$, basta che prendiamo $Striscia((x, y), \varepsilon))$, $Striscia((x, y'), \varepsilon))$ per avere due intorni uguali, associati a uno stesso punto (x, y'').

$\langle 0 \rangle 1.$ Dimostriamo l'unicita' del limite in $(\mathbb{R}^2, \Theta_e)$

ASSUME: 1. $\lim_{n \to +\infty} p_n = l$
2. $\lim_{n \to +\infty} p_n = l'$
3. per assurdo: $l \neq l'$
4. $U \in B(l), \ V \in B(l')$
5. $U \cap V = \emptyset$ [lo possiamo supporre poiche' siamo in $(\mathbb{R}^2, \Theta_e)$, che e' uno spazio T_2 (vedi [2,pg.40]).]

PROVE: $l = l'$

Proof: Per definizione di limite:
$$\exists v > 0 : \ \forall n > v, \ a_n \in U$$
$$\exists v' > 0 : \ \forall n > v', \ a_n \in V$$
$$a_n \in U \cap V = \emptyset \ \text{ assurdo}$$
□

1.7 Base

Sia (X, Θ) il nostro spazio topologico e sia $\mathcal{B} \subseteq \Theta$. $\mathcal{B}$ e' chiamata *base* di (X, Θ), se ogni elemento di Θ si puo' esprimere come unione di elementi di $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{B} \equiv \text{ base di } \Theta \ \Leftrightarrow \ \forall T \in \Theta \ \ \exists \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B} : T = \bigcup \mathcal{B}_0$$

o equivalentemente

$$\mathcal{B} \equiv \text{ base di } \Theta \ \Leftrightarrow \ \forall A \in \Theta \ \forall x \in A \ \exists B \in \mathcal{B} : \ x \in B \subseteq A$$

Proprieta':

1. Presi due $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, allora $B_1 \cap B_2$ e' unione di elementi di $\mathcal{B}$. Formalmente:

$$B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow \forall x \in B_1 \cap B_2 \; \exists B_3 \in \mathcal{B} : \; x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$$

Proof: Basta osservare che $B_1 \cap B_2 \in \Theta$:
$B_1 \cap B_2 \in \Theta$ [per la proprieta' degli aperti]
$\forall x \in B_1 \cap B_2 \; \exists B_3 \in \mathcal{B} : \; x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ [def. di base]
$\square$

2. Ogni elemento di X e' contenuto in un elemento della base

$$\forall x \in X \; \exists B_1 \in \mathcal{B} : \; x \in B_1$$

che equivale a dire:

$$X = \bigcup \mathcal{B}$$

$\langle 0 \rangle 2.$ Dimostriamo questa equivalenza

ASSUME: $\forall x \in X \; \exists B_1 \in \mathcal{B} : \; x \in B_1$
PROVE: $X \subseteq \bigcup \mathcal{B} \wedge \bigcup \mathcal{B} \subseteq X$
Proof:
Sia $x \in X$, per Hp $\exists B_1 \in \mathcal{B} : \; x \in B_1$ e allora

$$x \in B_1 \subseteq \bigcup \mathcal{B} \Rightarrow x \in \bigcup \mathcal{B}$$

e quindi $X \subseteq \bigcup \mathcal{B}$
Sia $b \in \bigcup \mathcal{B}$, poiche' per definizione $\mathcal{B} \subseteq \Theta$ si ha immediatamente che:

$$b \in \bigcup \mathcal{B} \subseteq X$$

$\square$

$\langle 0 \rangle 3.$ Dimostriamo la proprieta'

ASSUME: $\mathcal{B}$ base per Θ
PROVE: $\forall x \in X \; \exists B_1 \in \mathcal{B} : \; x \in B_1$
Proof:
$X \in \Theta \Rightarrow \forall x \in X \; \exists B_1 \in \mathcal{B} : \; x \in B_1 \subseteq X$ [proprio per def. di base
Mini dim. alternativa: poiche' $X \in \Theta$, X sara' unione di elementi di $\mathcal{B}$, allora dato che $x \in X$, x appartera' anche a questa unione e quindi a qualche $B \in \mathcal{B}$. $\square$

Le proprieta' [1,pg.8] e [2,pg.8] sono anche una caratterizzazione della base, cioe'

$$\mathcal{B} \text{ base di una certa topologia } \Theta \text{ su } X \Leftrightarrow \begin{cases} B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow \forall x \in B_1 \cap B_2 \; \exists B_3 \in \mathcal{B} : \; x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \\ \forall x \in X \; \exists B_1 \in \mathcal{B} : \; x \in B_1 \end{cases}$$

$\langle 0 \rangle 2.$ Abbiamo gia' dimostrato $\Rightarrow$, ci resta da dimostrare $\Leftarrow$

ASSUME: 1. $\mathcal{B} \subseteq P(X)$,ovvero $\mathcal{B}$ e' una collezione di sottoinsiemi di X.
2. $\mathcal{B}$ rispetta le due condizioni.
PROVE: 1. $\Theta = \{A \mid A$ e' unione di elementi di $\mathcal{B}\}$ e' una topologia su X
2. $\mathcal{B}$ e' una base di Θ
Proof: Vediamo che Θ e' una topologia:

- $\emptyset \in \Theta$ perche' unione di elementi nulli di $\mathcal{B}$
- $X \in \Theta$ per quanto abbiamo dimostrato prima in [2,pg.8], cioe':
$$X = \bigcup \mathcal{B}$$
- Dato $A_1, A_2 \in \Theta$ vogliamo provare che $A_1 \cap A_2 \in \Theta$.
$$\begin{aligned} &x \in A_1 \cap A_2 \;\Rightarrow\; x \in B_{x_1} \subseteq A_1, x \in B_{x_2} \subseteq A_2 \\ &\text{Per la prima condizione: } \exists B_{x_3} \in \mathcal{B} : \; x \in B_{x_3} \subseteq B_{x_1} \cap B_{x_2} \\ &\quad \Rightarrow\; x \in B_{x_1} \cap B_{x_2} \;\Rightarrow\; A_1 \cap A_2 \subseteq B_{x_1} \cap B_{x_2} \in \Theta \end{aligned}$$
- Unione arbitraria di aperti e' un aperto, infatti, sia $T_\alpha \in \Theta$
$$\bigcup_{\alpha \in I} T_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} \bigcup_{\beta \in J_\alpha} B_\beta$$
(dato che ogni T_α e' unione di elementi di $\mathcal{B}$)
$$= \bigcup_{\beta \in \bigcup_{\alpha \in I} J_\alpha} B_\beta \in \Theta$$

□

1.7.1 Secondo assioma di numerabilita'

Uno spazio topologico (X, Θ) soddisfa AS_2, chiamato il secondo assioma di numerabilita', se esiste una base per Θ numerabile o finita. Brevemente si dice che Θ e' a base numerabile.

$$(X, \Theta) \text{ soddisfa } AS_2 \;\Leftrightarrow\; \exists \mathcal{B} \text{ base per } \Theta : \; |\mathcal{B}| \leq |\mathbb{N}|$$

1.7.2 Esempi

- L'unica base per la topologia indiscreta Θ_i e' $\{X\}$.
- Una base per Θ_d, la topologia discreta e' $\{\{x\}_{x \in X}\}$, ovvero l'insieme di tutti i singoletti. Inoltre, in una qualsiasi base di Θ_d, devono essere contenuti tutti i singoletti, infatti, dato che $\{x\} \in \Theta$ deve essere unione di elementi della base, allora l'unica possibilita' e' $\{x\} = \{x\} \cup \{x\}$, cioe' $\{x\}$ deve stare nella base. In conclusione, se l'insieme dei singoletti di X non e' numerabile ed e' infinito, allora la sua topologia discreta non soddisfa AS_2.
- In $(\mathbb{R}, \Theta_e)$ una base e' $\mathcal{B} = \{]a, b[, \; a < b\}_{a,b \in \mathbb{R}}$, ma una ancora piu' piccola e' $\mathcal{B}' = \{]a, b[\}_{a,b \in \mathbb{Q}}\}$, infatti, ogni elemento di $\mathcal{B}$ e' unione di elementi di $\mathcal{B}'$ perche' se prendiamo un $x \in]a, b[$, allora per la densita' di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ $\exists r \in \mathbb{Q} : \; r \in]a, x[$ e $\exists s \in \mathbb{Q} : \; s \in]x, b[$.
- La base $\mathcal{B}'$ di prima e' numerabile, infatti:
$|\mathcal{B}'| = |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}|$, inoltre $\mathbb{Q} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Quindi $|\mathcal{B}'| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}|$. Per il teorema delle potenze Cantor $|\mathbb{N}^p| = |\mathbb{N}|$, percio' $|\mathcal{B}'| = |\mathbb{N}|$.
Quindi per definizione $(\mathbb{R}, \Theta_e)$ e' a base numerabile.
- $(\mathbb{R}, \Theta_d)$ non e' a base numerabile, infatti, poiche', come abbiamo visto prima, in ogni base $\mathcal{B}$ di Θ_d devono essere contenuti tutti i singoletti di $\mathbb{R}$ abbiamo che $|\mathcal{B}| \geq |\mathbb{R}|$.

- In $(\mathbb{R}^2, \Theta_e)$ ogni aperto e' unione di dischi, quindi una sua base $\mathcal{B}$ e' la famiglia di tutti i dischi (cosi' come in $(\mathbb{R}, \Theta_e)$ una base era la famiglia di tutti gli intervalli aperti).
  Una base piu' piccola e' questa:

  $$\mathcal{B}' = \{]r, s[\times]r', s'[\mid r, s, r', s' \in \mathbb{Q}\}$$

  $]r, s[\times]r', s'[$ e' un rettangolo aperto (senza bordo), cioe' e' questo insieme di punti:

  $$]r, s[\times]r', s'[= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r < x < s,\ r' < y < s'\}$$

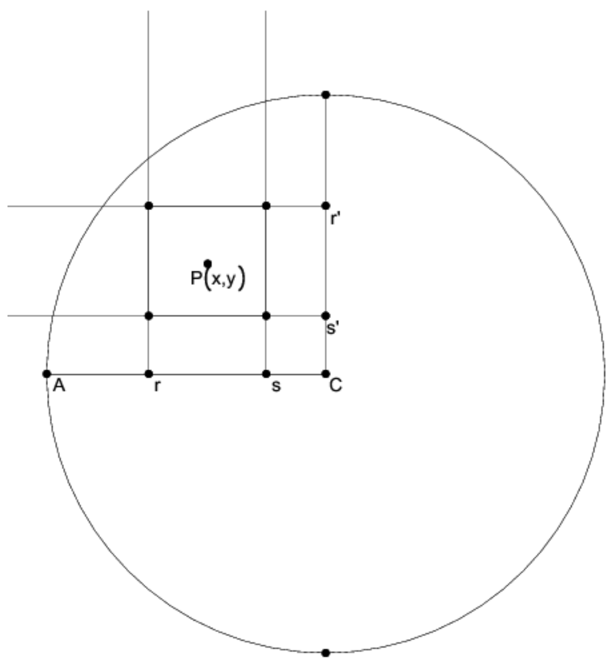
  Per provare che $\mathcal{B}'$ e' una base, basta mostrare che ogni disco, cioe' ogni elemento di $\mathcal{B}$ e' unione di elementi di $\mathcal{B}'$ cioe' quadrati a coordinate razionali, piu' precisamente bisogna mostrare che dato un disco S

  $$\forall (x, y) \in S\ \exists Q \in \mathcal{B}' :\ (x, y) \in Q \subseteq S$$

  Disegnando la situazione questo risulta ovvio e intuitivo. La dimostrazione formale richiederebbe un po' piu' di passaggi.

  $\langle 0 \rangle 3.$ Dimostrazione intuitiva

  Prendiamo un generico disco di centro C e di raggio CA (senza bordo, perche' stiamo considerando insiemi aperti). Prendiamo allora un suo punto P all'interno. E' ovvio allora che possiamo trovare un rettangolo che contenga P e sia contenuto nel disco. $\square$



1.8 Sistema fondamentale d'intorni

In (X, Θ), dato $x \in X$ e $\mathcal{V}_x \subseteq B(x)$,

$$\mathcal{V}_x \equiv \text{ base d'intorni per } x \iff \forall U \in B(x)\, \exists V \in \mathcal{V}_x : \ V \subseteq U$$

Altre nomenclature equivalenti sono *sistema fondamentale d'intorni*, *base locale*.
Il primo assioma di numerabilita' (chiamato AS_1):

$$(X, \Theta) \text{ soddisfa } AS_1 \iff \forall x \in X\, \exists \mathcal{V}_x \text{ base locale di } x : \ \ |\mathcal{V}_x| \leq |\mathbb{N}|$$

ovvero se per ogni $x \in X$ esiste una sua base locale numerabile o finita, allora lo spazio topologico soddisfa il primo assioma di numerabilita'.

Proposition 1.2.

$$AS_2 \Rightarrow AS_1$$

Proprieta': Se in (X, Θ), per ogni $x \in X$ e' assegnato una base locale $\mathcal{V}_x$ formata da intorni aperti, allora valgono queste proprieta':

1. $\mathcal{V}_x \neq \emptyset, \ \forall U \in \mathcal{V}_x\ x \in U$
2. $U_1, U_2 \in \mathcal{V}_x \ \Rightarrow \ \exists U_3 \in \mathcal{V}_x : \ U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$. Ovvero, l'intersezione di due elementi di $\mathcal{V}$ e' un intorno "generato" da un elemento di $\mathcal{V}$.
3. $x \in U \in \mathcal{V}_y \ \Rightarrow \ \exists V \in \mathcal{V}_x : \ V \subseteq U$

Proof:

$\langle 1 \rangle 1.$ Dimostriamo la 1
Intanto $B(x) \neq \emptyset$ per la prima proprieta' degli intorni. Allora, per far vedere che $\mathcal{V}_x \neq \emptyset$ dobbiamo dimostrare che preso un $U \in B(x)$ esiste un $V \in \mathcal{V}_x$ tale che $V \subseteq U$. Allora basta scegliere $V = U$.
Poiche' $U \in \mathcal{V}_x$ e' un intorno di x segue immediatamente che

$$\forall U \in \mathcal{V}_x\ x \in U$$

$\square$

$\langle 1 \rangle 2.$ Dimostriamo la 2
$B_1, B_2 \in \mathcal{V}_x \ \Rightarrow \ B_1, B_2 \in B(x)$, allora per le proprieta' degli intorni $B_1 \cap B_2 \in B(x)$ e quindi per definizione di $\mathcal{V}$, esistera' $B_3 \in \mathcal{V} : \ B_3 \subseteq B_2 \in B(x)$. $\square$

$\langle 1 \rangle 3.$ Dimostriamo la 3
ASSUME: 1. $y \in X$
2. $U \in \mathcal{V}_y$, U aperto.
3. $x \in U$
PROVE: $\exists V \in \mathcal{V}_x : \ V \subseteq U$
U e' un aperto e quindi, per il lemma [1.1,pg.5], e' intorno di ogni suo punto. Allora U e' intorno di x, ma poiche' $\mathcal{V}_x$ e' base locale di x, segue, per definizione, che:

$$\exists V \in \mathcal{V}_x : \ \ V \subseteq U$$

. $\square$

1.8.1 Esempi

In $(\mathbb{R}, \Theta_e)$, una base locale per $x \in \mathbb{R}$ e'

$$\mathcal{V}_x = \{]\, x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \,[\ | \ n \in \mathbb{N} \} \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

inoltre questa base locale e' anche numerabile e quindi Θ_e soddisfa AS_1.

1.9 Chiusura di un insieme

Sia $A \subseteq X$,

$$\mathcal{C}_A = \{B \in \mathcal{C} \mid A \subseteq B\}$$

ovvero l'insieme dei chiusi che contengono l'insieme A.
Definiamo *chiusura* di A, il seguente insieme:

$$\overline{A} = \bigcap_{B \in \mathcal{C}_A} B$$

Per la proprieta' [3,pg.6], $\overline{A}$ e' un chiuso e inoltre e' il piu' piccolo chiuso che contiene A.
Vale la seguente caratterizzazione per insiemi chiusi:

$$A \equiv \text{ chiuso } \Leftrightarrow A = \overline{A}$$

Proof:
⟨1⟩1. Dim. $\Rightarrow$
A, per Hp, e' chiuso, e poiche' $A \subseteq A$ si ha che $A \in \mathcal{C}_A$. Sia $D \in \mathcal{C}_A$, allora

$$D \in \mathcal{C}_A \;\Rightarrow\; A \subseteq D \;\Rightarrow A \cap D = A$$

Quindi l'intersezione di tutti gli elementi di $\mathcal{C}_A$, ovvero $\overline{A}$ e' proprio uguale a A. □

⟨1⟩2. Dim. $\Leftarrow$
$A = \overline{A}$, ma $\overline{A}$ e' un chiuso, quindi anche A lo e'. □

Theorem 1.3. *Sia $A \subseteq X$, allora*

$$p \in \overline{A} \;\Leftrightarrow\; \forall U \in B(p) \;\; U \cap A \neq \emptyset$$

Ovvero, $p \in \overline{A}$ se e solo se ogni suo intorno incontra A.

Proof:
⟨1⟩1. Dim $\Rightarrow$
ASSUME: $p \in \overline{A}$
$G \in B(p)$
Per assurdo $G \cap A = \emptyset$
PROVE: assurdo

$\exists U \subseteq G : \; U \in \Theta \wedge p \in U \subseteq G$ [per def. di intorno]

$G \cap A = \emptyset \;\Rightarrow\; U \cap A = \emptyset \;\Leftrightarrow\; A \subseteq X \setminus U$

$(X \setminus U)$ e' un chiuso perche' U e' un aperto

$A \subseteq X \setminus U \;\Rightarrow\; \overline{A} \subseteq X \setminus U$ [$\overline{A}$ e' il piu' piccolo chiuso in $\mathcal{C}_A$]

$p \in \overline{A} \subseteq X \setminus U \;\Rightarrow\; p \in X \setminus U$ assurdo! perche' $p \in U$

□

⟨1⟩2. Dim $\Leftarrow$
ASSUME: $\forall U \in B(p) \;\; U \cap A \neq \emptyset$
Per assurdo $p \notin \overline{A}$

$p \notin \overline{A} \;\Rightarrow\; p \in X \setminus \overline{A}$

$\overline{A}$ e' un chiuso $\Rightarrow$ $X \setminus \overline{A}$ e' un aperto $\Rightarrow$ $X \setminus \overline{A}$ e' un intorno di p, cioe' $X \setminus \overline{A} \in B(p)$

$A \subseteq \overline{A} \;\Rightarrow\; (X \setminus \overline{A}) \cap A = \emptyset$ assurdo contro Hp

□

1.9.1 Proprieta' della chiusura

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset, \quad \overline{X} = X$
   Questo perche' $\emptyset$ e' un chiuso, e quindi per la caratterizzazione degli insiemi chiusi $\emptyset = \overline{\emptyset}$. Lo stesso vale per X.

2. $\forall A \subseteq X \quad A \subseteq \overline{A}$
   Perche' $\overline{A}$ e' il piu' piccolo chiuso che contiene A.

3. Dato $A, B \subseteq X$,
   $$A \subseteq B \;\Rightarrow\; \overline{A} \subseteq \overline{B}$$
   Proof:
   $$A \subseteq B \subseteq \overline{B}$$
   $$\overline{B} \text{ e' chiuso, contiene } A$$
   $$\overline{A} \text{ e' il piu' piccolo chiuso contenente } A$$
   $$\Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$$
   □

4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

   Proof:
   $A \subseteq \overline{A},\ B \subseteq \overline{B} \;\Rightarrow\; A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$
   $A \cup B \subseteq \overline{A \cup B}$ [per la prop. [2,pg.13]]
   Poiche' $\overline{A \cup B}$ e' il piu' piccolo chiuso che contiene $A \cup B$, sara' contenuto in $\overline{A} \cup \overline{B}$:
   $A \cup B \subseteq \overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$
   Vediamo l'altra inclusione:
   $A \subseteq A \cup B \;\Rightarrow\; \overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ [prop. [3,pg.13]]
   $B \subseteq A \cup B \;\Rightarrow\; \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ [prop. [3,pg.13]]
   $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$
   □

5. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
   $\overline{A}$ e' un chiuso, e i chiusi coincidono con la propria chiusura.

1.10 Interno di un insieme

La topologia e' una categoria. Uno dei primi risultati delle teoria delle categorie[2] e' il principio duale: per ogni proprieta' che riguarda una categoria esiste la sua proprieta' duale. Adesso, cosi' come abbiamo visto la chiusura, definiremo una "apertura".

In un topologia (X, Θ), sia
$$\mathcal{A}_A = \{B \in \Theta \mid B \subseteq A\}$$
$\mathcal{A}_A$ e' l'insieme di tutti gli aperti contenuti in A.
L'*interno di A* e' definito come:
$$A^\circ = \bigcup \mathcal{A}_A$$

[2] vedi http://del.icio.us/alpt/category

(Nota[3])

A° e' l'unione di tutti gli aperti contenuti in A.
A° e' il piu' grande aperto contenuto in A.

Le proprieta' che valgono per la chiusura sono duali per l'interno.

Proposition 1.4.

$$A \equiv \ \textit{aperto} \ \Leftrightarrow \ A = A^\circ$$

Theorem 1.5.

$$p \in A^\circ \ \Leftrightarrow \ \exists U \in B(p) : \ U \subseteq A$$

Proof:
$\langle 1 \rangle$1. Dim $\Rightarrow$

$p \in A^\circ \ \Rightarrow \ p \in B \in \mathcal{A}_A$
B e' aperto, e quindi intorno di ogni suo punto
inoltre, e' contenuto in A poiche' elemento di $\mathcal{A}_A$

□

$\langle 1 \rangle$2. Dim $\Leftarrow$
Per Hp $\exists U \in B(p) : \ U \subseteq A$, allora possiamo prendere un aperto B dentro l'intorno U t.c.

$$p \in B \subseteq U \subseteq A \ \Rightarrow \ B \subseteq A \ \Rightarrow \ B \in \mathcal{A}_A \ \Rightarrow \ p \in \bigcup \mathcal{A}_A = A^\circ$$

□

□

Proprieta' degli interni: sono le duali delle proprieta' della chiusura:

1. $\emptyset^\circ = \emptyset, \quad X^\circ = X$
2. $A \subseteq B \ \Rightarrow \ A^\circ \subseteq B^\circ$
3. $A^\circ \subseteq A$
4. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$
5. $(A^\circ)^\circ = A^\circ$

Theorem 1.6.

$$A^\circ = X \setminus (\overline{X \setminus A})$$

Proof:
$\langle 1 \rangle$1. Dimostriamo $A^\circ \supseteq X \setminus (\overline{X \setminus A})$

$$X \setminus A \subseteq \overline{X \setminus A}$$
$$\underbrace{X \setminus (X \setminus A)}_{=A} \supseteq \underbrace{X \setminus \overline{X \setminus A}}_{\text{aperto}}$$
$$A \supseteq X \setminus \overline{X \setminus A}$$
A° e' il piu' grande aperto contenuto in A
$$\Rightarrow \ A^\circ \supseteq X \setminus \overline{X \setminus A}$$

□

[3] Sia $A \subseteq X$. Possiamo definire l'esterno di A come l'unione di tutti gli aperti contenuti in $X \setminus A$, o equivalentemente come l'interno di $X \setminus A$.

$\langle 1 \rangle 2.$ Dimostriamo il viceversa

$A^\circ \subseteq A$ [per le proprieta' degli interni]
$X \setminus A^\circ \supseteq X \setminus A$ [prendendo i complementari]
$X \setminus A^\circ$ e' chiuso perche' A° e' aperto, inoltre contiene $X \setminus A$, allora

$\overline{X \setminus A} \subseteq X \setminus A^\circ$ [perche' $\overline{X \setminus A}$ e' il piu' piccolo chiuso che contiene $X \setminus A$]

$X \setminus \overline{X \setminus A} \supseteq A^\circ$ [riprendendo i complentari]

□

1.11 Punti di accumulazione e di frontiera

Sia $A \subseteq X$, dove (X, Θ) e' la topologia in cui stiamo operando.

Definition 1.2.

$D(A) =$ Punti di accumulazione per A $= \{p \in X \mid \forall U \in B(p) \;\; \exists q \in X : \; q \neq p, \; q \in U \cap A\}$

O equivalentemente: $D(A) = \{p \in X \mid \forall U \in B(p) \quad U \cap (A \setminus \{p\}) \neq \emptyset\}$
In altre parole, un punto $p \in X$ e' di accumulazione per A se ogni suo intorno incontra A in almeno un punto distinto da p. O in altre parole, "x e' infinitamente vicino ad A" (questa analogia si basa sul fatto che gli intorni modellizzano il concetto di "vicinanza": i punti degli intorni piu' piccoli di x sono quelli piu' vicini).

Definition 1.3.

$F(A) =$ Punti di frontiera per A $= \{p \in X \mid \forall U \in B(p) \;\; U \cap A \neq \emptyset \; \wedge \; U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$

Ovvero, $p \in X$ e' un punto di frontiera per A se ogni suoi intorno incontra A e $X \setminus A$.

Theorem 1.7. *Dato $A \subseteq X$, abbiamo*

$$\overline{A} = A \cup D(A) = A \cup F(A)$$

Proof:
$\langle 1 \rangle 1.$ Dim $\overline{A} = A \cup D(A)$
$\langle 2 \rangle 1.$ Dim $\overline{A} \subseteq A \cup D(A)$
ASSUME: $p \in \overline{A}$
PROVE: $p \in A \cup D(A)$
CASE: $p \in A$
allora abbiamo finito perche' $p \in A \cup D(A)$.
CASE: $p \notin A$
Poiche' $p \in \overline{A}$, per il thm [1.3,pg.12], ogni intorno di p incontra A: $\forall U \in B(p) \;\; U \cap A \neq \emptyset$. Ma poiche' $p \notin A$, avremo che $p \notin U \cap A$. Abbiamo ritrovato la definizione di punto di accumulazione:

$$\begin{cases} \forall U \in B(p) \;\; U \cap A \neq \emptyset \\ p \notin U \cap A \end{cases} \Rightarrow \; p \equiv \text{ punto di accumulazione}$$

□

$\langle 2 \rangle 2.$ Dim $A \cup D(A) \subseteq \overline{A}$

Sia $p \in A \cup D(A)$. Distringuiamo due casi:

CASE: $p \in A$

allora $p \in \overline{A}$, perche' $\overline{A}$ e' il piu' piccolo chiuso contentente A.

CASE: $p \in D(A)$

tutti gli intorni di p incontrano A e quindi per il thm [1.3,pg.12] segue che $p \in \overline{A}$ □

$\langle 1 \rangle 2.$ Dimostriamo $\overline{A} = A \cup F(A)$

$\langle 2 \rangle 1.$ Dim $\overline{A} \subseteq A \cup F(A)$

ASSUME: $p \in \overline{A}$

PROVE: $p \in A \cup F(A)$

CASE: $p \in A$

allora abbiamo finito perche' $p \in A \cup F(A)$.

CASE: $p \notin A \Leftrightarrow p \in X \setminus A$

Poiche' $p \in \overline{A}$, per il thm [1.3,pg.12], ogni intorno di p incontra A: $\forall U \in B(p)\ \ U \cap A \neq \emptyset$. Poiche' $p \in X \setminus A$ e $p \in U$ avremo che in $U \cap (X \setminus A)$ c'e' almeno p. Ricapitolando: ogni intorno di p incontra A e $X \setminus A$, quindi p e' un punto di frontiera. □

$\langle 2 \rangle 2.$ Dim $A \cup F(A) \subseteq \overline{A}$

Questa dimostrazione e' identica a quella usata in $\langle 1 \rangle 1$, basta sostituire $D(A)$ con $F(A)$. □

1.11.1 Proprieta' del derivato

1. $D(A_1 \cup A_2) = D(A_1) \cup D(A_2)$

   Proof:

$$x \in D(A_1 \cup A_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall B \in B(x) \quad B \cap (A_1 \cup A_2) \setminus \{x\} \neq \emptyset \\ B \cap (A_1 \cup A_2) \setminus \{x\} = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \setminus \{x\} \neq \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow x \in D(A_1) \cup D(A_2)$$

1.11.2 Proprieta' della frontiera

1. $F(A^\circ) \subseteq F(A)$

   Proof: Sia $p \in F(A^\circ)$ allora ogni intorno di p incontra A° e $X \setminus A^\circ$. Scegliamo $U \in B(p)$ aperto (possiamo sempre scegliere un intorno aperto), allora:

$$U \in B(p) \Rightarrow \exists q \in U \cap A^\circ,\ \exists z \in U \cap (X \setminus A^\circ)$$
$$q \in A^\circ \subseteq A \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$$

   CASE: $z \notin A$

   In questo caso, abbiamo finito perche' $U \cap A \neq \emptyset$ e $U \cap X \setminus A \neq \emptyset$ e quindi $F(A^\circ) \subseteq F(A)$. Altrimenti

   CASE: $z \in A$

   Sappiamo che $z \in X \setminus A^\circ$ e quindi utilizzando il thm [1.5,pg.14] otteniamo:

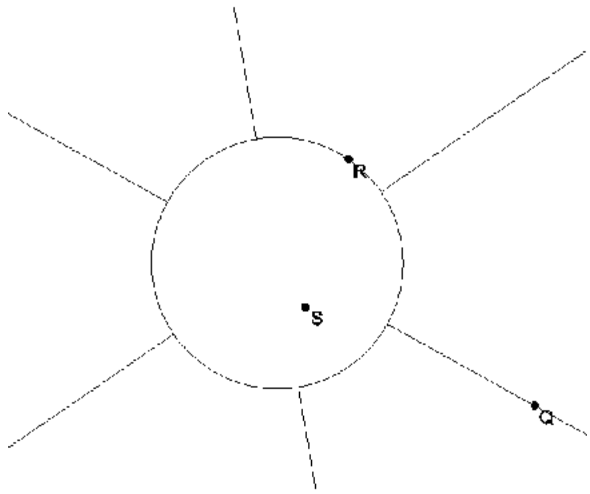
$$\forall V \in B(z) :\ V \nsubseteq A$$

   ma $U \in B(z)$ perche' U e' un aperto e quindi e' intorno di ogni suo punto. In conclusione:

$$U \nsubseteq A \Rightarrow U \cap X \setminus A \neq \emptyset$$

□

Il viceversa di questa proprieta' non vale sempre. Ecco un contro esempio in figura:



$F(A^\circ)$ e' la circonferenza S del disco, mentre $F(A)$ e' l'unione della circonferenza e dei raggi.

2. $F(A \cup B) \subseteq F(A) \cup F(B)$

   Proof: Sia $p \in F(A \cup B)$, allora ogni suo intorno incontra $A \cup B$ e $X \setminus A \cup B$. Supponiamo per assurdo che $p \notin F(A) \cup F(B)$ e quindi
   $$\begin{cases} p \notin F(A) \;\Rightarrow\; \exists U \in B(p): \; U \cap A = \emptyset \\ p \notin F(B) \;\Rightarrow\; \exists V \in B(p): \; V \cap B = \emptyset \end{cases}$$
   $V \cap U$ e' un intorno di p (per la prop. degli intorni), allora poiche' $p \in F(A \cup B)$ segue:
   $$(V \cap U) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$$
   ma questo e' assurdo perche'
   $(V \cap U) \cap (A \cup B) = (V \cap U \cap A) \cup (V \cap U \cap B) = (V \cap \emptyset) \cup (V \cap \emptyset) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
   $\square$

   Ecco un controesempio per $F(A \cup B) \neq F(A) \cup F(B)$: consideriamo $A =]0,1], \; B = [1,2[$ in $(\mathbb{R}, \Theta_e)$ allora

   $A \cup B =]0,2], \; F(A \cup B) = \{0,2\}, \;\; F(A) = \{0,1\}, \; F(B) = \{1,2\} \;\; F(A) \cup F(B) = \{0,1,2\}$

3. $F(A) = F(X \setminus A)$

   Proof:
   $$x \in F(A) \;\Leftrightarrow\; \forall U \in B(x) \;\; U \cap A \neq \emptyset, \; U \cap X \setminus A \neq \emptyset$$
   $$x \in F(X \setminus A) \;\Leftrightarrow\; \forall U \in B(x) \;\; U \cap X \setminus A \neq \emptyset, \; U \cap A \neq \emptyset$$

4. A aperto $\Leftrightarrow A \cap F(A) = \emptyset$
   Proof:
   $\langle 2 \rangle 1.$ Dim $\Rightarrow$

$$A \text{ aperto } \Leftrightarrow A = A^\circ$$
$$x \in A = A^\circ \Rightarrow \exists B \in B(x): \quad B \subseteq A$$
$$B \subseteq A \Rightarrow B \nsubseteq X \backslash A \Rightarrow x \notin F(A) \Rightarrow F(A) \cap A = \emptyset$$

⟨2⟩2. Dim $\Leftarrow$

Sia $x \in A$

$x \in A, \;\; F(A) \cap A = \emptyset \Rightarrow x \notin F(A) \Rightarrow \exists B \in B(x): \; B \cap A = \emptyset \vee B \cap (X \backslash A) = \emptyset$

$x \in A \Rightarrow B \cap A \neq \emptyset \Rightarrow B \cap (X \backslash A) = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq A \Rightarrow x \in F(A)$

□

Proposition 1.8.

$$A \; \textit{chiuso} \; \Leftrightarrow A = F(A) \cup A^\circ$$

Proof:

⟨2⟩1. Dimostriamo $F(A) \cup A^\circ \subseteq A$

Poiche' A e' un chiuso:

$$A \underbrace{=}_{[1.9,\text{pg}.12]} \overline{A} \underbrace{=}_{thm[1.7,\text{pg}.15]} F(A) \cup A \Rightarrow F(A) \subseteq A$$

$$\begin{cases} F(A) \subseteq A \\ A^\circ \subseteq A \end{cases} \Rightarrow F(A) \cup A^\circ \subseteq A$$

⟨2⟩2. Dimostriamo l'inclusione inversa

Prendiamo un $x \in A$. Se $x \in F(A)$, allora abbiamo finito.

Supponiamo che $x \notin F(A)$ e dimostriamo $x \in A^\circ$.

Supponiamo per assurdo che $x \notin A^\circ$. Allora, per la caratterizzazione dei punti interni [1.5,pg.14], abbiamo:

$$\forall U \in B(x) \;\; U \nsubseteq A \Leftrightarrow \exists y \in U \cap (X \backslash A)$$

e poiche' $x \in A, x \in U$, possiamo dire:

$$\forall U \in B(x) \;\; U \cap A \neq 0 \wedge U \cap (X \backslash A) \neq 0$$

allora, per definizione, $x \in F(A)$. Assurdo.

⟨1⟩1. Dimostriamo $\Leftarrow$

Supponiamo che $A = F(A) \cup A^\circ$. Supponiamo per assurdo che A sia un'aperto, allora

$$A \text{ aperto } \underbrace{\Leftrightarrow}_{[4,\text{pg}.17]} A \cap F(A) = \emptyset \Rightarrow F(A) \nsubseteq A \Rightarrow F(A) \cup A^\circ \nsubseteq A \Rightarrow A \neq F(A) \cup A^\circ \text{ assurdo}$$

quindi A e' un chiuso.

□

1.12 Dominio

Definition 1.4. Dato uno spazio topologico (X, Θ),

$$A \text{ e' un dominio } \Leftrightarrow \begin{cases} A \neq \emptyset \\ A \text{ e' chiuso} \\ A \subseteq D(A^\circ) \end{cases}$$

La figura in [1,pg.17] mostra un insieme che non e' un dominio: il punto Q non appartiene al derivato dell'interno, ovvero Q non e' un punto di accumulazione dell'interno: l'interno e' il solo cerchio.

1.13 Costruzioni topologiche

Per creare uno spazio topologico, fin'ora abbiamo avuto bisogno di descrivere la totalita' della topologia (tutti gli insiemi aperti). Adesso vedremo com'e' possibile creare topologie descrivendo parti piu' piccole.

1.13.1 Con famiglia dei chiusi

Sia $X \neq \emptyset$, $\mathcal{C} \subseteq P(X)$ in modo tale che vengano rispettate queste proprieta':

1. $X, \emptyset \in \mathcal{C}$
2. $C_1, C_2 \in \mathcal{C} \;\Rightarrow\; C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}$
3. $\forall i \in I,\; C_i \in \mathcal{C} \;\Rightarrow\; \bigcap_{i\in I} C_i \in \mathcal{C}$

allora e' possibile definire un'unica topologia Θ su X in modo tale che i chiusi siano gli elementi di $\mathcal{C}$:

$$\Theta = \{A \subseteq X : \;\; X \setminus A \in \mathcal{C}\}$$

e' facile verificare che Θ e' una topologia e che e' unica.

1.13.2 Con famiglia di intorni

Sia $X \neq \emptyset$, $\forall x \in X$ $\exists$ una famiglia $B(x) \subseteq P(X)$ tale che siano verificate le seguenti proprieta':

1. $\forall x \in X \;\; B(x) \neq \emptyset,\;\; \forall U \in B(x)\; x \in U$
2. $B_1, B_2 \in B(x) \;\Rightarrow\; B_1 \cap B_2 \in B(x)$
3. $N \in B(x),\;\; N \subseteq M \subseteq X \;\Rightarrow\; M \in B(x)$
4. $N \in B(x) \;\Rightarrow\; \exists M \in B(x) :\; M \subseteq N \;\wedge \forall y \in M,\; M \in B(y)$

allora e' possibile definire un'unica topologia Θ su X in modo tale che per ogni $x \in X$ la famiglia degli intorni di x sia proprio $B(x)$:

$$\Theta = \{A \subseteq X \mid \forall x \in X \;\; A \in B(x)\}$$

o equivalentemente

$$\Theta = \{A \subseteq X \mid \forall x \in A\, \exists N \in B(x) :\; N \subseteq A\}$$

$\langle 0 \rangle$3. Dimostriamo che Θ e' una topologia

1. $\emptyset \in \Theta$ perche' θ non ha elementi e quindi $\forall x \in A \ldots,$ e' sempre vero.

2. $X \in \Theta$ perche' $\forall x \in X \;\; X \in B(x)$
3. $A_1, A_2 \in \Theta$ e' vero che $A_1 \cap A_2 \in \Theta$?

$$\begin{aligned}
&x \in A_1 \cap A_2\\
&x \in A_1 \;\Rightarrow\; A_1 \in B(x) \;\; \text{[per la def. di } \Theta]\\
&x \in A_2 \;\Rightarrow\; A_2 \in B(x)\\
&A_1 \cap A_2 \in B(x) \;\; \text{prop. 2 degli intorni]}\\
&\qquad \Rightarrow\; A_1 \cap A_2 \in \Theta
\end{aligned}$$

4. E' vero che
$$\forall i \in I,\ A_i \in \Theta \ \Rightarrow\ \bigcup_{i \in I} A_i \in \Theta$$
?
$$x \in A_i \ \Rightarrow\ A_i \in B(x) \ \text{ [per la def. di } \Theta]$$
$$A_1 \subseteq A_1 \cup A_2 \ \Rightarrow\ A_1 \cup A_2 \in B(x) \ \text{ [prop. 3 degli intorni]}$$
$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \Theta$$

□

1.13.3 Con base

Sia $X \neq \emptyset$, $\forall x \in X$ $\exists$ una famiglia $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ tale che siano verificate le seguenti proprieta':

1. $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \ \Rightarrow\ \forall x \in B_1 \cap B_2\ \exists B_3 \in \mathcal{B} :\ x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$
2. $\forall x \in X\ \exists B_1 \in \mathcal{B} :\ x \in B_1$ che equivale a dire: $X = \bigcup \mathcal{B}$

allora e' possibile definire un'unica topologia Θ su X in modo tale che per $\mathcal{B}$ sia una base di Θ:
$$\Theta = \{A \subseteq X \mid \exists \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B} : A = \bigcup \mathcal{B}_0\}$$
che equivale a
$$\Theta = \{A \subseteq X \mid \forall x \in A\ \exists B \in \mathcal{B} :\ x \in B \subseteq A\}$$

$\langle 0 \rangle$4. Dimostriamo che Θ e' una topologia

1. $\emptyset \in \Theta$ perche' θ non ha elementi e quindi $\forall x \in A \ldots,$ e' sempre vero.

2. $X \in \Theta$ per la proprieta' 2 delle basi, ovvero $X = \bigcup \mathcal{B}$
3. $A_1, A_2 \in \Theta$ e' vero che $A_1 \cap A_2 \in \Theta$?
$$x \in A_1 \cap A_2$$
$$x \in A_1 \ \Rightarrow\ \exists B_1 \in \mathcal{B} :\ x \in B_1 \subseteq A_1 \ \text{ [per la def. di } \Theta]$$
$$x \in A_2 \ \Rightarrow\ \exists B_2 \in \mathcal{B} :\ x \in B_2 \subseteq A_2$$
$$\forall x \in A_1 \cap A_2 \ \ x \in B_1 \cap B_2 \subseteq A_1 \cap A_2$$
$$\Rightarrow\ A_1 \cap A_2 \in \Theta$$
4. E' vero che
$$\forall i \in I,\ A_i \in \Theta \ \Rightarrow\ \bigcup_{i \in I} A_i \in \Theta$$
?
$$x \in A_i \ \Rightarrow\ \exists B_i \in \mathcal{B} :\ x \in B_i \subseteq A_i \ \text{ [per la def. di } \Theta]$$
$$\forall x \in \bigcup_{i \in I} A_i \ \Rightarrow\ x \in A_j \ \Rightarrow\ \exists B_j \in \mathcal{B} :\ x \in B_j \subseteq A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$
$$\Rightarrow\ \bigcup_{i \in I} A_i \in \Theta$$

□

Esempio: La retta di Sorgenfrey e' costruita solo a partire da una base:
$$\mathcal{B} = \{[a, b[\}_{a<b}$$

si puo' dimostrare che $\mathcal{B}$ soddisfa tutte le proprieta' delle basi. Nasce cosi' $(\mathbb{R}, \Theta_s)$. Un qualsiasi $[x, y[\subseteq \mathbb{R}$ e' sia aperto che chiuso: e' aperto perche' e' unione di elementi di $\mathcal{B}$, ed e' chiuso:

$$Z = \mathbb{R} \setminus [x, y[=]-\infty, x[\cup [y, +\infty[= (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [x-n, x[) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [y, y+n[)$$

$(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[x-n, x[)$ e' unione di elementi di $\mathcal{B}$ e' quindi e' un aperto, lo stesso vale per $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[y, y+n[)$. Z essendo unione di aperti e' un aperto e quindi $\mathbb{R} \setminus Z = [x, y[$ e' un chiuso.
La topologia di Sorgenfrey soddisfa AS_1 ma non AS_2.

Proof:
$\langle 1 \rangle 1$. Dimostriamo che soddisfa AS_1
Una base d'intorni numerabile per $x \in X$ e'

$$\mathcal{V}_x = \left\{ \left[x, x + \frac{1}{n}\right[\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

infatti, se prendiamo $U \in B(x)$, per definizione di intorno,
esiste $A \in \Theta :\ x \in A \subseteq U$. Poiche' A e' unione di elementi di $\mathcal{B}$, esistera' un $[z, y[\in A :\ x \in [z, y[$, quindi

$[x, y[\subseteq [z, y[\subseteq U$

Sia $n \in \mathbb{N} : x + \frac{1}{n} < y \ \Rightarrow\ \left[x, x + \frac{1}{n}\right[\subseteq [x, y[\subseteq [z, y[\subseteq U$

Nota: $\left[x, x + \frac{1}{n}\right[\in \mathcal{V}_x$

□

$\langle 1 \rangle 2$. Dimostriamo che non soddisfa AS_2
Supponiamo per assurdo che esista una base $\mathcal{B}$ numerabile per Θ_s. Poniamo

$$E = \{\inf D \mid D \in \mathcal{B}\}$$

$|E| \leq |\mathcal{B}|$, e quindi E e' al piu' numerabile, allora $\mathbb{R} \setminus E \neq \emptyset$.
Sia $x \in \mathbb{R} \setminus E$.

$[x, x+1[$ e' aperto $\Rightarrow\ \exists D \in \mathcal{B} :\ x \in D \subseteq [x, x+1[$

$\inf D = x$ perche' $x \in D$ e $D \subseteq [x, x+1[$

$\inf D = x \ \Rightarrow\ x \in E$ e' assurdo perche' $x \in \mathbb{R} \setminus E$ □

1.13.4 Con base d'intorni

Sia $X \neq \emptyset$, $\forall x \in X\ \exists$ una famiglia $\mathcal{V}_x \subseteq P(X)$ tale che siano verificate le seguenti proprieta':

1. $\mathcal{V}_x \neq \emptyset,\ \forall U \in \mathcal{V}_x\ x \in U$
2. $U_1, U_2 \in \mathcal{V}_x \ \Rightarrow\ \exists U_3 \in \mathcal{V}_x :\ U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$.
3. $x \in U \in \mathcal{V}_y \ \Rightarrow\ \exists V \in \mathcal{V}_x :\ V \subseteq U$

allora e' possibile definire un'unica topologia Θ su X in modo tale che $\mathcal{V}_x$ sia una base d'intorni per $x \in X$:

$$\Theta = \{A \subseteq X \mid \forall x \in A\ \exists B \in \mathcal{V}_x :\ x \in B \subseteq A\}$$

Nota: la prop. 3 non serve per definire Θ, serve solo per dimostrare che tutti gli elementi di $\mathcal{V}_x$ sono aperti.

Example 1.5. Il piano di Niemytzki.

Sia $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$. Definiamo una base d'intorni per $p = (x,y)$:

CASE: $y > 0$

$$\mathcal{V}_p = \{\text{Dischi senza bordo di raggio } \frac{1}{n} \text{ e di centro } p\}$$

CASE: $y = 0$

$\mathcal{V}_p = \{$Dischi tangenti in p nel bordo (senza circonferenza, ma con p incluso) e raggio $\frac{1}{n}\}$

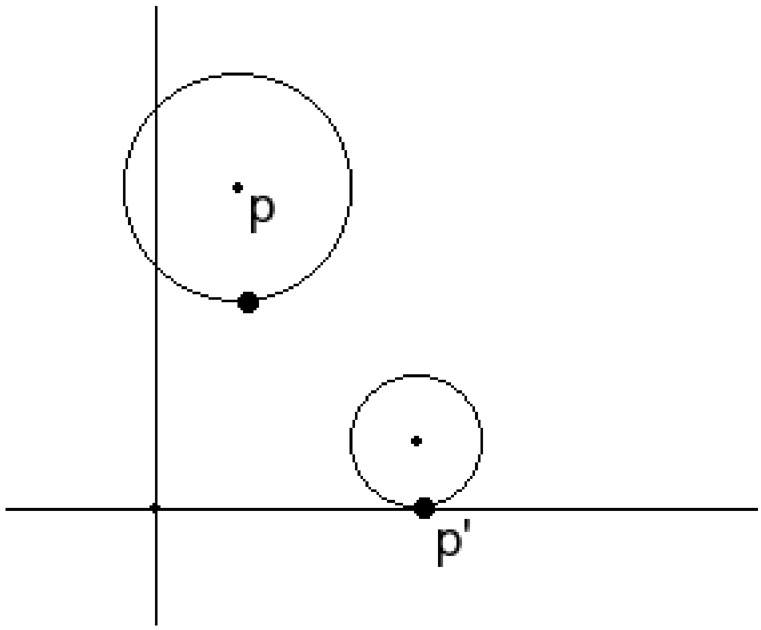


Figure 2: Il piano di Niemytzki

⟨1⟩1. Verifichiamo che questa base d'intorni definisce una topologia. Dobbiamo quindi provare le tre proprieta' delle basi d'intorni.

Ovviamente $\mathcal{V}_p \neq \emptyset$. Se prendiamo un $U \in \mathcal{V}_p$, allora proprio per costruzione di $\mathcal{V}_p$ si ha che $p \in U$.

Prendiamo $U_1, U_2 \in \mathcal{V}_p$. Nel caso in cui U_1, U_2 siano due dischi di centro p, o uno e' contenuto nell'altro o viceversa, quindi $U_1 \cap U_2 = U_1 \ \vee \ U_1 \cap U_2 = U_2$, quindi in entrambi i casi la proprieta' due e' rispettata. Analogamente si vede per il caso in cui i dischi siano tangenti in p.

In definitiva, L con $\mathcal{V}_p$ definiscono una topologia. Poiche' $\mathcal{V}_p$ e' numerabile, la topologia di Niemytzki soddisfa AS_1. □

Sia $L_1 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ (cioe' l'asse x del piano), $L_2 = L \backslash L_1$ (cioe' il semipiano di Niemytzki privato dell'asse x).

- L_1 e' chiuso.

  Proof: L_2 e' aperto, perche' per ogni suo punto p esiste un disco $B \in \mathcal{V}_p$ tale che $p \in B \subseteq L_2$. Quindi $L_1 = L \setminus L_2$ e' chiuso. □

1.14 Densita' e separazione

Definition 1.6. In (X,Θ), sia $A \subseteq X$,

$$A \equiv \text{denso} \;\Leftrightarrow\; \overline{A} = X$$
$$(X,\Theta) \equiv \text{separabile} \;\Leftrightarrow\; \exists A \subseteq X,\ \text{denso e numerabile}$$

Theorem 1.9. *Caratterizzazione degli insiemi densi.*

$$A \textit{ denso } \Leftrightarrow \forall U \in (\Theta \setminus \{\emptyset\}) \;\; A \cap U \neq \emptyset$$

Proof:
⟨1⟩1. Dim $\Rightarrow$

$$\overline{A} = X \Rightarrow \forall x \in X \;\; x \in \overline{A} \underbrace{\Rightarrow}_{[1.3,\text{pg.}12]} \forall x \in X \;\; \forall U \in B(x) \;\; U \cap A \neq 0 \underbrace{\Rightarrow}_{[1.1,\text{pg.}5]} \forall V \in \Theta \setminus \{\emptyset\} \;\; V \cap A \neq \emptyset$$

⟨1⟩2. Dim $\Leftarrow$
Poiche' $\overline{A} \subseteq X$, basta provare $X \subseteq \overline{A}$. Sia $x \in X$. Per ipotesi, si ha

$$\forall U \in B(x) \cap \Theta \;\; U \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \forall U \in B(x) \;\; U \cap A \neq 0 \underbrace{\Rightarrow}_{[1.3,\text{pg.}12]} x \in \overline{A}$$

□

1.14.1 Esempi

- $(\mathbb{R}, \Theta_e)$ e' separabile.

  Proof: $\mathbb{Q}$ e' denso infatti, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup D(\mathbb{Q})$, dove
  $D(\mathbb{Q}) = \{p \in \mathbb{R} \mid \forall U \in B(p) \;\; \exists q \in \mathbb{R} : \; q \neq p,\; q \in U \cap \mathbb{Q}\} = \mathbb{R}$
  e quindi
  $$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup D(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$$
  Poiche' $\mathbb{Q}$ e' numerabile segue che $(\mathbb{R}, \Theta_e)$ e' separabile. □

- Il piano di Niemytzki e' separabile.

  Proof: $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$ e' denso in L, infatti, ogni intorno di un punto p contiene infiniti punti con coordinate razionali, e quindi incontra A. □

- Sia X un insieme infinito, allora (X, Θ_c) e' separabile.

  Proof: Θ_c e' la topologia cofinita, quindi la famiglia dei chiusi e':
  $$\mathcal{C} = \{A \subseteq X \mid A \text{ finito}\} \cup \{X\}$$
  Prendiamo un $A \subseteq X$ infinito e numerabile. $\overline{A}$ e' il piu' piccolo chiuso che contiene A. Poiche' A e' infinito, e poiche' tutti i chiusi, tranne X, sono finiti, segue che $\overline{A} = X$.
  A e' quindi denso e numerabile. □

- La retta di Sorgenfrey e' separabile perche' $\mathbb{Q}$ e' denso e numerabile.

1.15 Topologia indotta

In (X,Θ), dato $Y \subseteq X, Y \neq \emptyset$ definiamo la topologia indotta su Y da Θ:

$$\Theta_Y = \{Y \cap B\}_{B \in \Theta}$$

(Y, Θ_Y) si chiama *sottospazio* topologico di X.
Y si chiama sottospazio di X.

$\langle 0 \rangle 5$. Dimostriamo che Θ_Y e' una topologia

$$
\begin{aligned}
&\emptyset \in \Theta,\ \ Y \cap \emptyset = \emptyset \in \Theta_Y \\
&Y \in \Theta,\ \ Y \cap Y = Y \in \Theta_Y \\
&Y_1, Y_2 \in \Theta_Y \ \Rightarrow\ Y_1 = Y \cap B_1,\ \ Y_2 = Y \cap B_2 \\
&\qquad Y_1 \cap Y_2 = Y \cap B_1 \cap Y \cap B_2 = Y \cap (B_1 \cap B_2) \subseteq \Theta_Y \\
&Y_1, Y_2 \in \Theta_Y \ \Rightarrow\ Y_1 = Y \cap B_1,\ \ Y_2 = Y \cap B_2 \\
&\qquad Y_1 \cup Y_2 = (Y \cap B_1) \cup (Y \cap B_2) = \dots
\end{aligned}
$$

□

Alcune proprieta':

1. A e' un chiuso di Y se e solo se esiste un chiuso B di X tale che $A = B \cap Y$. Formalmente:

$$Y \setminus A \in \Theta_Y \ \Leftrightarrow\ \exists B \subseteq X :\ \ X \setminus B \in \Theta,\ \ A = B \cap Y$$

2. Con $\tilde{A}$ indichiamo la chiusura di A in Y, con $\overline{A}$ la chiusura di A in X. Si ha

$$\tilde{A} = \overline{A} \cap Y$$

Proof:
$\langle 1 \rangle 1$. Dimostriamo la 1

$$
\begin{aligned}
&A \text{ chiuso di Y} \ \Rightarrow\ Y \setminus A \in \Theta_Y \ \Rightarrow\ Y \setminus A = Y \cap B,\ \ B \in \Theta \\
&A = Y \setminus (Y \cap B) = Y \setminus Y \cup Y \setminus B = Y \setminus B = (X \setminus B) \cap Y
\end{aligned}
$$

$X \setminus B$ e' un chiuso di X perche' B era un suo aperto.
Viceversa,

$$
\begin{aligned}
&\exists B \subseteq X :\ \ X \setminus B \in \Theta,\ \ A = B \cap Y \\
&\ \Rightarrow\ Y \setminus A = Y \setminus (B \cap Y) = (X \setminus B) \cap Y \ \Rightarrow\ Y \setminus A \in \Theta_Y \\
&\ \Rightarrow\ A \text{ chiuso in } Y
\end{aligned}
$$

□

$\langle 1 \rangle 2$. Dimostriamo la 2

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\mathcal{C}_A} = \{\text{famiglia dei chiusi di } Y \text{ contenenti } A \\
&\mathcal{C}_A = \{\text{famiglia dei chiusi di } X \text{ contenenti } A \\
&\tilde{A} = \bigcap \tilde{\mathcal{C}_A} \\
&B \in \tilde{\mathcal{C}_A} \ \Leftrightarrow\ B = C \cap Y,\ C \text{ chiuso di } X \quad [\text{per la 1}] \\
&\tilde{A} = \bigcap \tilde{\mathcal{C}_A} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}_A} (C \cap Y) = \Big(\bigcap_{C \in \mathcal{C}_A} C\Big) \cap Y = \overline{A} \cap Y
\end{aligned}
$$

□

Proposition 1.10. *Dato Y sottospazio di X, con (X, Θ) e (Y, Θ_Y),*

$$C \text{ chiuso di } X,\ C \subseteq Y \ \Rightarrow\ C \text{ chiuso di } Y$$

cioe'

$$X \setminus C \in \Theta,\ C \subseteq Y \ \Rightarrow\ X \setminus C \in \Theta_Y$$

Vale anche per gli aperti:

$$C \in \Theta,\ C \subseteq Y \ \Rightarrow\ C \in \Theta_Y$$

Non vale sempre l'inverso.

Proof:
$\langle 1 \rangle 1.$ Dimostriamo quello per gli aperti

$$\begin{aligned}
&C \in \Theta \\
&C \in \Theta_Y \ \Leftrightarrow\ C = Y \cap B,\ \ B \in \Theta \\
&\text{allora basta scegliere } B = C \\
&\qquad C \subseteq Y \ \ \Rightarrow\ Y \cap C = C
\end{aligned}$$

□

$\langle 1 \rangle 2.$ Diamo un controesempio
In $(\mathbb{R}, \Theta_e)$ sia $Y = [0, 1]$, (Y, Θ_y).
$[0, \frac{1}{2}[$ e' aperto di Θ_y perche' $[0, \frac{1}{2}[= [0, 1] \cap] - 1, \frac{1}{2}[$, ma di certo non e' aperto di Θ_e perche' in 0 e' chiuso. □

Proposition 1.11. *Dato Y sottospazio di X, con (X, Θ) e (Y, Θ_Y),*

$$Y \in \Theta \ \Rightarrow\ \Theta_y \subseteq \Theta$$

ovvero, Y e' un aperto in X implica che ogni aperto in Θ_y e' aperto in Θ. Analogamente per i chiusi:

$$Y \in \mathcal{C} \ \Rightarrow\ \tilde{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{C}$$

Proof:
$\langle 1 \rangle 1.$ Dimostriamo la parte relativa gli aperti

$$\begin{aligned}
&\Theta_y = \{Y \cap B\}_{B \in \Theta} \\
&Y \in \Theta \ \Rightarrow\ Y \cap B \in \Theta
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.12. *Dato Y sottospazio di X, con (X, Θ) e (Y, Θ_Y) e sia $p \in Y$*

$$U \subseteq Y,\ \textit{intorno di } p \textit{ in } Y \ \Leftrightarrow\ \exists U',\ \textit{intorno di } p \textit{ in } X : \ U = U' \cap Y$$

Definition 1.7. Una proprieta' P che riguarda uno spazio X si dice ereditaria se vale per tutti i sottospazi di X.

- Ad esempio, AS_2 e' ereditaria, cioe' se X soddisfa AS_2 allora anche tutti i suoi sottospazi lo soddisfano.

- La separabilita' non e' ereditaria.

  Proof:
  $\langle 1 \rangle 1.$ Per dimostrarlo, portiamo un controesempio

Abbiamo gia' visto che L (il piano di Niemytzki) e' separabile perche' $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$ e' denso e numerabile.
Vedremo che $L_1 \subseteq L$ non e' separabile (L_1 e' l'asse x).
Sia (L, Θ_N) la topologia di Niemytzki, e (L_1, Θ_{L_1}) la topologia indotta da Θ_N su L_1, cioe'

$$\Theta_{L_1} = \{L_1 \cap B\}_{B \in \Theta}$$

Vogliamo dimostrare che qualsiasi sottoinsieme numerabile di L_1 non e' denso.
Prendendo $p \in L_1$, si ha

$$\{p\} = L_1 \cap D, \ \ D \in \mathcal{V}_p \ \Rightarrow \ \{p\} \in \Theta_{L_1}$$

cioe' prendendo un punto sull'asse x e prendendo il disco tangente nel punto a x, la loro intersezione e' il punto stesso (considera ad esempio p' nella figura [2,pg.22]). Questo significa che Θ_{L_1} contiene tutti i singoletti, e quindi e' la topologia discreta, cioe' $\Theta_{L_1} = P(L_1)$.
Nota: La topologia discreta, su spazi non numerabili e infiniti, non soddisfa AS_2. Poiche' AS_2 e' ereditaria, questo significa che anche Θ_N non soddisfa AS_2

Poiche' per la prop [1.12,pg.25] un intorno di $p \in L_1$ e' il punto stesso, si ha che nessun insieme puo' essere denso, oltre a L_1 che e' pero' numerabile:
$A \subseteq X$

$$p \in X \setminus A \ \Rightarrow \ \forall V \in B(p)\ V = \{p\} \ \Rightarrow \ \{p\} \cap A = \emptyset \ \Rightarrow \ p \notin \overline{A} \ \Rightarrow \ X \neq \overline{A}$$

$$p \in A \ \Rightarrow \ \forall V \in B(p)\ V = \{p\} \ \Rightarrow \ \{p\} \cap A = \{p\} \ \Rightarrow \ p \notin \overline{A} \ \Rightarrow \ X \neq \overline{A}$$

□

Definition 1.8. Dato (X, Θ) e un sottospazio $F \subseteq X$,

$$F \equiv \text{discreto} \ \Leftrightarrow \ \Theta_F \equiv \text{topologia discreta} = P(F)$$

Ovvero, il sottospazio F si dice *discreto* se la topologia indotta da Θ su F e' quella discreta.

Esempio: Consideriamo $(\mathbb{R}, \Theta_e)$ e il sottospazio topologico indotto da Θ_e: $(\mathbb{Z}, \Theta_{\mathbb{Z}}$. Ogni singoletto di $\mathbb{Z}$ e' aperto:

$$\{n\} = \mathbb{Z} \cap]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[\in \Theta_{\mathbb{Z}}$$

quindi $\Theta_{\mathbb{Z}}$ e' discreta.

Theorem 1.13. *Dato (X, Θ) e un sottospazio $F \subseteq X$,*

$$F \textit{ chiuso e discreto} \ \Leftrightarrow \ D(F) = \emptyset$$

Ovvero, F e' chiuso e discreto se e solo se non ha punti di accumulazione.

Proof:
$\langle 1 \rangle 1$. Dim $\Rightarrow$

F chiuso $\Rightarrow F = \overline{F}$
per il thm [1.7,pg.15] $\overline{F} = F \cup D(F)$
quindi $F = F \cup D(F) \Rightarrow D(F) \subseteq F \Rightarrow D(F) = \emptyset \vee D(F) \subsetneq F$. Nel primo caso, la dimostrazione e' conclusa, invece, nel secondo caso tutti i punti di accumulazione di F sono suoi punti. Vediamo adesso come nessun punto $p \in F$ sia di accumulazione per F.
Poiche' F e' discreto, ogni suo singoletto e' aperto (in Θ_F), e quindi

$$\exists U \in \Theta : \ \{p\} = F \cap U$$

ma allora U e' un intorno di p che incontra F nel solo punto p, e quindi, per definizione, non e' un punto di accumulazione per F.
Concludiamo che nessun punto di F e' di accumulazione per F, percio' $D(F) = \emptyset$ □

$\langle 1 \rangle$2. Dim $\Leftarrow$
Per Hp $D(F) = \emptyset$,
per il thm [1.7,pg.15] $\overline{F} = F \cup D(F) = F \cup \emptyset = F$, e quindi F e' chiuso.
Per Hp $D(F) = \emptyset$ e quindi nessun $p \in F$ e' punto di accumulazione per F, cioe'
$\exists U \in \Theta : \ \{p\} = U \cap F$, ma allora $\{p\} \in \Theta_F$.
Poiche' ogni singoletto di F e' aperto, F e' discreto. □

1.16 Spazi metrici

Definition 1.9. Dato l'insieme $X \neq \emptyset$ e una funzione $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, che soddisfa le seguenti proprieta'

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (prop. triangolare)

d viene chiamata *metrica* o *distanza*.
(X, d) e' lo spazio metrico.

Esempi: In $\mathbb{R}^2$ la distanza usale e' $d((x_0, y_0),\ (x_1, y_1)) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$, in $\mathbb{R}$ e' $d(x, y) = |x - y|$

Definition 1.10. Una *sfera* o *palla*, di centro $x \in X$ e raggio $r \in \mathbb{R}^+$, e' definita come il seguente insieme di punti

$$S(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

1.16.1 Topologia dedotta da una metrica

La topologia dedotta da una metrica d, associata a uno spazio metrico (X, d), e'

$$\Theta(d) = \{A \subseteq X \mid \forall x \in A \ \exists r > 0 : \ S(x, r) \subseteq A\}$$

ovvero un aperto di Θ_d e' unione di sfere.
$\langle 0 \rangle$6. Dimostriamo che si tratta di una topologia

Proof:

Ovviamente $\emptyset, X \in \Theta(d)$.
Proviamo l'intersezione: $A_1, A_2 \in \Theta(d)$
$x \in A_1 \cap A_2 \;\Rightarrow\; x \in A_1 \;\wedge\; x \in A_2 \;\Rightarrow\; x \in S(x,r) \subseteq A_1 \;\wedge\; x \in S(x,s) \subseteq A_2$
Sia $t = \min\{r,s\}$, allora

$$x \in S(x,t) \subseteq A_1 \cap A_2$$

Analogamente si vede per l'unione. $\square$

Proposition 1.14. *Una base per $\Theta(d)$ e'*

$$\mathcal{B} = \{S(x,r),\;\; x \in X,\; r > 0\}$$

cioe', l'insieme di tutte le sfere.

Proof *: Poiche' abbiamo gia' visto che ogni aperto in $\Theta(d)$ e' unione di sfere, basta far vedere che ogni sfera e' un aperto.*
Sia $S(x,r)$ una sfera, vogliamo dimostrare che

$$\forall y \in S(x,r)\; \exists s > 0 :\; S(y,s) \subseteq S(x,r)$$

allora

$$\begin{aligned}
&y \in S(x,r) \;\Rightarrow\; d(x,y) < r \;\Rightarrow\; s = r - d(x,y) > 0\\
&z \in S(y,s) \;\Rightarrow\; d(y,z) < s\\
&d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) \quad \textit{[prop. triang.]}\\
&\qquad\quad < d(x,y) + s = d(x,y) + r - d(x,y) = r\\
&d(x,z) < r \;\Rightarrow\; z \in S(x,r) \;\Rightarrow\; S(y,s) \subseteq S(x,r)
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 1.15. *$(X, \Theta(d))$ soddisfa AS_1 poiche' $\forall x \in X$*

$$\mathcal{V}_x = \left\{ S\left(x, \frac{1}{n}\right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

e' un sistema fondamentale d'intorni, numerabile.

1.16.2 Esempi

In $\mathbb{R}$, posto $d(x,y) = |x-y|$, si ha $(\mathbb{R}, \Theta_e) = (\mathbb{R}, \Theta(d))$.

In $\mathbb{R}^2$, prendendo $P = (x_1,y_1),\; Q = (x_2,y_2)$ consideriamo le seguenti metriche

- $d(P,Q) = \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}$
- $d'(P,Q) = |x_1-x_2| + |y_1-y_2|$
- $d''(P,Q) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$

Vediamo quali sono le sfere di ogni metrica.

Case: $d(P,Q)$

$$S(P,r) = \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,Q) < r \;\Leftrightarrow\; \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\} < r$$

Se prendiamo per convenienza $P = (0,0)$,

$$\begin{aligned}
S(P,r) &= \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,Q) < r \;\Leftrightarrow\; \max\{|x|,|y|\} < r\}\\
&= \left\{ Q = (x,y) \;:\; \begin{cases} |x| > |y| \\ |x| < r \;\Leftrightarrow\; -r < x < r \end{cases} \quad \vee \; \begin{cases} |y| > |x| \\ |y| < r \;\Leftrightarrow\; -r < y < r \end{cases} \right\}
\end{aligned}$$

la sfera $S(P,r)$ e' un quadrato di centro P e lato r (vedi figura [3,pg.29]).

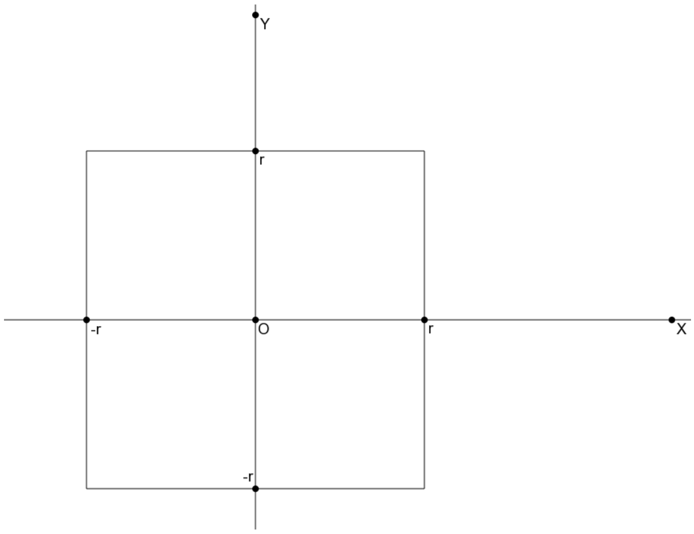


Figure 3: Metrica $d(x, y)$

CASE: $d'(P, Q)$
$$S(P, r) = \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid d'(P, Q) < r \iff |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < r$$
Per convenienza poniamo $P = (0, 0)$,
$$S(P, r) = \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < r\}$$
in questo caso abbiamo un quadrato ruotato di 45 gradi (vedi figura [4,pg.29])

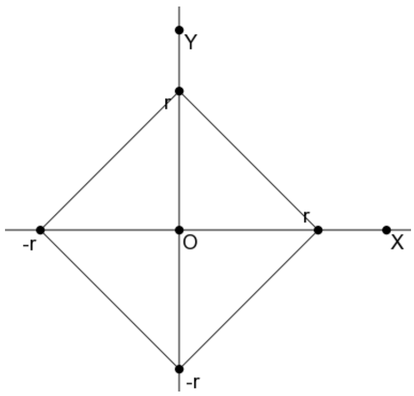


Figure 4: Metrica $d'(x, y)$

CASE: $d''(P, Q)$
In questo caso abbiamo il disco, vedi figura [5,pg.30].
Anche se queste metriche sono distinte, le loro topologie dedotte sono uguali, cioe'
$$\Theta_d = \Theta_{d'} = \Theta_{d''}$$

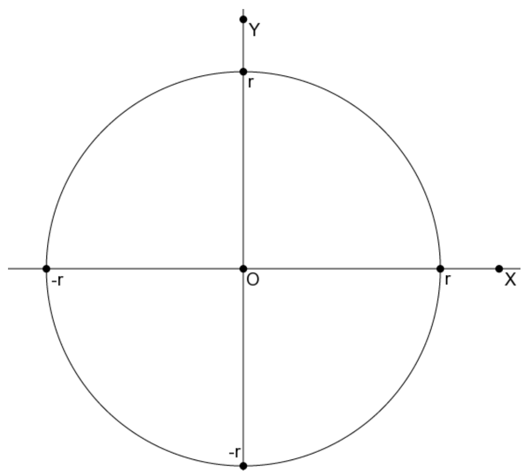


Figure 5: Metrica $d''(x, y)$

Proof:
$\langle 1 \rangle 1.$ Basta far vedere che ogni intorno di una topologia e' anche un intorno delle altre topologie
Sia U intorno aperto di p in Θ_d, per essere intorno in $\Theta_{d'}$ deve contenere un aperto di $\Theta_{d'}$. In altre parole: U e' un quadrato di centro p che deve contenere un rombo di centro p. Ovviamente questo e' possibile.
Anche tutti gli altri casi sono possibili:
disco $\subseteq$ rombo $\subseteq$ quadrato $\subseteq$ rombo
$\subseteq$ disco $\subseteq$ quadrato $\subseteq$ disco $\square$

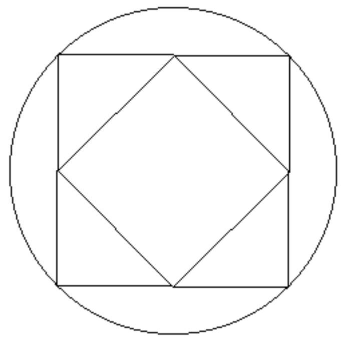


Figure 6: disco $\supseteq$ quadrato $\supseteq$ rombo

1.17 Spazio metrizzabile

Dato spazio topologico (X, Θ),

$$(X, \Theta) \equiv \text{metrizzabile} \Leftrightarrow \exists d, \text{ metrica}: \quad \Theta = \Theta(d)$$

Proposition 1.16. *Per la proposizione [1.15,pg.28], se* Θ *non soddisfa* AS_1*, allora non e' metrizzabile.*

Lemma 1.17. (X, Θ_d) *e' metrizzabile, dove* Θ_d *e' la topologia discreta.*

Proof:
Consideriamo la seguente metrica:

$$\begin{cases} d(x,y) = 3 \\ d(x,x) = 0 \end{cases}$$

Allora

$$\forall x \in X \;\; S(x,3) = \{x\}$$

Poiche' l'insieme delle sfere costituisce una base per $\Theta(d)$, concludiamo che $\Theta(d)$ e' discreta e che quindi e' uguale a Θ. $\square$

Lemma 1.18. (X, Θ_i)*, la topologia indiscreta, con* $|X| \geq 2$*, non e' metrizzabile. (Se* $|X| < 2$*, saremmo nel caso di una topologia discreta).*

Proof:
$\langle 1 \rangle 1.$ dim. per assurdo
Supponiamo che $\exists d : \; \Theta_i = \Theta(d)$
LET: $p, q \in X, \; p \neq q$
$r = d(p,q) > 0$
$q \notin S(p,r)$ [q non puo' stare sul bordo della sfera $S(p,r)$] $\Rightarrow \; S(p,r) \neq X$.
$S(p,r)$ e' un intorno di p, ma questo e' assurdo, perche' l'unico intorno di p in Θ_i e' X. $\square$

Theorem 1.19. *La metrizzabilita' e' ereditaria, ovvero*

$$(X,\Theta) \text{ metrizzabile } \Rightarrow \; (Y, \Theta_Y), \text{ sottospazio di } (X,\Theta), \text{ e' metrizzabile}$$

Proof: Per Hp (X,Θ) e' metrizzabile quindi $\exists d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, metrica. Consideriamo la sua restrizione a $Y \times Y$:
$d' : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^+, \;\; d'(x,y) = d(x,y)$
Dimostreremo che $\Theta_Y = \Theta(d')$.
$\langle 1 \rangle 1.$ Basta far vedere che $\Theta_Y, \Theta(d')$ hanno le stesse base d'intorni
LET: $p \in Y$
una base d'intorni per p in Θ_Y e'

$$\mathcal{V}_p = \{Y \cap S(p,r)\}_{r>0}$$

dove $S(p,r) \in \Theta = \Theta(d)$
Poiche' una base d'intorni per $\Theta(d')$ e'

$$\mathcal{V}'_p = \{S'(p,r)\}_{r>0}$$

basta dimostrare che $S'(p,r) = Y \cap S(p,r)$
$\langle 2 \rangle 1.$ Dim. $Y \cap S(p,r) \subseteq S'(p,r)$
LET: $q \in Y \cap S(p,r)$

$$q \in Y \;\wedge\; (q \in S(p,r) \;\Leftrightarrow\; d(q,p) < r \;\Leftrightarrow\; d'(q,p) < r)$$
$$\Rightarrow \; q \in S'(p,r)$$

$\square$

$\langle 2 \rangle 2.$ Dim. $Y \cap S(p,r) \supseteq S'(p,r)$
LET: $q \in S'(p,r)$
, ovvero

$$d'(q,p) < r \;\Rightarrow\; d(q,p) < r \;\Leftrightarrow\; q \in S(p,r)$$

inoltre, poiche'

$$S'(p,r) = \{q \in Y \mid d(q,p) < r\}$$

si ha che

$$q \in S'(p,r) \;\Rightarrow\; q \in Y \wedge q \in S(p,r)$$

$\square$

Definition 1.11. Sia $(X, \Theta(d))$ uno spazio topologico indotto da una metrica d. Dato un sottoinsieme $A \subseteq X$, definiamo la distanza di un punto $x \in X$ da A:

$$d(x, A) := \inf\{d(x,y) \mid y \in A\}$$

Theorem 1.20.

$$x \in \overline{A} \;\Leftrightarrow\; d(x,A) = 0$$

o equivalentemente:

$$\overline{A} = \{x \in X :\; d(x,A) = 0\}$$

Proof:

$\langle 1 \rangle 1.$ Dim $\Rightarrow$

Sia $x \in \overline{A}$, per il thm [1.3,pg.12], ogni intorno di x incontra A. Allora ogni sfera $S(x,r)$, che e' un intorno aperto di x, incontra A.

$$S(x,r) \cap A \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; \exists a \in A \wedge (a \in S(x,r) \;\Leftrightarrow\; d(x,a) < r)$$

Ponendo $\varepsilon = r$, possiamo affermare che

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists a = a(\varepsilon) \in A :\; 0 \leq d(x,a) < \varepsilon$$

e quindi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon = 0$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} 0 = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} d(x,a) = 0$$

$\langle 1 \rangle 2.$ Dim $\Leftarrow$

$Hp :\; d(x,A) = 0$ Se per ass

$\exists U \in B(x) :\; U \cap A = \emptyset$

Poiche' l'ins. delle sfere $S(x,r)$ e' una base d'intorni per x :

$$\exists r > 0 :\; S(x,r) \subseteq U \;\Rightarrow\; S(x,r) \cap A = \emptyset \;\Leftrightarrow\; \nexists a \in A :\; d(a,x) < r \;\Leftrightarrow\; \forall a \in A \; d(a,x) \geq r$$
$$\Leftrightarrow\; d(x,A) \geq r$$

questo e' assurdo, perche' per Hp $d(x,A) = 0$

$\square$

Theorem 1.21.

$$(X, \Theta(d)) \equiv \textit{separabile} \;\Rightarrow\; (X, \Theta(d)) \textit{soddisfa } AS_2$$

Proof:

$(X, \Theta(d)) \equiv$ separabile $\Leftrightarrow \exists A \subseteq X : \overline{A} = X,\ |A| = |\mathbb{N}|$

$\mathcal{B} = \left\{ S\left(a, \dfrac{1}{n}\right) \mid a \in A,\ n \in \mathbb{N} \right\}$

$|\mathcal{B}| = |A \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ [prodotto di ins. numerabili e' un ins. num.]

Dim che $\mathcal{B}$ e' una base di $(X, \Theta(d))$:

Sia $x \in U \in \Theta(d)$, poiche' l'ins. delle sfere e' base per $\Theta(d)$, si ha $\exists S(x, r) \subseteq U$

Sia $n \in \mathbb{N} :\ \frac{1}{n} < \frac{r}{2},\ y \in S\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$.
y esiste perche' A e' denso in X, e $S(x, \frac{1}{n})$ e' un aperto di x.

Dimostriamo che $x \in S\left(y, \dfrac{1}{n}\right) \subseteq U$:

$$y \in S\left(x, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow d(x, y) = d(y, x) < \frac{1}{n} \Rightarrow x \in S\left(y, \frac{1}{n}\right)$$

Dim che $S\left(y, \dfrac{1}{n}\right) \subseteq S(x, r)$

$$z \in S\left(y, \frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow d(z, y) < \frac{1}{n}$$

$$d(x, z) \leq d(z, y) + d(x, y) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < r$$

$$\Rightarrow z \in S(x, r)$$

In definitiva:

$$x \in S\left(y, \frac{1}{n}\right) \subseteq S(x, r) \subseteq U, \Rightarrow y \in A \Rightarrow S\left(y, \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{B}$$

Percio', per ogni x di un aperto U, abbiamo trovato un elemento S di $\mathcal{B}$ t.c. $x \in S \subseteq U$. Quindi $\mathcal{B}$ e' una base, ed e' anche numerabile.

Le topologie di Sorgenfrey e Niemytzki non soddisfano AS_2 ma sono separabili, quindi, per quest'ultimo thm, non sono metrizzabili.

1.18 Funzione continua

Definition 1.12. Siano $(X, \Theta), (Y, \Theta')$ due spazi topologici

$$f : X \longrightarrow Y \text{ e' continua } \Leftrightarrow \forall V \in \Theta'\ f^{-1}[V] \in \Theta$$

dove

$$f^{-1}[V] = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$$

In altre parole, f e' continua se la controimagine di ogni aperto di Θ' e' un aperto in Θ.

Equivalentemente, f e' continua se la controimagine di ogni chiuso in Θ' e' un chiuso in Θ.

Proof:
$\langle 1 \rangle 1.$ Dim $\Rightarrow$

$C \subseteq Y$, chiuso $\Leftrightarrow Y \setminus C \in \Theta' \Rightarrow f^{-1}(Y \setminus C) \in \Theta = X \setminus f^{-1}(C) \in \Theta \Rightarrow f^{-1}(C)$ chiuso
$\langle 2 \rangle 1.$ Dim $f^{-1}(Y \setminus C) \in \Theta = X \setminus f^{-1}(C)$

$$
\begin{aligned}
& x \in f^{-1}(Y \setminus C) = \{x \in X \mid f(x) \in Y \setminus C\} \Leftrightarrow f(x) \in Y \setminus C \\
& \quad \Leftrightarrow f(x) \in Y \wedge f(x) \notin C \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y) \wedge x \notin f^{-1}(C) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(C) = X \setminus f^{-1}(C)
\end{aligned}
$$

$\langle 1 \rangle 2.$ Dim $\Leftarrow$

$$
\begin{aligned}
& X \setminus f^{-1}(C) \in \Theta,\ Y \setminus C \in \Theta' \\
& X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus C) \in \Theta \Rightarrow f \text{ continua}
\end{aligned}
$$

□

Definition 1.13.

$$f \text{ continua in } x_0 \in X \quad \Leftrightarrow \forall V \in B(f(x_0))\ \exists U \in B(x_0) : f(U) \subseteq V$$

Theorem 1.22.

$$f : X \longrightarrow Y \textit{ continua} \Leftrightarrow f \textit{ continua in ogni } x \in X$$

Proof:
$\langle 1 \rangle 1.$ Dim $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
& x \in X,\ U \in B(f(x)) \\
& \exists A \in \Theta' : f(x) \in A \subseteq U \ \text{[def d'intorno]} \\
& \qquad \Rightarrow x \in f^{-1}(A) \\
& V = f^{-1}(A) \in \Theta \ \text{[per Hp]} \\
& f(V) = f(f^{-1}(A)) \subseteq A \subseteq U
\end{aligned}
$$

$\langle 1 \rangle 2.$ Dim $\Leftarrow$
Sia $A \in \Theta'$, vogliamo dimostrare che $f^{-1}(A) \in \Theta$.
$x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(x) \in A \Rightarrow A \in B(f(x))$
Per Hp: $\exists U \in B(x) : f(U) \subseteq A \Leftrightarrow U \subseteq f^{-1}(A)$
$\Rightarrow x \in U \subseteq f^{-1}(A)$
Ovvero $f^{-1}(A)$ e' intorno di ogni suo punto, e quindi e' aperto

□

Proposition 1.23. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ una funzione tra due spazi topologici, con $(X, \Theta), (Y, \Theta')$, e sia $\mathcal{B}$ una base di Y, allora*

$$f \textit{ continua} \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}\ f^{-1}(B) \in \Theta$$

ovvero, f e' continua sse la controimmagine di ogni elemento della base e' un aperto in Θ. Questo ci permette di verificare la continuita' di f usando sono la base $\mathcal{B}$ e non tutto Θ'.

Theorem 1.24.

$$f \textit{ continua} \Leftrightarrow \forall A \subseteq X \ \ f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

Proof:

$\langle 1 \rangle 1.$ Dim $\Rightarrow$

LET: $x \in \overline{A}$

Per la continuita' di f, f e' continua in x:

$$\forall V \in B(f(x)) \ \exists U \in B(x) : \ f(U) \subseteq V$$

PROVE: $V \cap f(A) \neq \emptyset$

per il thm [1.3,pg.12], U, intorno di x, incontra A:

$$U \in B(x) \ \Rightarrow \ U \cap A \neq \emptyset \ \Rightarrow \ f(U) \cap f(A) \neq \emptyset$$

allora poiche' $f(U) \subseteq V$ abbiamo

$$V \cap f(A) \neq \emptyset$$

Ricapitolando: ogni intorno V di $f(x) \in f(A)$ incontra $f(A)$, quindi $f(x) \in \overline{f(A)}$, e per l'arbitrarieta' di $x \in \overline{A}$ abbiamo infine che

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

$\langle 1 \rangle 2.$ Dim $\Leftarrow$

Prendiamo un chiuso $C \subseteq Y$. Poiche' $f^{-1}(C) \subseteq X$, per Hp:

$$f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))}$$

Per le proprieta' delle funzioni

$$f(f^{-1}(C)) \subseteq C$$

e per le proprieta' della chiusura

$$\overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq \overline{C} \underbrace{=}_{\text{C e' chiuso}} C$$

$$\Rightarrow \ f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq C \ \Rightarrow \ \overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C)$$

Poiche' per la proprieta' della chiusura $f^{-1}(C) \subseteq \overline{f^{-1}(C)}$, abbiamo cosi' dimostrato che $f^{-1}(C) = \overline{f^{-1}(C)}$ e che quindi f e' continua.

Theorem 1.25. *Composizione di funzioni continue e' una funzione continua. Ovvero, avendo $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$, con f, g continue si ha che gf e' ancora continua:*

$$f, g \ \textit{continue} \ \Rightarrow \ g \circ f \ \textit{continua}$$

Non vale il viceversa!

Proof:

Avendo $(X, \Theta), (Y, \Theta'), (Z, \Theta'')$

LET: $B \in \Theta''$

PROVE: $(gf)^{-1}(B) \in \Theta$

$$(gf)^{-1}(B) = (f^{-1}g^{-1})(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$$

$$g^{-1}(B) \in \Theta' \text{ [perche' g e' continua]}$$

$$f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \Theta \text{ [perche' f e' continua]}$$

$\langle 1 \rangle 1.$ Diamo un controesempio per mostrare che non vale il viceversa

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(t) = (\sin t, \cos t) \qquad\qquad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

Vediamo che g non e' continua:

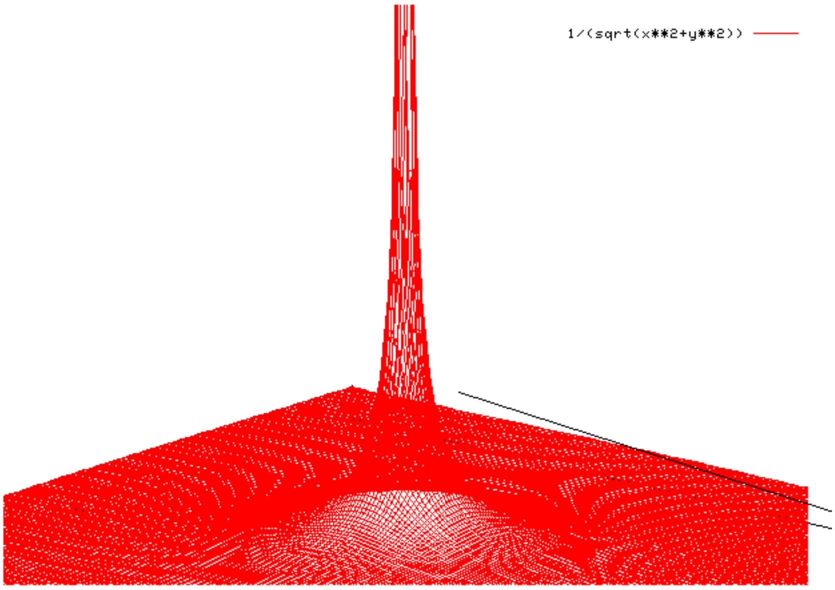


Figure 7: La funzione g

$g^{-1}(]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) \in]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[\Leftrightarrow \ \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} < \frac{3}{2} \ \Leftrightarrow \ \frac{2}{3} < \sqrt{x^2+y^2} < 2\right\} = A \cup \{(0,0)\}$

$A = \{$ tutti quei punti la cui distanza dall'origine e' $<$ di 2 e maggiore di $2/3\}$

$A =$ corona circolare formata da $S(O,2) \setminus \overline{S(O,\frac{2}{3})}$

$g^{-1}(]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[)$ non e' aperto, perche' non e' intorno di $(0,0)$.

gf e' pero' continua:

$$g(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}} = 1$$

Theorem 1.26. *Teorema dell'incollamento*
Siano $(X, \Theta), (Y, \Theta')$ due spazi topologici, dove $X = A \cup B$, con A, B entrambi chiusi o aperti.
Siano

$$f : A \longrightarrow Y$$
$$g : B \longrightarrow Y$$

continue e $f(x) = g(x)\ \forall x \in A \cap B$, allora la funzione $h = f \cup g$, ovvero[4]

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases} : X \longrightarrow Y$$

e' continua.

Proof:
$\langle 1 \rangle$1. Dimostriamo il caso in cui A, B siano chiusi

C chiuso in Θ'
$X = A \cup B \;\Rightarrow\; h^{-1}(C) = \underbrace{f^{-1}(C)}_{\text{chiuso in } A} \cup \underbrace{g^{-1}(C)}_{\text{chiuso in } B}$
Un chiuso in A e' del tipo $A \cap C_X$, dove C_X e' un chiuso in X
Un chiuso in B e' del tipo $B \cap C'_X$
A e' un chiuso $\;\Rightarrow\; A \cap C_X$ e' un chiuso
B e' un chiuso $\;\Rightarrow\; B \cap C'_X$ e' un chiuso
$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{essendo f,g continue}}$ $f^{-1}(C)$ e' chiuso in X e $g^{-1}(C)$ pure
$f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$ e' chiuso in X

$\square$

Definition 1.14.
$$f \text{ aperta } \Leftrightarrow \forall A \in \Theta\ f(A) \in \Theta'$$

Cioe', f si dice aperta se ogni sua immagine di un aperto e' un aperto.
Analogamente, f si dice chiusa se ogni sua immagine di un chiuso e' un chiuso.

1.18.1 Esempi

Example 1.15.

1. Se f e' costante, allora e' continua.
2. Esempio di due spazi top. in cui le uniche funzioni continue sono quelle costanti.
   Dati (X, Θ_c), con X infinito, Θ_c top. cofinita e $(\mathbb{R}, \Theta_e)$, sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.
   Supponiamo per assurdo che f non sia costante, cioe' che $\exists a, b \in \Im f$:

[4]Ha senso considerare l'unione di due funzioni (vedi "Unione di funzioni" in algebraI.pdf)

$a \neq b$. Possiamo allora trovare un intorno U aperto di a in $\mathbb{R}$ e uno V di b tale che $U \cap V = \emptyset$ ($\mathbb{R}$ e' T_2, vedi [2,pg.40])

f continua $\Rightarrow f^{-1}(U), f^{-1}(V) \in \Theta_c$

$\underbrace{f^{-1}(U)}_{\neq\emptyset} \cap \underbrace{f^{-1}(V)}_{\neq\emptyset} = \emptyset$

poiche' nella Θ_c due aperti non vuoti si incontrano, abbiamo trovato l'assurdo

3. Dati $(X, \Theta_1), (X, \Theta_2)$, la funzione identita' i e' tale che

$$i \text{ continua } \Leftrightarrow \Theta_2 \leq \Theta_1$$

$$i \text{ aperta } \Leftrightarrow \Theta_1 \leq \Theta_2$$

4. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x + x \geq 0 \end{cases}$$

definita da $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}'$, dove $(\mathbb{R}, \Theta_s)$ e' la top. di Sorgenfrey e $(\mathbb{R}, \Theta_e)$ quella euclidea, e' continua (mentre non lo e' in quella euclidea).

5. Consideriamo $p : (\mathbb{R}^2, \Theta_e) \longrightarrow (\mathbb{R}, \Theta_e)$ definita come $p(x, y) = x$ (e' la proiezione sull'asse x).
p e' continua, aperta, ma non chiusa.
Prendiamo un aperto sul piano, e poiche' i dischi formano una base, prendiamo un disco D. L'immagine $p(D)$ sara' un segmento aperto $p(D) =]a, b[$ perche' D e' senza bordo.
Consideriamo $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1,\ x \neq 0\}$, cioe' un'iperbole equilatera. F e' chiuso in $\mathbb{R}^2$, perche' non puo' essere unione di dischi. Per semplificare: $F = \{(x, \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0\}$. Allora $p(F) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nella topologia euclidea della retta e' un aperto. Questo dimostra che p non e' chiusa.
Consideriamo l'aperto $]a, b[$ nella seconda topologia. $p^{-1}(]a, b[)$ e' la striscia che contiene $]a, b[$. La striscia e' aperta. Ecco che p e' una funzione continua.

1.19 Omeomorfismo

Gli omeomorfismi sono l'analogo topologico degli isomorfismi in algebra. Sono funzioni che collegano strettamente due spazi topologici, rendendoli "essenzialmente" uguali.

Definition 1.16. Data $f : X \longrightarrow Y$, dove (X, Θ), (Y, Θ')

$$f \equiv \text{omeomorfismo} \Leftrightarrow f \text{ e' continua e biunivoca}, f^{-1} \text{ e' continua}$$

Gli spazi topologici X, Y si dicono omeomorfi e si scrive $X \simeq Y$.
Si ha

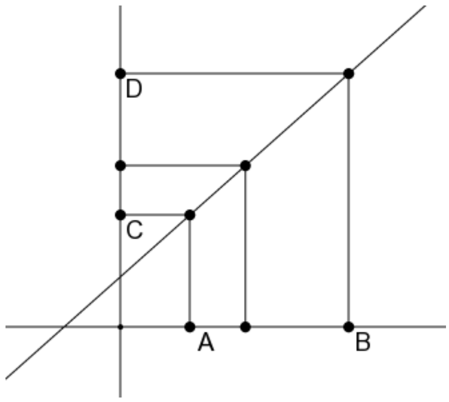
1. f^{-1} e' continua, quindi gli aperti di X vengono portati in aperti di Y da f, ovvero

$$A \in \Theta \Rightarrow f(A) \in \Theta'$$

2. f e' pure continua, quindi gli aperti di Y finiscono in aperti di X:
$$A \in \Theta \Rightarrow f^{-1}(A) \in \Theta'$$
3. Infine, poiche' f e' biettiva, per le proprieta' delle funzioni, si verifica facilmente che gli assiomi dello spazio topologico vengono preservati: presi $A, B \in \Theta$, se A, B soddisfano in X uno degli assiomi visti in [1,pg.1], allora $f(A), f(B) \in \Theta'$ soddisferanno lo stesso assioma in Y.

Grazie a queste proposizioni, se una proprieta' $P(x)$, che e' stata costruita a partire dagli assiomi topologici, e' vera in X, allora, tramite la f, e' anche vera in Y, ovvero $P(f(x))$ e' vera.
Una proprieta' che vale in uno spazio topologico X, si dice topologica se vale anche in tutti gli spazi omeomorfi a X.

Example 1.17. Due intervalli $]a,b[$, $]c,d[$ di $\mathbb{R}$, sono omeomorfi.
Pensiamo i due intervalli in $\mathbb{R}^2$ e poniamo il primo nell'asse x e il secondo nell'asse y. Partiamo dall'equazione della retta passante per $(a,c),(b,d)$
$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-c}{d-c} \longrightarrow f(x) = y = \frac{d-c}{b-a}(x-a)+c$$
Se f la restringiamo a $f :]a,b[\longrightarrow]c,d[$, abbiamo ottenuto il nostro omeomorfismo (f e' continua perche' e' lineare, cosi' come f^{-1}) Analogamente abbiamo:



$$]a,b[\simeq]c,d[$$
$$[a,b] \simeq [c,d]$$
$$[a,b[\simeq [c,d[$$
$$]a,b] \simeq]c,d]$$

Example 1.18. Per una dimostrazione alternativa, vedi l'esempio [5.5,pg.87].

2 Assiomi di separazione

Gli assiomi di separazione permettono di trattare con spazi topologici piu' particolari.
Dato uno spazio topologico (X, Θ), i primi 5 assiomi di separazione sono:

T_0 $\forall (x,y) \in X^2, x \neq y \; \exists U \in \Theta : \; x \in U, \; y \notin U \quad \vee \quad y \in U, \; x \notin U$

T_1 $\forall (x,y) \in X^2 \; \exists U, V \in \Theta : \; x \in U, \; y \notin U \quad \wedge \quad y \in V, \; x \notin V$

T_2 $\forall (x,y) \in X^2, x \neq y \; \exists U, V \in \Theta : \; x \in U, \; y \in V, \; U \cap V = \emptyset$

T_3 $\forall C \in \mathcal{C}, \; x \notin C \;\; \exists U, V \in \Theta : \; C \subseteq U, \; x \in V, \; U \cap V = \emptyset$

T_4 $\forall C, D \in \mathcal{C}, C \cap D = \emptyset \;\; \exists U, V \in \Theta : \; C \subseteq U, \; D \subseteq V, \; U \cap V = \emptyset$

Alcune definizioni equivalenti:

T_1 $\forall (x,y) \in X^2, x \neq y \; \exists U \in B(x), \; V \in B(y) : \; y \notin U, \; x \notin V$

T_1 $\forall (x,y) \in X^2, x \neq y \; \exists U \in \Theta : \; x \in U, \; y \notin U$

Uno spazio topologico che soddisfa un assioma T_i, si dice "spazio T_i"
se soddisfa T_2 si dice spazio di Hausdorff
se soddisfa T_3 e T_1 si dice spazio regolare[5]
se soddisfa T_4 e T_1 si dice spazio normale

Theorem 2.1.

$$(X, \Theta) \textit{ soddisfa } T_1 \;\Leftrightarrow\; \forall x \in X, \; \{x\} \in \mathcal{C}$$

ovvero, X e' T_1 sse ogni suo singoletto e' chiuso.

Proof:
$\langle 1 \rangle 1.$ $\Rightarrow$
LET: $x \in X$
PROVE: $X \setminus \{x\} \in \Theta$
LET: $a \in X \setminus \{x\}$, cioe' $a \neq x$
Per Hp lo spazio e' T_1, e poiche' $a \neq x$ si ha $\exists A \in \Theta : \; a \in A, \; x \notin A$

$$x \notin A \;\Rightarrow\; A \subseteq X \setminus \{x\}$$
$$a \in A \subseteq X \setminus \{x\} \;\Rightarrow\; a \in X \setminus \{x\}^\circ \quad \text{[thm [1.5,pg.14]]}$$

Per l'arbitrarieta' di $a \in X \setminus \{x\}$ segue che

$$X \setminus \{x\} = X \setminus \{x\}^\circ$$
$$\Rightarrow\; X \setminus \{x\} \in \Theta \;\Rightarrow\; \{x\} \in \mathcal{C}$$

$\langle 1 \rangle 2.$ $\Leftarrow$
LET: $y \neq x$
PROVE: $\exists U \in \Theta : \; y \in U, \; x \notin U$
Per Hp $\{x\}$ e' chiuso, quindi $X \setminus \{x\}$ e' aperto. Si ha

$$y \neq x \;\Rightarrow\; y \in X \setminus \{x\}$$
$$U = X \setminus \{x\}, \;\; U \in \Theta, \; y \in U, \; x \notin U$$

□

Theorem 2.2.

$$(X, \Theta) \textit{ soddisfa } T_1 \;\Leftrightarrow\; \forall x \in X, \; \{x\} = \bigcap_{i \in I} U_i, \;\; U_i \in \Theta$$

Ovvero, X e' T_1 se e solo se ogni suo singoletto e' intersezione di aperti.

[5] in questi appunti, parlando di spazio T_3, intendiamo uno spazio regolare (cioe' uno spazio T_3 e T_1)

Proof:
$\langle 1 \rangle 1.$ Dim $\Rightarrow$
LET: $x \in X$
Per Hp $\forall y \in X,\ y \neq x\ \exists U_y \in \Theta:\ x \in U_y,\ y \notin U_y$ quindi
$$\{x\} = \bigcap_{y \neq x} U_y$$
$\langle 1 \rangle 2.$ Dim $\Leftarrow$
LET: $y \neq x$
PROVE: $\exists U \in \Theta:\ x \in U,\ y \notin U$
Per Hp abbiamo che
$$\{x\} = \bigcap_{i \in I} U_i,\ \ U_i \in \Theta$$
$$y \neq x\ \Rightarrow\ y \notin \bigcap_{i \in I} U_i\ \Rightarrow\ \exists n \in I:\ y \notin U_n$$
$$x \in U_n,\ y \notin U_n$$
□

Theorem 2.3. *Sia (X, Θ) uno spazio topologico che soddisfa T_1 e $A \subseteq X$*
$$x \in D(A)\ \Leftrightarrow\ \forall B \in B(x)\ \ |B \cap A| \geq |\mathbb{N}|$$
ovvero, x e' un punto di accumulazione per A, se ogni suo intorno incontra A in infiniti punti (e quindi A e' anche infinito).

Proof:
$\langle 1 \rangle 1.$ Dim $\Leftarrow$
Proprio per la definizione di $D(A)$ si ha la tesi.
$\langle 1 \rangle 2.$ Dim $\Rightarrow$
LET: $B \in B(x)$
Per assurdo supponiamo che $B \cap A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, con $n \in \mathbb{N}$.
LET: $C = (B \cap A) \setminus \{x\}$
Osservando che $C \neq \emptyset$ (dato che esiste almeno un punto d'incontro tra un intorno di x e A che sia diverso da x) e che $a_i \in C\ \Leftrightarrow\ a_i \in B \cap A,\ a_i \neq x$ e poiche' siamo in uno spazio T_1, abbiamo
$$\forall a_i \in C\ \exists U_i \in \Theta:\ x \in U_i,\ a_i \notin U_i$$
$$x \in \bigcap U_i$$
$$(B \cap A) \cap (\bigcap U_i) \subseteq \{x, \emptyset\}\ \ (*)$$
$(*)$ Se $B \cap A$ contiene x, l'unico suo punto in comune con $(\bigcap U_i)$ e' proprio x, altrimenti non ha punti in comune.
Considerando che
$$x \in B \cap (\bigcap U_i)$$
$$B \cap (\bigcap U_i) \in B(x)\ \ \ \text{[inters. di intorni e' un intorno]}$$
abbiamo trovato che $B \cap (\bigcap U_i)$ e' intorno di x e incontra A in al piu' x. Questo e' assurdo con l'ipotesi $x \in D(A)$
□

Proposition 2.4. *Dato lo spazio (X, Θ) finito*
$$X \text{ soddisfa } T_1\ \Leftrightarrow\ \Theta \text{ e' discreta}$$

Proof:
$\langle 1 \rangle 1.$ Dim $\Rightarrow$

$$X \text{ finito } \Rightarrow X = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \cdots \cup \{x_n\}$$
$$X \text{ e' } T_1 \Rightarrow \{x_1\} \text{ e' chiuso } \Rightarrow X \text{ e' chiuso, in quanto unione finita di chiusi}$$
$$C = X \setminus \{x_i\} \text{ e' chiuso, perche' unione finita di chiusi}$$
$$X \setminus C = \{x_i\} \text{ e' aperto } \Rightarrow \Theta \text{ e' discreta}$$

$\langle 1 \rangle 2.$ Dim $\Leftarrow$

$$X \text{ finito } \Rightarrow X = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \cdots \cup \{x_n\}$$
$$\Theta \text{ discreta } \Rightarrow \{x_i\}\text{aperto}$$
$$X \setminus \{x_i\} \text{ e' aperto in quanto unione di aperti}$$
$$\Rightarrow \{x_i\} \text{ e' chiuso } \Rightarrow X \text{ e' } T_1$$

□

Theorem 2.5. *In uno spazio (X, Θ) che soddisfa T_2, il limite di una successione e' unico.*

Proof:
LET: $l = \lim_{n \to +\infty} p_n$
$l' = \lim_{n \to +\infty} p_n$

Supponiamo per assurdo che $l \neq l'$. Per definizione di limite

$$(*) \begin{cases} \forall U \in B(l),\ \exists v > 0 : \ \forall n > v,\ p_n \in U \\ \forall V \in B(l'),\ \exists v' > 0 : \ \forall n > v',\ p_n \in V \end{cases}$$

Poiche' lo spazio e' T_2:

$$l \neq l' \Rightarrow \exists U, V \in \Theta : \ l \in U, l' \in V,\ U \cap V = \emptyset$$

Ma per la $(*)$ accade che $p_n \in U, V \Rightarrow p_n \in U \cap V$, e questo e' assurdo.

□

Theorem 2.6. (X, Θ) *e' T_2 $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X \ \ \{x\} = \bigcap_{i \in I} U_i,\ \ U_i \in B(x),\ U_i \in \mathcal{C}$ ovvero, X e' T_2 sse ogni suo singoletto e' intersezione di suoi intorni chiusi.*

Proof:
$\langle 1 \rangle 1.$ Dim $\Rightarrow$
LET: $x \in X$
Per Hp

$$\forall y \in X, x \neq y\ \exists U_y, V_y \in \Theta : \ x \in U_y,\ y \in V_y,\ U_y \cap V_y = \emptyset$$
$$V_y \in B(y), V_y \cap U_y = \emptyset \Rightarrow y \notin \overline{U_y} \quad [\text{thm } [1.3, \text{pg.}12]]$$
$$\forall y \in X \ \ x \in \overline{U_y},\ y \notin \overline{U_y} \Rightarrow \{x\} = \bigcap_{y \neq x} \overline{U_y}$$

$\langle 1 \rangle 2.$ Dim $\Leftarrow$
LET: $x, y \in X,\ x \neq y$

$$\{x\} = \bigcap_{i \in I} U_i, \ \ U_i \text{ intorno di } x \text{, chiuso}$$
$$y \neq x \ \Rightarrow \ y \notin \bigcap_{i \in I} U_i \ \Rightarrow \ \exists n \in I : \ y \notin U_n$$
$$U_n \in B(x) \ \Rightarrow \ \exists A \in \Theta : \ x \in A \subseteq U_n$$
$$B = X \setminus U_n$$
$$y \in B \in \Theta \quad [B \text{ e' aperto perche' } U_n \text{ e' chiuso}]$$
$$A \cap B = \emptyset$$

□

Theorem 2.7.
(X, Θ) e' T_3 $\Leftrightarrow$ (X, Θ) e' T_1 e $\forall x \in X$ $\exists \mathcal{V}_x$, sistema fond. d'intorni : $\forall B \in \mathcal{V}_x$, $X \setminus B \in \Theta$.
Ovvero, (X, Θ) e' T_3 sse ogni suo punto ha un sistema fondamentale d'intorni chiusi.

Proof:
⟨1⟩1. Dim ⇒
LET: $x \in X$
PROVE: Ogni intorno di x contiene un intorno chiuso. Tutti gli intorni chiusi formeranno quindi $\mathcal{V}_x$.
Per provare che ogni intorno di x contiene un intorno chiuso, basta considerare solo gli intorni aperti, ovvero
LET: $A \in \Theta : \ x \in A$
PROVE: $\exists C$ chiuso: $x \in C \subseteq A$
LET: $F = X \setminus A$
F e' chiuso e $x \in A \ \Rightarrow \ x \notin F$
(X, Θ) e' T_3 $\Rightarrow$ $\exists U, V \in \Theta : \ x \in U, \ F \subseteq V, \ U \cap V = \emptyset$

⟨2⟩1. $\overline{U} \cap V = \emptyset$
LET: $p \in V$

$$V \in B(p), \ V \cap U = \emptyset \ \Rightarrow \ p \notin \overline{U} \quad [\text{per la caratt. della chiusura}]$$
$$\Rightarrow \ V \cap \overline{U} = \emptyset$$

⟨2⟩2. $\overline{U} \subseteq A$

$$F \subseteq V \ \Leftrightarrow \ X \setminus A \subseteq V$$
$$V \cap \overline{U} = \emptyset$$
$$\Rightarrow \ (X \setminus A) \cap \overline{U} = \emptyset \ \Rightarrow \ \overline{U} \subseteq A$$

⟨1⟩2. Dim ⇐
LET: F chiuso
$x \notin F$
PROVE: $\exists U, V \in \Theta : \ x \in U, F \subseteq V, U \cap V = \emptyset$

$x \notin F \;\Rightarrow\; x \in X \setminus F \in \Theta$, ovvero $X \setminus F$ e' un intorno aperto di x

Per Hp $\exists \mathcal{V}_x$ sistema fondamentale d'intorni chiusi, e quindi

$$\exists B \in \mathcal{V}_x : \; B \subseteq X \setminus F$$
$$\Leftrightarrow \; X \setminus B \supseteq F$$
$$B \in \mathcal{V}_x \;\Rightarrow\; B \text{ e' chiuso } \Rightarrow\; X \setminus B \text{ e' aperto}$$

$\langle 2 \rangle 1.$ Dim $x \in B^\circ$

Per definizione di intorno $\exists A \in \Theta : \; x \in A \subseteq B$, ma B° e' il piu' grande aperto contenuto in B, quindi $x \in A \subseteq B^\circ \subseteq B$

In definitiva:

$$F \subseteq X \setminus B, \; x \in B^\circ, \; (X \setminus B) \cap B^\circ = \emptyset$$

Cioe', abbiamo due aperti disgiunti, uno contenente F e l'altro contenente x.

□

Theorem 2.8.

Dato (X, Θ) spazio top. separabile,

$$\exists A \subseteq X, \;\; \textit{chiuso e discreto}, \; |A| = |\mathbb{R}| \;\Rightarrow\; (X, \Theta) \;\; \textit{non e' } T_4$$

per quanto visto nel thm [1.13,pg.26], dire che A e' chiuso e discreto, equivale a dire che non ha punti di accumulazione.

Proof:

$\langle 2 \rangle 1.$ Lemma: $A \subseteq X$ denso, $U \in \Theta \;\Rightarrow\; \overline{U} = \overline{U \cap A}$

L'inclusione $\overline{U \cap A} \subseteq \overline{U}$ e' ovvia perche' $U \cap A \subseteq U \;\Rightarrow\; \overline{U \cap A} \subseteq \overline{U}$.

Sia $p \in \overline{U}$, e $V \in B(p)$, aperto.

$$p \in \overline{U} \;\Rightarrow\; T = V \cap U \neq \emptyset$$
$$T \in \Theta$$
$$A \text{ denso } \Rightarrow\; T \cap A \neq \emptyset \text{ per def di ins. denso}$$
$$T \cap A = V \cap U \cap A \neq \emptyset \;\Rightarrow\; p \in \overline{U \cap A}$$

l'ultima implicazione deriva dall'arbitrarieta' di V: tutti gli intorni di p incontrano $U \cap A$, e quindi $p \in \overline{U \cap A}$

$\langle 2 \rangle 2.$ Dim. il thm per assurdo

Supponiamo per assurdo che X sia normale.

LET: $D \subseteq X$, denso e numerabile (esiste perche' X e' separabile)

$X_1 \subseteq X, \; |X_1| = |\mathbb{R}|, \; D(X_1) = \emptyset$

$A \subseteq X_1$

$$A \subseteq X_1, \; D(X_1) = \emptyset \;\Rightarrow\; D(A) = \emptyset \;\Rightarrow\; \overline{A} = A \cup D(A) = A \;\Rightarrow\; A \text{ chiuso}$$

$$X_1 \setminus A \text{ chiuso}, \; A \cap (X_1 \setminus A) = \emptyset$$

Poiche' lo spazio e' T_4,

$$\exists V_A, W_A \in \Theta : \ A \subseteq V_A, X \setminus A \subseteq W_A, \ V_A \cap W_A = \emptyset$$

$A \subseteq V_A \subseteq \overline{V_A} = \overline{V_A \cap D}$ per il lemma di prima

Poniamo $D_A = V_A \cap D$.

$A \subseteq \overline{V_A \cap D} = \overline{D_A}$

$A \subseteq X_1 \ \Rightarrow \ A \subseteq \overline{D_A} \cap X_1$

$p \in \overline{D_A} \cap X_1 = \overline{V_A \cap D} \cap X_1 \ \Rightarrow \ p \in \overline{V_A \cap D} = \overline{V_A}$

$V_A \cap W_A = \emptyset \ \Rightarrow \ \overline{V_A} \cap W_A = \emptyset \ \Rightarrow \ p \notin W_A \supseteq X_1 \setminus A$

$p \notin X_1 \setminus A \ \Rightarrow \ p \in A \ \vee \ p \in X \setminus X_1$

$p \in X_1 \ \Rightarrow \ p \in A$

$\Rightarrow \ \overline{D_A} \cap X_1 \subseteq A$

$A = \overline{D_A} \cap X_1$

Let: $\varphi : P(X_1) \longrightarrow P(D)$

$\varphi(A) = D_A$

$\langle 3 \rangle 1.$ φ e' iniettiva:

$$\varphi(A) = \varphi(B) \ \Leftrightarrow \ D_A = D_B \ \Rightarrow \ \overline{D_A} = \overline{D_B} \ \Rightarrow \ \overline{D_A} \cap X_1 = \overline{D_B} \cap X_1$$
$$\Rightarrow \ A = B$$

Poiche' φ e' iniettiva segue che $|P(X_1)| \leq |P(D)|$. Questo e' assurdo perche' $P(X_1)$, per il thm di Cantor, ha cardinalita' strettamente maggiore di $|\mathbb{R}|$, e $P(D) = |P(\mathbb{N})|$, poiche' D e' numerabile; cioe' $|P(X_1)| > |\mathbb{R}| = |P(D)|$.

$\square$

Theorem 2.9.

$$(X, \Theta) \ \textit{metrizzabile} \ \Rightarrow \ (X, \Theta) \ \textit{e' normale}$$

Proof:

$\langle 1 \rangle 1.$ Dim $\Rightarrow$

$\langle 2 \rangle 1.$ Dimostriamo che (X, Θ) e' T_2 (e quindi T_1)

Poiche' lo spazio e' metrizzabile $\Theta = \Theta(d)$.

Let: $p, q \in X, \ p \neq q$

Prove: $\exists U, V \in \Theta(d) : \ p \in U, q \in V, U \cap V = \emptyset$

$\varepsilon = d(p, q)$

$G_1 = S(p, \frac{\varepsilon}{2}) \in \Theta(d)$

$G_2 = S(q, \frac{\varepsilon}{2}) \in \Theta(d)$

$\langle 3 \rangle 1.$ Dim $G_1 \cap G_2 = \emptyset$

Let: $z \in G_1 \cap G_2$

Prove: assurdo

$$z \in G_1 \;\Rightarrow\; d(z,p) < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$z \in G_2 \;\Rightarrow\; d(z,q) < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$d(p,q) \underbrace{\leq}_{\text{prop. triangolare}} d(z,p) + d(z,q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
$$\Rightarrow d(p,q) < \varepsilon \text{ assurdo perche' } d(p,q) = \varepsilon$$

⟨2⟩2. Dimostriamo che e' T_4

LET: $C_1, C_2 \in \mathcal{C}: \; C_1 \cap C_2 = \emptyset$

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset \;\Rightarrow\; C_1 \subseteq \underbrace{X \setminus C_2}_{\in\Theta(d)}$$
$$C_1 \cap C_2 = \emptyset \;\Rightarrow\; C_2 \subseteq \underbrace{X \setminus C_1}_{\in\Theta(d)}$$

Per definizione di $\Theta(d)$, poiche' C_1 e' un sottoinsieme di un aperto,
$$\forall p \in C_1 \; \exists S(p, \varepsilon_p) \subseteq X \setminus C_2$$
lo stesso per C_2:
$$\forall q \in C_2 \; \exists S(p, \varepsilon_q) \subseteq X \setminus C_1$$
Allora
$$G_1 = \bigcup_{p \in C_1} S(p, \frac{\varepsilon_p}{2})$$
$$G_2 = \bigcup_{q \in C_2} S(q, \frac{\varepsilon_q}{2})$$
G_1, G_2 sono aperti perche' sono unione di sfere. Ovviamente $C_1 \subseteq G_1$ (dato che ogni punto di C_1 e' centro di una sfera di G_1). E lo stesso vale per C_2.

⟨3⟩1. Resta solo da dimostrare che $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

Per assurdo

LET: $z \in G_1 \cap G_2$

$$z \in G_1 \;\Rightarrow\; \exists p \in C_1 : \; z \in S(p, \frac{\varepsilon_p}{2}) \;\Rightarrow\; d(p,z) < \frac{\varepsilon_p}{2}$$
$$z \in G_2 \;\Rightarrow\; \exists q \in C_2 : \; z \in S(q, \frac{\varepsilon_q}{2}) \;\Rightarrow d(z,q) < \frac{\varepsilon_q}{2}$$
$$d(p,q) \leq d(p,z) + d(z,q) < \frac{\varepsilon_p}{2} + \frac{\varepsilon_q}{2} \underbrace{<}_{\text{supponiamo che } \varepsilon_p > \varepsilon_q} \varepsilon_p$$
$$\Rightarrow\; d(p,q) < \varepsilon_p \;\Rightarrow\; q \in S(p, \varepsilon_p) \subseteq X \setminus C_2 \;\text{ assurdo, perche' } q \in C_2$$

□

⟨1⟩2. Dim $\not\Leftarrow$

Per quanto abbiamo visto in [1.17,pg.33], la retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \Theta_s)$ non e' metrizzabile. E' pero' T_4.

La retta di Sorgenfrey e' definita da questa base:
$$\mathcal{B} = \{[a, a+\varepsilon[\}_{a \in \mathbb{R}}$$

⟨2⟩1. $(\mathbb{R}, \Theta_s)$ e' T_4

LET: $C_1, C_2 \in \mathcal{C}: \; C_1 \cap C_2 = \emptyset$

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset \ \Rightarrow \ C_1 \subseteq \underbrace{\mathbb{R} \setminus C_2}_{\in\Theta}$$
$$C_1 \cap C_2 = \emptyset \ \Rightarrow \ C_2 \subseteq \underbrace{\mathbb{R} \setminus C_1}_{\in\Theta}$$

Poiche' C_2, C_1 sono sottoinsiemi di un aperti, per definizione di Θ:

$$\forall p \in C_1 \ \exists [p, p+\varepsilon_p[\subseteq \mathbb{R} \setminus C_2$$
$$\forall q \in C_2 \ \exists [q, q+\varepsilon_q[\subseteq \mathbb{R} \setminus C_1$$

Costruiamo gli aperti

$$G_1 = \bigcup_{p \in C_1} [p, p+\varepsilon_p[$$
$$G_2 = \bigcup_{q \in C_2} [q, q+\varepsilon_q[$$

$G_1, G_2 \in \Theta$ perche' unione di aperti.

$\langle 3 \rangle 1.$ Resta da dimostrare che $G_1 \cap G_2 = \emptyset$

Lo dimostreremo facendo vedere che due qualsiasi aperti $[p, p+\varepsilon_p[\subseteq G_1$, $[q, q+\varepsilon_q[\subseteq G_2$ non si incontrano.

Assume: $p < q$

Se per assurdo $p + \varepsilon_p > q$ si avrebbe $q \in [p, p+\varepsilon_p[\subseteq \mathbb{R} \setminus C_2$ e dato che $q \in C_2$, questo e' assurdo. Percio' $[p, p+\varepsilon_p[\cap [q, q+\varepsilon_q[= \emptyset$

□

Proposition 2.10. *Vale la seguente catena d'implicazioni:*

$$\textit{normale} \Rightarrow \textit{regolare} \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

non vale pero' il viceversa per ognuna di esse.

$\langle 1 \rangle 1.$ Dim regolare $\Rightarrow T_2$

$x, y \in X$

$\{x\}$ e' chiuso perche' X e' T_1.

Poiche' X e' T_3, $\exists U, V \in \Theta : \ \{x\} \subseteq U, \ y \in V, \ U \cap V = \emptyset$

$\{x\} \subseteq U \ \Leftrightarrow \ x \in U$

Quindi dati $x, y \in X \ \ \exists U, V \in \Theta : \ x \in U, \ y \in V, \ U \cap V = \emptyset$. Questa e' la definizione di T_2.

□

Example 2.1. Ecco alcuni controesempi.

$\langle 1 \rangle 1.$ $T_0 \not\Rightarrow T_1$

Consideriamo la topologia delle semirette destre: (X, J_d), $J_d = \{[a, +\infty[, \ a \in \mathbb{R}\}$.

X e' T_0 perche' se prendiamo $x < y$, l'aperto $[y, +\infty[$ non contiene x ma contiene y. Tuttavia non e' T_1 perche' non esiste alcun aperto che contiene x ma non y, infatti, $x < y, \ x \in [a, +\infty[\Rightarrow \ y \in [a, +\infty[$

$\langle 1 \rangle 2.$ $T_1 \not\Rightarrow T_2$

Consideriamo la topologia cofinita Θ_c con X infinito.

Per definizione, ogni sottoinsieme finito e' chiuso, quindi anche ogni singoletto e' finito. Per il teorema [2.1,pg.40] X e' T_1. Tuttavia, dato che due aperti si incontrano sempre, non e' T_2.

⟨1⟩3. $T_2 \not\Rightarrow$ regolare

Costruiamo la topologia Θ sullo spazio $\mathbb{R}$, a partire da una base d'intorni (vedi [1.13.4,pg.21]).

CASE: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\mathcal{V}_x = \{]\, x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\, [\mid n \in \mathbb{N}\}$$

ovvero, la normale base d'intorni per Θ_e

CASE: $x = 0$

$$\mathcal{V}_x = \{]\, x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\, [\setminus Z \mid n \in \mathbb{N}\}$$

dove $Z = \left\{ \{\frac{1}{m}\}_{m\in\mathbb{N}^*} \right\}$. In sostanta, $\mathcal{V}_x$ e' la normale base d'intorni, bucata dai punti di Z.

La topologia e' definita da:

$$\Theta = \{A \subseteq X \mid \forall x \in A\ \exists B \in \mathcal{V}_x :\ x \in B \subseteq A\}$$

⟨2⟩1. Dimostriamo che Θ e' una topologia

Basta verificare le 3 proprieta' delle basi d'intorni (vedi [1.13.4,pg.21]). Nelle dimostrazioni, verificheremo solo per $x = 0$, dato che per $x \neq 0$ ritorniamo nella topologia euclidea.

⟨3⟩1. $\mathcal{V}_0 \neq \emptyset,\ \forall U \in \mathcal{V}_0\ 0 \in U$

questa proprieta' e' ovvia.

⟨3⟩2. $U_1, U_2 \in \mathcal{V}_x\ \Rightarrow\ \exists U_3 \in \mathcal{V}_x :\ U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$.

LET: $U_1, U_2 \in \mathcal{V}_0$

U_1, U_2 sono intorni che hanno centro in 0, quindi uno dei due e' contenuto nell'altro. Se ad esempio $U_1 \subseteq U_2$ si ha

$$U_1 \cap U_2 = U_1\ \Rightarrow\ U_1 \in \mathcal{V}_0,\ U_1 \subseteq U_1 \cap U_2$$

⟨3⟩3. $x \in U \in \mathcal{V}_y\ \Rightarrow\ \exists V \in \mathcal{V}_x :\ V \subseteq U$

CASE: $x = 0,\ y \neq 0$

ASSUME: $y < x$

LET: $U =]y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}[\in \mathcal{V}_y :\ y + \frac{1}{n} > 0$

basta prendere una $\varepsilon > 0 :\ \left|\frac{1}{\varepsilon}\right| < \min\{|y|, y + \frac{1}{n}\}$ e si ha

$$V =]-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}[\setminus Z \subseteq]y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}[$$

(disegnando la retta, cio' che abbiamo detto diventa immediatamente comprensibile).

CASE: $y = 0$

LET: $U =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\setminus Z \in \mathcal{V}_0$

$x \in U$

$x \in U\ \Rightarrow\ x \neq \frac{1}{m}\ \forall m \in \mathbb{N}^*$, allora possiamo trovare il punto $\frac{1}{m'}$ piu' vicino a x e prendere $\varepsilon > 0 :\ d(x, x \pm \frac{1}{\varepsilon}) < d(x, \frac{1}{m'})$ cosi' abbiamo

$$x \in]x - \frac{1}{\varepsilon}, x + \frac{1}{\varepsilon}[\subseteq U$$

Come esempio vedi fig [8,pg.48].

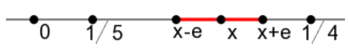


Figure 8: esempio con $m' = \frac{1}{4}$

□

⟨2⟩2. Dimostriamo che $\Theta \geq \Theta_e$, ovvero Θ e' piu' fine di Θ_e

PROVE: Ogni intorno di Θ_e e' intorno di Θ

Consideriamo solo gli intorni di tipo $\mathcal{V}_0$ (per gli altri non c'e' nulla da dimostrare, dato che sono euclidea.

Un intorno euclideo U di 0, contiene intorni "bucati" di tipo $\mathcal{V}_0$. Dato che se un insieme contiene un intorno, e' esso stesso un intorno, segue che U e' un intorno di 0 in Θ.

Per la proposizione [2.12,pg.50], si ha quindi che (X, Θ) e' T_2.

⟨2⟩3. (X, Θ) non e' T_3

Per dimostrare che non e' T_3 bisogna trovare un chiuso e un punto in modo tale che qualsiasi aperto contenente il chiuso si incontri con un qualsiasi aperto contente il punto. Come chiuso scegliamo Z e come punto $0 \notin Z$.

⟨3⟩1. Z e' un chiuso

PROVE: $\mathbb{R} \setminus Z \in \Theta$

Per come abbiamo definito Θ,

$$\mathbb{R} \setminus Z \in \Theta \iff \forall x \in \mathbb{R} \setminus Z \; \exists B \in \mathcal{V}_x : \; x \in B \subseteq \mathbb{R} \setminus Z$$

Allora, sia $x \in \mathbb{R} \setminus Z$. Cosi' come abbiamo fatto prima nel passo 3.3, se consideriamo il punto $\frac{1}{m'}$ piu' vicino a x, possiamo trovare una $\varepsilon > 0$ in modo da avere:

$$x \in]x - \frac{1}{\varepsilon}, x + \frac{1}{\varepsilon}[\subseteq \mathbb{R} \setminus Z$$

LET: $U, V \in \Theta$
$Z \subseteq V, \; 0 \in U$

⟨3⟩2. Dimostriamo che $U \cap V \neq \emptyset$

Per la definizione di Θ,

$$0 \in U \iff \exists B \in \mathcal{V}_0 : \; 0 \in B \subseteq U$$

ovvero

$$\exists n \in \mathbb{N} :] - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\setminus Z \subseteq U$$

LET: $m \in \mathbb{N}^* : \; \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$

Si ha che $\frac{1}{m} \in Z \subseteq V \Rightarrow \frac{1}{m} \in V$. Poiche' V e' aperto:

$$\exists \varepsilon > 0 :]\frac{1}{m} - \varepsilon, \frac{1}{m} + \varepsilon[\subseteq V$$

Se fissiamo $\varepsilon > 0 : \; \frac{1}{m} + \varepsilon < \frac{1}{n}$ e consideriamo le intersezioni, abbiamo:

$$\Big]\frac{1}{m} - \varepsilon, \frac{1}{m} + \varepsilon\Big[\cap \Big] - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\Big[\setminus Z \supseteq \Big]\frac{1}{m}, \frac{1}{m} + \varepsilon\Big[\setminus Z \neq \emptyset$$

Quindi $U \cap V \neq \emptyset$

⟨2⟩4. (X, Θ) non e' T_3 (dimostrazione alternativa)

Usando il teorema [2.7,pg.43], basta far vedere che almeno un punto non ha un sistema fond. d'intorni chiusi, ovvero basta trovare un intorno che non contiene un intorno chiuso.

Supponiamo per assurdo che esista un intorno $U =] - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\setminus Z$ di 0 che contenga un intorno chiuso $V =] - \frac{1}{m}, \frac{1}{m}[\setminus Z$ di 0. Se V e' chiuso $V = \overline{V}$, quindi $\overline{V} \subseteq U$, ma $\overline{V}$ e' del tipo: $\overline{V} = \overline{] - \frac{1}{m}, \frac{1}{m}[\setminus Z}$

Consideriamo $\frac{1}{d} \in Z : \; -\frac{1}{m} < \frac{1}{d} < \frac{1}{m}$. Un qualsiasi intorno di $\frac{1}{d}$, incontra V (disegna la retta per rendertene conto), quindi $\frac{1}{d} \in \overline{V}$. Per l'arbitrarieta' di d, questo vuol dire che $Z \subseteq \overline{V}$ e questo e' assurdo.

⟨1⟩4. regolare $\not\Rightarrow$ normale

Il piano di Niemytzki e' T_3 ma non e' T_4.

⟨2⟩1. Dim che e' T_3

Usando il teorema [2.7,pg.43], basta far vedere che un intorno contiene un intorno chiuso. Gli intorni chiusi, in Niemytzki, sono dischi con bordo. E' facile vedere che in ogni intorno si puo' disegnare un disco con bordo tutto contenuto in esso.

$\langle 2\rangle 2$. Dim che non e' T_4

Usando il thm [2.8,pg.44]: L e' separabile, L_1 e' chiuso e discreto (non contiene punti di accumulazione), $|L_1| = |\mathbb{R}|$ quindi L non e' T_4

□

Proposition 2.11. *T_i, con $i = 0, 1, 2, 3$, e' una proprieta' ereditaria.*

Proof:

$\langle 1\rangle 1$. Dim T_3

LET: (X, Θ) T_3

$F \subseteq X$

PROVE: (F, Θ_F) e' T_3

LET: $C' \in \mathcal{C}_F,\ p \notin C'$

Per definizione di topologia indotta $\exists C \in \mathcal{C} :\ C' = C \cap F$, quindi $p \in F, p \notin C' \ \Rightarrow\ p \notin C$. Poiche' (X, Θ) e' T_3, si ha

$$\exists U, V \in \Theta :\ C \subseteq U,\ p \in V,\ U \cap V = \emptyset$$
$$U' = U \cap F \in \Theta_F$$
$$V' = V \cap F \in \Theta_F$$
$$C' \subseteq U',\ p \in V',\ U' \cap V' = \underbrace{U \cap V}_{\emptyset} \cap F = \emptyset$$

□

$\langle 1\rangle 2$. Dim T_2

LET: (X, Θ) T_2

$F \subseteq X$

PROVE: (F, Θ_F) e' T_2

LET: $p, q \in F,\ p \neq q$

Poiche' X e' T_2 si ha

$$\exists U, V \in \Theta :\ p \in U, q \in V,\ U \cap V = \emptyset$$
$$U' = U \cap F \in \Theta_F$$
$$V' = V \cap F \in \Theta_F$$
$$p \in U',\ q \in V',\ U' \cap V' = \underbrace{U \cap V}_{\emptyset} \cap F = \emptyset$$

□

Example 2.2. $(\mathbb{R}, \Theta_e)$ soddisfa, ovviamente, T_2. Poiche' T_2 e' ereditaria, anche $\Theta_{\mathbb{R}^2_+}$, la topologia indotta su $\mathbb{R}^2_+$ da Θ_e, soddisfa T_2.

Proposition 2.12. *(X, Θ) e' T_i, con $i = 0, 1, 2$, e $\Theta' \geq \Theta \ \Rightarrow\ (X, \Theta')$ e' T_i.*

Example 2.3. La topologia di Niemytzki Θ_N e' piu' fine di $\Theta_{\mathbb{R}^2_+}$, quindi anche Θ_N soddisfa T_2 .

Theorem 2.13. *Dati i due spazi topologici $(X, \Theta), (Y, \Theta')$ con Y che soddisfa T_2, date due funzioni continue $f, g : X \longrightarrow Y$, e dato $A \subseteq X$, denso, si ha:*

$$f(x) = g(x)\ \forall x \in A \ \Rightarrow\ f(x) = g(x)\ \forall x \in X$$

Proof:
⟨1⟩1. Dimostriamolo per assurdo
ASSUME: per assurdo che $\exists x_0 \in X : \ f(x_0) \neq g(x_0)$

$f(x_0) \in Y, g(x_0) \in Y,$ poiche' Y e' T_2, si ha:
$\exists U, V \in \Theta' : \ f(x_0) \in U, \ g(x_0) \in V, \ U \cap V = \emptyset$
$f^{-1}(U) \in \Theta$ [la f e' continua]
$g^{-1}(V) \in \Theta$ [la g e' continua]
$x_0 \in \underbrace{f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)}_{\in \Theta}$
A denso $\Leftrightarrow \ \overline{A} = X \ \Leftrightarrow \ \forall B \in (\Theta \setminus \{\emptyset\}) \ \ A \cap B \neq \emptyset$ [vedi par. [1.6,pg.23]]
$\Rightarrow \ Z = (f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)) \cap A \neq \emptyset$
$\forall z \in Z$
$z \in A \ \Rightarrow \ f(z) = g(z)$
$z \in f^{-1}(U) \ \Rightarrow \ f(z) \in U$
$z \in g^{-1}(U) \ \Rightarrow \ g(z) = f(z) \in V$
$\Rightarrow \ f(z) \in U \cap V$ [assurdo, perche' $U \cap V = \emptyset$]

3 Prodotto e quozienti

3.1 POSET di topologie

Denotiamo con TOP(X) l'insieme di tutte le topologie definite su X, ovvero TOP$(X) = P(P(X))$.
(TOP$(X), \subseteq$) e' un POSET con la relazione d'inclusione (la stessa che abbiamo in [1.1,pg.1]).

Theorem 3.1. (TOP$(X), \subseteq$) *e' completo, ovvero, ogni sottoinsieme di X ammette* sup *e* inf.

Proof:
LET: $T = \{\Theta_i\}_{i \in I} \subseteq$ TOP(X)
⟨2⟩1. $\inf T = \bigcap_{i \in I} \Theta_i$
$\inf T$ e' una topologia su X, perche' intersezione di topologie: un suo aperto, e' aperto in ogni Θ_i.
Inoltre, $\inf T$ e' meno fine rispetto a ogni Θ_i: ogni suo aperto e' contenuto in Θ_i.
Infine, e' il massimo dei minoranti di T: sia τ un minorante di T, ovvero $\tau \subseteq \Theta_i \ \ \forall i \in I$,

$$\Rightarrow \tau \subseteq \bigcap_{i \in} \Theta_i = \inf T \Rightarrow \tau \leq \inf T$$

⟨2⟩2. $\sup T$ e' quella topologia τ che ha per base

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{s \in J} A_s \ \middle| \ A_s \in \Theta_s \right\}_{J \subseteq I}$$

ovvero $\mathcal{B}$ contiene tutte le possibili intersezioni finite fra aperti dei vari Θ_i.

Si dimostra che $\mathcal{B}$ e' una base (vedi [1.13.3,pg.20]).

$\langle 3 \rangle$1. $\mathcal{B}$ e' anche un maggiorante di T, perche' $\mathcal{B} \supseteq \bigcup_{i \in I} \Theta_i$
Quando $J \subseteq I$ e' un singoletto, cioe' $J = \{p\}$, si ha che $\forall A_p \in \Theta_p \;\; A_p \in \mathcal{B}$. Allora considerando tutti i singoletti, abbiamo che $\forall p \in I \;\; \Theta_p \subseteq \mathcal{B}$

$\langle 2 \rangle$3. τ e' il minimo dei maggioranti
LET: τ' un maggiorante di T
Allora $\forall i \in I \;\; \Theta_i \subseteq \tau'$. Poiche' τ' e' una topologia, conterra' tutte le intersezioni finite dei suoi aperti, e quindi $\mathcal{B} \subseteq \tau'$. Ma $\mathcal{B}$ e' base di τ, e quindi $\tau \subseteq \tau'$, ovvero $\tau \leq \tau'$.

□

Example 3.1. Consideriamo $T = \{\Theta_1, \Theta_2\} \subseteq \mathrm{TOP}(\mathbb{R})$, con $\Theta_1 = \Theta_e$, $\Theta_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus Z\}$, dove $Z = \{\frac{1}{m}\}_{m \in \mathbb{N}}$.

$\langle 0 \rangle$7. Osserviamo che $\mathbb{R} \setminus Z \notin \Theta_1$

$0 \in D(Z)$, ma $0 \notin Z$, percio' $\overline{Z} = Z \cup D(Z) \neq Z$, ovvero Z non e' chiuso, e quindi $\mathbb{R} \setminus Z \notin \Theta_1$

Avremo che

$$\inf T = \{\Theta_1 \cap \Theta_2\} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

Costruiamo il sup:
base di Θ_1 e' $\mathcal{B}_1 = \{]a, b[\}_{a<b}$
base di Θ_2 e' $\mathcal{B}_2 = \{\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus Z\}$
quindi $\mathcal{B}$, base di $\sup T$, contiene e' formata da tutte le intersezioni degli elementi di $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$:

$$\mathcal{B} = \{]a, b[\cap \mathbb{R}, \;\;]a, b[\cap \mathbb{R} \setminus Z\}_{a<b} = \{]a, b[, \;\;]a, b[\setminus Z\}_{a<b}$$

3.2 Prodotto di topologie

Proposition 3.2. *Sia data la seguente funzione:*

$$X \xrightarrow{f} (Y, \Theta')$$

dove X e' un insieme qualsiasi e (Y, Θ') uno spazio topologico. La topologia su X, meno fine tra quelle che rendono f una funzione continua e'

$$\Theta_f = \{f^{-1}(B)\}_{B \in \Theta'}$$

Θ_f viene anche detta immagine inversa di Θ' tramite f

Proof:
Θ_f e' una topologia:
1. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \Theta_f$
2. $f^{-1}(Y) = X$
3. $f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B') = f^{-1}(\underbrace{B \cap B'}_{\in \Theta'}) \in \Theta_f$

lo stesso vale per l'unione.
Per costruzione, $(X, \Theta_f) \xrightarrow{f} (Y, \Theta')$ e' continua.

Θ_f e' la top. meno fine tra quelle che rendono f continua:
Sia $\overline{\Theta_f}$ una topologia che rende f continua, allora $\overline{\Theta_f}$ conterra' tutti gli $f^{-1}(B)$, con $B \in \Theta'$. Poiche' $f^{-1}(B) \in \Theta_f$, questo vuol dire che $\Theta_f \subseteq \overline{\Theta_f}$, ovvero $\Theta_f \leq \overline{\Theta_f}$.

Proposition 3.3. *Assegnata la famiglia di spazi topologici* $\{(Y_i, \Theta_i) : i \in I\}$, *siano date le seguenti funzioni:*

$$X \xrightarrow{f_i} (Y_i, \Theta_i)$$

La topologia meno fine tra quelle che rendono ogni f_i *una funzione continua e'*

$$\Theta_I = \sup_{i \in I} \Theta_{f_i}$$

dove Θ_{f_i} *e' la topologia definita in prop. [3.2,pg.52], ovvero*

$$\Theta_{f_i} = \{f_i^{-1}(B)\}_{B \in \Theta_i}$$

Ricordandoci di quanto visto nella dim. del thm [3.1,pg.51], notiamo che Θ_I *ha per base*

$$\mathcal{B} = \{f^{-1}(B_1) \cap \dots \cap f^{-1}(B_n)\}_{B_i \in \Theta_i}$$

Proof:
Per quanto visto in thm [3.1,pg.51], $\Theta_I = \sup_{i \in I} \Theta_{f_i}$ e' una topologia.
Per definizione di sup, $\Theta_I \supseteq \Theta_{f_i}$ $\forall i \in I$, e quindi per ogni $B \in \Theta_i$ si ha $f^{-1}(B) \in Q_I$, ovvero tutte le

$$(X, \Theta_I) \xrightarrow{f_i} (Y_i, \Theta_i)$$

sono funzioni continue.
Inoltre, poiche' Θ_{f_i} e' la topologia meno fine che rende continua f_i, una topologia su X che rende tutte le f_i continue, deve necessariamente contenere tutte le Θ_{f_i}, ovvero deve essere un maggiorante di $T = \{\Theta_{f_i}\}_{i \in I}$. Percio', ogni topologia candidata e' un maggiorante di T. Allora, per definizione di sup, Θ_I e' la meno fine tra tutti i maggioranti di T.

□

Definition 3.2.
Dati due spazi topologici (X, Θ_1), (Y, Θ_2),

$$\begin{aligned} p : X \times Y &\longrightarrow X \\ p(x, y) &= x \\ q : X \times Y &\longrightarrow Y \\ q(x, y) &= y \end{aligned}$$

vengono chiamate *proiezioni* di $X \times Y$.
Si chiama *spazio topologico prodotto*:

$$(X, \Theta_1) \times (Y, \Theta_2) := (X \times Y, \Theta_\pi)$$

dove Θ_π e' la topologia meno fine che rende p, q funzioni continue (vedi prop. [3.3,pg.53]), ovvero e'

$$\Theta_\pi = \sup\{\Theta_p, \Theta_q\}$$

Θ_π ha per base

$$\mathcal{B}_\pi = \{B \times B'\}_{B \in \Theta_1,\, B' \in \Theta_2}$$

⟨1⟩1. Dim. che $\mathcal{B}_\pi$ ha per base $\{B \times B'\}$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\pi &= \{U \cap V\}_{U\in\Theta_p,\, V\in\Theta_q} \quad \text{per il thm [3.1,pg.51]}\\ &= \{p^{-1}(B)\cap q^{-1}(B')\}_{B\in\Theta_1,\, B'\in\Theta_2} = \{B\times Y \cap X\times B'\}_{B\in\Theta_1,\, B'\in\Theta_2} = \{B\times B'\}_{B\in\Theta_1,\, B'\in\Theta_2}\end{aligned}$$

□

Example 3.3.

1. $$(\mathbb{R},\Theta_e)\times(\mathbb{R},\Theta_e) = (\mathbb{R}^2,\Theta_\pi)$$

   una base di Θ_e e'
   $$\mathcal{B}_e = \{]a,b[\}_{a<b}$$
   quindi la base di Θ_π e'
   $$\mathcal{B}_\pi = \{]a,b[\times]c,d[\}_{a<b,\ c<d}$$
   ovvero, gli elementi di $\mathcal{B}_\pi$ sono rettangoli del piano senza bordo. Abbiamo provato in esempio [1.7.2,pg.9], che $\mathcal{B}_\pi$ e' una base per Θ_e. Quindi, in definitiva:
   $$(\mathbb{R},\Theta_e)\times(\mathbb{R},\Theta_e) = (\mathbb{R}^2,\Theta_e)$$

2. $(\mathbb{R},\Theta_e)\times(\mathbb{R},\Theta_d) = (\mathbb{R}^2,\Theta_\pi)$ ha per base
   $$\mathcal{B} = \{]a,b[\times\{p\}\}_{a<b,\ \{p\}\in\Theta_d}$$
   Gli elementi di $\mathcal{B}$ sono segmenti paralleli all'asse x, senza estremi.

3. $(\mathbb{R},\Theta_e)\times(\mathbb{R},\Theta_i) = (\mathbb{R}^2,\Theta_\pi)$ ha per base
   $$\mathcal{B} = \{]a,b[\times\mathbb{R}\}_{a<b}$$
   Gli elementi di $\mathcal{B}$ sono striscie parallele a y. $\mathcal{B}$ definisce quindi la topologia delle striscie (vedi [1.6,pg.7])

4. $(\mathbb{R},\Theta_s)\times(\mathbb{R},\Theta_s) = (\mathbb{R}^2,\Theta_\pi)$ ha per base
   $$\mathcal{B} = \{[a,b[\times[c,d[\}_{a<b,\ c<d}$$
   gli elementi di $\mathcal{B}_\pi$ sono rettangoli del piano che non hanno il bordo superiore e destro.

Proposition 3.4. *Data $\mathcal{B}_1$ base di (X,Θ), $\mathcal{B}_2$ base di (Y,Θ), la base di $(X\times Y,\Theta_\pi)$, topologia prodotto delle due, e':*

$$\mathcal{B} = \{A_1\times A_2:\ A_1\in\mathcal{B}_1,\ A_2\in\mathcal{B}_2\}$$

Proof:

Come abbiamo visto in [3.2,pg.53], la base di Θ_π e'
$$\mathcal{B} = \{U\times V:\ U\in\Theta,\ V\in\Theta'\}$$

usiamo le basi $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$:

$$U \in \Theta \Rightarrow U = \bigcup_{i \in I} A_i, \quad A_i \in \mathcal{B}_1$$

$$V \in \Theta' \Rightarrow V = \bigcup_{j \in J} B_j, \quad B_j \in \mathcal{B}_2$$

$$U \times V = \bigcup_{i \in I} A_i \times \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j$$

$$\Rightarrow B = \{A_1 \times A_2 : \ (A_1, A_2) \in B_1 \times B_2\} \text{ e' base di } \Theta_\pi$$

Proposition 3.5. *Dato* $W \subseteq X \times Y, \ (x, y) \in X \times Y$

$W \in B(x, y)$ *in* $\Theta_\pi \Leftrightarrow \exists U \in B(x)$ *in* X, $\exists V \in B(y)$ *in* Y: $(x, y) \in U \times V \subseteq W$

Con $W \in B(x, y)$*, indichiamo che* W *e' un intorno del punto* (x, y).

Proposition 3.6.
$\mathcal{V}_x$ *sistema fond. d'intorni di* x *in* X, $\mathcal{V}_y$ *di* y *in* $Y \Rightarrow$
$\mathcal{V}_{(x,y)} = \{U \times V : \ U \in \mathcal{V}_x, \ V \in \mathcal{V}_y\}$ *e' un sistema fond. d'intorni di* (x, y) *in* $X \times Y$

Theorem 3.7.

Let*:* $(X, \Theta), \ (Y, \Theta'), \ (X \times Y, \Theta_\pi)$
$A \subseteq X, \ B \subseteq Y$

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$$

Proof:
$\langle 1 \rangle$1. Dim $\subseteq$
Let: $(x, y) \in \overline{A \times B}$
Essendo nella chiusura, ogni suo intorno incontra $A \times B$, ovvero
$\forall U \in \Theta, \ V \in \Theta' : \ (x, y) \in \underbrace{U \times V}_{\in \Theta_\pi}$ si ha $U \times V \cap A \times B = U \cap A \times V \cap B \neq \emptyset$

$\Rightarrow U \cap A \neq \emptyset, \ V \cap B \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{A}, \ y \in \overline{B} \Rightarrow (x, y) \in \overline{A} \times \overline{B}$
Poiche' valgono anche le implicazioni inverse, anche l'inclusione $\supseteq$ e' provata.

□

Corollary 3.8. $F \subseteq X$*, chiuso,* $G \subseteq Y$*, chiuso* $\Rightarrow F \times G$*, chiuso in* $X \times Y$
(nota, non vale il viceversa)

Proof:

$$F = \overline{F}, \ G = \overline{G}$$

$$\overline{F \times G} = \overline{F} \times \overline{G} = F \times G \Rightarrow F \times G \text{ chiuso}$$

□

Corollary 3.9. $F \subseteq X$*, denso,* $G \subseteq Y$*, denso* $\Rightarrow F \times G$*, denso in* $X \times Y$
(nota, non vale il viceversa)

Proof:

$$X = \overline{F}, \ Y = \overline{G}$$

$$\overline{F \times G} = \overline{F} \times \overline{G} = X \times Y \Rightarrow F \times G \text{ denso}$$

□

Proposition 3.10.

LET*:* $(X,\Theta),\ (Y,\Theta'),\ (X\times Y,\Theta_\pi)$
$A\subseteq X,\ B\subseteq Y$

$$(A\times B)^\circ = A^\circ\times B^\circ$$

Proof:

$$\underbrace{(x,y)\in(A\times B)^\circ \ \Leftrightarrow\ \exists U\in\Theta,\ V\in\Theta' :\ (x,y)\in U\times V\subseteq A\times B}_{\text{un punto appertiene all'interno se esiste un suo intorno contenuto nell'insieme}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in U\subseteq A \ \Leftrightarrow\ x\in A^\circ \\ y\in V\subseteq B \ \Leftrightarrow\ y\in B^\circ \end{cases} \quad \Leftrightarrow\ (x,y)\in A^\circ\times B^\circ$$

□

Definition 3.4.

$$A^* = \text{punti isolati di } A \ = \{p\in A \mid \{p\}\in\Theta\}$$

Proposition 3.11. *si ha:*

$$(X\times Y)^* = X^*\times Y^*$$

Proof:

$$(x,y)\in(X\times Y)^* \ \Leftrightarrow\ \{(x,y)\}=\{x\}\times\{y\}\in\Theta_\pi \ \Leftrightarrow\ \underbrace{\{x\}}_{\in\Theta},\underbrace{\{y\}}_{\in\Theta'}$$

□

Proposition 3.12.

LET*:* $(X,\Theta),\ (Y,\Theta'),\ (X\times Y,\Theta_\pi)$
$A\times B\subseteq X\times Y$
Θ_A*, la topologia indotta da* Θ *su* A
Θ'_B*, la topologia indotta da* Θ' *su* B
$\Theta_{A\times B}$*, la topologia indotta da* Θ_π *su* $A\times B$
si ha che

$$(A,\Theta_A)\times(B,\Theta'_B) = (A\times B,\Theta_{A\times B})$$

Proof:
Basta dimostrare che le basi delle due topologie coincidono:
base di $(A\times B,\Theta_{A\times B})$:

$$\mathcal{B}_2 = \{A\times B\cap U\times V\}_{U\in\Theta,\ V\in\Theta'}$$

base di $(A,\Theta_A)\times(B,\Theta'_B)$:

$$\mathcal{B}_1 = \{U\times V\}_{U\in\Theta_A,\ V\in\Theta'_B} = \{A\cap U'\times B\cap V'\}_{U'\in\Theta,\ V'\in\Theta'} = \{A\times B\cap U'\times V'\}_{U'\in\Theta,\ V'\in\Theta'} = \mathcal{B}_2$$

□

Proposition 3.13. *Le proiezioni* p,q *sono funzioni aperte*[6]*.*

Proof:

[6] Per $(\mathbb{R}^2,\Theta_e)$ abbiamo gia' visto l'esempio [1.15,pg.37].

$p : (X \times Y, \Theta_\pi) \longrightarrow (X, \Theta)$
Un aperto di $X \times Y$ e' del tipo $\bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$, dove $U_i \in \Theta,\ V_i \in \Theta'$, allora

$$p(\bigcup_{i\in I} U_i \times V_i) = p(\bigcup_{i\in I} U_i \times \bigcup_{i\in I} V_i) = \bigcup_{i\in I} U_i \in \Theta$$

$q : (X \times Y, \Theta_\pi) \longrightarrow (Y, \Theta')$
Analogamente: $\bigcup_{i \in I} U_i \times V_i \in \Theta_\pi$,

$$q(\bigcup_{i\in I} U_i \times \bigcup_{i\in I} V_i) = \bigcup_{i\in I} V_i \in \Theta'$$

Definition 3.5. Sia (X, Θ) uno spazio topologico, la sua diagonale e':

$$\delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

Theorem 3.14. *δ e' chiuso $\Leftrightarrow$ X e' T_2*

Proof:
Poiche' δ e' chiuso, i punti che non gli appartengono, non sono suoi punti di accumulazione:

$$\begin{cases} \delta \text{ chiuso} \\ \overline{\delta} = \delta \cup D(\delta) \end{cases} \Leftrightarrow D(\delta) \subseteq \delta \vee D(\delta) = \emptyset$$

per cui $(x, y) \in D(\delta) \Rightarrow (x, y) \in \delta,\ (x, y) \notin \delta \Rightarrow (x, y) \notin D(\delta)$

$(x, y) \notin \delta \ \Rightarrow \ (x, y) \notin D(\delta) \Rightarrow \exists U, V \Theta :\ (x, y) \in U \times V \cap \delta = \emptyset$

$\langle 2 \rangle$1. Dim $U \times V \cap \delta = \emptyset \ \Leftrightarrow \ U \cap V = \emptyset$
Per assurdo, supp che $x \in U \cap V$:
$x \in U \cap V \neq \emptyset \ \Leftrightarrow \ x \in U,\ x \in V \ \Leftrightarrow \ (x, x) \in U \times V \ \Leftrightarrow \ U \times V \cap \delta \neq \emptyset$ assurdo
Quindi $(x, y) \notin \delta \ \Leftrightarrow \ x \neq y,\ x \in U,\ y \in V,\ U \cap V = \emptyset,\ \ U, V \in \Theta$ implica che X e' T_2.
Procedendo a ritroso, si dimostra anche il viceversa.

$\square$

Theorem 3.15.

Let: $(X, \Theta),\ (Y, \Theta'),\ (X \times Y, \Theta_\pi),\ (Z, \Theta'')$
$f : Z \longrightarrow X \times Y$
Le proiezioni: $p : X \times Y \longrightarrow X,\ q : X \times Y \longrightarrow Y$
allora

$$f \ \ \textit{continua} \Leftrightarrow p \circ f,\ q \circ f \ \ \textit{sono continue}$$

ovvero, f e' continua sse le sue "coordinate" lo sono.

Proof:
$\langle 1 \rangle$1. Dim $\Rightarrow$
f, p, q sono funzioni continue. Composizione di funzioni continue (vedi thm [1.25,pg.35]).
$\langle 1 \rangle$2. Dim $\Leftarrow$
Usiamo solo gli aperti della base di Θ_π, ovvero $U \times V$ con $U \in \Theta,\ V \in \Theta'$.
Poiche'

$$f^{-1}(U \times V) = \underbrace{(\underbrace{p \circ f}_{\text{funz cont.}})^{-1}(U)}_{\in \Theta''} \cap \underbrace{(\underbrace{q \circ f}_{\text{funz cont.}})^{-1}(V)}_{\Theta''} \in \Theta''$$

la f e' continua

$\langle 2 \rangle 1.$ Dim l'eguaglianza precedente

$z \in f^{-1}(U \times V) \;\Leftrightarrow\; f(z) \in U \times V$
$p(f(z)) \in U,\; q(f(z)) \in V \;\Leftrightarrow\; z \in (pf)^{-1}(U),\; z \in (qf)^{-1}(V) \;\Leftrightarrow\; z \in (pf)^{-1}(U) \cap (qf)^{-1}(V)$
viceversa,
$p(f(z)) \in U,\; q(f(z)) \in V \;\Rightarrow\; f(z) \in p^{-1}(U) = U \times Y,\; f(z) \in X \times V \;\Rightarrow$
$\;\Rightarrow\; f(z) \in U \times Y \cap X \times V = U \cap X \times Y \cap V = U \times V \Rightarrow z \in f^{-1}(U \times V)$
$\square$

Example 3.6. $f(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$f(t) = (\cos t, \sin t)$ e' continua perche' $\cos t, \sin t$ sono funzioni continue.

Example 3.7.

LET: $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, continua
$g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, continua
Le seguenti funzioni sono continue: $f(x)+g(x), f(x)g(x), \max\{f(x), g(x)\}, \min\{f(x), g(x)\}$
Dimostriamolo solo per $f(x) + g(x)$.
Consideriamo

$$\begin{aligned} & s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad s(x, y) = x + y \\ & h : X \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & \qquad h(x) = (f(x), g(x)) \end{aligned}$$ [e' continua per il thm [3.15,pg.57]]

dimostriamo che s e' continua:

$$s^{-1}(\underbrace{]a, b[}_{\in \text{ base di } (\mathbb{R}, \Theta_e)}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x + y < b\}$$

Quest'ultimo insieme, e' la striscia di piano delimitata dalle due rette $x+y-a = 0,\; x + y - b = 0$, ed e' un aperto in $(\mathbb{R}^2, \Theta_e)$. Quindi s e' continua.
In definitiva, $(sh)(x) = f(x) + g(x)$, composizione di funz continue, e' continua.
In modo analogo si procede per gli altri casi.

Theorem 3.16. *Data $f : (X, \Theta) \longrightarrow (Y, \Theta')$, continua, con Y spazio di Hausdorff, si ha che $G_f \subseteq X \times Y$ e' un chiuso nella topologia prodotto, dove $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ e' il grafico di f.*

Proof:
Per mostrare che G_f e' chiuso, faremo vedere i punti che non gli appartengono, non sono suoi punti di accumulazione.
$(x_0, y_0) \notin G_f \;\Leftrightarrow\; y_0 \neq f(x_0)$
Y e' $T_2 \;\Rightarrow\; \exists U, V \in \Theta' : \; y_0 \in U,\; f(x_0) \in V,\; U \cap V = \emptyset \;\; (0)$
f continua in $x_0 \;\Leftrightarrow\; \forall W \in B(f(x_0))\; \exists T \in B(x_0) : \; f(T) \subseteq W$
$V \in B(f(x_0)) \;\Rightarrow\; \exists T \in \Theta' : \; x_0 \in T,\; f(T) \subseteq V \;\; (1)$
$T \in B(x_0),\; U \in B(y_0) \;\Rightarrow\; T \times U \in B((x_0, y_0))$ [per la prop [3.5,pg.55]]
$\langle 2 \rangle 1.$ Dim. come ultimo passo che $T \times U \cap G_f = \emptyset$

Per assurdo:

$$(x,y) \in T \times U \cap G_f$$
$$\Rightarrow \; x \in T \;\Rightarrow\; f(x) \in V \quad \text{[per la (1)}$$
$$\Rightarrow \; y \in U,\; y = f(x) \;\Rightarrow\; y \in U \cap V \;\; \text{assurdo per la (0)}$$

⟨2⟩2. Q.E.D.

Abbiamo dimostrato che $D(G_f) \subseteq G_f$, quindi $\overline{G_f} = G_f \cup D(G_f) = G_f$, ovvero G_f e' chiuso.

⟨1⟩1. Diamo un controesempio che mostra $\not\Leftarrow$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

e' l'iperbole. Come abbiamo visto in nell'esempio [1.15,pg.37], G_f e' un chiuso in $\mathbb{R}^2$, pero' $f(x)$ non e' continua (0 e' di discontinuita').

□

Proposition 3.17. Let: *X, Y insiemi infiniti*

(X, Θ_c), (Y, Θ'_c)

$(X \times Y, \Theta''_c)$ top. cofinita su $X \times Y$, $(X \times Y, \Theta_\pi)$ topologia prodotto su X, Y.

si ha

$$\Theta''_c < \Theta_\pi$$

Proof:

⟨1⟩1. Mostriamo che i chiusi di Θ''_c sono chiusi di Θ_π e che $\exists$ un chiuso di Θ_π che non lo e' di Θ''_c

I chiusi di Θ''_c sono i sottoinsiemi finiti o l'insieme $X \times Y$. Se prendiamo $A \times B$ chiuso di Θ''_c, avremo che $A \times B$ e' finito. Allora A e B sono finiti, e quindi sono chiusi rispettivamente in Θ_c e Θ'_c.

X e' un chiuso in Θ_c, e $\{y\}$ un chiuso in Θ'_c, quindi $X \times \{y\}$ e' un chiuso in Θ_π, perche' prodotto di chiusi. Non e' pero' chiuso di Θ''_c, perche' X e' infinito e quindi pure $X \times \{y\}$ lo e'.

Proposition 3.18. *$x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, si ha:*

$$X \simeq X \times \{y_0\}, \;\; Y \simeq Y \times \{x_0\}$$

Proof: L'omeomorfismo cercato e' la restrizione della proiezione p:

$$p' : X \times \{y_0\} \longrightarrow X$$

infatti,

- p e' continua, quindi una sua restrizione e' continua
- p' e' biunivoca
- p e' aperta, quindi una sua restrizione e' aperta. Essendo p' aperta, p'^{-1} e' continua.

□

Theorem 3.19. Let: *$(X, \Theta(d_1))$, $(Y, \Theta(d_2))$ due spazi topologici con metrica , allora $(X \times Y, \Theta_\pi)$ e' metrizzabile, ovvero $\exists$metrica $d :\; \Theta_\pi = \Theta(d)$.*

Proof:

LET: $z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2)$

Definiamo la seguente metrica:

$$d : (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$d(z_1, z_2) = \max\{d_1(x_1, x_2),\ d_2(y_1, y_2)\}$$

verifichiamo che si tratta di una metrica:

- ovviamente $d(z_1, z_2) \geq 0$
- $d(z_1, z_2) = 0 \ \Leftrightarrow\ d_1(x_1, x_2) = 0 \wedge d_2(y_1, y_2) = 0$
  $d_1(x_1, x_2) = 0 \ \Leftrightarrow\ x_1 = x_2$
  $d_2(y_1, y_2) = 0 \ \Leftrightarrow\ y_1 = y_2$
- $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$
- Sia $z = (x, y)$, proviamo la proprieta' triangolare, solo in due casi:

  CASE: $d(z_1, z) = d_1(x_1, x) \geq d_2(y_1, y)$
  $d(z_2, z) = d_1(x_2, x) \geq d_2(y_2, y)$

  CASE: $d(z_1, z_2) = d_1(x_1, x_2) \geq d_2(y_1, y_2)$

  $$d_1(x_1, x) + d_1(x_2, x) \geq d_1(x_1, x_2) = d(z_1, z_2)$$

  CASE: $d(z_1, z_2) = d_2(y_1, y_2) \geq d_1(x_1, x_2)$

  $$d_1(x_1, x) + d_1(x_2, x) \geq d_2(y_1, y) + d_2(y_2, y) \geq d_2(y_1, y_2) = d(z_1, z_2)$$

Proviamo che $\Theta_\pi = \Theta(d)$.

Θ_π ha come base:

$$\mathcal{B} = \{U \times V\}_{U \in \Theta(d_1),\ V \in \Theta(d_2)}$$

Poiche' $\Theta(d_1),\ \Theta(d_2)$ hanno come base l'insieme delle sfere definite dalle rispettive metriche, per la proposizione [3.4,pg.54], la base di Θ_π sara' l'insieme formato dal prodotto delle sfere:

$$\mathcal{B} = \{S_1 \times S_2\}_{S_1 \in \mathcal{B}_1,\ S_2 \in \mathcal{B}_2}$$

la base di $\Theta(d)$ e' l'insieme delle sfere come metrica d, quindi quello che resta da provare e'

$$z_0 = (x_0, y_0)$$
$$S_d(z_0, \varepsilon) = S_1(x_0, \varepsilon) \times S_2(y_0, \varepsilon)$$

allora:

$$z = (x, y) \in S_1(x_0, \varepsilon) \times S_2(y_0, \varepsilon) \ \Leftrightarrow\ x \in S_1(x_0, \varepsilon),\ y \in S_2(y_0, \varepsilon)$$
$$\Leftrightarrow\ d_1(x, x_0) < \varepsilon,\ d_2(y, y_0) < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow\ \max\{d_1(x, x_0), d_2(y, y_0)\} = d(z, z_0) < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ z \in S_d(z_0, \varepsilon)$$

□

Corollary 3.20. *Le seguenti metriche definiscono lo stesso spazio topologico Θ_π su $X \times Y$:*

1. $d(z_1, z_2) = \max\{d_1(x_1, x_2),\ d_2(y_1, y_2)\}$
2. $d'(z_1, z_2) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2)$
3. $d''(z_1, z_2) = \sqrt{d_1(x_1, x_2)^2 + d_2(y_1, y_2)^2}$

ovvero

$$\Theta_\pi = \Theta(d) = \Theta(d') = \Theta(d'')$$

Proof: Nel caso di $\mathbb{R}^2$ l'abbiamo gia' dimostrato qui in par. [1.16.2,pg.30]. Per il caso generale, si considera questa diseguaglianza:

$$d(z_1,z_2) \leq d''(z_1,z_2) \leq d'(z_1,z_2) \leq 2d(z_1,z_2)$$

se si considera il loro significato geometrico le diseguaglianze si intepretano cosi':
massimo tra i cateti di un triang. rett. $\leq$ ipotenusa $\leq$ somma dei cateti $\leq 2d(z_1,z_2)$

$\langle 1\rangle$1. Dimostriamo solo $d'(z_1,z_2) \leq 2d(z_1,z_2)$ (le altre sono ovvie)

CASE: $d(z_1,z_2) = \max\{d_1(x_1,x_2),\ d_2(y_1,y_2)\} = d_1(x_1,x_2) \geq d_2(y_1,y_2)$

$$d_1(x_1,x_2) + d_2(y_1,y_2) \leq 2d_1(x_1,x_2) \ \Leftrightarrow\ d_2(y_1,y_2) \leq d_1(x_1,x_2)$$

CASE: $d(z_1,z_2) = \max\{d_1(x_1,x_2),\ d_2(y_1,y_2)\} = d_2(y_1,y_2) \geq d_1(x_1,x_2)$

$$d_1(x_1,x_2) + d_2(y_1,y_2) \leq 2d_2(y_1,y_2) \ \Leftrightarrow\ d_1(x_1,x_2) \leq d_2(y_1,y_2)$$

$\langle 1\rangle$2. Dalle diseguaglianze segue che $S_d(z,\frac{r}{2}) \subseteq S'(z,r) \subseteq S''(z,r) \subseteq S_d(z,r)$

$$z_2 \in S_d(z,\frac{r}{2}) \ \Rightarrow\ d(z,z_2) < \frac{r}{2} \ \Leftrightarrow\ 2d(z,z_2) < r$$
$$\Rightarrow\ r > 2d(z,z_2) \geq d'(z,z_2)\ \Rightarrow$$
$$z_2 \in S'(z,r)$$

analogamente si procede per gli altri. Dimostriamo solo l'inclusione finale:

$$z_2 \in S''(z,r) \ \Leftrightarrow\ d''(z,z_2) < r$$
$$\Rightarrow |; r > d''(z,z_2) \geq d(z,z_2) \ \Rightarrow$$
$$z_2 \in S_d(z,r)$$

$\langle 1\rangle$3. Q.E.D.

Queste inclusioni ci dicono che ogni tipo di sfera e' inclusa in ogni altro tipo di sfera, quindi ogni base e' base per ogni topologia, ovvero

$$\Theta(d) = \Theta(d') = \Theta(d'')$$

Inoltre, poiche' avevamo gia' visto che $\Theta_\pi = \Theta(d)$, si ha:

$$\Theta_\pi = \Theta(d) = \Theta(d') = \Theta(d'')$$

□

Theorem 3.21. LET: *Siano* (X,Θ), (Y,Θ') *due spazi topologici* T_i *allora lo spazio prodotto* $(X,\Theta)\times(Y,\Theta')$ *e'* T_i, *per* $i = 0,1,2,3$.

Proof:

- T_1
  Per la caratterizzazione di T_1, $\{x_0\}$ e $\{y_0\}$ sono chiusi. Allora per il prodotto di chiusi, pure $\{x_0\}\times\{y_0\} = \{(x_0,y_0)\}$ lo e', quindi sempre per la caratterizzazione, $X\times Y$ e' T_1.
- T_2
  Consideriamo $(x_1,y_1),(x_2,y_2), x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$, poiche' e' X e Y sono T_2:
  $\exists U_1,U_2 \in \Theta:\ x_1 \in U_1,\ x_2 \in U_2,\ U_1 \cap U_2 = \emptyset$
  $\exists V_1,V_2 \in \Theta:\ y_1 \in V_1,\ y_2 \in V_2,\ V_1 \cap V_2 = \emptyset$
  $U_1 \times V_1 \in B((x_1,y_1)),\ U_2 \times V_2 \in B((x_2,y_2))$ [per il prodotto d'intorni]
  $U_1 \times V_1 \cap U_2 \times V_2 = U_1 \cap U_2 \times V_1 \cap V_2 = \emptyset \times \emptyset = \emptyset$
- T_3

  LET: $(x,y) \in X \times Y$
  $x \in U \in \Theta,\ y \in V \in \Theta'$

Usiamo la caratterizzazione del thm [2.7,pg.43], ovvero ogni intorno di un punto contiene un intorno chiuso:

$$x \in U \supseteq \overline{W_1} = W_1$$
$$y \in V \supseteq \overline{W_2} = W_2$$
$$(x, y) \in \overline{W_1} \times \overline{W_2} = \overline{W_1 \times W_2} \subseteq U \times V$$

quindi ogni intorno di un punto di $X \times Y$ contiene un intorno chiuso.

$\langle 1 \rangle 1.$ Dim che non vale per T_4

Usiamo il thm [2.8,pg.44].

LET: $X =$ retta di Sorgenfrey

Nel controesempio del thm [2.9,pg.45], abbiamo gia' visto che X e' T_4. $X \times X$ e' separabile perche' $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e' denso e numerabile. Consideriamo

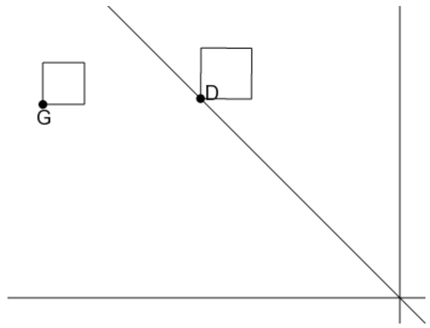
$$D = \{(x, -x), \mid x \in X\}$$

ovviamente $|D| = |\mathbb{R}|$.

Avevamo gia' visto negli esempi [3.3,pg.54] una base per (X^2, Θ_π), una base piu' piccola e'

$$\mathcal{B} = \{[a, a + \varepsilon[\times[a, a + \varepsilon[\}_{a \in X}$$

D non ha punti di accumulazione: considera la figura [3.2,pg.62] per qualsiasi



punto di $X \times X$ e' sempre possibile creare un suo intorno, ovvero un quadrato che lo contenga, che non incontra D.

Nota: il quadrato e' privo di lato destro e superiore, ma non di quello sinistro e inferiore. In $(\mathbb{R}, \Theta_e)$, invece, i quadrati sono privi di lati. Questo e' il motivo per cui questo ragionamento non si puo' applicare a $(\mathbb{R}, \Theta_e)$.

$\square$

Proposition 3.22. *Siamo in $(X, \Theta(d))$, con la sua metrica*

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

adesso consideriamo d come una funzione tra spazi topologici:

$$d : (X \times X, \Theta_\pi) \longrightarrow (\mathbb{R}, \Theta_e)$$

Si ha che d e' una funzione continua.

Proof:

Consideriamo la base di $\Theta(d)$:

$$\mathcal{B} = \{S(x, r) \mid x \in X,\ r > 0\}$$

per il prodotto di basi, la base di Θ_π sara' allora
$$\mathcal{B}_\pi = \{S(x,r) \times S(x',r') \mid x,x' \in X,\ r,r' > 0\}$$
una base di Θ_e e'
$$\mathcal{B}_e = \{]y-\varepsilon, y+\varepsilon[\}_{y\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0}$$
$\langle 2\rangle 1.$ Bastera' dimostrare che $d^{-1}(]y-\varepsilon, y+\varepsilon[)$ e' un aperto in Θ_π

$$\begin{aligned}
&d^{-1}(]y-\varepsilon, y+\varepsilon[) = \{(x,x') \in X^2 \mid d(x,x') \in]y-\varepsilon, y+\varepsilon[\} = \\
&\qquad d(x,x') \in]y-\varepsilon, y+\varepsilon[\ \Leftrightarrow y-\varepsilon < d(x,x') < y+\varepsilon \\
&\qquad \Leftrightarrow x \in S(x', y+\varepsilon) \backslash \overline{S(x', y-\varepsilon)},\ x' \in S(x, y+\varepsilon) \backslash \overline{S(x, y-\varepsilon)} \\
&\qquad \Leftrightarrow (x,x') \in S(x', y+\varepsilon) \times S(x, y+\varepsilon) \backslash \overline{S(x', y-\varepsilon)} \times \overline{S(x, y-\varepsilon)} \\
&= \{(x,x') \in S(x', y+\varepsilon) \times S(x, y+\varepsilon) \backslash \overline{S(x', y-\varepsilon)} \times \overline{S(x, y-\varepsilon)}\} = \\
&= S(x', y+\varepsilon) \times S(x, y+\varepsilon) \backslash \overline{S(x', y-\varepsilon) \times S(x, y-\varepsilon)} \in \Theta_\pi
\end{aligned}$$
Nota che $\overline{S()}$ e' la sfera chiusa, ovvero con bordo. Abbiamo anche sfruttato il fatto che Aperto $\setminus$ Chiuso = Aperto. □

3.3 Topologia quoziente

Sia $f : (X, \Theta) \longrightarrow Y$ una funzione surriettiva. La topologia su Y, piu' fine tra quelle che rendono continua f, si chiama topologia quoziente rispetto a f. Essa e'
$$\Theta_q(f) = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \Theta\}$$
Se $\mathcal{C}$ e' l'insieme dei chiusi su Θ, allora
$$\mathcal{C}_q(f) = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{C}\}$$
e' l'insieme dei chiusi su $\Theta_q(f)$

Proof:
$\langle 1\rangle 1.$ Si verifica semplicemente che $\Theta_q(f)$ e' una topologia
$\langle 1\rangle 2.$ Dim che $\Theta_q(f)$ e' la top piu' fine tra quelle che rendono continua f
Sia Θ' una top su Y che rende continua f, allora
$$\begin{aligned} &B \in \Theta' \\ &f^{-1}(B) \in \Theta \ \ [f \text{ e' resa continua}] \end{aligned}$$
ma allora, per definizione, $B \in \Theta_q(f)$
$\langle 1\rangle 3.$ Dim $\mathcal{C}_q(f) = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{C}\}$

$$\mathcal{C}_q(f) = \{B \subseteq Y \mid Y \setminus B \in \Theta_q(f) \ \Leftrightarrow\ f^{-1}(Y \setminus B) \in \Theta\}$$
Per quanto abbiamo visto a [1.18,pg.34], si ha
$$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B) \in \Theta \ \Leftrightarrow\ f^{-1}(B) \in \mathcal{C}$$
quindi
$$\mathcal{C}_q(f) = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{C}\}$$
□

Definition 3.8.
Sia $f : (X, \Theta) \longrightarrow (Y, \Theta')$ una funzione. Diremo che

f e' *funzione quoziente* $\Leftrightarrow \Theta' = \Theta_q(f)$, ovvero, Θ' e' la topologia quoziente.

Theorem 3.23.

LET: (X,Θ), (Y,Θ'), (Z,Θ'') *tre spazi topologici*
$\pi : (X,\Theta) \longrightarrow (Y,\Theta')$ *funzione quoziente, cioe'* $\Theta' = \Theta_q(\pi)$
$f : Y \longrightarrow Z$
allora

$$f \text{ e' continua } \Leftrightarrow f \circ \pi \text{ e' continua}$$

Proof:
$\langle 1 \rangle 1.$ Dim $\Rightarrow$
Poiche' π, essendo funzione quoziente, e' continua, allora $f \circ \pi$ e' composizione di f. continue, e quindi e' continua.
$\langle 1 \rangle 2.$ Dim $\Leftarrow$

$$B \in \Theta''$$
$$(f \circ \pi)^{-1}(B) \in \Theta \quad \text{[per Hp } f \circ \pi \text{ e' cont.]}$$
$$(f \circ \pi)^{-1}(B) = \pi^{-1} \circ f^{-1}(B) = \pi^{-1}(f^{-1}(B)) \in \Theta$$

poiche' π e' funzione quoziente,

$$\pi^{-1}(f^{-1}(B)) \in \Theta \Rightarrow f^{-1}(B) \in \Theta_q(\pi) = \Theta'$$

□

Corollary 3.24. *Data la funzione quoziente* $\pi : (X,\Theta) \longrightarrow (Y,\Theta')$, *si ha*

$$\pi \text{ e' biunivoca } \Rightarrow \pi \text{ e' un omeomorfismo}$$

ovvero, una funzione quoziente biunivoca e' un omeomorfismo.

Proof:
$\langle 1 \rangle 1.$ Basta provare che π^{-1} e' continua
Poiche' π e' biunivoca, $\pi^{-1} \circ \pi = id_X$. L'identita' $id_X : X \longrightarrow X$ e' una funzione continua. π e' una funzione quoziente, allora per il teorema di prima, π^{-1} e' continua.

□

Theorem 3.25.

LET: $f : (X,\Theta) \longrightarrow (Y,\Theta')$
f *surriettiva, continua, aperta (o chiusa)* $\Rightarrow$ f *e' una funzione quoziente*

Proof:
$\langle 1 \rangle 1.$ Dobbiamo dimostrare che $\Theta' = \Theta_q(f)$
Per definizione, $\Theta' \leq \Theta_q(f)$, e quindi $\Theta' \subseteq \Theta_q(f)$. Proviamo l'inclusione inversa:

$$B \in \Theta_q(f) \Rightarrow f^{-1}(B) \in \Theta$$
$$f(f^{-1}(B)) \in \Theta' \quad \text{[f e' aperta]}$$

Poiche' f e' surriettiva, $f(f^{-1}(B)) = B$, quindi $B \in \Theta'$

□

Definition 3.9. Spazio quoziente.

LET: Sia (X, Θ) uno spazio topologico
Sia $\mathcal{R}$ una relazione d'equivalenza su X
$X/_{\mathcal{R}}$ l'insieme quoziente
$\pi : X \longrightarrow X/_{\mathcal{R}}$ la surrezione naturale $\pi(x) = \overline{x}$, dove $\overline{x}$ e' la classe d'equiv di x

allora chiameremo *spazio quoziente* di X, modulo $\mathcal{R}$

$$(X/_{\mathcal{R}}, \Theta_q(\pi))$$

ovvero, lo spazio $X/_{\mathcal{R}}$ con la topologia quoziente rispetto a π, ovvero ancora, la topologia piu' fine che rende continua π.

Proposition 3.26. *La topologia dello spazio quoziente* $(X/_{\mathcal{R}}, \Theta_q(\pi))$ *e'*

$$\Theta_q(\pi) = \{\pi(A) \mid A \in \Theta : \ (x \in A,\ x\mathcal{R}y \ \Rightarrow \ y \in A)\} = \{\pi(A) \mid A = \pi^{-1}(\pi(A)) \in \Theta\}$$

In altre parole, un aperto di $\Theta_q(\pi)$ *e' l'immagine di un aperto di* Θ*, che e' unione di classi d'equivalenza. In altre parole ancora: in* X *si puo' creare una partizione a partire da* $\mathcal{R}$*; questi aperti di* Θ *saranno l'unione di vari "pezzettini" della partizione.*
Lo stesso vale per i chiusi.

Proof:

$$\begin{aligned}
&U \in \Theta_q(\pi) \ \Leftrightarrow \ \pi^{-1}(U) \in \Theta \\
&A := \pi^{-1}(U) \\
&\pi(A) = U \quad \text{poiche' } \pi \text{ e' surriettiva} \\
&\text{sostituendo: } A = \pi^{-1}(U) = \pi^{-1}(\pi(A))
\end{aligned}$$

$\langle 1 \rangle$1. Dim l'equivalenza tra le due scritture con cui abbiamo descritto $\Theta_q(\pi)$, ovvero dimostriamo che

$$A = \pi^{-1}(\pi(A)) \Leftrightarrow (x \in A,\ x\mathcal{R}y \ \Rightarrow \ y \in A)$$

$\langle 2 \rangle$1. Dim $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
&\text{Sia } x \in A,\ x\mathcal{R}y \\
&x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow \pi^{-1}(\pi(x)) = \pi^{-1}(\pi(y)) \ (1) \\
&y \in \pi^{-1}(\pi(y)),\ \ (1) \Rightarrow y \in A
\end{aligned}$$

$\langle 2 \rangle$2. Dim $\Leftarrow$

Sia $y \in \pi^{-1}(\pi(A))$,

$$y \in \pi^{-1}(\pi(A)) \Leftrightarrow \pi(y) \in \pi(A) \Leftrightarrow \exists x \in A :\ \pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow x\mathcal{R}y \underbrace{\Rightarrow}_{\text{per Hp}} y \in A$$

percio', $A \supseteq \pi^{-1}(\pi(y))$

Sia $x \in A$,

$$x \in A \Rightarrow \pi(x) \in \pi(A) \Rightarrow x \in \pi^{-1}(\pi(A))$$

percio', $A \subseteq \pi^{-1}(\pi(y))$

$\square$

Theorem 3.27.

LET: $f : (X, \Theta) \longrightarrow (Y, \Theta')$

Sia $\mathcal{R}_f$ la relazione d'equiv indotta da f, ovvero $x\mathcal{R}_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

$\pi(x) : (X, \Theta) \longrightarrow (X/_{\mathcal{R}_f}, \Theta_q(\pi))$, $\pi(x) = \overline{x}$ la surriezione naturale, che in questo caso e' anche funzione quoziente

$g : (X/_{\mathcal{R}_f}, \Theta_q(\pi)) \longrightarrow (Y, \Theta')$, $g(\overline{x}) = f(x)$

allora g e' un omeomorfismo $\Leftrightarrow$ f e' una funzione quoziente. Graficamente:

$$\begin{tikzcd}
(X,\Theta) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & (Y,\Theta') \arrow[dl, "g"] \\
(X/_{\mathcal{R}_f}, \Theta_q(\pi)) &
\end{tikzcd} \quad \Leftrightarrow \quad \Theta' = \Theta_q(f)$$

Proof:

$\langle 1\rangle$1. Dim $\Rightarrow$

Dobbiamo dimostrare che f e' una funzione quoziente, ovvero che $\Theta' = \Theta_q(f)$.

$\langle 2\rangle$1. Dim $\Theta' \subseteq \Theta_q(f)$

Sia $A \subseteq \Theta'$,

$$f = g\pi$$
$$g, \pi \text{ continue } \Rightarrow f \text{ continua}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(A) \in \Theta$$

Quindi, per definizione di $\Theta_q(f)$, si ha che $A \in \Theta_q(f)$.

$\langle 2\rangle$2. Dim $\Theta' \supseteq \Theta_q(f)$

Sia $A \subseteq \Theta_q(f)$, ovvero $f^{-1}(A) \in \Theta$,

$f = g\pi$

$f^{-1}(A) = (g\pi)^{-1}(A) = \pi^{-1}(g^{-1}(A)) \in \Theta$

$\Rightarrow g^{-1}(A) \in \Theta_q(f)$

$g(g^{-1}(A)) = A \in \Theta'$ [g e' un omeomorfismo, quindi e' aperta e biunivoca]

□

$\langle 1\rangle$2. Dim $\Leftarrow$

$\langle 2\rangle$1. Dimostriamo che $g(x)$ e' una funzione ben posta

Ben posta vuol dire che prendendo un $y\mathcal{R}_f x$ si ha $g(\overline{y}) = g(\overline{x})$.

$$y\mathcal{R}_f x \Rightarrow f(y) = f(x) \qquad g(\overline{y}) = f(y) = f(x) = g(\overline{x})$$

f essendo una funz. quoz. e', per definizione, continua. Poiche' $g \circ \pi = f$, per il thm [3.23,pg.64] g e' continua.

$\langle 2\rangle$2. g e' biunivoca

E' iniettiva:

$$g(\overline{x}) = g(\overline{y}) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x\mathcal{R}_f y \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$$

E' surriettiva: $f = g \circ \pi$ essendo funz. quoz. e' surriettiva, e quind g e' surriettiva.

$\langle 2\rangle$3. g^{-1} e' continua

$$g\pi = f$$
$$g^{-1}g\pi = g^{-1}f$$
$$\pi = g^{-1}f$$

π e' continua, f e' una funz. quoz. quindi per il thm [3.23,pg.64] g^{-1} e' cont.

$\langle 2\rangle$4. g e' continua

$g\pi = f$, f e' continua, π e' funzione quoziente $\underbrace{\Rightarrow}_{thm[3.23,pg.64]}$ g e' continua.

□

Example 3.10. Prendiamo in $(\mathbb{R}, \Theta_e)$ l'intervallo $[0,1]$ e definiamo la seguente rel. d'equiv su $[0,1]$:

$$\mathcal{R} = \{(0,1),(1,0),(x,x) :\ x \in [0,1]\}$$

o equivalentemente

$$[0,1]/_{\mathcal{R}} = \{\{1,0\},\ \{x\} :\ x \in]0,1[\}$$

Se consideriamo gli elementi di $[0,1]/_{\mathcal{R}}$ come punti, possiamo dire che $[0,1]/_{\mathcal{R}}$ e' il segmento $[0,1]$ con i suoi estremi "incollati", cioe' un estremo e' equivalente all'altro.

Sia $f : [0,1] \longrightarrow S^1$, $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, dove S^1 e' la circ. di raggio unitario.

$\langle 1\rangle$1. Vogliamo dimostrare che $[0,1]/_{\mathcal{R}} \simeq S^1$, ovvero che prendendo il segmento $[0,1]$ e "incollando" gli estremi, abbiamo uno spazio omeomorfo alla circonferenza

Sia $\mathcal{R}_f = \{(x,y) \mid x,y \in [0,1],\ f(x) = f(y)\}$

$\langle 2\rangle$1. Dim $\mathcal{R}_f = \mathcal{R}$

$$\begin{aligned}
&(0,1) \in \mathcal{R},\ \ f(0) = (1,0) = f(1)\ \Leftrightarrow\ (0,1) \in \mathcal{R}_f\\
&(1,0) \in \mathcal{R},\ \ f(1) = (1,0) = f(0)\ \Leftrightarrow\ (1,0) \in \mathcal{R}_f\\
&(t,t) \in \mathcal{R},\ \ f(t) = f(t)\ \Leftrightarrow\ (t,t) \in \mathcal{R}_f\\
&\mathcal{R} = \mathcal{R}_f
\end{aligned}$$

f e' continua (lo avevamo visto in exemp [3.6,pg.58]).

f e' surriettiva, perche' lo e' sin in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e cos in $[-\pi, \pi]$, e quindi a maggior ragione in $[0,1]$.

f e' chiusa: $f([a,b])$, con $[a,b] \subseteq [0,1]$, o e' un arco chiuso (con gli estremi), oppure e' tutta la circonferenza.

Allora per il thm [3.25,pg.64], f e' una funzione quoziente.

Per il thm [3.27,pg.65], g e' un omeomorfismo, dove

$$g : [0,1]/_{\mathcal{R}_f} \longrightarrow S^1$$

$\langle 1\rangle$2. Q.E.D.

Quindi, in definitiva

$$[0,1]/_{\mathcal{R}_f} = [0,1]/_{\mathcal{R}} \simeq S^1$$

□

Example 3.11. Consideriamo l'intera retta in $(\mathbb{R}, \Theta_e)$. Usando

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \mid x - y \in \mathbb{Z}\}$$
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1, f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

e procedendo come nell'esempio precedente, ricaviamo che

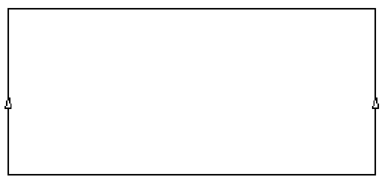
$$\mathbb{R}/_{\mathcal{R}} \simeq S^1$$

cioe', possiamo "arrotolare" l'intera retta su una circonferenza.

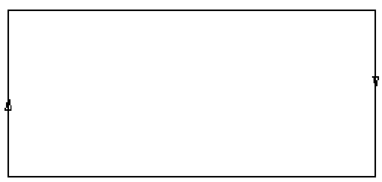
Example 3.12. Se prendiamo un rettangolo in $\mathbb{R}^2$ e "incolliamo" due lati, otteniamo un cilindro: usando una rel. d'equivalenza che associa i punti dei due lati, si puo' dimostrare che lo spazio quoziente e' omeomorfo a un cilindro. Si procede come negli esempi precedenti usando la funzione

$$(s,t) \in [0,1] \times [a,b] \longrightarrow (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, t)$$

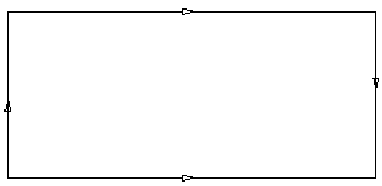
dove $[a,b]$ e' il lato destro e sinistro del rettangolo. Graficamente, indichiamo questo "incollamento" cosi':



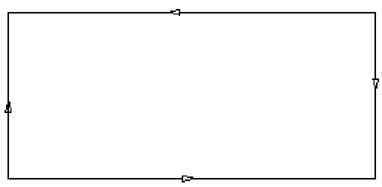
Example 3.13. Il nastro di Moebius:



e la bottiglia di Klein:



e infine il piano proiettivo (vedi anche par [5.0.1,pg.89]):



Example 3.14. In $(\mathbb{R}, \Theta_e)$ stabililiamo la seguente rel. d'equiv:

$$x\mathcal{R}y \;\Leftrightarrow\; x - y \in \mathbb{Q}$$

Considerando $(\mathbb{R}/_{\mathcal{R}}, \Theta_q(\pi))$, dove π e' la funzione quoziente canonica, dimostriamo che $\Theta_q(\pi) = \Theta_i$, la topologia indiscreta.

La tesi equivale a dire che l'unico aperto non vuoto di $\Theta_q(\pi)$ e' tutto $\mathbb{R}/_{\mathcal{R}}$. Prendiamo allora un aperto (non vuoto) $B \in \Theta_q(\pi)$ e facciamo vedere che $\pi^{-1}(B) = \mathbb{R}$.
Per la proposizione [3.26,pg.65], $B = \pi(A)$ dove $A \in \Theta_e,\ \pi^{-1}(\pi(A)) = A$
Sostituendo risulta

$$\pi^{-1}(B) = A \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\pi \text{ e' surriettiva e } B \neq \emptyset} \quad A \neq \emptyset$$

Per questo motivo,

$$\exists]a, b[\subseteq A$$

inoltre,

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists r \in \mathbb{Q} :\ a - x < r < b - x \Leftrightarrow x + r = r' \in]a, b[$$
$$x - x' = -r \in \mathbb{Q} \Rightarrow x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(x') \underbrace{\in}_{x' \in]a,b[\subseteq A} \pi(A)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}\ \pi(x) \in \pi(A) = B \Rightarrow \mathbb{R}/_{\mathcal{R}} \subseteq B \underbrace{\Rightarrow}_{B \subseteq \mathbb{R}/_{\mathcal{R}}} \mathbb{R}/_{\mathcal{R}} = B$$

□

Theorem 3.28. *Dato lo spazio X, la relazione d'equivalenza $\mathcal{R}$ su X, e la funzione quoziente canonica $\pi : X \longrightarrow X/_{\mathcal{R}}$, si ha*

$$(X/_{\mathcal{R}}, \Theta_q(\pi)) \text{ e' uno spazio di Hausdorff } \Rightarrow \mathcal{R} \text{ e' un chiuso in } (X \times X, \Theta_p)$$

dove Θ_p e' la topologia prodotto

Proof:

Per dimostrare che $\mathcal{R}$ e' un chiuso, facciamo vedere che i punti che non gli appartengono non sono di accumulazione, ovvero che prendendo un punto esterno ad esso, esiste almeno un suo intorno che non incontra $\mathcal{R}$.
Sia $(x, y) \notin \mathcal{R}$, ovvero $\pi(x) \neq \pi(y)$.
Poiche' $X/_{\mathcal{R}}$ e' di Hausdorff,
$\exists U, V \in \Theta_q(\pi) :\ \pi(x) \in U,\ \pi(y) \in V,\ U \cap V = \emptyset$

$\pi(x) \in U,\ \pi(y) \in V \ \Rightarrow\ x \in \pi^{-1}(U),\ y \in \pi^{-1}(V)$

$\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(V) \in \Theta$ perche' π e' continua

$$\begin{cases} u \in \pi^{-1}(U), v \in \pi^{-1}(V) \Rightarrow \pi(u) \in U,\ \pi(v) \in V \\ U \cap V = \emptyset \end{cases} \Rightarrow \pi(u) \neq \pi(v) \Leftrightarrow (u, v) \notin \mathcal{R}$$

$\pi^{-1}(U) \times \pi^{-1}(V) \cap \mathcal{R} = \emptyset$
$\pi^{-1}(U) \times \pi^{-1}(V)$ e' quindi un intorno di (x, y) che non incontra $\mathcal{R}$.

□

Theorem 3.29. *Questo thm e' quasi l'inverso del thm [3.28,pg.69].*

$$\mathcal{R} \text{ chiuso in } X \times X,\ \pi \text{ funz. aperta } \Rightarrow (X/_{\mathcal{R}}, \Theta_q(\pi)) \text{ e' uno spazio di Hausdorff}$$

Proof:

Prendiamo due punti distinti in $X/_{\mathcal{R}}$: $\pi(x), \pi(y)$, vogliamo dimostrare che

$$\exists U, V \in \Theta_q(\pi) :\ \pi(x) \in U,\ \pi(y) \in V,\ U \cap V = \emptyset$$

Intanto osserviamo che $\pi(x) \neq \pi(y) \;\Rightarrow\; (x,y) \notin \mathcal{R}$
allora, poiche' $\mathcal{R}$ chiuso in $X \times X$ segue che $(x,y) \notin D(X \times X)$, percio':

$$\exists \text{ un intorno (aperto)} U \times V \text{ di } (x,y) \text{ in } X \times X \;:\; U \times V \cap \mathcal{R} = \emptyset \qquad (1)$$

$$\forall (u,v) \in U \times V, \;\; (1) \Rightarrow (u,v) \notin \mathcal{R} \Leftrightarrow \pi(u) \neq \pi(v)$$

$$\Rightarrow \pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset \qquad (2)$$

$$\begin{cases} \pi \text{ aperta} \Rightarrow \pi(U), \pi(V) \in \Theta \\ x \in U \Rightarrow \pi(x) \in \pi(U) \\ y \in V \Rightarrow \pi(y) \in \pi(V) \\ (2) \end{cases} \qquad \Rightarrow X/_{\mathcal{R}} \text{ e' } T_2$$

□

4 Spazio connesso

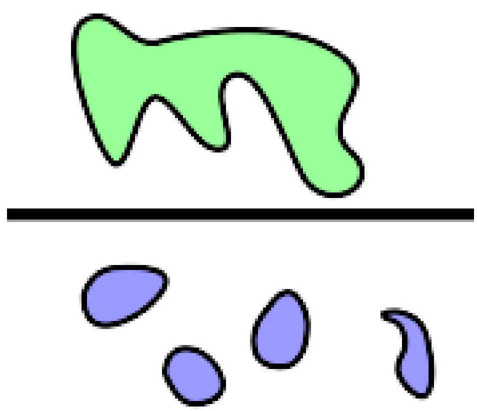


Figure 9: Il sottospazio in blu non e' connesso, quello di sopra lo e'

Dato uno spazio topologico (X, Θ), queste proposizioni sono equivalenti:

1. X e' uno spazio connesso
2. $\nexists U, V \neq \emptyset$ aperti (o chiusi) : $U \cup V = X,\; U \cap V = \emptyset$.
3. Gli unici aperti che sono anche chiusi sono solo $\emptyset, X$, ovvero, non esistono aperti-chiusi oltre a $\emptyset, X$

Proof:
$\langle 1 \rangle$1. Dim $3 \Rightarrow 2$, ovvero $\not{2} \Rightarrow \not{3}$

$$U \cap V = \emptyset,\; U \cup V = X \;\Rightarrow\; X \setminus U = (U \cup V) \setminus U = V \;\Leftrightarrow\; X \setminus V = U$$

$\langle 1 \rangle$2. Dim $\not{3} \Rightarrow \not{2}$
Per Hp $\exists V \in \Theta :\; X \setminus V = U \in \Theta$,

$$X \setminus V = U \;\Leftrightarrow\; X \setminus U = V \;\Rightarrow\; U \cap V = \emptyset$$
$$U \cup V = X \setminus U \cup X \setminus V = X \setminus (U \cap V) = X$$

$\square$

$Y \subseteq X$ e' si dice sott. connesso $\Leftrightarrow$ lo e' come sottospazio, ovvero sse (Y, Θ_Y) e' connesso.

Theorem 4.1. *Sia $Y \subseteq X$,*

$$Y \text{ e' connesso } \Leftrightarrow \nexists U, V \text{ aperti in } X : \begin{cases} Y \subseteq U \cup V \\ Y \cap U \neq \emptyset \\ Y \cap V \neq \emptyset \\ Y \cap U \cap V = \emptyset \end{cases}$$

(equivalentemente per i chiusi).

Proof:
$\langle 1 \rangle 1$. Dim $\Leftrightarrow$

$Y \subseteq X$ e' connesso, quindi per definizione, il sottospazio (Y, Θ_Y) lo e', quindi non esistono due $U', V' \neq \emptyset \in \Theta_Y : U' \cap V' = \emptyset, U' \cup V' = Y$. Per def di top. indotta:

$U' = U \cap Y$, con U aperto di X

$V' = V \cap Y$, con V aperto di X

$U' \neq \emptyset \Leftrightarrow U \cap Y \neq \emptyset$

$V' \neq \emptyset \Leftrightarrow V \cap Y \neq \emptyset$

$U' \cap V' = Y \cap U \cap V = \emptyset$

$U' \cup V' = (Y \cap U) \cup (Y \cap V) = Y \Leftrightarrow Y \cap (U \cup V) = Y \Leftrightarrow Y \subseteq U \cup V$

Quindi se non esistono U', V' allora non possono esistere neanche quei tipi di U, V, e viceversa.

$\square$

Theorem 4.2. *In $(\mathbb{R}, \Theta_e)$ i sott. connessi sono tutti e solo gli intervalli, ovvero*

$$S \subseteq \mathbb{R} \text{ e' connesso} \Leftrightarrow S \text{ e' un intervallo}$$

Per provare questo thm occorrono due lemmi:

Lemma 4.3. *$S \subseteq \mathbb{R}$ e' un intervallo $\Leftrightarrow \forall a, b \in S \ [a, b] \subseteq S$*

Proof:
$\langle 1 \rangle 1$. Dim $\Rightarrow$

Un intervallo $S \subseteq \mathbb{R}$ e', per definizione, un insieme del tipo: $\mathbb{R}, [c, d],]c, d[,]c, d], \ldots,$ [7]
. Quindi questo senso del lemma e' ovvio.

$\langle 1 \rangle 2$. Dim $\Leftarrow$

Sia $a = \inf S$, $b = \sup S$, la tesi equivale a dire che

$$\forall x \in \mathbb{R} : a < x < b \Rightarrow x \in S$$

Per le proprieta' dell'inf,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists s \in S : a + \varepsilon > s \geq a$$

$$\text{fissando } \varepsilon = x - a > 0 : \qquad a \leq s < x$$

[7] dove $[c, d] = \{x \in \mathbb{R} | c \leq x \leq d\}$, etc...,

analogamente per il sup:
$$\exists r \in S: \ x < r \leq b$$
Quindi
$$a \leq s < x < r \leq b \ \Rightarrow \ x \in [s,r]$$
Poiche' per Hp $[s,r] \subseteq S$, si ha che $x \in S$

$\square$

Lemma 4.4. *Sia $S \subseteq \mathbb{R}$, allora*

$$\inf S = l \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ l \in \overline{S}$$

(analogamente per il sup)

Proof:
Sia U un intorno di l. Per definizione di Θ_e, si ha:
$$\exists \varepsilon > 0 :]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\subseteq U$$
Per le prop dell'inf:
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists s \in S: \ l + \varepsilon > s \geq l$$
$$\Rightarrow \ s \in U$$
$$U \cap S \neq \emptyset$$
Poiche' U era un intorno arbitrario, deduciamo che ogni intorno di l incontra S, ovvero percio' $l \in \overline{S}$

$\square$

Passiamo alla dimostrazione del thm [4.2,pg.71]. **Proof**:
$\langle 1 \rangle$1. Dim $\Rightarrow$
Dimostriamo l'inversa dell'implicazione, ovvero
$$S \subseteq \mathbb{R} \ \text{ non e' connesso } \Leftarrow \ S \text{ non e' un intervallo}$$
Per il lemma [4.3,pg.71], S non e' un intervallo equivale a dire che
$$\exists a, b \in S: \ [a,b] \nsubseteq S \ \Leftrightarrow \ \exists z \in [a,b]: \ z \notin S$$
Scegliamo i seguenti aperti di $\mathbb{R}$: $U =]-\infty, z[, \ V =]z + \infty[$, allora se Θ_S e' la top indotta su S, scegliamo $U' = U \cap S \in \Theta_S, \ V' = V \cap S \in \Theta_S$, e si ha:
$a \leq z \ \Rightarrow \ a \in U \ \Rightarrow \ a \in U \cap S \ \Rightarrow \ U' \neq \emptyset$
$b \geq z \ \Rightarrow \ b \in V \ \Rightarrow \ b \in V \cap S \ \Rightarrow \ V' \neq \emptyset$
$U \cap V = \emptyset \ \Rightarrow \ U' \cap V' = \emptyset$
$U \cup V = \mathbb{R} \setminus \{z\} \ \Leftrightarrow \ S \cap (U \cup V) = S \cap \mathbb{R} \setminus \{z\} \ \Leftrightarrow \ (S \cap U) \cup (S \cap V) = S \ \Leftrightarrow \ U' \cup V' = S$
$\langle 1 \rangle$2. Dim $\Leftarrow$
Per assurdo supponiamo che l'intervallo S sia non connesso, ovvero $\exists F, G \neq \emptyset$ chiusi di $\mathbb{S}: \ F \cap G = \emptyset, \ F \cup G = \mathbb{S}$.
Prendiamo $x, y \in S: \ x < y$. L'intervallo $[x,y]$ e' $\subseteq S$ (per la caratterizzazione degli intervalli), quindi $[x,y]$ e' un chiuso di S. Consideriamo
$$F' = F \cap [x,y] \quad \text{che e' un chiuso perche' int. di chiusi}$$
$$G' = G \cap [x,y]$$
Sia $z = \sup F'$. Per il lemma [4.4,pg.72] e poiche' F' e' chiuso:
$$z = \sup F' \in \overline{F'} = F'$$
Per la definizione di sup:
$$\forall t > z \ t \notin F'$$
$$\Rightarrow \ \forall t \in]z,y] \ \ t \in G' \ \Leftrightarrow]z,y] \subseteq G' \ \Rightarrow \ \overline{]z,y]} \subseteq \overline{G'} = G'$$
$$\Leftrightarrow \ [z,y] \subseteq G' \ \Rightarrow \ z \in G'$$

Quindi

$$z \in F' \cap G' = F \cap G \cap [x, y]$$

assurdo perche' $F \cap G = \emptyset$

□

Corollary 4.5. *Essendo $\mathbb{R}$ un intervallo di $\mathbb{R}$, e' esso stesso connesso.*

Theorem 4.6. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ surriettiva e continua, allora*

$$X \ \textit{connesso} \ \Rightarrow \ Y \ \ \textit{connesso}$$

Proof:

Proviamo l'inversa dell'implicazione.

Essendo Y non connesso, si ha

$$\exists U, V \neq \emptyset \ \text{ aperti di Y}: \ U \cap V = \emptyset, \ U \cup V = Y$$

Poniamo

$$U' = f^{-1}(U), \ V' = f^{-1}(V)$$

che sono aperti di X poiche' f e' continua. Allora,

$$U' = f^{-1}(U) \neq \emptyset \ \text{ perche' f surriettiva}$$

$$V' = f^{-1}(V) \neq \emptyset \ \text{ perche' f surriettiva}$$

$$U' \cap V' = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\emptyset)$$

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad \text{perche' f e' surriettiva}$$

$$U' \cup V' = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(Y) = X$$

Ecco che X non e' connesso.

□

Corollary 4.7.

1. *L'immagine di una funzione continua, che ha per dominio uno spazio connesso, e' ancora uno spazio connesso, ovvero se $f : X \longrightarrow Y$ e' continua e X e' connesso, allora $\Im f$ e' connesso.*

2. *Dati due spazi omeomorfi $X \simeq Y$, si ha*

$$X \ \ \textit{connesso} \ \Leftrightarrow \ Y \ \textit{connesso}$$

3. *Inoltre, lo spazio quoziente di uno spazio connesso e' ancora connesso*[8]

Proposition 4.8.

LET*:*
1. *X uno spazio topologico*
2. *$Y_s \subseteq X$ connesso $\forall s \in S$*
3. *$Y_s \cap Y_r \neq \emptyset \ \forall s, r \in S$*

allora

$$\bigcup_{s \in S} Y_s = X \ \Rightarrow \ X \ \textit{e' connesso}$$

Proof:

[8]infatti, $\pi : X \longrightarrow X/_{\mathcal{R}}$ e' surriettiva e continua

Per assurdo X non e' connesso, ovvero

$$\exists U, V \neq \emptyset \text{ aperti di } X : \ U \cap V = \emptyset, \ U \cup V = X$$

Allora per Hp:

$$U \cap V = \emptyset, \ \ U \cup V = X = \bigcup_{s \in S} Y_s \ \Rightarrow \ \exists \, Y_s \subseteq U, \ \exists Y_r \subseteq V$$

$$\underbrace{Y_s \cap Y_r \neq \emptyset}_{\text{per l'Hp 3}} \ \Rightarrow \ U \cap V \neq \emptyset \ \text{ assurdo}$$

□

Theorem 4.9.

$$\forall x, y \in X \ \exists Y \subseteq X \ \ \textit{connesso} : \ x, y \in Y \ \Rightarrow \ X \ \textit{e' connesso}$$

Proof:
Per assurdo, X non connesso, ovvero

$$\exists U, V \neq \emptyset \text{ aperti di } X : \ U \cap V = \emptyset, \ U \cup V = X$$

Sia $x \in U, \ y \in V$, allora per Hp $\exists Y \subseteq X$ connesso : $x, y \in Y$.
Sia $U' = U \cap Y, \ V' = V \cap Y$, allora

$$x \in U, \ x \in Y \ \Rightarrow \ U' \neq \emptyset$$
$$y \in V, \ y \in Y \ \Rightarrow \ V' \neq \emptyset$$
$$U' \cap V' = Y \cap U \cap V = Y \cap \emptyset = \emptyset$$
$$U' \cup V' = Y \cap (U \cup V) = Y \cap X \underbrace{=}_{Y \subseteq X} Y$$

quindi Y non e' connesso, ma ovviamente questo e' assurdo.

□

Theorem 4.10.

$$Y \subseteq X \ \ \textit{denso e connesso} \ \Rightarrow \ X \ \textit{e' connesso}$$

Proof:
Sempre per assurdo, X non connesso, ovvero

$$\exists U, V \neq \emptyset \text{ aperti di } X : \ U \cap V = \emptyset, \ U \cup V = X$$

$$Y \subseteq X \ \Rightarrow \ Y \cap X = Y \ \Rightarrow \ Y \cap (U \cup V) = Y \ \Rightarrow \ \underbrace{(Y \cap U)}_{= U' \in \Theta_Y} \cup \underbrace{(Y \cap V)}_{= V' \in \Theta_Y} = Y$$

Poiche' Y e' denso, ogni aperto di X incontra Y, e quindi

$$Y \cap U = U' \neq \emptyset$$
$$Y \cap V = V' \neq \emptyset$$
$$U' \cap V' = Y \cap U \cap V = \emptyset$$

quindi Y non e' connesso, assurdo.

□

Corollary 4.11. *La chiusura di un insieme connesso e' connesso*

Proof: $X \subseteq \overline{X}$, X connesso, X denso ($\overline{X} = \overline{X}$), allora per il thm di prima $\overline{X}$ e' connesso.

Corollary 4.12. $Y \subseteq X$ *connesso*, $B \subseteq X$

$$Y \subseteq B \subseteq \overline{Y} \ \Rightarrow \ B \ \textit{e' connesso}$$

Ovvero, tutti gli insiemi compresi tra Y *e* $\overline{Y}$ *sono connessi.*

Theorem 4.13. X, Y *connessi* $\Leftrightarrow$ $X \times Y$ *connesso*

Proof:
⟨1⟩1. Dim $\Rightarrow$
Cerchiamo di usare il thm [4.9,pg.74].
Sia $P = (x_0, y_0), Q = (x_1, y_1) \in X \times Y$, poniamo

$$r = X \times \{y_1\}$$
$$s = \{x_0\} \times Y$$
$$r \cap s = \{(x_0, y_1\}$$

⟨2⟩1. r e' omeomorfo a X, e quindi e' connesso
La proiezione p, ristretta a $p : X \times \{y_0\} \longrightarrow X$ e' un omeomorfismo, infatti, oltre a essere continua, aperta, e surriettiva, e' anche iniettiva (essendo la restrizione a $X \setminus \{y_0\}$).
Anche s e' connesso. Allora, per la prop [4.8,pg.73], $r \cup s$ e' connesso.
Poiche' possiamo ripetere questo discorso per ogni coppia di punti $P, Q \in X \times Y$, per il thm [4.9,pg.74], $X \times Y$ e' connesso.

□

Example 4.1.

1. $\mathbb{R}^n$ e' connesso
2. $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ e' connesso (dati due punti a coord irrazionali, possiamo trovare al piu' tre rette a coord irrazionali che unite contengono i due punti. Quindi per il thm [4.9,pg.74] si ha la tesi)
3. Il piano di Niemytzki e' connesso: L_2 (il semipiano senza l'asse x) e' denso, $L_2 = \mathbb{R} \times \underbrace{]0, +\infty[}_{\text{connesso perche' intervallo di } \mathbb{R}}$ e' connesso. Per il thm [4.10,pg.74], L e' connesso.
4. La retta di Sorgenfrey, non e' connessa dato che tutti i suoi aperti sono anche chiusi.

Example 4.2. Il teorema del punto unito.
Data una funzione $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$, continua $\Rightarrow$ $\exists x_0 \in [a, b] : \ f(x_0) = x_0$.

Proof: Consideriamo la funzione $\varphi(x) = f(x) - x, \quad \varphi : [a, b] \to \Im\varphi$ che e' continua (diff. di funz. continue). Inoltre, $\varphi([a, b])$ e' un intervallo, perche' l'immagine di uno spazio connesso di una funzione continua e surriettiva e' ancora connesso, e i sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$ sono tutti e solo gli intervalli.

$$\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$$
$$f(a) \subseteq [a, b] \ \Rightarrow \ f(a) \geq a \ \Rightarrow \ f(a) - a \geq 0$$
$$\varphi(a) = f(a) - a \geq 0$$
$$\varphi(b) = f(b) - b \leq 0$$

Per il teorema dell'esistenza degli zeri

$$\exists x_0 \in [a, b] : \ \varphi(x_0) = 0 \ \Leftrightarrow \ f(x_0) - x_0 = 0 \ \Leftrightarrow \ f(x_0) = x_0$$

□

4.1 Componenti connesse

X spazio topologico. Sia $x \in X$, e $L_x = \{B \mid x \in B \subseteq X, \quad B \text{ connesso}\}$ poniamo

$$\mathcal{C}_x = \bigcup_{B \in L_x} B$$

$\mathcal{C}_x$ si dice la componente connessa di x in X. Gode delle seguenti proprieta':

1. $\mathcal{C}_x$ e' il massimale di L_x
2. $\mathcal{C}_x$ e' connesso
   Proof: conseguenza del thm [4.8,pg.73]
3. $\mathcal{C}_x$ e' chiuso
   Proof: $\mathcal{C}_x \subseteq \overline{\mathcal{C}_x}$. Per il thm [4.11,pg.74], $\overline{\mathcal{C}_x}$ e' connesso, ovvero $\overline{\mathcal{C}_x} \in L_x$. Per la proprieta' 1, $\overline{\mathcal{C}_x} \subseteq \mathcal{C}_x$. Quindi in definitiva $\mathcal{C}_x = \overline{\mathcal{C}_x}$

Proposition 4.14. *Stabiliamo la seguente relazione d'equivalenza:*

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; \exists B \subseteq X : \; B \text{ connesso}, \; x, y \in B$$

(la riflessivita' segue dal fatto che un punto e' connesso). Si ha che le classi d'equivalenza di $X/_\sim$ sono solo le componenti connesse di X, infatti, $y \in \mathcal{C}_x \Leftrightarrow x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists B$ connesso : $x, y \in B \Leftrightarrow y \in \mathcal{C}_x$.

Proof:
⟨1⟩1. Dimostriamo che $\{\mathcal{C}_x\}_{x \in X}$ e' una partizione di X
⟨2⟩1. $\bigcup_{x \in X} \mathcal{C}_x = X$ e' vero per definizione.
⟨2⟩2. Resta da dim che $\mathcal{C}_x \neq \mathcal{C}_y \Rightarrow \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y = \emptyset$, ovvero che $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y \neq \emptyset \;\Rightarrow\; \mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$

$$\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y \neq \emptyset \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{thm [4.8,pg.73]}} \quad \mathcal{C}_x \cup \mathcal{C}_y \text{ connesso}$$

$$x \in \mathcal{C}_x \cup \mathcal{C}_y \text{ connesso} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\mathcal{C}_x \text{ e' il massimale}} \quad \mathcal{C}_x \cup \mathcal{C}_y \subseteq \mathcal{C}_x \;\Rightarrow\; \mathcal{C}_x \cup \mathcal{C}_y = \mathcal{C}_x$$

$$y \in \mathcal{C}_x \cup \mathcal{C}_y \text{ connesso} \;\Rightarrow\; \mathcal{C}_x \cup \mathcal{C}_y \subseteq \mathcal{C}_y \;\Rightarrow\; \mathcal{C}_x \cup \mathcal{C}_y = \mathcal{C}_y$$

$$\Rightarrow\; C_x = C_y$$

□

Definition 4.3. X si dice totalmente sconnesso $\Leftrightarrow \forall x \in X \; \mathcal{C}_x = \{x\}$.

Example 4.4.

1. $\mathbb{Q}$ con la top. indotta da $(\mathbb{R}, \Theta_e)$ e' tot. sconnesso.
2. Sorgenfrey, e' tot. sconnesso.

4.2 Connessione per archi

X e' connesso per archi $\Leftrightarrow \forall p, q \in X \; \exists f : [0,1] \longrightarrow X$, continua : $f(0) = p, \; f(1) = q$
Con I indicheremo $[0,1]$.
f e' chiamata percorso.

Theorem 4.15. *X connesso per archi $\Rightarrow$ X e' connesso*

Proof:
Per assurdo, $\exists U, V$ aperti di X non vuoti: $U \cap V = \emptyset,\ U \cup V = X$.
$\forall p, q \in U, V$, per Hp $\exists f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua : $f(0) = p,\ f(1) = q$, $p, q \in f(I)$. $f(I)$ e' connesso perche' e' immagine di funzione continua (vedi thm [4.6,pg.73]). Allora, per il thm [4.9,pg.74], X e' connesso.

□

Definition 4.5. di componenti connesse per archi.
Stabiliamo la seguente relazione d'equivalenza:

$$p \sim q \ \Leftrightarrow\ \exists f : [0,1] \longrightarrow X, \text{ continua : } f(0) = p,\ f(1) = q$$

Le classi d'equivalenza si dicono componenti connesse per archi. In sostanza, le componenti, sono i "pezzi" di spazio che sono connessi per archi al loro interno, ma sconnessi per archi con le altre porzioni.

Proof:
⟨1⟩1. Dim che $\sim$ e' una rel d'equ

Riflessiva $p \sim p$? Basta scegliere la funzione costante $f(t) = p$

Simmetrica $p \sim q \ \Rightarrow\ q \sim p$?

$$\begin{aligned} &p \sim q \ \Rightarrow\ \exists f(t) \\ &g(t) = f(1-t),\ g(0) = q,\ g(1) = p \ \Rightarrow\ q \sim p \end{aligned}$$

Transitiva $p \sim q,\ q \sim r \ \Rightarrow\ p \sim r$?
Siano f, g le funzioni delle due rel. d'equ., graficamente:

$$p \xrightarrow{f} q \xrightarrow{g} r$$

scegliamo allora

$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

h e' continua per il thm dell'incollamento (vedi thm [1.26,pg.37]), e $h(0) = p,\ h(1) = r$

Theorem 4.16. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ surriettiva e continua, allora*

$$X \textit{ connesso per archi} \ \Rightarrow\ Y \ \textit{ connesso per archi}$$

Nota[9].

Proof:
X conn $\Rightarrow$ $\forall p, q \in X\ \exists g : I \longrightarrow X$, continua, $g(0) = p,\ g(1) = q$

$$I \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$$

[9] questo thm e' l'analogo del thm [4.6,pg.73]. Non esiste pero' l'analogo del thm denso→conneso

$h = f \circ g : I \longrightarrow Y$, cont. perche' composizione di f continue

Siano $p', q' \in Y$, scegliamo un $p \in f^{-1}(p')$ che esiste perche' la f e' surr.

scegliamo un $q \in f^{-1}(q')$

$f(p) = p'$, $f(q) = q'$

h e' la funz. cercata, infatti, e' continua, e

$$h(0) = f(g(0)) = f(p) = p', \quad h(1) = f(g(1)) = f(q) = q'$$

□

Example 4.6.

1. Esempio di spazio connesso, ma non connesso per archi.
   Sia Θ_n la topologia che ha la seguente famiglia di chiusi:

   $$\mathcal{C} = \{\mathcal{R}, B \subseteq \mathbb{R} \mid B \text{ e' finito o numerabile } \}$$

   Chiamiamo Θ_n la topologia conumerabile. Consideriamo $(\mathbb{R}, \Theta_n)$. Questo spazio topologico e' connesso ma non per archi.

   Proof:
   $\langle 1 \rangle 1$. $\mathbb{R}$ in Θ_n e' connesso
   Infatti, non possono esistere due chiusi F, G : $F \cap G = \emptyset, F \cup G = \mathbb{R}$ perche' i chiusi sono solo numerabili o finiti, e l'unione (finita) di insieme numerabili e' sempre un insieme numerabile (thm di Cantor).
   $\langle 1 \rangle 2$. $(\mathbb{R}, \Theta_n)$ non e' connesso per archi
   Dimostreremo che ogni funzione $f : [0,1] \longrightarrow (\mathbb{R}, \Theta_n)$, continua, e' costante, e che quindi $(\mathbb{R}, \Theta_n)$ non e' connesso per archi.
   Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continua.
   $Q = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ e' numerabile

   $$f(Q) \text{ e' allora, al piu', numerabile } \Rightarrow f(Q) \text{ e' chiuso } \Leftrightarrow \overline{f(Q)} = f(Q) \qquad (1)$$

   $$\overline{Q} = [0,1] \quad \mathbb{Q} \text{ e' denso nella topologia indotta su } [0,1] \qquad (2)$$

   $$f \text{ continua} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{thm[1.24, pg.34]} \quad f(\overline{Q}) \subseteq \overline{f(Q)} \underbrace{\Leftrightarrow}_{(1),(2)} f(I) \subseteq f(Q) \qquad (3)$$

   Un insieme finito o numerabile, con almeno due punti distinti, non e' connesso in $(\mathbb{R}, \Theta_n)$, infatti, essendo finito o numerabile, puo' essere separato di un insiemi disgiunti (ad esempio, possiamo separare $\mathbb{N}$ in $\{2n\}, \{2n+1\}$).
   Quindi, $f(I)$, essendo per la (1) e (3) finiti o numerabili, se avranno piu' di un punto, non saranno connessi. Poiche' $f(I)$ e' sempre connesso, necessariamente dovra' contenere un solo punto. Ecco che f e' costante.
   □

5 Spazio compatto

Sia (X, Θ) uno spazio topologico.
Si dice ricoprimento di X una famiglia

$$\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}, \text{ con } A_i \subseteq X, \text{ t.c. } \bigcup_{i \in I} A_i = X$$

si dice ricoprimento aperto di X una famiglia

$$\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}, \text{ con } A_i \in \Theta, \text{ t.c. } \bigcup_{i\in I} A_i = X$$

si dice sottoricoprimento di X una sottofamiglia di un ricoprimento di X, che e' comunque un ricoprimento di X, ovvero, se $\mathcal{A}$ e' un ricoprimento, un sotto ricoprimento sara':

$$\mathcal{B} = \{B_j\}_{j\in J}, \text{ con } B_j \in \mathcal{A}, \text{ t.c. } \bigcup_{j\in J} B_j = X$$

Definition 5.1. Uno spazio (X, Θ) si dice compatto $\Leftrightarrow$ ogni suo ricoprimento aperto ha un sottoricoprimento finito. Ovvero, se

$$\mathcal{A} \text{ ricoprimento aperto di } X \Rightarrow \exists A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A},\ n \in \mathbb{N} : \bigcup_{j=1,2,\ldots,n} A_j = X$$

o equivalentemente

$$\forall \mathcal{A} \text{ ricoprimento aperto di } X\ \exists A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A},\ n \in \mathbb{N} : \bigcup_{j=1,2,\ldots,n} A_j = X$$

Un sottoinsieme $J \subseteq X$ e' compatto $\Leftrightarrow$ lo e' come sottospazio, cioe' se (J, Θ_J) e' compatto.

Proposition 5.1. *Sia X uno spazio discreto,allora*

$$X \textit{ compatto } \Leftrightarrow \textit{ finito}$$

Proposition 5.2. *Dato (X, Θ_1) non compatto, allora*

$$(X, \Theta_1) < (X, \Theta_2) \Rightarrow (X, \Theta_2) \textit{ non compatto}$$

Proof:
$\langle 1 \rangle$1. Dobbiamo dimostrare che esiste almeno un ricoprimento aperto di (X, Θ_2) che non ha sottoricoprimento finito.
Poiche' (X, Θ_1) non e' compatto,
$\exists \mathcal{A}$ ricoprimento aperto di (X, Θ_1) : $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A},\ n \in \mathbb{N} : \bigcup_{j=1,2,\ldots,n} A_j \neq X$
poiche' ogni aperto di (X, Θ_1) e' anche aperto di Θ_2, $\mathcal{A}$ e' anche un ricoprimento per (X, Θ_2), e quindi (X, Θ_2) non e' compatto. □

Example 5.2.

1. Uno spazio finito e' compatto.

   Proof: Dalla definizione stesso: ogni ricoprimento aperto e' finito, quindi come sottoricoprimento basta prendere il ricoprimento stesso.

2. Uno spazio con la top. cofinita e' compatto.

   Proof: Sia $\mathcal{A}$ un suo ricoprimento aperto. Un aperto nella topologia cofinita e' del tipo $X \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$. Inoltre, per ogni punto di X esiste un aperto che lo contiene. Quindi, basta prendere il sottoricoprimento
   $$\mathcal{B} = \{B_{p_1}, B_{p_2}, \ldots, B_{p_n}, X \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}\}$$
   dove B_{p_i} e' l'aperto che contiene p_i. □

3. $(\mathbb{R}^n, \Theta_e)$, con $n \geq 1$, non e' compatto.

   Proof: Dobbiamo dimostrare che esiste almeno un ricoprimento aperto che non ha sottoricoprimento finito.
   Sia $\mathcal{A}$ il seguente ricoprimento aperto di $(\mathbb{R}^n, \Theta_e)$:
   $$\mathcal{A} = \{S(O, \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$$
   dove O e' l'origine, e $S(O,n)$ sono le sfere. Supponiamo per assurdo che esista un sottoricoprimento finito, cioe' che
   $$\mathcal{B} = \{S(O, \frac{1}{i})\}_{i=1,2,\ldots,m} : \bigcup_{i=1,2,\ldots,m} B_i = X$$
   questo e' assurdo, perche' il punto $y \in S(O, \frac{1}{m}+1) \subseteq X$ non e' contenuto in nessun elemento di $\mathcal{B}$. □

4. Sorgenfrey non e' compatto.

   Proof:
   Poiche' $\mathbb{R}$ non e' compatto e $\Theta_e < \Theta_s$, dalla prop [5.2,pg.79], segue che Sorgenfrey non e' compatto. □

5. Il piano di Niemytzki non e' compatto.

   Proof:
   Anche qui basta usare il fatto che $\Theta_e < \Theta_N$, dove pero' stavolta, Θ_e e' la topologia euclidea indotta da $\mathbb{R}$ sul semipiano $\mathbb{R}^2_+$. Si deve anche dimostrare che $\mathbb{R}^2_+$ non e' compatto, e si procede analogamente alla dimostrazione per $(\mathbb{R}^n, \Theta_e)$, considerando i semicerchi al posto delle sfere. □

Definition 5.3. Sia (X, Θ) spazio top., una sua famiglia di chiusi
$$\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in I}$$
si dice che gode della proprieta' dell'intersezione finita $\Leftrightarrow$
$$\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C},\ \text{finita} \Rightarrow \bigcap \mathcal{C}' \neq \emptyset$$
Ovvero, ogni sottofamiglia finita di $\mathcal{C}$ ha intersezione non vuota.

Theorem 5.3.
(X, Θ) e' compatto $\Leftrightarrow$ per ogni famiglia $\mathcal{C}$ di chiusi di X che gode della proprieta' dell'intersezione finita si ha che $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$.

Proof:
$\langle 1 \rangle$1. Dim $\Rightarrow$
Sia $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in I}$ una famiglia di chiusi di X che gode della proprieta' dell'intersezione finita, e sia
$$\mathcal{A} = \{A_i \mid A_i = X \setminus C_i\}_{i\in I}$$
la relativa famiglia di aperti.
Supponiamo per assurdo che $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$, allora
$$\bigcap \mathcal{C} = \emptyset \Leftrightarrow \bigcap X \setminus A_i = \emptyset \Leftrightarrow X \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \emptyset$$
$$\Leftrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i = X$$

Quindi la famiglia $\mathcal{A}$ e' un ricoprimento di X. Poiche' X e' compatto,

$$\exists A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A},\ n \in \mathbb{N} : \bigcup_{j=1,2,\dots,n} A_j = X$$

quindi

$$X = \bigcup_{j=1,2,\dots,n} A_j = \bigcup_{j=1,2,\dots,n} X \setminus C_j = X \setminus \bigcap_{j=1,2,\dots,n} C_j$$

$$X = X \setminus \bigcap_{j=1,2,\dots,n} C_j \ \Leftrightarrow \ \bigcap_{j=1,2,\dots,n} C_j = \emptyset$$

Questo e' assurdo contro l'ipotesi che $\mathcal{C}$ gode della prop. dell'intersezione finita, ovvero ogni sottofamiglia finita di $\mathcal{C}$ dovrebbe avere intersezione non vuota. □

$\langle 1 \rangle 2$. Dim $\Leftarrow$

Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X, e sia

$$\mathcal{C} = \{C_i \mid C_i = X \setminus A_i,\ A_i \in \mathcal{A}\}_{i \in I}$$

poiche' $\mathcal{A}$ e' un ricoprimento:

$$\bigcup \mathcal{A} = X \ \Leftrightarrow \ X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \emptyset \ \Leftrightarrow \ \bigcap_{i \in I} X \setminus A_i = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$$

quindi per Hp, $\mathcal{C}$ non puo' godere della proprieta' dell'intersezione finita. Questo vuol dire che

$$\exists C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{C} : \ C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \bigcup_{j=1,2\dots,n} X \setminus C_j = X$$

$$\Leftrightarrow \bigcup_{j=1,2\dots,n} A_j = X$$

quindi X e' compatto.

□

Proposition 5.4. *Sia (X, Θ) uno spazio topologico, allora*

$$J \subseteq X \ \textit{ e' compatto} \ \Leftrightarrow \ \left(J \subseteq \bigcup \mathcal{A} \ \Rightarrow \ \exists A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A} : \ J \subseteq \bigcup_{h=1,2,\dots,n} A_h \right)$$

dove $\mathcal{A} = \{A_i \mid A_i \in \Theta\}_{i \in I}$

Proof:

$\langle 1 \rangle 1$. Dim $\Rightarrow$

J e' compatto. La tesi e' un'intera implicazione. Supponiamo allora vera la sua premessa, cioe':

$$J \subseteq \bigcup \mathcal{A} = \{A_i \mid A_i \in \Theta\}_{i \in I}$$

Sia $\mathcal{B}$ la seguente famiglia di aperti di J:

$$\mathcal{B} = \{B_i \mid B_i = A_i \cap J\}_{i \in I}$$

$\mathcal{B}$ e' un ricoprimento aperto di J, infatti, $A_i \cap J \in \Theta_J$ per definizione, e inoltre

$$\bigcup \mathcal{B} = \bigcup_{i \in I} A_i \cap J = J \cap \bigcup_{i \in I} A_i = J \cap \bigcup \mathcal{A}$$

$$J \subseteq \bigcup \mathcal{A} \ \Rightarrow \ J \cap \bigcup \mathcal{A} = J$$

$$\bigcup \mathcal{B} = J$$

Poiche' J e' compatto per Hp, sia $\mathcal{B}'$ un suo sottoricoprimento aperto finito:

$$\mathcal{B}' = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$$

$$J = \bigcup \mathcal{B}' = \bigcup_{h=1}^{n} A_h \cap J = J \cap \bigcup_{h=1}^{n} A_h \subseteq \bigcup_{h=1}^{n} A_h$$

$\langle 1 \rangle$2. Dim $\Leftarrow$

Sia

$$\mathcal{B} = \{B_i \mid B_i = A_i \cap J,\ A_i \in \Theta\}_{i \in I}$$

un generico ricoprimento aperto di $\mathcal{B}$, cioe' $\bigcup \mathcal{B} = J$. Vogliamo dimostrare che esiste un suo sottoricoprimento finito. Poniamo $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$,

$$J = \bigcup \mathcal{B} = \bigcup_{i \in I} A_i \cap J = J \cap \bigcup_{i \in I} A_i = J \cap \bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{A}$$

allora, per Hp

$$\exists A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A} :\ J \subseteq \bigcup_{h=1,2,\dots,n} A_h$$

e quindi:

$$J \subseteq \bigcup_{h=1,2,\dots,n} A_h \ \Rightarrow\ J \cap \bigcup_{h=1,2,\dots,n} A_h = J$$

$$J = J \cap \bigcup_{h=1,2,\dots,n} A_h = \bigcup_{h=1,2,\dots,n} A_h \cap J = \bigcup_{h=1,2,\dots,n} B_h$$

□

Theorem 5.5. *Sia (X, Θ) uno spazio compatto, allora*

$$C \subseteq X,\ \textit{chiuso} \ \Rightarrow\ C \textit{ e' compatto}$$

Proof:

Sia $C \subseteq X$ chiuso, e $C \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, dove $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ e' una certa famiglia di aperti di X.

$$\{A_i, X \setminus C\}_{i \in I}$$

e' un ricoprimento aperto di X. Poiche' X e' compatto

$$\exists A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A} :\ X = \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \right) \cup X \setminus C$$

allora

$$C \subseteq X \ \Rightarrow\ C \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \right) \cup X \setminus C$$

e quindi per la prop [5.4,pg.81], C e' compatto.

Theorem 5.6. *Sia (X, Θ) compatto, e sia $f : (X, \Theta) \longrightarrow (Y, \Theta')$*

$$f \textit{ continua e surriettiva} \ \Rightarrow\ (Y, \Theta') \textit{ e' compatto}$$

Proof:

Sia $\mathcal{B} = \{B_i \mid B_i \in \Theta'\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di Y, cioe' $\bigcup_{i \in I} B_i = Y$. Poiche' f e' continua e surriettiva

$$f^{-1}(B_i) = A_i \in \Theta$$

$$f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} A_i = f^{-1}(Y) = X$$

$\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ e' quindi un ricoprimento aperto di X. Poiche' X e' compatto

$$\exists A_1, A_2, \ldots, A_n : \; X = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

Applichiamo la f:

$$f(X) = Y \quad \text{[f e' surriettiva]}$$

$$f\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = f\left(\bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(B_j)\right) = \bigcup_{j=1}^{n} B_j \quad \text{[f e' surriettiva]}$$

$$Y = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$$

quindi Y e' compatto.

□

Theorem 5.7. *Sia (X,Θ) uno spazio T_2 e $Z \subseteq X$ compatto, allora*

$$\forall x \in X \setminus Z \;\; \exists U, V \in \Theta : \begin{cases} Z \subseteq U \\ x \in V \\ U \cap V = \emptyset \end{cases}$$

in sostanza, vale la separazione T_3 per l'insieme Z.

Proof:

Sia $x \in X \setminus Z$, $z \in Z$, poiche' X e' T_2, si ha

$$\exists U, V \in \Theta : \begin{cases} z \in U_z \\ x \in V_z \\ U_z \cap V_z = \emptyset \end{cases}$$

La famiglia $\mathcal{U} = \{U_z\}_{z\in Z}$ di aperti di X e' tale che $Z \subseteq \bigcup \mathcal{U}$, poiche' Z e' compatto, per la prop [5.4,pg.81]

$$\exists U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{U} : \;\; Z \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_j = U$$

Consideriamo poi $V = \bigcap_{z\in Z} V_z$. Questo e' un intorno aperto di x (infatti, $x \in V_z$ per ogni z, e ogni V_z e' un aperto). Resta da provare che $U \cap V = \emptyset$. Se per assurdo $\exists y \in U \cap V$, allora

$$y \in U \;\Rightarrow\; \exists z_1 : \; y \in U_{z_1}$$

$$y \in V \;\Rightarrow\; \forall z \in Z \;\; y \in V_z \;\Rightarrow\; y \in V_{z_1}$$

$$y \in U_{z_1} \cap V_{z_1} \quad \text{[assurdo, perche' } U_{z_1} \cap V_{z_1} = \emptyset\text{]}$$

□

Corollary 5.8.

(X,Θ) uno spazio T_2 e $Z \subseteq X$ compatto $\Rightarrow$ Z e' chiuso in X.

Proof:

Per il thm di prima abbiamo che

$$\forall x \in X \setminus Z \;\; \exists U, V \in \Theta : \begin{cases} Z \subseteq U \\ x \in V \\ U \cap V = \emptyset \end{cases}$$

e questo significa proprio che i punti esterni di Z non sono di accumulazione, ovvero Z e' chiuso.

□

Example 5.4. X infinito, (X, Θ_c) non e' T_2

Proof: Un aperto di X ha la topologia cofinita, e quindi e' compatto (l'abbiamo visto in [5.2,pg.79]). Ovviamente pero', non e' chiuso. Quindi per quest'ultimo cor, segue che (X, Θ_c) non e' T_2. □

Theorem 5.9.
(X, Θ) T_2 e compatto $\Rightarrow$ (X, Θ) T_4

Proof:
Siano F, G due chiusi di X: $F \cap G = \emptyset$. Vogliamo mostrare che:

$$\exists U, V \in \Theta : \; F \subseteq U, \; G \subseteq V, \; U \cap V = \emptyset$$

F, G, per il thm [5.5,pg.82], F, G sono compatti. Per il thm [5.7,pg.83],

$$\forall x \in G \subseteq X \setminus F \;\; \exists U_x, V_x \in \Theta : \begin{cases} F \subseteq U_x \\ x \in V_x \\ U_x \cap V_x = \emptyset \end{cases}$$

abbiamo che

$$\forall x \in G \;\; x \in V_x \;\Rightarrow\; G \subseteq \bigcup_{x \in G} V_x$$

per la compattezza di G, e per la prop [5.4,pg.81], si ha allora

$$\exists x_1, x_2, \dots, x_n : \; G \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_{x_j} = V$$

poniamo $U = \bigcap_{j=1}^{n} U_{x_j}$. Si ha $U \cap V = \emptyset$, infatti, se per assurdo $\exists y \in U \cap V$, allora

$$y \in V \;\Rightarrow\; \exists x_i : \; y \in V_{x_i}$$
$$y \in U \;\Rightarrow\; y \in U_{x_i}$$
$$y \in U_{x_i} \cap V_{x_i} \quad \text{[assurdo, perche' } U_{x_i} \cap V_{x_i} = \emptyset]$$

quindi U e V sono i due aperti cercati.

□

Theorem 5.10. *In $(\mathbb{R}, \Theta_e)$, si ha*

$$[a, b] \textit{ intervallo chiuso e limitato} \;\Rightarrow\; [a, b] \textit{ sott. compatto}$$

Proof:
$\langle 1 \rangle$1. Dim $\Rightarrow$
Poniamo

$$\mathcal{U} = \{A_i \mid A_i \in \Theta\}_{i \in I} : \; [a, b] \subseteq \bigcup \mathcal{U}$$
$$A = \{x \in [a, b] \mid [a, x] \subseteq \bigcup \mathcal{V}_x, \;\; \mathcal{V}_x \text{ sottofamiglia finita di } \mathcal{U}\}$$

$A = [a, b] \;\Rightarrow\; b \in A \;\Rightarrow\; [a, b] \subseteq \bigcup \mathcal{V}_b \;\Rightarrow\; [a, b]$ compatto.
Quindi quello che vogliamo dimostrare e' $A = [a, b]$. Per farlo basta mostrare che $\max A = b$.
$\langle 2 \rangle$1. Dim che $A \neq \emptyset$

$$a \in [a, b] \subseteq \bigcup \mathcal{U} \;\Rightarrow\; \exists k : \; a \in A_k \in \Theta$$
$$a = [a, a] \subseteq A_k \in \mathcal{U} \;\Rightarrow\; a \in A$$

Inoltre, possiamo provare un risultato piu' forte:

$$a \in A_k \;\Rightarrow\; \exists \varepsilon > 0 : \; [a, a + \varepsilon] \subseteq A_k \quad \text{per def di } \Theta_e$$

$$[a, a + \varepsilon] \subseteq A_k \;\Rightarrow\; a + \varepsilon \in A$$

⟨2⟩2. Dim che $\sup A = b$

Sia $z = \sup A$, se per assurdo $z \neq b$.

CASE: $z > b$

Se $z > b$, allora avremmo gia' completato l'intera dimostrazione, perche' per le proprieta' del sup si avrebbe:

$$\forall \varepsilon > 0 : \; \exists c \in A : \; z \geq c > z - \varepsilon$$

$$\text{fissiamo } \varepsilon : \; z - \varepsilon = b \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \exists c \in A : \; z \geq c > b$$

$$c \in A \;\Rightarrow\; [a, b] \subseteq [a, c] \subseteq \bigcup \mathcal{V}_c$$

$\bigcup \mathcal{V}_c$ e' quindi il sottoricoprimento finito di $[a, b]$ che cercavamo.

CASE: $z < b$

$z > a$, infatti, poiche' $a \in A$, $z < a$ sarebbe in assurdo col fatto che $z = \sup A$.

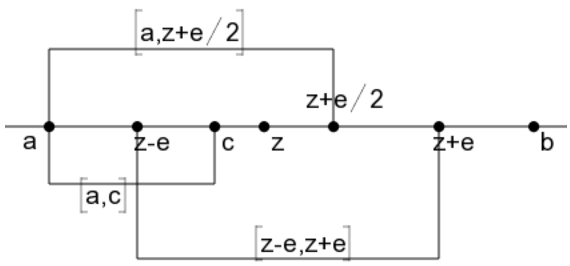
$$z < b \;\Rightarrow\; z \in [a, b] \subseteq \bigcup \mathcal{U} \;\;\Rightarrow\; \exists A_z \in \mathcal{U} : \; z \in A_z$$

$$\Rightarrow\; \exists \varepsilon > 0 : \; [z - \varepsilon, z + \varepsilon] \subseteq A_z \quad [\text{per def di } \Theta_e]$$

Poiche' $z = \sup A$, si ha:

$$\exists c \in A : \; z \geq c > z - \varepsilon$$

Osservando la figura [5,pg.85] si nota subito che



$$[a, z + \frac{\varepsilon}{2}] \subseteq [a, c] \cup [z - \varepsilon, z + \varepsilon]$$

Abbiamo che:

$c \in A \;\Rightarrow\; [a, c] \subseteq \bigcup \mathcal{V}_c$

$[z - \varepsilon, z + \varepsilon] \subseteq A_z$

$[a, z + \frac{\varepsilon}{2}] \subseteq [a, c] \cup [z - \varepsilon, z + \varepsilon] \subseteq \left(\bigcup \mathcal{V}_c\right) \cup A_z = D$

D e' rimane sempre l'unione di un numero finito di aperti di $\mathcal{U}$, quindi

$\Rightarrow\; z + \frac{\varepsilon}{2} \in A$

questo e' assurdo, perche $z = \sup A$

⟨3⟩1. Dim che $z \in A$, cioe' che $\sup A = \max A$

Abbiamo visto che $z = b$.

$$b \in [a, b] \subseteq \bigcup \mathcal{U} \;\Rightarrow\; \exists U_b \in \mathcal{U} :\; b \in U_b$$

$$\Rightarrow\; \exists \delta > 0 :\; [b - \delta, b + \delta] \subseteq U_b$$

Come prima, per le prop. del sup ($b = z = \sup A$):

$$\exists d \in A :\; b \geq d > b - \varepsilon$$

sempre come prima

$$[a, b] \subseteq [a, d] \cup [b - \delta, b + \delta]$$

$d \in A \;\Rightarrow\; [a, d] \subseteq \bigcup \mathcal{V}_d$

$[b - \delta, b + \delta] \subseteq A_b$. Ecco quindi che $[a, b]$ e' contenuto in un unione finita di elementi di $\mathcal{U}$, e percio' $b \in A$

□

Theorem 5.11. *In* $(\mathbb{R}, \Theta_e)$*,*

$$X \subseteq \mathbb{R} \;\; \textit{e' compatto} \;\; \Leftrightarrow \;\; X \;\; \textit{e' chiuso e limitato}$$

Proof:

⟨1⟩1. Dim ⇒

$\mathbb{R}$ e' T_2, X e' compatto, per il cor [5.8,pg.83] $\Rightarrow$ X e' chiuso.

$\{]-n, n[\}_{n \in \mathbb{N}}$ e' un ricoprimento di $\mathbb{R}$, percio'

$$X \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-n, n[$$

poiche' X e' compatto, per la prop [5.4,pg.81],

$$\exists n_1, n_2, \ldots, n_t :\; X \subseteq \bigcup_{i=1}^{t}]-n, n[=]-n_m, n_m[$$

con $n_m = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_t\}$. Quindi X e' limitato

⟨1⟩2. Dim ⇐

Per Hp $X \subseteq [a, b]$. Per il thm [5.10,pg.84], $[a, b]$ e' compatto.

X e' chiuso, $[a, b]$ e' compatto, per il thm [5.5,pg.82] $\Rightarrow$ X e' compatto.

Theorem 5.12. *di Weierstrass (si, proprio quello dell'analisi).*
Una $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, continua, ammette* $m = \min \Im f$ *e* $M = \max \Im f$*, e assume tutti i valori compresi in* $[m, M]$*.*

Proof:

Consideriamo $f' : [a, b] \longrightarrow \Im f$, $\; f'(x) = f(x)$, che e' continua e surriettiva.
$\Im f$ e' compatto e connesso perche'
$[a, b]$ e' un intervallo, e quindi e' compatto. f' e' continua e surriettiva, per il thm [5.6,pg.82], $\Im f'$ e' compatto.

$[a, b]$ e' un intervallo, per il thm [4.2,pg.71], $[a, b]$ e' connesso. f' e' continua e surriettiva, per il thm [4.6,pg.73], $\Im f'$ e' connesso.

Per il thm [4.2,pg.71], $\Im f'$ e' un intervallo.
Per il thm [5.11,pg.86], $\Im f'$ e' chiuso e limitato.

In definitiva: $\Im f' = f'([a, b]) = \Im f = [c, d]$. $[c, d]$ essendo un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ha massimo e minimo.

□

Theorem 5.13. *Sia X compatto e Y uno spazio T_2,*

$$f : X \longrightarrow Y \text{ continua } \Rightarrow f \text{ e' chiusa}$$

Proof:
Sia $C \subseteq X$ un chiuso. Poiche' X e' compatto, per il thm [5.5,pg.82], C e' compatto.
f e' continua, allora per il thm [5.6,pg.82] $f(C)$ e' compatto[10] .
Y e' T_2, allora per il thm [5.8,pg.83], $f(C)$ e' chiuso in Y.

□

Corollary 5.14. *Se X e' compatto, Y e' T_2 e $f : X \longrightarrow Y$ continua e biunivoca, allora f e' un omeomorfismo.*

Example 5.5. Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ iniettiva e continua.
Prendiamo la sua restrizione $f' : [a, b] \longrightarrow \Im f$. Come abbiamo visto nella dimostrazione del thm [5.12,pg.86], $\Im f = [c, d]$, chiuso e limitato.
f' e' continua, iniettiva e surriettiva; $[a, b]$ e' compatto (per il thm [5.10,pg.84]), $[c, d]$ e' T_2 (essendo T_2 ereditaria), allora per il corollario precedente, f e' un omeomorfismo.

Theorem 5.15. *Sia X compatto,*

$$A \subseteq X \quad \text{infinito} \quad \Rightarrow \quad D(A) \neq \emptyset$$

ovvero, sottoinsiemi infiniti di spazi compatti hanno almeno un punto di accumulazione.

Proof:
Supponiamo per assurdo che $D(A) = \emptyset$, ovvero che

$$\forall x \in X \ \exists U_x \in \Theta : \ U_x \cap A \subseteq \{x\}$$

$\{U_x\}$ e' un ricoprimento aperto di X, ma X e' compatto, quindi

$$\exists x_1, x_2, \ldots, x_n : \ X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$$

$$A \subseteq X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \quad (1)$$

$$\forall x \in X \ \ U_x \cap A \subseteq \{x\} \quad (2)$$

$$\begin{cases} a \in A, \ (1) \Rightarrow \exists U_{x_i} : \ a \in U_{x_i} \\ (2) \Rightarrow U_{x_i} \cap A \subseteq \{x_i\} \end{cases} \Rightarrow \ a \in \{x_i\} \Rightarrow A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\} \text{ [assurdo, perche' } A \text{ e' infinito]}$$

□

Theorem 5.16. *Prodotto di spazi compatti e' uno spazio compatto, ovvero*

$$(X, \Theta), \ (Y, \Theta') \text{ compatti } \Rightarrow (X \times Y, \Theta_\pi) \text{ compatto}$$

Proof:

[10] basta considerare la restrizione $f/_C : C \longrightarrow f(C)$, che diventa cosi' surriettiva. Essendo anche continua, per il thm [5.6,pg.82], $f(C)$ e' compatto

Prendiamo un ricoprimento di $X \times Y$: $\{A_i\}_{i \in I'}$. Poiche' base di Θ_π sono i prodotti degli aperti di Θ e Θ', possiamo direttamente considerare questo ulteriore ricoprimento:

$$\mathcal{A} = \{U_i \times V_i \mid U_i \in \Theta,\ V_i \in \Theta'\}_{i \in I}$$

A e' un ricoprimento, perche' per le proprieta' delle basi, $\bigcup B = X$, ovvero l'unione degli elementi della base e' tutto lo spazio. Inoltre, poiche' A e' il ricoprimento aperto formato a partire dalla base, sara' contenuto in tutti gli altri ricoprimenti aperti.

Vogliamo adesso trovare una sottofamiglia finita di A che ricopra tutto $X \times Y$.

$\langle 2 \rangle 1.$

La proiezione $q : \{x\} \times Y \longrightarrow Y,\ q(x, y) = y$ e' un omeomorfismo. Y e' compatto. Quindi per il thm [5.6,pg.82], $\{x\} \times Y$ e' pure compatto.

$\langle 2 \rangle 2.$

$\mathcal{A}$ essendo un ricomprimento di $X \times Y$, lo e' pure di $\{x\} \times Y$:

$$\{x\} \times Y \subseteq X \times Y \subseteq \bigcup \mathcal{A}$$

Ma $\{x\} \times Y$ e' compatto, percio'

$$\exists \underbrace{H_x}_{\text{finito}} \subseteq I :\ \{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i \in H_x} U_i \times V_i$$

per convenienza possiamo anche imporre che $x \in U_i \forall i \in H_x$

$\langle 2 \rangle 3.$

Creiamo il seguente insieme:

$$T_x = \bigcap_{i \in Hx} U_i$$

Notiamo che T_x e' aperto, essendo intersezione finita di aperti, e che $x \in T_x$.

$\langle 2 \rangle 4.$

La famiglia $\{T_x\}_{x \in X}$ e' un ricoprimento aperto di X, in quanto $x \in T_x\ \forall x \in X$. Ma X e' compatto, quindi

$$\exists X' = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq X :\quad X = \{T_{x_1}\} \cup \{T_{x_2}\} \cup \cdots \cup \{T_{x_n}\}$$

$\langle 2 \rangle 5.$ Dimostriamo che la sottofamiglia $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ e' un sottoricoprimento finito di X

Definiamo $\mathcal{A}'$:

$$\mathcal{A}' = \bigcup_{j=1}^{n} \{U_i \times V_i\}_{i \in Hx_j}$$

cioe'

$$\mathcal{A}' = \bigcup_{j=1}^{n} \{U_i \times V_i\}_{i \in Hx_1} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \{U_i \times V_i\}_{i \in Hx_2} \cup \cdots \cup \bigcup_{j=1}^{n} \{U_i \times V_i\}_{i \in Hx_n}$$

nota che $x_1, x_2, \ldots, x_j$ sono gli stessi punti considerati nel passo $\langle 2 \rangle 4$.

Sia (x, y) un qualsiasi punto di $X \times Y$, dimostriamo che esiste un elemento di $\mathcal{A}'$ che lo contiene.

$\langle 3 \rangle 1.$

$$x \in X \;\Rightarrow\; \exists x_j \in X' :\; x \in T_{x_j}$$
$$x \in T_{x_j} = \bigcap_{i \in Hx_j} U_i \;\Rightarrow\; x \in U_i \;\forall i \in Hx_j$$
$$\{x_j\} \times Y \subseteq \bigcup_{i \in Hx_j} U_i \times V_i$$
$$y \in Y \subseteq \bigcup_{i \in H_{x_j}} V_i \;\Rightarrow\; \exists i' \in Hx_j :\; y \in V_{i'}$$

$\langle 3 \rangle 2$. Q.E.D.

$$x \in U_{i'},\; y \in V_{i'} \;\Rightarrow\; (x, y) \in U_{i'} \times V_{i'}$$

□

Theorem 5.17. *In* $(\mathbb{R}^p, \Theta_e)$*, con* $p \geq 2$*,*

$$X \subseteq \mathbb{R}^p \;\; \text{e' compatto} \;\Leftrightarrow\; X \;\text{e' chiuso e limitato}$$

Proof:
$\langle 1 \rangle 1$. Dim $\Leftarrow$
X limitato $\Rightarrow$ $\exists$ una sfera contenente X. La sfera e' omeomorfa a un iper-rettangolo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_p, b_p]$, che per il thm [5.16,pg.87], e' compatto ($[a, b]$ e' un intervallo in $\mathbb{R}$).
X chiuso $\Rightarrow$ X chiuso nell'iper-rettangolo, che e' compatto, quindi per il thm [5.5,pg.82], X e' compatto.
$\langle 1 \rangle 2$. Dim $\Rightarrow$
$\{S(O, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, dove O e' l'origine e $S()$ e' la p-sfera, e' un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}^p$.
$X \subseteq \mathbb{R}^p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S(O, n)$, e poiche' X e' compatto, per la prop [5.4,pg.81],

$$\exists n_1, n_2, \ldots, n_t :\; X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S(O, n) = S(O, n_m)$$

dove $n_m = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_t\}$. Percio' X e' limitato. Poiche' $\mathbb{R}^p$ e' T_2 e X e' compatto, X e' chiuso (cor [5.8,pg.83])

□

5.0.1 Piano proiettivo

Ed ora, compattificheremo $\mathbb{R}^2$.
Per definizione, il piano proiettivo e':

$$(P^2 = \mathbb{R}^3 \setminus O/_{\mathcal{R}}, \Theta_q(\pi))$$

dove $O = (0, 0, 0)$ e' l'origine di $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{R}$ e' la seguente relazione:

$$p\mathcal{R}q \;\Leftrightarrow\; \exists \rho \neq \emptyset :\; (p_x, p_y, p_z) = \rho(q_x, q_y, q_z)$$

e infine, π e' la funzione quoziente[11]

$$\pi : \mathbb{R}^3 \setminus O \longrightarrow P^2$$
$$\pi(p) = \underbrace{Op}_{\text{retta Op}} \setminus O$$

[11]le classi di P^2 sono le rette passanti per l'origine e private di O

Proposition 5.18.

$$P^2 \simeq S^2/_{\mathcal{S}}$$

dove S^2 *e' la 2-sfera unitaria, cioe'*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

e $\mathcal{S}$ *e' la seguente rel. d'eq:*

$$p, q \in S^2, \;\; p\mathcal{S}q \;\Leftrightarrow\; (p_x, p_y, p_z) = \rho(q_x, q_y, q_z) \;\Leftrightarrow\; O \in \underbrace{pq}_{retta}$$

ovvero, rendiamo equivalente il punto p *con il suo punto diametralmente opposto* q.

Proof:

Sia $X = \mathbb{R}^3 \setminus O$

$$\begin{tikzcd}
S^2 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi'"] & X \arrow[d, "\pi"] \\
S^2/_{\mathcal{S}} \arrow[r, "i_*"'] & X/_{\mathcal{R}}
\end{tikzcd}$$

dove

$\pi'(p) = \{p, q\}$ dove q e' il punto diametralmente opposto di p sulla sfera

$i(p) = p \in X$

$i_*(\{p, q\}) = \underbrace{pq}_{\text{retta}} \setminus O \in P^2$

Vogliamo provare che i_* e' un omeomorfismo.
i_* e' iniettiva: a due coppie distinte di punti diametralmente opposti, ovviamente corrispondono due rette distinte.
i_* e' surriettiva: a una retta passante per O corrispondono due punti diametralmente opposti: sono quelli nell'intersezione della retta con S^2
i_* e' continua: $\pi i = i_*\pi'$, π e' continua, i e' continua, $i_*\pi'$ e' continua, π' e' funzione quoziente, allora per il thm [3.23,pg.64] i_* e' continua.

⟨2⟩1. Q.E.D.

Dimostriamo che i e' chiusa, usando il thm [5.13,pg.87].

⟨3⟩1. $S^2/_{\mathcal{S}}$ e' compatto

S^2 e' compatto perche' e' sottoinsieme chiuso (e limitato) di $\mathbb{R}^3$, (thm [5.17,pg.89]. $S^2/_{\mathcal{S}}$ e' compatto perche' immagine di π' che e' funzione continua e surriettiva (thm [5.6,pg.82]).

⟨3⟩2. $X/_{\mathcal{R}}$ e' T_2

Prendiamo due punti distinti di $X/_{\mathcal{R}}$, ovvero due classi d'eq., ovvero due rette r, s passanti per O.
Circondiamo ognuna di esse con un cono solido formato da da rette passanti per O, in modo tale che O sia il vertice del cono, e i due coni si intersechino solo in O. Priviamo i due coni C_1, C_2 dell'origine O.

⟨4⟩1. C_1, C_2 sono due aperti di P^2

infatti, $\pi^{-1}(C_1)$ e' lo stesso cono, formato pero' da punti di $\mathbb{R}^3$ (privato di O), e quindi e' un aperto in $\mathbb{R}^3$. Questo soddisfa la definizione di aperto per la topologia quoziente.

allora, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ e $r \subseteq C_1,\ s \subseteq C_2$. Abbiamo cosi' dimostrato che P^2 e' T_2.

i_* e' continua, surriettiva $\qquad$ $S^2/_{\mathcal{S}}$ e' compatto

$X/_{\mathcal{R}}$ e' T_2

segue allora per il cor [5.14,pg.87], i_* e' un omeomorfismo.

□

Possiamo anche affermare che P^2 e' compatto, infatti,

$$P^2 \simeq S^2/_{\mathcal{S}} \text{ compatto } \Rightarrow P^2 \text{ compatto}$$

Ecco qui che abbiamo il piano compattificato:

$$\mathbb{R}^2 \subseteq P^2$$
$$P^2 \text{ e' compatto}$$

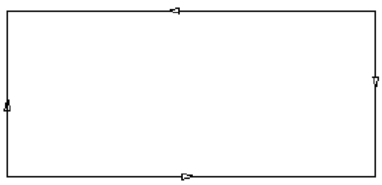
Infine, prendiamo la mezza sfera di S^2 e chiamiamola C. Con le analoghe funzioni e rel. d'eq. si ha:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi'"] & S^2 \arrow[d, "\pi"] \\
C/_{\mathcal{S}} \arrow[r, "i_*"'] & S^2/_{\mathcal{S}} \simeq P^2
\end{tikzcd}$$

e ripetendo le analoghe dimostrazioni

$$C/_{\mathcal{S}} \simeq S^2/_{\mathcal{S}} \simeq P^2$$

In $C/_{\mathcal{S}}$ i punti non del diametro sono equivalenti solo con se stessi, mentre quelli del diametro sono equivalenti con i loro punti diametralmente opposti.
"Appiattendo" $C/_{\mathcal{S}}$ otteniamo un cerchio (pieno), piu' precisamente: sia $p : C/_{\mathcal{S}} \longrightarrow S_p$, dove $S_p = S^1/_{\mathcal{S}}$. Si dimostra che p e' un omeomorfismo. In S_p un punto della circonferenza e' equivalentemente al suo punto diametralmente opposto, mentre gli altri punti sono equiv a se stessi.
Si vede che S_p cerchio e' proprio omeomorfo an un rettangolo quozientato con S, ovvero P^2 e' omeomorfo a questo rettangolo:



6 Omotopia

Definition 6.1.

LET: 1. $I = [0, 1]$

2. $(x, \Theta),\ (Y, \Theta)$
3. $f : X \longrightarrow Y$ continua
4. $g : X \longrightarrow Y$ continua

Le funzioni f, g si dicono omotope sse soddisfano la seguente condizione:

$$;\exists F : X \times I \longrightarrow Y, \ \ \text{continua} : \begin{cases} F(x,0) = f(x) \\ F(x,1) = g(x) \end{cases}$$

F viene chiamata omotopia. (nota [12]) .

Sia $A \subseteq X :\ f(a) = g(a)\ \forall a \in A$, diremo che f, g sono omotope relativamente ad $A \ \Leftrightarrow\ \exists$ un'omotopia $F :\ F(x,a) = f(a) = g(a)\ \forall a \in A$

Due spazi X, Y si dicono omotopici $\ \Leftrightarrow$

$$\exists f : X \longrightarrow Y,\ g : Y \longrightarrow X, \ \ \text{continue} \ : \begin{cases} gf \simeq i_X \\ fg \simeq i_Y \end{cases}$$

dove i_X e' l'identita' in X.
g si dice l'inversa omotopica di f. Nota[13]

Proposition 6.1. *Se chiamiamo con M l'insieme di tutte le funzioni continue da X a Y, allora la relazione di omotopia stabilisce una relazione di equivalenza in M, ovvero*

$$f \simeq g \ \Leftrightarrow\ f \ \textit{omotopa a}\ g$$

Proof:
$\langle 1 \rangle 1.$ Riflessiva: $f \simeq f$
Scegliamo $F(x,t) = f(x)\ \forall x \in X \forall t \in I$.

---

[12] Un'omotopia si puo' intendere come una serie di deformazioni continue, non necessariamente invertibili, delle immagini dello spazio X. A ogni valore $i \in I$, l'omotopia associa in modo continuo lo spazio $f(X_i)$, si puo' pensare cosi':

$$\text{partenza } F(X,0) = f(X) \xrightarrow{\ F(X,i)\ } \varphi_i(X) \xrightarrow{\ F(X,i+\varepsilon)\ } \cdots \longrightarrow g(X) = F(X,1) \text{ arrivo}$$

Invece, un'omeomorfismo $X \longrightarrow Y$ e' una singola trasformazione, reversibile, dello spazio X in Y. Si puo' pensare come una manipolazione dello spazio X in Y in cui non vegono aggiunti, ne' sottratti punti e in cui tutte le proprieta' topologiche del primo spazio si conservano nel secondo, e viceversa. Ad esempio, se prendiamo un blocco di argilla e lo manipoliamo, senza aggiungere o sottrarre materiale, otteniamo un nuovo spazio omeomorfo al primo. Questo non accade nell'omotopia: possiamo partire da uno spazio e arrivare, in modo continuo, a un altro totalmente stravolto.

[13] In sostanza, quando i due spazi X, Y sono omotopici tramite f e g, succede questo:

- Esiste l'omotopia F tra i_X e gf, ovvero possiamo compiere con una serie di trasformazioni continue questo cammino:

$$F(X,0) = i_X(X) = X \xrightarrow{\ F(X,i)\ } \varphi_i(X) \xrightarrow{\ F(X,i+\varepsilon)\ } \cdots \longrightarrow (gf)(X) = F(X,1)$$

- Esiste l'omotopia G tra i_Y e fg, che permette di compiere quest'altro percorso:

$$G(Y,0) = i_Y(Y) = Y \xrightarrow{\ G(Y,i)\ } \psi_i(Y) \xrightarrow{\ G(Y,i+\varepsilon)\ } \cdots \longrightarrow (fg)(Y) = G(Y,1)$$

⟨1⟩2. Simmetrica: $f \simeq g \;\Leftrightarrow\; g \simeq f$

$$f \simeq g \;\Rightarrow\; \exists \text{ un omotopia } F : \begin{cases} F(x,0) = f(x) \\ F(x,1) = g(x) \end{cases}$$

Prendiamo allora

$$F'(x,t) = F(x, 1-t)$$

⟨1⟩3. Transitiva: $f \simeq g,\; g \simeq h \;\Rightarrow\; f \simeq h$

$$f \simeq g \;\Rightarrow\; \exists \text{ un omotopia } F : \begin{cases} F(x,0) = f(x) \\ F(x,1) = g(x) \end{cases}$$

$$g \simeq h \;\Rightarrow\; \exists \text{ un omotopia } G : \begin{cases} G(x,0) = g(x) \\ G(x,1) = h(x) \end{cases}$$

scegliamo allora

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(x, 2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 0] \end{cases}$$

Per il thm dell'incollamento (vedi [1.26,pg.37]) H e' continua.

$\square$

Proposition 6.2. *Nella classe della categoria* TOP*, cioe' la classe di tutti gli spazi topologici, la relazione di omotopicita' stabilisce una relazione di equivalenza.*

Proof:

⟨1⟩1. Dimostriamo solo la proprieta' transitiva, le altre due sono immediate dalla definizione stessa di omotopicita'

L'implicazione da provare e':

$$X \simeq Y,\; Y \simeq Z \;\Rightarrow\; X \simeq Z$$

Per Hp abbiamo X, Y e Y, Z spazi omotopici, ovvero

$$\exists f, g : X \longrightarrow Y, \quad \text{continue} \;:\; \begin{cases} gf \simeq i_X \\ fg \simeq i_Y \end{cases}$$

$$\exists h, k : Y \longrightarrow Z, \quad \text{continue} \;:\; \begin{cases} kh \simeq i_Y \\ hk \simeq i_Z \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \arrow[r, bend left, "h"] & Z \arrow[l, bend left, "k"] \end{tikzcd}$$

⟨2⟩1. Proviamo che $khf \simeq i_Y f = f$

Per Hp $kh \simeq i_Y$, cioe'

$$\exists F : Y \times I \longrightarrow Y \; t.c. \begin{cases} F(y,0) = (kh)(y) \\ F(y,1) = i_Y(y) = y \end{cases}$$

Come omotopia tra khf e f scegliamo

$$F'(x,t) = F(f(x),t) : X \times I \longrightarrow Y$$

F e' continua perche' lo sono le sue coordinate, inoltre

$$F'(x,t) = \begin{cases} F(f(x),0) = (kh)(f(x)) = (khf)(x) & t = 0 \\ F(f(x),1) = i_Y(f(x)) = (i_Y f)(x) = f(x) & t = 1 \end{cases}$$

⟨2⟩2. Proviamo che $gkhf \simeq gf$

Come omotopia scegliamo

$$F''(x,t) = g(F'(x,t)) : X \times I \longrightarrow X$$

che e' continua perche' composizione di f. continue, e inoltre

$$\begin{cases} F''(x,0) = g(F'(x,t)) = g((khf)(x)) = (gkhf)(x) & t = 0 \\ F''(x,1) = g(F'(x,t)) = g(f(x)) = (gf)(x) & t = 1 \end{cases}$$

$\langle 2 \rangle$3. Q.E.D.

Poiche' $gf \simeq i_X$, per la proprieta' transitiva dell'omotopia, segue che $gkhf \simeq i_X$. Proseguendo in modo analogo, si arriva a $hfgk \simeq i_Z$. Abbiamo quindi trovato due funzioni continue $(hf), (gk)$ t.c.:

$$(gk)(hf) = i_X, \ \ (hf)(gk) = i_Z$$

quindi X, Z sono omotopici.

Example 6.2. Tutte le funzioni continue $X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sono omotope.

Proof:

LET: 1. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

2. $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

basta scegliere

$$F(x,t) = f(x) + t(g(x) - f(x))$$

Proposition 6.3. *X, Y omeomorfi $\Rightarrow$ X, Y omotopici*

Proof:

$$X, Y \text{ omeomorfi } \Rightarrow \exists f \text{ omeomorfismo}$$

Possiamo allora scegliere f, f^{-1}, avendo:

$$\begin{cases} ff^{-1} = i_X \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{prop. rifless.}} \quad ff^{-1} \simeq i_X \\ f^{-1}f = i_Y \ \Rightarrow \ f^{-1}f \simeq i_Y \end{cases}$$

Sia f che f^{-1} sono f. continue, e quindi lo e' il loro prodotto.

□

Example 6.3. Esempio di due spazi omotopici ma non omeomorfi.

$$\mathbb{R}^2 \simeq \mathcal{O}$$

dove $\mathcal{O} = \{O\} = \{(0,0)\}$.

Questi due spazi non sono omeomorfi, infatti, non esiste alcuna funzione iniettiva $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{O}$. Sono pero' omeotopici, infatti:

$$f(x,y) = O : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{O} \quad \text{e' continua}$$

$$i(x,y) = (x,y) : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{e' continua}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, bend left, "f"] & \mathcal{O} \arrow[l, bend left, "i"] \end{tikzcd}$$

$fi = i_O \ \Rightarrow \ fi \simeq i_O$

$if = ?$

$i(f(x,y)) = i(O) = O = f(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$if = f : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ [sarebbe f con il codominio cambiato]

$\langle 0 \rangle$7. Resta da dimostrare che $if = f \simeq i_{\mathbb{R}^2}$
Come omotopia scegliamo

$$F((x,y),t) = (x,y)t : \mathbb{R}^2 \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

e' continua perche' lineare, inoltre,

$$F((x,y),t) = \begin{cases} O = f(x,y) & t = 0 \\ (x,y) = i_{\mathbb{R}^2}((x,y)) & t = 1 \end{cases}$$

ecco quindi che $\mathbb{R}^2 \simeq \mathcal{O}$

Example 6.4.

$$\mathbb{R}^2 \setminus O \simeq S^1$$

dove S^1 e' la circonferenza unitaria del piano.
Prendiamo queste due funzioni:

$\vec{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus O$

$i : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus O,\ i(\vec{x}) = \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus O$ (l'immersione)

$f : \mathbb{R}^2 \setminus O \longrightarrow S^1,\ f(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$

e' continua: il denom. non si puo' annullare: $\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus O \ \Rightarrow \ x^2 + y^2 \neq 0$

$fi = i_{S^1} \ \Rightarrow \ fi \simeq i_{S^1}$

$if = f :\ \mathbb{R}^2 \setminus O \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus O$ [sarebbe f con il codominio cambiato]

$\langle 0 \rangle$7. Resta da dimostrare che $if = f \simeq i_{\mathbb{R}^2 \setminus O}$
Come omotopia scegliamo

$$F(\vec{x},t) = \vec{x} e^{\log |\vec{x}|(t-1)} : \mathbb{R}^2 \setminus O \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus O$$

e' continua perche' composizione di f continue, e non ha punti di discontinuita' (l'argomento di log e' una distanza e puo' essere $= 0$ solo se $\vec{x} = O$, ma $\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus O$). Inoltre,

$$F(\vec{x},t) = \begin{cases} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = f(\vec{x}) & t = 0 \\ \vec{x} = i_{\mathbb{R}^2 \setminus O}(\vec{x}) & t = 1 \end{cases}$$

ecco quindi che $\mathbb{R}^2 \setminus O \simeq S^1$. In sostanza, appena il piano e' privo di O, si puo' assottigliare nella sfera unitaria del piano. In generale vale che

$$S^n \simeq \mathbb{R}^{n+1} \setminus O$$

Theorem 6.4. Let: *1.* (Y, Θ)

2. S^1 *sfera unitaria del piano.* $\mathcal{D}$ *cerchio (chiuso) unitario.*

3. $f : S^1 \longrightarrow Y$, *continua*

4. $c : S^1 \longrightarrow Y,\ c(\vec{x}) = k \in Y$, *ovvero qualsiasi funzione costante*

$$f \simeq c \ \Leftrightarrow \ \exists g : D \longrightarrow Y,\ \textit{continua, t.c. } g/_{S^1} = f$$

g si chiama estensione di f: la sua restrizione al dominio di f e' proprio f.

Proof:
$\langle 1 \rangle$1. $\Leftarrow$

Consideriamo la seguente funzione:

$$F : S^1 \times I \longrightarrow Y$$
$$F(\vec{x}, t) = g(\vec{x}t)$$

$$\forall \vec{x} \in S^1 \;\; F(\vec{x}, t) = \begin{cases} g(O) & t = 0 \\ g(\vec{x}) = f(\vec{x}) & t = 1 \end{cases}$$

Quindi f e' omotopa alla funzione costante $c(\vec{x}) = g(O) \; \forall \vec{x} \in S^1$.

$\langle 1 \rangle 2$. Dim $\Rightarrow$

Per Hp abbiamo che

$$\exists H : S^1 \times I \longrightarrow Y.continua, F(\vec{x}, t) = \begin{cases} k & t = 0 \\ f(\vec{x}) & t = 1 \end{cases}$$

Sia

$$\varphi : S^1 \times I \longrightarrow \mathcal{D}, \; \varphi(\vec{x}, t) = \vec{x}t \quad \text{e' continua e surriettiva}$$

ricapitolando:

$$\begin{tikzcd} S^1 \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \\ D \arrow[ur, "g?"'] & \end{tikzcd}$$

La g e' la funzione che vogliamo trovare.

$\langle 2 \rangle 1$. φ e' chiusa

$S^1 \times I$ e' chiuso, in quanto prodotto di chiusi.

$S^1 \times I$ e' compatto, in quanto sotto-insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^3$ (vedi [5.17,pg.89]).

$\mathcal{D}$ e' T_2, in quanto sottospazio di $\mathbb{R}^2$

Allora per il thm [5.13,pg.87], f e' una funzione chiusa.

φ e' continua, surriettiva e chiusa, allora per il thm [3.25,pg.64], φ e' una funzione quoziente. Allora, per il thm [3.27,pg.65], $S^1 \times I /_{\mathcal{R}_\varphi}$ e' omeomorfo a $\Im\varphi = \mathcal{D}$. In altre parole: prendi il cilindro $S \times I$, applica la relazione $\mathcal{R}_\varphi$, e quindi incolla tutti i punti della circonferenza base[14] in O, infine, appiattisci quest'ultimo conetto, trovando cosi' $\mathcal{D}$.

Ritornando al discorso principale, sia

$$g(\varphi(\vec{x}, t)) = g(\vec{x}t) := H(\vec{x}, t)$$

Questa funzione e' ben posta, perche' quando $t \neq 0$, φ e' biunivoca, e quindi a ogni $(\vec{x}, t)$ corrisponde un solo $\vec{x}t$ e viceversa. Invece, quando $t = 0$, $H(\vec{x}, 0) = k$, e quindi, anche in questo caso risulta essere ben posta (la sua definizione non dipende dai rappresentanti scelti nell'espressione "$\varphi(\vec{x}, t)$".

g ristretta a S^1 e' proprio f, infatti,

$$\vec{x} \in S^1 \; g(d) = g(\varphi(\vec{x}, 1)) = H(\vec{x}, 1) = f(\vec{x})$$

g e' continua: $g\varphi = H$, H continua, φ quoziente, allora per il thm [3.23,pg.64], g e' continua

□

[14] $\forall \vec{x} \in S^1 \; \varphi(\vec{x}, 0) = O$, quindi tutti i punti della circonferenza a $t = 0$, appartengono alla stessa classe d'equiv

Index