Teoria degli Ipergrafi e Combinatoria

AlpT (@freaknet.org)
http://freaknet.org/alpt

August 17, 2013

Abstract

Questo testo e' una rielaborazione personale degli appunti presi durante il corso di Modelli Discreti, tenuto dal Prof. Mario Gionfriddo presso il dipartimento di Matematica, Catania, A.A. 2008/2009.
Saro' ben lieto di correggere ogni eventuale errore che mi comunicherai.

Buon lettura.

^_^

Contents

1 Ipergrafi

Definition 1.1. Sia X un insieme,

$$\mathcal{P}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{Y \mid Y \subseteq X\}$$
$$\mathcal{P}_k(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{Y \mid Y \in \mathcal{P}(X),\ \ |Y| = k\}$$

Definition 1.2. $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E})$ e' un *ipergrafo* $\Leftrightarrow$ $X \neq \emptyset$, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\{\emptyset\}\}$.
Gli elementi di X si chiamano *vertici*. Gli elementi di $\mathcal{E}$, *spigoli*.
Noi considereremo solo ipergrafi finiti, ovvero con $X, \mathcal{E}$ insiemi finiti.

$$\mathbb{H} \text{ e' uniforme } \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists k : \ |E| = k \ \forall E \in \mathcal{E}$$

Definition 1.3. Sia $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E})$ un ipergrafo,

$$r(\mathbb{H}) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{E \in \mathcal{E}} |E|$$

$r(\mathbb{H})$ si chiama *rango* dell'ipergrafo.
Sia $\mathbb{H}$ un ipergrafo <u>uniforme</u>, poniamo:

$$\dim \mathbb{H} \stackrel{\text{def}}{=} r(\mathbb{H}) - 1$$

$$\mathbb{H} \text{ e' un } (k-1) \text{ grafo } \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \dim \mathbb{H} = k - 1 \Leftrightarrow r(\mathbb{H}) = k$$

Nota[1]

$$d : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$d(T) \stackrel{\text{def}}{=} \Big| \{E \in \mathcal{E} \mid T \subseteq E\} \Big|$$
$$d : X \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$d(x) \stackrel{\text{def}}{=} d(\{x\}) = \Big| \{E \in \mathcal{E} \mid x \in E\} \Big|$$
$$\Delta(\mathbb{H}) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in X} d(x)$$

$d(x)$ e' il *grado* del vertice x.
$\Delta(\mathbb{H})$ e' il grado massimo di $\mathbb{H}$.

Definition 1.4. Sia $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E})$ un ipergrafo,

$$\mathbb{H} \text{ e' lineare } \Leftrightarrow |E \cap F| \leq 1 \ \forall E, F \in \mathcal{E}, \ E \neq F$$

Definition 1.5. $\mathbb{H}$ e' regolare di grado k $\Leftrightarrow \forall x \in X \ \ d(x) = k$

[1] si da' questa definizione di dimensione perche' uno spigolo E di cardinalita' $|E| = k$ si puo' rappresentare geometricamente in uno spazio di dimensione $k-1$. Ad esempio, se $|E| = 3$, $E = \{a, b, c\}$, allora possiamo disegnare un triangolo in un piano. I vertici di tale triangolo saranno a, b, c mentre il triangolo per intero rappresentera' E. Se abbiamo $|E| = 4$, $E = \{a, b, c, d\}$, allora possiamo rappresentare E con un tetraedro.

Definition 1.6. Sia $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E})$, definiamo

$$\mathbb{H}^* = (X, \mathcal{E}^*)$$
$$\mathcal{E}^* = \{F \mid \exists E \in \mathcal{E} : \ F \subseteq E, \ F \neq \emptyset\}$$

$\mathbb{H}^*$ e' la *chiusura* di $\mathbb{H}$.
In pratica, in $\mathcal{E}^*$ stiamo considerando tutti gli spigoli di $\mathcal{E}$ e tutti i loro sottoinsiemi.

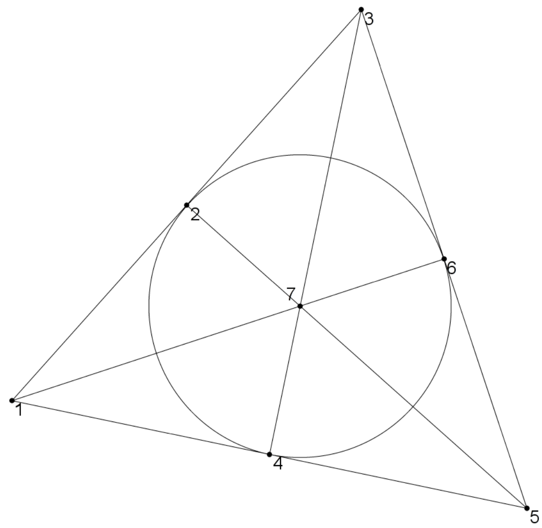
Conjecture 1.7.

$$\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \ \textit{lineare} \ \Rightarrow \exists C = \{C_j\}_{j \in J} \ \textit{partizione di } \mathcal{E}^* \ \textit{t.c.} \begin{cases} |C| = \Delta(\mathbb{H}^*) \\ A \cap B = \emptyset \ \ \forall A, B \in C_j, \ A \neq B \ \ \forall j \in J \end{cases}$$

Nota: richiediamo che le classi siano in numero $\Delta(\mathbb{H}^*)$ perche' questo e' il piu' piccolo possibile per rispettare la condizione $A \cap B = \emptyset$. (Infatti, il vertice $x \in X : \ d^*(x) = \Delta(H^*)$ deve stare in almeno $\Delta(H^*)$ classi distinte.)

Example 1.8. Consideriamo il seguente ipergrafo:

$$X = \{1, \ldots, 7\}$$
$$\mathcal{E} = \{\{1,2,3\}, \{1,4,5\}, \{1,6,7\}, \{2,4,6\}, \{2,5,7\}, \{3,4,7\}, \{3,5,6\}\}$$



$\mathbb{H} = (X, \mathcal{E})$ e' un ipergrafo lineare di rango 3. E' lineare ed e' anche regolare. Quindi, anche $\mathbb{H}^*$ e' regolare. $\Delta(\mathbb{H}^*) = 10$. Una possibile partizione di $\mathcal{E}^*$ che rispetta la congettura [1.7,pg.2] e':

123	167	12	13	14	15	16	17	145	1
45	25	347	246	257	26	47	24	23	46
67	34	56	57	36	37	35	356	6	27
					4	2		7	3
									5

Inoltre possiamo osservare che ogni classe e' a sua volta una partizione di X.

Definition 1.9. Sia dato un ipergrafo $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E})$ e sia data una funzione $f : X \longrightarrow C$, con C insieme arbitrario, chiamato insieme dei colori.

f e' una colorazione di $X \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall E \in \mathcal{E} : \ |E| \geq 2 \ |f(E)| \geq 2 \Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{E} : \ \exists x, y \in E; \ f(x) \neq f(y) \Leftrightarrow$

f e' una colorazione forte di $X \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall E \in \mathcal{E} \ \ f_{|E}$ e' iniettiva $\Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{E} \ \forall x, y \in E : x \neq y \ \ f(x) \neq f(y)$

Remark 1.1.

1. f e' una colorazione forte $\Rightarrow f$ e' una colorazione debole
2. $f : X \longrightarrow C$ e' una funzione iniettiva $\Rightarrow f$ e' una colorazione forte

La 2. garantisce l'esistenza delle colorazioni. Non vale il viceversa della 1. e della 2. (trova i controesempi).

Remark 1.2. In un grafo la defizione di colorazione forte coincide con quella di colorazione debole.

Definition 1.10. Definiamo il *numero cromatico*:

$$\chi(\mathbb{H}) = \min \{|f(X)| \mid f : X \longrightarrow C \text{ colorazione di X}\}$$

Analogamente definiamo il numero cromatico forte:

$$\chi_F(\mathbb{H}) = \min \{|f(X)| \mid f : X \longrightarrow C \text{ colorazione forte di X}\}$$

Proposition 1.11. *Dalla [1.1,pg.3] si ha subito che*

$$\chi_F(\mathbb{H}) \geq \chi(\mathbb{H})$$

Definition 1.12. Sia dato un ipergrafo $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E})$ e sia data una funzione $f : \mathcal{E} \longrightarrow C$, con C insieme arbitrario, chiamato insieme dei colori.

$$f \text{ e' una colorazione di } \mathcal{E} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall E, E' \in \mathcal{E} : \ E \cap E' \neq \emptyset, \ E \neq E' \text{ si ha } \ f(E) \neq f(E')$$

Ovvero, gli spigoli che si incontrano non devono avere lo stesso colore.

Definition 1.13. Definiamo l'*indice cromatico*:

$$\chi'(\mathbb{H}) = \min \{|f(\mathcal{E})| \mid f : \mathcal{E} \longrightarrow C \text{ colorazione di } \mathcal{E}\}$$

Proposition 1.14.

$$\chi'(\mathbb{H}) \geq \Delta(\mathbb{H})$$

Proof: Sia $x \in X$ un vertice tale che $d(x) = \Delta(X)$ e sia f una qualsiasi colorazione di $\mathcal{E}$, si ha
Sia $\mathcal{E}_x = \{E \in \mathcal{E} \mid x \in E\}$, e sia f una colorazione t.c. $|f(\mathcal{E})| = \chi'(\mathbb{H})$, ovvero, una di quelle piu' piccole
$|\mathcal{E}_x| = d(x) = \Delta(X)$
$E, E' \in \mathcal{E}_x, \ \ E \neq E' \underbrace{\Rightarrow}_{x \in E, E'} E \cap E' \neq 0 \Rightarrow f(E) \neq f(E')$

$$\Rightarrow f(E) \neq f(E') \ \ \forall E, E' \in \mathcal{E}_x, \ E \neq E' \Rightarrow f_{|\mathcal{E}_x} \text{ e' iniettiva } \Rightarrow \Delta(X) = d(x) = |\mathcal{E}_x| = |f(\mathcal{E}_x)| \leq |f(\mathcal{E})| = \chi'(\mathbb{H})$$

□

Definition 1.15. Ipergrafo completo:

$$(X,\mathcal{E}) \in \mathbb{K}_{n,k} \overset{\text{def}}{=} (X,\mathcal{E}) \text{ ipergrafo con } \begin{cases} |X| = n \\ \mathcal{E} = \mathcal{P}_k(X) \end{cases}$$

Grafo completo:

$$\mathbb{K}_n \overset{\text{def}}{=} \mathbb{K}_{n,2}$$

$\mathbb{H} = (X,\mathcal{E})$ e' un ipergrafo completo $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists n,k: \ |X| = n, \ \mathcal{E} = \mathcal{P}_k(X)$

Proposition 1.16.

$$\mathbb{H} \textit{ ipergrafo completo } \Rightarrow H \textit{ regolare}$$

Non vale il viceversa (considera il grafo C_4 (il quadrato)).

Definition 1.17. Sia $\mathbb{H} = (X,\mathcal{E})$ un ipergrafo. $\{C_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{E})$ e' una *1-fattorizzazione* di $\mathbb{H}$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

1. $\{C_i\}_{i=1}^n$ e' una partizione di $\mathcal{E}$
2. C_i e' una partizione di X $\forall i = 1,\dots,n-1$

Proposition 1.18. *Sia $(X,\mathcal{E}) \in \mathbb{K}_n$ un grafo completo di ordine n, cioe' $|X| = n$, $\mathcal{E} = \mathcal{P}_2(X)$.*

$$\{C_i\}_{i=1}^m \textit{ e' una 1-fattorizzazione di } (X,\mathcal{E}) \Rightarrow \begin{cases} m = n-1 \\ |C_i| = \frac{n}{2} \\ n \textit{ e' pari} \end{cases}$$

Proof:
$C_i \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) \Rightarrow \forall c \in C_i \ \ c \in \mathcal{E} = \mathcal{P}_2(X) \Rightarrow |c| = 2 \ \ \forall c \in C_i$

C_i partizione di $X \Rightarrow |X| = \left|\bigcup_{c \in C_i} c\right| = \sum_{c \in C_i} |c| = \sum_{c \in C_i} 2 = 2|C_i| \Rightarrow |C_i| = \dfrac{|X|}{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow |X|$ e' pari

$\{C_i\}_{i=1}^m$ partizione di $\mathcal{E} \Rightarrow |\mathcal{E}| = \left|\bigcup_{i=1\dots,m} C_i\right| = \sum_{i=1\dots,m} |C_i| = \sum_{i=1\dots,m} \dfrac{|X|}{2} = m\dfrac{|X|}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow m = |\mathcal{E}|\dfrac{2}{|X|} = |\mathcal{P}_2(X)|\dfrac{2}{|X|} = \dfrac{n!}{2(n-2)!}\dfrac{2}{n} = n-1$

$\square$

Theorem 1.19. *Sia $K_n \in \mathbb{K}_n$*

$$n \in 2\mathbb{N}^* \Leftrightarrow \exists \textit{ una 1-fattorizzazione di } K_n$$

Proof:
$\langle 1 \rangle$ ($\Leftarrow$)
Per la prop [1.18,pg.4] sappiamo che n deve essere pari.
$\langle 2 \rangle$ ($\Rightarrow$)

Sia $X = \{A, 0, 1, \ldots, m-1\}$, dove A e' una qualsiasi lettera e $m = n-1$. Scegliamo la seguente fattorizzazione

C_i e' l'insieme formato dai seguenti insiemi :

$$\{i, A\}$$
$$\{i-1, i+1\}$$
$$\{i-2, i+2\}$$
$$\vdots$$
$$\left\{i - \frac{n-2}{2},\ i + \frac{n-2}{2}\right\}$$

ovvero,

$$\forall i = 0, \ldots, m-1 \ \ C_i = \{\{i, A\}\} \cup \bigcup_{j=1,\ldots,\frac{n-2}{2}} \{\{i-j, i+j\}\}$$

dove le addizioni si intendono in $\mathbb{Z}_m$.

Se si rappresenta K_n su un cerchio in cui i vertici sono stati numerati e disposti ordinatamente da $0, 1, 2, \ldots, m-1$ e un vertice e' stato chiamato A, allora e' immediato intuire come funziona questa partizione.

In ogni caso, ecco la dimostrazione formale.
$\langle 2.1 \rangle$ C_i e' una partizione di $X = \{A, 0, 1, \ldots, m-1\}$

$$\frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1 \underbrace{<}_{n>0} n - 1 \ \ (1)$$
$$1 \le j \le \frac{n-2}{2} < n - 1 = m \ \ (1.1)$$
$$i \pm j = i \pm j' \ \ \mathbb{Z}_m \Leftrightarrow \ \pm j = \pm j' \ \ \mathbb{Z}_m \underbrace{\Leftrightarrow}_{(1.1)} j = j'$$
$$i = i \pm j \Leftrightarrow \ \pm j = 0 \ \ \mathbb{Z}_m \Leftrightarrow m \Big/ \pm j \text{ assurdo contro (1.1)}$$

Quindi due elementi di C_i sono necessariamente disgiunti. Tra l'altro

$$i - j = i + m - j = i + n - 1 - j \ \ \mathbb{Z}_m$$

I numeri che consideriamo sono quindi:

$$i$$
$$i+1, i+2, \ldots, i + \frac{n-2}{2} = i + \frac{n}{2} - 1$$
$$i + n - 1 - 1 = i + n - 2, i + n - 3, \ldots, i + n - 1 - \frac{n-2}{2} = i + \frac{n}{2},$$

ovvero

$$\{i \pm j \mid j = 0, 1, \ldots, n-2\} = \{0, 1, \ldots, n-2\}$$

Poiche' $\{i, A\} \in C_i$, possiamo affermare che

$$\bigcup C_i = \{A, 0, 1, \ldots, n-2\} = X$$

$\langle 2.2 \rangle$ $C_i \cap C_h = \emptyset \ \ \forall i \neq h$
CASE: $\{i, A\} \in C_h$

L'unico elemento di C_h che contiene A e' $\{h, A\}$ quindi
$$\{i, A\} = \{h, A\} \Rightarrow i = h$$
assurdo

CASE: $\{h, A\} \in C_i$
analogamente a prima.

$\langle 2.2.1 \rangle$ $\{i-j, i+j\} \in C_h$
Supponiamo $i < h$,
$$\{i-j, i+j\} \in C_h \Rightarrow \{i-j, i+j\} = \{h-j', h+j'\}$$
Supponiamo $i - j = h - j'$, $i + j = h + j'$.

CASE: $j = j'$
$$i = h \ \mathbb{Z}_m \underbrace{\Rightarrow}_{i,h \leq m-1} i = h$$
assurdo.

Supponiamo $j < j'$
$1 \leq j < j' \leq \dfrac{n}{2} - 1 \Rightarrow \exists 0 < k < j' : \ j + k = j'$

$2k < 2j' \leq n - 2 = m - 1 \ (*)$

$i - j = h - j' \ \mathbb{Z}_m \Rightarrow i = h - j' + j \ \mathbb{Z}_m$

$i + j = h + j' \ \mathbb{Z}_m \Rightarrow i = h + j' - j \ \mathbb{Z}_m$
$$\Rightarrow h - j' + j = h + j' - j \Leftrightarrow 2j = 2j' = 2j + 2k \Leftrightarrow 2k = 0 \ \mathbb{Z}_m \underbrace{\Rightarrow}_{(*)} 2k = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow j = j'$$
assurdo.
Analogamente si procede negli altri casi.

Come dimostrazione alternativa, vedi

J. Korean Math. Soc. 45 (2008), No. 5, pp. 1243-1253
A CONSTRUCTION OF ONE-FACTORIZATION
Yoonyoung Choi, Sang-Mok Kim, Seon-Ju Lim, and Bongjoo Park
http://www.mathnet.or.kr/mathnet/thesis_file/03_J06-478.pdf

$\square$

Theorem 1.20. *Sia $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E})$ un ipergrafo uniforme di rango k. Si ha:*
$$\sum_{x \in X} d(x) = k|\mathcal{E}| = |E||\mathcal{E}|$$

Proof: $d(x)$ indica quante volte x compare negli spigoli:
$$d(x) = \sum_{E \in \mathcal{E}} \psi_E(x), \quad \text{con } \psi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
Quindi il gioco e' fatto:
$$\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{x \in X} \sum_{E \in \mathcal{E}} \psi_E(x) = \sum_{E \in \mathcal{E}} \sum_{x \in X} \psi_E(x) = \sum_{E \in \mathcal{E}} |E| = |E||\mathcal{E}|$$
$\square$

Corollary 1.21. *Sia $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E})$ un ipergrafo uniforme di rango k.*
$$k \text{ pari } \Rightarrow |\{x \in X \mid d(x) \text{ dispari }\}| \text{ e' pari}$$

Proof: $k = 2m$. Se per assurdo $|\{x \in X \mid d(x) \text{ dispari }\}| = 2b+1$, si avrebbe

$$\sum_{x\in X:\ d(x)\ \text{dispari}} d(x) = \sum_{x\in X:\ d(x)\ \text{dispari}} 2c_x + 1 = 2\left(\sum_{x\in X:\ d(x)\ \text{disp.}} c_x\right) + 2b + 1 = 2a + 1 = \text{ dispari} \quad (1)$$

$$\sum_{x\in X} d(x) = \sum_{x\in X:\ d(x)\ \text{pari}} d(x) + \sum_{x\in X:\ d(x)\ \text{dispari}} d(x) \underbrace{=}_{(1)} 2t + 2a + 1 = \text{ dispari}$$

$$\sum_{x\in X} d(x) \underbrace{=}_{[1.20,\text{pg}.6]} k|\mathcal{E}| = 2m|\mathcal{E}| = \text{ pari}$$

assurdo. □

Definition 1.22. Sia $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E})$ un ipergrafo e $T \subseteq X$

$$T \text{ e' un trasversale di } \mathbb{H} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall E \in \mathcal{E}\ \ T \cap E \neq \emptyset$$

$$\tau(\mathbb{H}) \overset{\text{def}}{=} \min_{T \text{ trasversale di } \mathbb{H}} |T|$$

$\tau(\mathbb{H})$ e' il *numero di trasversalita'* di H.

Remark 1.3. X e' un trasversale, quindi l'insieme dei trasversali e' non vuoto.

Example 1.23. Si consideri l'ipergrafo dell'esempio [1.8,pg.2]. Si ha $\forall E \in \mathcal{E}$ E e' un trasversale di X.
Inoltre, $\tau(\mathbb{H}) = 3$.

Definition 1.24. $H = (X, \mathcal{E})$. Sia $B \subseteq X$

$$B \text{ e' un blocking-set (blocking-set)} \overset{\text{def}}{=} B,\ X \backslash B \text{ sono trasversali}$$

Remark 1.4. Non e' detto che esistano blocking-set di $\mathbb{H}$. Ad esempio, l'ipergrafo $(\{1,2\}, \{\{1\}, \{2\}\})$ non ha blocking-set.

Proposition 1.25.

$$E \in \mathcal{E} \Rightarrow E \textit{ non e' un blocking-set}$$

Proof: Infatti,

$$(X \backslash E) \cap E = \emptyset \Rightarrow X \backslash E \text{ non e' un trasversale}$$

□

Proposition 1.26.

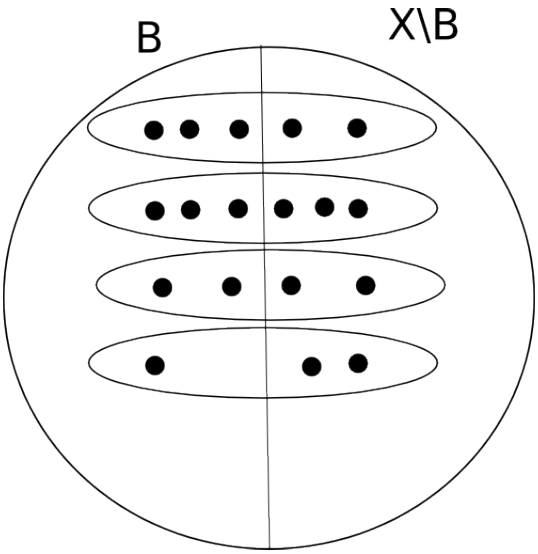
$$B \textit{ blocking set di } (X, \mathcal{E}) \Rightarrow X \backslash B \textit{ blocking set di } (X, \mathcal{E})$$

Example 1.27. Consideriamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \\
&X = \{1, 2, \ldots, 8\} \\
&\mathcal{E} : 1234, 5678, 1256, 1278, 3456, 3478 \\
&\qquad 1357, 1368, 2457, 2768, 1458, 1467, 2358, 2367
\end{aligned}$$

Si puo' verificare che ogni $B \in \mathcal{P}_4(X) \backslash \mathcal{E}$ e' un blocking-set, ad esempio $B = \{1, 2, 3, 7\}$ (vedi [2.47,pg.35], [2.48,pg.36]).

Example 1.28. Graficamente, possiamo rappresentare un blocking set B cosi':



I pallini rappresentano i punti di X. Gli ovali rappresentano gli spigoli di $\mathcal{E}$.

Proposition 1.29.

$$\exists B \text{ bset di } \mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \Leftrightarrow \chi(\mathbb{H}) = 2, \ \ \forall E \in \mathcal{E} \ \ |E| \geq 2$$

dove χ e' il numero cromatico (vedi [1.10,pg.3]).

Nota che 2 e' il piu' piccolo numero cromatico che si possa ottenere.

Proof: Intuitivamente, basta osservare la rappresentazione grafica di un bset (vedi [1.28,pg.8]): ai punti di sinistra assegnamo un colore e a quelli di destra ne assegnamo un altro. Viceversa, se abbiamo una colorazione che usa solo due colori, un blocking set sara' l'insieme di tutti i vertici che hanno un solo colore.

$\langle 1 \rangle$ ($\Rightarrow$)

Definiamo la seguente colorazione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in B \\ 0 & x \in X \backslash B \end{cases}$$

f e' una colorazione: sia $E \in \mathcal{E} : \ |E| \geq 2$, allora se per assurdo $|f(E)| = 1$, si ha

$$f(E) = 1 \Leftrightarrow E \subseteq B \vee E \subseteq X \backslash B$$
$$E \subseteq B \Rightarrow X \backslash B \cap E = \emptyset$$
$$E \subseteq X \backslash B \Rightarrow B \cap E = \emptyset$$

assurdo contro B blocking set.

Infine, se per assurdo $\exists E \in \mathcal{E} : \ |E| = 1$, allora si possono verificare due casi

$$E \subseteq B, \ \ E \subseteq X \backslash B$$

ma come abbiamo visto, questo e' assurdo contro B blocking set.

$\langle 2 \rangle$ ($\Leftarrow$)

$\chi(\mathbb{H}) = 2 \Rightarrow \exists f$ colorazione: $|f(X)| = 2 \Leftrightarrow f(X) = \{a, b\}\,,\ a \neq b$
sia $B = f^{-1}(a)$
$\{f^{-1}(a), f^{-1}(b)\}$ e' una partizione di $X \Rightarrow X \backslash B = f^{-1}(b)$
B e' un blocking set, infatti, sia $E \in \mathcal{E}$
$E \subseteq X,\ |E| \geq 2,\ f$ colorazione $\Rightarrow \exists x, y \in E:\ \ f(x) = a,\ f(y) = b \Rightarrow x \in B,\ y \in X \backslash B \Rightarrow B \cap E \neq \emptyset,\ X \backslash B \cap E \neq \emptyset$
Quindi, sia B che $X \backslash B$ sono dei trasversali.

□

2 Sistema di Steiner

Definition 2.1. Sistema di Steiner.

$$\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \in S_\lambda(h, r, v) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} |X| = v \\ \mathbb{H} \text{ e' uniforme di rango } r \\ \forall Y \in \mathcal{P}_h(X)\ \ d(Y) = \lambda \end{cases}$$

$$S(h, r, v) \overset{\text{def}}{=} S_1(h, r, v)$$

Nota: chiaramente si richiede $1 \leq h \leq r \leq v$.

Gli elementi di $\mathcal{P}_h(X)$ verranno chiamati *h-oggetti* di X.

Example 2.2. L'ipergrafo dell'esempio [1.8,pg.2] appartiene a $S_1(2, 3, 7)$

Domanda 1. *Il problema di Woolhouse (1844) e' ancora un aperto. La domanda e':*

$$S_\lambda(h, r, v) \neq \emptyset\ \ ?$$

O in altri termini, per quali λ, h, r, v esiste almeno un ipergrafo in $S_\lambda(h, r, v)$?

Example 2.3. I casi $h = r, r = v, h = v$ si riducono a sistemi banali. Esaminiamo quelli con $\lambda = 1$.
Per definizione si deve avere $1 \leq h \leq r \leq v$.

Case: $h = r$
Si ha direttamente che:

$$(X, \mathcal{E}) \in S(h, h, v) \Leftrightarrow \mathcal{E} = \mathcal{P}_h(X)$$

Case: $r = v$

$$(X, \mathcal{E}) \in S(h, r, r) \Leftrightarrow \mathcal{E} = \{\{X\}\}$$

Case: $h = v$

$$1 \leq h \leq r \leq h \Rightarrow h = r = v$$

e quindi torniamo nel caso $r = v$:

$$(X, \mathcal{E}) \in S(h, h, h) \Leftrightarrow \mathcal{E} = \{\{X\}\}$$

Esaminiamo adesso il caso $h = 1, \lambda = 1$. Si vede facilmente che:

$$(X, \mathcal{E}) \in S(1, r, v) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{E} \text{ e' una partizione di } X \\ \forall E \in \mathcal{E}\ \ |E| = r \end{cases} \tag{1}$$

infatti, basta osservare che gli spigoli sono disgiunti tra loro ($\lambda = 1$), ciascuno ha cardinalita' r, e che $\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E = X$ perche' $h = 1$ permette di scegliere qualsiasi elemento di X.
Dalla (1) possiamo dedurre che:

$$S(1, r, v) \neq \emptyset \Leftrightarrow r \big/ v$$

Proposition 2.4. *Sia $x \in X$. Posto*

$$\mathcal{E}_x = \{E \in \mathcal{E} \mid x \in E\}$$
$$\mathcal{E}'_x = \{E \setminus \{x\} \mid E \in \mathcal{E}_x\}$$

, si ha

$$\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \in S(h, r, v) \Rightarrow \mathbb{H}'_x = (X \setminus \{x\}, \mathcal{E}'_x) \in S(h-1, r-1, v-1)$$

$\mathbb{H}'_x$ *e' chiamato l'*ipergrafo derivato *di $\mathbb{H}$ secondo x*

Proof: Intanto, $\mathbb{H}'_x$ e' chiaramente un ipergrafo uniforme di rango $r-1$.
Sia $Y \in \mathcal{P}_{h-1}(X \setminus \{x\})$.
$d'_x(Y) \geq 1$ (nota[2]), infatti,

$$Y \cup \{x\} \in \mathcal{P}_h(X) \underbrace{\Rightarrow}_{\mathbb{H}\in S(h,r,v)} \exists E \in \mathcal{E} : Y \cup \{x\} \subseteq E \Rightarrow Y \subseteq E \setminus \{x\} \in \mathcal{E}'_x \Rightarrow d'_x(Y) \geq 1$$

Se per assurdo $d'_x(Y) > 1$, si avrebbe:
$d'_x(Y) > 1 \Rightarrow \exists C_1, C_2 \in \mathcal{E}'_x : C_1 \neq C_2, Y \subseteq C_1 \cap C_2 \Rightarrow Y \cup \{x\} \subseteq (C_1 \cup \{x\}) \cap (C_2 \cup \{x\}) \Rightarrow d(Y \cup \{x\}) > 1$
ma questo e' assurdo contro $d(Z) = 1 \ \forall Z \in \mathcal{P}_h(X)$. $\square$

Proposition 2.5. *Sia $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \in S(h, r, v)$, allora*

$$T \in \mathcal{P}_{h-1}(X) \Rightarrow d(T) = \frac{v-h+1}{r-h+1}$$

Proof: Sia $\mathcal{E}_T = \{E \in \mathcal{E} \mid T \subseteq E\}$. Si ha

$$y \in X \setminus T \underbrace{\Rightarrow}_{\mathbb{H}\in S(h,r,v),\ |T|=h-1} \exists! E \in \mathcal{E} : T \cup \{y\} \subseteq E \quad (1)$$

$$E_1, E_2 \in \mathcal{E}_T : E_1 \neq E_2 \Rightarrow (E_1 \setminus T) \cap (E_2 \setminus T) = \emptyset \quad (2)$$

infatti, se per assurdo

$y \in E_1 \cap E_2 \setminus T \Rightarrow T \cup \{y\} \subseteq E_1, E_2$ assurdo contro (1)

$$\bigcup_{E\in\mathcal{E}_T} E \setminus T = X \setminus T \quad (3)$$

infatti, $y \in X \setminus T \underbrace{\Rightarrow}_{(1)} \exists! E \in \mathcal{E} : T \cup \{y\} \subseteq E \Rightarrow T \subseteq E \Rightarrow E \in \mathcal{E}_T \Rightarrow y \in \bigcup_{E\in\mathcal{E}_T} E \setminus T$

$(2), (3) \Rightarrow E'_T = \{E \setminus T \mid E \in \mathcal{E}_T\}$ e' una partizione di $X \setminus T$ (4)

$$(4) \Rightarrow |X \setminus T| = \sum_{E' \in E'_T} |E'| \underbrace{=}_{|E'|=r-|T|=r-(h-1)\ \ \forall E'\in E'_T} (r-h+1)|\mathcal{E}_T| = (r-h+1)d(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(x) = \frac{|X \setminus T|}{r-h+1} = \frac{v-(h-1)}{r-h+1}$$

$\square$

[2] d'_x e' il grado di Y in $\mathbb{H}'_x$

2.1 S(h,h+1,v)

Proposition 2.6.

$$(X,\mathcal{E}) \in S(h,h+1,v) \Rightarrow |\mathcal{E}| = \frac{\binom{v}{h}}{\binom{h+1}{h}} = \frac{v!}{(h+1)!(v-h)!}$$

Proof: Ogni oggetto $C \in \mathcal{P}_h(X)$ deve essere contenuto in un solo spigolo. Ogni spigolo contiene $\binom{h+1}{h}$ oggetti. Quindi tutti gli oggetti contenuti dagli spigoli sono in numero $\binom{h+1}{h}|\mathcal{E}|$.
Tutti gli oggetti contenuti dagli spigoli sono tutti gli oggetti possibili.
Percio':

$$|\mathcal{P}_h(X)| = \binom{v}{h}$$

$$\binom{h+1}{h}|\mathcal{E}| = |P_h(X)| \Rightarrow |\mathcal{E}| = \frac{\binom{v}{h}}{\binom{h+1}{h}} = \frac{v!}{(h+1)!(v-h)!}$$

In termini formali:

$(X,\mathcal{E}) \in S(h,h+1,v) \Rightarrow \forall C \in \mathcal{P}_h(X)\ \ d(C) = 1 \Leftrightarrow \forall C \in \mathcal{P}_h(X)\ \ \exists!\ E \in \mathcal{E}:\ \ C \subseteq E$ (1)

$(X,\mathcal{E})$ uniforme di rango $h+1 \Rightarrow |E| = h+1\ \forall E \in \mathcal{E} \Rightarrow |\mathcal{P}_h(E)| = \binom{h+1}{h}\ \ \forall E \in \mathcal{E}$ (2)

$C_1 \in \mathcal{P}_h(E_1),\ C_2 \in \mathcal{P}_h(E_2),\ E_1, E_2 \in \mathcal{E},\ E_1 \neq E_2 \underbrace{\Rightarrow}_{(1)} C_1 \neq C_2$ (3)

(3) $\Leftrightarrow \mathcal{P}_h(E_1) \cap \mathcal{P}_h(E_2) = \emptyset\ \ \forall E_1, E_2 \in \mathcal{E}:\ E_1 \neq E_2$ (3.1)

$|\{C \in \mathcal{P}_h(X) \mid \exists E \in \mathcal{E}:\ C \subseteq E\}| = |\bigcup_{E \in \mathcal{E}} \mathcal{P}_h(E)| \underbrace{=}_{(3.1)} \sum_{E \in \mathcal{E}} |\mathcal{P}_h(E)| \underbrace{=}_{(2)} |\mathcal{E}|\binom{h+1}{h}$ (4)

$\{C \in \mathcal{P}_h(X) \mid \exists E \in \mathcal{E}:\ C \subseteq E\} \underbrace{=}_{(1)} \mathcal{P}_h(X)$ (5)

$|P_h(X)| = \binom{v}{h}$ (6)

$$\binom{v}{h} \underbrace{=}_{(6)} |\mathcal{P}_h(X)| \underbrace{=}_{(5),\,(4)} |\mathcal{E}|\binom{h+1}{h} \Rightarrow |\mathcal{E}| = \frac{|\mathcal{P}_h(X)|}{\binom{h+1}{h}} = \frac{\binom{v}{h}}{\binom{h+1}{h}} = \frac{v!}{h!(v-h)!}\frac{h!(h+1-h)!}{(h+1)!} = \frac{v!}{(v-h)!(h+1)!}$$

□

Proposition 2.7.

$$\mathbb{H} = (X,\mathcal{E}) \in S(h,h+1,v) \Rightarrow \mathbb{H}\ \textit{e' regolare di grado}\ \frac{\binom{v-1}{h-1}}{\binom{h}{h-1}} = \frac{(v-1)!}{h!(v-h)!}$$

Proof: Fissiamo $x \in X$ e sia $\mathbb{H}'_x$ il derivato di $\mathbb{H}$. Per la prop [2.4,pg.10] si ha

$$\mathbb{H}'_x \in S(h-1,h,v-1) \ \ (1)$$

$$d(x) = |\mathcal{E}_x| \underbrace{=}_{[2.6,\text{pg.}11]} \frac{\binom{v-1}{h-1}}{\binom{h}{h-1}} = \frac{(v-1)!}{h!((v-1)-(h-1))!}$$

□

2.2 Steiner Triple System

Definition 2.8.

$$\mathrm{STS}(v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} S(2,3,v)$$

Remark 2.1. Gli STS vengono anche chiamati *Spazi di rette*, infatti, chiamando "rette" gli spigoli $E \in \mathcal{E}$ e "punti" gli elementi di X e considerando un $(X,\mathcal{E}) \in \mathrm{STS}(v)$, abbiamo

$$\text{Presi due punti distinti } x,y \in X \ \ \exists! \text{ retta } r \in \mathcal{E} \text{ tale che } x,y \in r$$

Adesso daremo alcune proposizioni "distruttive", che ci aiuteranno a capire se un ipergrafo non e' un STS.

Proposition 2.9.

$$(X,\mathcal{E}) \in \mathrm{STS}(v) \Rightarrow |\mathcal{E}| = \frac{v(v-1)}{6}$$

Proof: Ricordiamo che $\mathrm{STS}(v) = S(2,3,v)$, quindi per la prop [2.6,pg.11] abbiamo:

$$|\mathcal{E}| = \frac{v!}{(h+1)!(v-h)!} = \frac{v!}{3!(v-2)!} = \frac{v(v-1)}{6}$$

□

Proposition 2.10.

$$\mathbb{H} \in \mathrm{STS}(v) \Rightarrow \mathbb{H} \textit{ e' regolare di grado } \frac{v-1}{2} \Rightarrow v \textit{ dispari}$$

Proof: Sia $x \in X$. Usando la prop [2.7,pg.11] abbiamo:

$$d(x) = \frac{(v-1)!}{h!(v-h)!} \underbrace{=}_{h=2} \frac{v-1}{2}$$

□

Proposition 2.11.

$$\mathrm{STS}(v) \neq \emptyset \Rightarrow v = 1 \ \ \mathbb{Z}_6 \vee \ v = 3 \ \ \mathbb{Z}_6$$

Proof: Sia $(X,\mathcal{E}) \in \mathrm{STS}(v)$,

$$d(x) \underbrace{=}_{[2.10,\text{pg}.12]} \frac{v-1}{2}, \ d(x) \in \mathbb{N} \Rightarrow v-1 = 0 \ \ \mathbb{Z}_2 \Leftrightarrow v = 1 \ \ \mathbb{Z}_2 \ \ (1)$$

$$\mathbb{N} \ni |\mathcal{E}| \underbrace{=}_{[2.9,\text{pg}.12]} \frac{v(v-1)}{6} \Rightarrow v(v-1) = 0 \ \ \mathbb{Z}_6 \ \ (2)$$

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} v = 1 \ \ \mathbb{Z}_2 \\ v(v-1) = 0 \ \ \mathbb{Z}_6 \end{cases}$$

utilizzando la prop [AI,10.9,pg.50]:

1. $v = 1 \ \ \mathbb{Z}_2$
2. $X_1 : \ \ v = 1,3,5 \ \ \mathbb{Z}_6$
3. $X_2 : \ \ v = 1,3 \ \ \mathbb{Z}_6$

□

2.3 Steiner Quadruple System

Definition 2.12.

$$\mathrm{SQS}(v) \stackrel{\text{def}}{=} S(3,4,v)$$

Remark 2.2. Procederemo analogamente alle STS, ma avremo una ulteriore condizione sul grado dei 2-oggetti (negli STS il grado dei 2-oggetti era banalmente 1).

Proposition 2.13.

$$(X,\mathcal{E}) \in \mathrm{SQS}(v) \Rightarrow |\mathcal{E}| = \frac{v(v-1)(v-2)}{24}$$

Proof: Ricordiamo che $\mathrm{SQS}(v) = S(3,4,v)$, quindi per la prop [2.6,pg.11] abbiamo:

$$|\mathcal{E}| = \frac{v!}{(h+1)!(v-h)!} = \frac{v!}{4!(v-3)!} = \frac{v(v-1)(v-2)}{24}$$

□

Proposition 2.14.

$$\mathbb{H} \in \mathrm{SQS}(v) \Rightarrow \mathbb{H} \textit{ e' regolare di grado } \frac{(v-1)(v-2)}{6}$$

Proof: Sia $x \in X$. Usando la prop [2.7,pg.11] abbiamo:

$$d(x) = \frac{(v-1)!}{h!(v-h)!} \underbrace{=}_{h=3} \frac{(v-1)(v-2)}{6}$$

□

Proposition 2.15.

$$\mathbb{H} = (X,\mathcal{E}) \in \mathrm{SQS}(v),\ C \in \mathcal{P}_2(X) \Rightarrow d(C) = \frac{v-2}{2} \Rightarrow v \textit{ pari}$$

Proof: Usiamo la prop [2.5,pg.10]

$$d(C) = \frac{v-h+1}{r-h+1} = \frac{v-3+1}{4-3+1} = \frac{v-2}{2}$$

□

Proposition 2.16.

$$\mathrm{SQS}(v) \neq \emptyset \Rightarrow v = 2,4 \ \ \mathbb{Z}_6$$

Proof: Dalle prop [2.13,pg.13],[2.14,pg.13] abbiamo

$$\frac{v-2}{2},\ \frac{(v-1)(v-2)}{6} \in \mathbb{N}$$

Che equivale al sistema:

$$\begin{cases} v = 0 \ \ \mathbb{Z}_2 \ \ (1) \\ (v-1)(v-2) = 0 \ \ \mathbb{Z}_6 \end{cases}$$

Risolviamolo utilizzando la prop [AI,10.9,pg.50]:

1. $v = 0 \ \ \mathbb{Z}_2$
2. $X_1: \ \ v = 0,2,4 \ \ \mathbb{Z}_6$
3. $X_2: \ \ v = 2,4 \ \ \mathbb{Z}_6$

□

2.4 Spettro

Definition 2.17. Lo spettro di $S_\lambda(h,r,v)$ e' l'insieme

$$\{v \in \mathbb{N} \mid S_\lambda(h,r,v) \neq \emptyset\}$$

Theorem 2.18. *Gli unici spettri attualmente conosciuti sono quelli di* $S(2,3,v)$, $S(3,4,v)$, $S(2,4,v)$, *infatti valgono i seguenti teoremi:*

$$S(2,3,v) \neq \emptyset \Leftrightarrow v = 1,3 \ \ \mathbb{Z}_6, \quad v \geq 3$$
$$S(3,4,v) \neq \emptyset \Leftrightarrow v = 2,4 \ \ \mathbb{Z}_6, \quad v \geq 4$$
$$S(2,4,v) \neq \emptyset \Leftrightarrow v = 1,4 \ \ \mathbb{Z}_{12}, \quad v \geq 4$$

Per tutti gli altri spettri si conoscono solo condizioni del tipo $\Rightarrow$ *.*

Proof:
$\langle 1 \rangle$ ($\Rightarrow$)
Nelle precedenti sezioni abbiamo provato la condizione $\Rightarrow$ per le prime due. Analogamente si prova quella per $S(2,4,v)$.
$\langle 2 \rangle$ ($\Leftarrow$)
DA VERIFICARE!

□

2.5 $S_l(h,r,v)$

Proposition 2.19.

$$\mathbb{H} = (X,\mathcal{E}) \in S_\lambda(h,r,v) \Rightarrow |\mathcal{E}| = \lambda\frac{\binom{v}{h}}{\binom{r}{h}} = \lambda\frac{v!(r-h)!}{r!(v-h)!}$$

Proof: Generalizziamo la prop [2.6,pg.11].

Ogni oggetto $C \in \mathcal{P}_h(X)$ deve essere contenuto esattamente in λ spigoli . Ogni spigolo contiene $\binom{r}{h}$ oggetti. Quindi tutti gli oggetti distinti contenuti dagli spigoli sono in numero $\frac{\binom{r}{h}|\mathcal{E}|}{\lambda}$.
Tutti gli oggetti contenuti dagli spigoli sono tutti gli oggetti possibili. In altri termini,

$$\sum_{E\in\mathcal{E}} |\mathcal{P}_h(E)| = \sum_{Y\in\mathcal{P}_h(X)} d(Y) = d(Y)|\mathcal{P}_h(X)| = \lambda\binom{v}{h}$$
$$\sum_{E\in\mathcal{E}} |\mathcal{P}_h(E)| = \sum_{E\in\mathcal{E}} \binom{r}{h} = \binom{r}{h}|\mathcal{E}|$$
$$\Rightarrow |\mathcal{E}| = \lambda\frac{\binom{v}{h}}{\binom{r}{h}}$$

In termini formali:
$(X,\mathcal{E}) \in S_\lambda(h,r,v) \Rightarrow \forall C \in \mathcal{P}_h(X) \ \ d(C) = \lambda \Leftrightarrow \forall C \in \mathcal{P}_h(X) \ \ \exists S_1,\ldots,S_\lambda \in \mathcal{E}$ distinti t.c. $C \subseteq S_i \ \ \forall i = 1,\ldots,\lambda$ (1)
$(X,\mathcal{E})$ uniforme di rango $r \Rightarrow |E| = r \ \forall E \in \mathcal{E} \Rightarrow |\mathcal{P}_h(E)| = \binom{r}{h} \ \ \forall E \in \mathcal{E}$ (2)

Nominiamo gli spigoli e gli oggetti:
Sia $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_k\}$
Sia $\mathcal{P}_h(E_i) = \{C_{i1}, \ldots, C_{it}\}$
$t \underbrace{=}_{(2)} \binom{r}{h}$

$$\Big|\{(i,j) \mid \exists E \in \mathcal{E} :\ C_{ij} \in \mathcal{P}_h(E)\}\Big| = \Big|\{(i,j) \mid \ \mid 1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq t\}\Big| = kt = |\mathcal{E}|\binom{r}{h} \quad (3)$$

$$\Big|\{(i,j) \mid \exists E \in \mathcal{E} :\ C_{ij} \in \mathcal{P}_h(E)\}\Big| \underbrace{=}_{(1)} \Big|\bigcup_{C \in \mathcal{P}_h(X)} \{(i,j) \mid C_{ij} = C\}\Big| = \sum_{C \in \mathcal{P}_h(X)} \Big|\{(i,j) \mid C_{ij} = C\}\Big| =$$

$$= \sum_{C \in \mathcal{P}_h(X)} d(C) \underbrace{=}_{(1)} \sum_{C \in \mathcal{P}_h(X)} \lambda = \lambda|\mathcal{P}_h(X)| = \lambda\binom{v}{h} \quad (4)$$

$$(3),(4) \Rightarrow |\mathcal{E}|\binom{r}{h} = \lambda\binom{v}{h} \Leftrightarrow |\mathcal{E}| = \lambda\frac{\binom{v}{h}}{\binom{r}{h}}$$

□

Proposition 2.20. *Sia $x \in X$. Si ha*

$$\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \in S_\lambda(h, r, v) \Rightarrow \mathbb{H}'_x = (X \setminus \{x\}, \mathcal{E}'_x) \in S_\lambda(h-1, r-1, v-1)$$

Dove $\mathbb{H}'_x$ e' l'ipergrafo derivato di $\mathbb{H}$ secondo x.

Proof: Anche qui generalizziamo quello che abbiamo fatto in [2.4,pg.10].
Sia $Y \in \mathcal{P}_{h-1}(X \setminus \{x\})$. Se per assurdo $d'_x(Y) > \lambda$, si avrebbe:

$$d'_x(Y) > \lambda \Rightarrow \exists C_1, C_2, \ldots, C_{\lambda+1} \in \mathcal{E}'_x \text{ distinti t.c. } Y \subseteq \bigcap_{i=1}^{\lambda+1} C_i \Rightarrow Y \cup \{x\} \subseteq \bigcap_{i=1}^{\lambda+1} (C_i \cup \{x\}) \Rightarrow d(Y \cup \{x\}) > \lambda$$

ma questo e' assurdo contro $d(Z) = \lambda\ \ \forall Z \in \mathcal{P}_h(X)$.
Infine, $d'_x(Y) \geq \lambda$, infatti,

$$d(Y \cup \{x\}) = \lambda \Rightarrow \exists E_1, E_2, \ldots, E_\lambda \in \mathcal{E} \text{ distinti t.c. } Y \cup \{x\} \subseteq \bigcap_{i=1}^{\lambda} E_i \underbrace{\Rightarrow}_{x \notin Y} Y \subseteq \bigcap_{i=1}^{\lambda} E_i \setminus \{x\}$$

$$i \neq j \Rightarrow E_i \neq E_j \Rightarrow E_i \setminus \{x\} \neq E_j \setminus \{x\}$$

Quindi gli $E_i \setminus \{x\}$ sono λ spigoli distinti di $\mathcal{E}'_x$ che contengono Y, percio' $d'_x(Y) \geq \lambda$.

$$\lambda \leq d'_x(Y) \leq \lambda \Rightarrow d'_x(Y) = \lambda$$

□

Proposition 2.21. *Sia $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \in S_\lambda(h, r, v)$, allora*

$$\mathbb{H} \textit{ e' regolare di grado } \lambda\frac{\binom{v-1}{h-1}}{\binom{r-1}{h-1}} = \lambda\frac{(v-1)!(r-h)!}{(r-1)!(v-h)!}$$

ovvero

$$d(x) = |\mathcal{E}_x| = \lambda\frac{(v-1)!(r-h)!}{(r-1)!(v-h)!} \quad \forall x \in V$$

Proof: Fissiamo $x \in X$ e sia $\mathbb{H}'_x$ il derivato di $\mathbb{H}$. Per la prop [2.20,pg.15] si ha
$\mathbb{H}'_x \in S_\lambda(h-1, r-1, v-1)$ (1)

$$d(x) = |\mathcal{E}_x| \underbrace{=}_{[2.19,\text{pg.}14]} \lambda\frac{\binom{v-1}{h-1}}{\binom{r-1}{h-1}} = \lambda\frac{(v-1)!(r-1-(h-1))!}{(r-1)!(v-1-(h-1))!} = \lambda\frac{(v-1)!(r-h)!}{(r-1)!(v-h)!}$$

$\square$

Proposition 2.22.

$$\begin{aligned}
&1.\ \mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \in S_2(2,3,v) \Rightarrow |\mathcal{E}| = \frac{v(v-1)}{3} \\
&2.\ S_2(2,3,v) \neq 0 \Rightarrow v = 0,1 \ \ \mathbb{Z}_3 \\
&3.\ d(x) = v - 1
\end{aligned}$$

Proof: Basta applicare la [2.19,pg.14]. Per la 2.:

$$\frac{v(v-1)}{3} = |\mathcal{E}| \in \mathbb{N} \Rightarrow v(v-1) = 0 \ \ \mathbb{Z}_3 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{3 e' primo, } \mathbb{Z}_3 \text{ e' un campo, quindi vale la legge dell'annullamento del prodotto}}$$

$\Leftrightarrow v = 0 \ \ \mathbb{Z}_3 \ \vee \ v = 1 \ \ \mathbb{Z}_3$

Per la 3., usando la [2.21,pg.15] si ha

$$d(x) = 2\frac{(v-1)!}{2!(v-2)!} = \frac{(v-1)!}{(v-2)!} = v - 1$$

$\square$

2.6 Costruzioni

Vediamo adesso come possiamo combinare sistemi di steiner per formarne altri di ordine superiore (con qualche parametro piu' alto).

Proposition 2.23.

$$\begin{cases} \mathbb{H}_1 = (X, \mathcal{E}_1), \mathbb{H}_2 = (X, \mathcal{E}_2) \in S_\lambda(h,r,v) \\ \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \emptyset \end{cases} \Rightarrow (X, \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2) \in S_{2\lambda}(h,r,v)$$

Proof: Chiaramente $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)$ e' un ipergrafo uniforme di rango r ed ha v vertici. Verifichiamo che

$$\forall Y \in \mathcal{P}_h(X) \ \ d(Y) = 2\lambda$$

Allora,

$$Y \in \mathcal{P}_h(X), \ \mathbb{H}_i \in S_\lambda(h,r,v) \Rightarrow \Big| \{E_i \in \mathcal{E}_i \mid Y \subseteq E_i\} \Big| = \lambda \ \ \forall i = 1,2$$

$$2\lambda = \Big| \{E_1 \in \mathcal{E}_1 \mid Y \subseteq E_1\} \Big| + \Big| \{E_2 \in \mathcal{E}_2 \mid Y \subseteq E_2\} \Big| \underbrace{=}_{\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \emptyset} \Big| \{E \in \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \mid Y \subseteq E\} \Big| = d(Y)$$

$\square$

Theorem 2.24. *di Lindner-Rosa.*

$$v = 1,3 \ \ \mathbb{Z}_6, \ \ v \geq 7 \Rightarrow \exists \mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2 \in \mathrm{STS}(v) : \ \ \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \emptyset$$

DA VERIFICARE!

Proposition 2.25. *Costruzione di un* $\mathrm{STS}(2v+1)$ *a partire da un* $\mathrm{STS}(v)$*.*

Nota[3]*. Sia* $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \in \mathrm{STS}(v)$ *il sistema di partenza. Sia* $\mathbb{H}' = (X', \mathcal{E}')$ *l'STS che dobbiamo costruire.*

[3] Per una costruzione piu' generale, vedi [2.39,pg.23]

Poniamo $X \subseteq X'$, $|X'| = 2v+1$ *e*

$$Y \overset{def}{=} X' \setminus X$$

Sia $\{C_i\}_{i=1}^{v}$ *una 1-fattorizzazione del grafo completo* $(Y, \mathcal{P}_2(Y))$

Numeriamo X*:* $X = \{x_1, \ldots, x_v\}$.
Numeriamo C_i*:* $C_i = \{C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{it}\}$, *dove* $t = \frac{v}{2}$, $C_{ij} \subseteq Y$, $|C_{ij}| = 2$.
Numeriamo C_{ij}*:* $C_{ij} = \{C_{ij1}, C_{ij2}\}$, *dove* $C_{ijk} \in Y$.
Preso C_{ij}, *costruiamo il seguente* 3*-oggetto:*

$$E_{ij} \overset{def}{=} \{x_i, C_{ij1}, C_{ij2}\}$$

Poniamo

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \{E_{ij} \mid i = 1, \ldots, v,\ j = 1, \ldots, t\}$$

Si ha che $\mathbb{H}' = (X', \mathcal{E}') \in \mathrm{STS}(2v+1)$

Proof: Sia $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \in \mathrm{STS}(v)$. Per il thm [2.18,pg.14] si deve avere

$$v = 1, 3\ \ \mathbb{Z}_6,\ \ v \geq 3$$

anche $2v+1$ rispetta questa condizione, infatti,

$$v = 1\ \ \mathbb{Z}_6 \Rightarrow 2v+1 = 3\ \ \mathbb{Z}_6$$

$$v = 3\ \ \mathbb{Z}_6 \Rightarrow 2v+1 = 7 = 1\ \ \mathbb{Z}_6$$

Inoltre,

$$\mathbb{H} \in \mathrm{STS}(v) \underbrace{\Rightarrow}_{[2.10,\mathrm{pg}.12]} v \text{ dispari}$$

Sia $\mathbb{H}' = (X', \mathcal{E}')$ l'STS che dobbiamo costruire.
Poniamo $X \subseteq X'$, e $|X'| = 2v+1$, quindi:
$|X'| = 2v+1$

$Y \overset{\mathrm{def}}{=} X' \setminus X$

$|Y| = 2v + 1 - v = v + 1$

v dispari $\Rightarrow v+1$ pari $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{thm } [1.19,\mathrm{pg}.4]}$ $\exists \{C_i\}_{i=1}^{v}$ 1-fattorizzazione del grafo completo $(Y, \mathcal{P}_2(Y))$ (1)

Numeriamo X: $X = \{x_1, \ldots, x_v\}$.
Numeriamo C_i: $C_i = \{C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{it}\}$, dove $t = \frac{v}{2}$, $C_{ij} \subseteq Y$, $|C_{ij}| = 2$ (vedi [1.18,pg.4]).
Numeriamo C_{ij}: $C_{ij} = \{C_{ij1}, C_{ij2}\}$, dove $C_{ijk} \in Y$.
Preso C_{ij}, costruiamo il seguente 3-oggetto:

$$E_{ij} \overset{\mathrm{def}}{=} \{x_i, C_{ij1}, C_{ij2}\}$$

Poniamo

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \{E_{ij} \mid i = 1, \ldots, v,\ j = 1, \ldots, t\}$$

Notiamo che

$$E_{ij} \notin \mathcal{E}\ \ \forall i, j\ \ (2)$$

Infatti,

$$C_{ij} \subseteq Y,\ \ Y \cap X = \emptyset \Rightarrow E_{ij} = \{x_i, C_{ij1}, C_{ij2}\} \notin \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}_3(X)$$

$\langle 1 \rangle$ Dimostriamo che $\mathbb{H}' = (X', \mathcal{E}') \in \mathrm{STS}(2v+1)$

Per costruzione $|X'| = 2v+1$.

$\mathbb{H}'$ e' un ipergrafo uniforme di rango 3, perche'

$$\forall E \in \mathcal{E}\ \ |E| = 3$$

$$\forall E_{ij}\ \ |E_{ij}| = 3$$

Resta da provare che

$$\forall Y \in \mathcal{P}_2(X') \;\; d'(Y) = 1$$

dove d' e' il grado in $\mathbb{H}'$.
Sia $T = \{x, y\}$. I casi sono tre, e sono disgiunti perche' $X \cap Y = \emptyset$.
Case: $x, y \in X$

$$\{x, y\} \in \mathcal{P}_2(X) \Rightarrow d(\{x, y\}) = 1 \Leftrightarrow \exists! E \in \mathcal{E} : \; \{x, y\} \subseteq E$$

Se per assurdo:

$$\exists E_{ij} : \; \{x, y\} \subseteq E_{ij} = \{x_i, C_{ij1}, C_{ij2}\} \; \Rightarrow \; \{x, y\} \cap \{C_{ij1}, C_{ij2}\} \neq \emptyset \;\; (3)$$

La (3) e' in assurdo con

$$\begin{cases} x, y \subseteq X \\ C_{ij1}, C_{ij2} \in Y \\ Y \cap X = \emptyset \end{cases}$$

In conclusione, non ci sono spigoli E_{ij} per T, e ne esiste solo uno in $\mathcal{E}$, quindi

$$d'(Y) = 1$$

Case: $x, y \in Y$

$$\{C_i\}_{i=1}^{v} \text{ e' una partizione di } \mathcal{P}_2(Y) \underbrace{\Rightarrow}_{\{x,y\} \in \mathcal{P}_2(Y)} \exists! i : \;\; \{x, y\} \in C_i = \{C_{i1}, \ldots, C_{it}\} \; \Rightarrow \exists! j : \; C_{ij} = \{x, y\}$$

Abbiamo quindi,

$$\exists! E_{ij} : \;\; E_{ij} = \{x_i, x, y\}$$

E_{ij} e' anche l'unico 3-oggetto di $\mathcal{E}'$ che contiene $\{x, y\}$, infatti, come abbiamo visto prima:

$$x, y \in Y \Rightarrow E_{ij} \notin \mathcal{E}$$

Case: $x \in X, \; y \in Y$

Poiche' $y \in Y$, non puo' esistere un $E \in \mathcal{E} : \; \{x, y\} \subseteq E$. Quindi resta da cercare in $\{E_{ij}\}$.

$$x \in X \Rightarrow \exists! i : \; x = x_i \underbrace{\Rightarrow}_{\text{per costruzione}} x_i \in E_{ih} \;\; \forall h$$

Notiamo che

$$C_i = \{C_{i1}, \ldots, C_{it}\} \text{ partizione di } Y \Rightarrow \exists! j : \; y \in C_{ij}$$

Quindi

$$E_{ij} = \{x_i, y, C_{ijk}\}$$

Abbiamo cosi' determinato l'unico 3-oggetto contenente x, y.

□

Example 2.26. Consideriamo il sistema STS(3)

$$X = \{1, 2, 3\}$$
$$\mathcal{E} = \{\{1, 2, 3\}\}$$

E da questo costruiamo un STS(7).
$|X'| = 7$, quindi ci servono gli elementi $Y = \{4, 5, 6, 7\}$, $|Y| = 4$.
Una 1-fattorizzazione di Y e':

$$\begin{array}{c|c|c} 4\;5 & 4\;6 & 4\;7 \\ 6\;7 & 5\;7 & 5\;6 \end{array}$$

e da questa formiamo le nuove terne:

$$\{1,4,5\}\,,\{1,6,7\}$$
$$\{2,4,6\}\,,\{2,5,7\}$$
$$\{3,4,7\}\,,\{3,5,6\}$$

Infine abbiamo:

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \{\text{nuove terne}\} :$$
$$\{1,2,3\}$$
$$\{1,4,5\}\,,\{1,6,7\}$$
$$\{2,4,6\}\,,\{2,5,7\}$$
$$\{3,4,7\}\,,\{3,5,6\}$$

Proposition 2.27. *Costruzione di un* STS$(3v)$ *a partire da un* STS(v).
Sia $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \in \mathrm{STS}(v)$ *il sistema di partenza. Poniamo*

$$X' = \bigcup_{i=1,2,3} X \times \{i\}$$

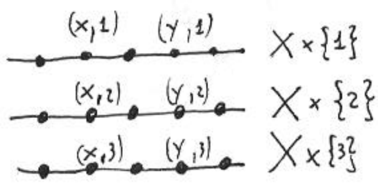
Sia $\mathcal{E}'$ *l'insieme composto dall'unione dei seguenti tre insiemi:*

$$R = \bigcup_{i=1,2,3} \{\{(x,i),\ (y,i),\ (z,i)\} \mid \{x,y,z\} \in \mathcal{E}\}$$
$$C = \{\{(x,1),\ (x,2),\ (x,3)\} \mid x \in X\}$$
$$D = \{\{(x,\sigma(1)),\ (y,\sigma(2)),\ (z,\sigma(3))\} \mid \{x,y,z\} \in \mathcal{E},\ \ \sigma \textit{ permutazione di } \{1,2,3\}\}$$

ovvero, $\mathcal{E}' = R \cup C \cup D$.
Allora,

$$(X', \mathcal{E}') \in \mathrm{STS}(3v)$$

Proof: Possiamo visualizzare X' cosi':



R e' quindi l'insieme delle terne prese da ogni riga.
C e' l'insieme delle colonne, ad esempio contiene la colonna $(x,1),(x,2),(x,3)$.
Chiaramente $|X'| = 3v$ e inoltre, $(X', \mathcal{E}')$ e' un ipergrafo uniforme di rango 3.
$\langle 1 \rangle$ STS$(3v) \neq \emptyset$

$$\mathbb{H} \in \mathrm{STS}(v) \underbrace{\Rightarrow}_{[2.18,\mathrm{pg}.14]} v = 1, 3\ \ \mathbb{Z}_6$$
$$v = 1\ \ \mathbb{Z}_6 \Rightarrow 3v = 3\ \ \mathbb{Z}_6 \underbrace{\Rightarrow}_{[2.18,\mathrm{pg}.14]} \mathrm{STS}(3v) \neq 0$$
$$v = 3\ \ \mathbb{Z}_6 \Rightarrow 3v = 9 = 3\ \ \mathbb{Z}_6 \underbrace{\Rightarrow}_{[2.18,\mathrm{pg}.14]} \mathrm{STS}(3v) \neq 0$$

$\langle 2\rangle$ Dimostriamo che $\forall Y \in \mathcal{P}_2(X')\ \ d'(Y) = 1$

Sia $Y = \{(x,i),\ (y,j)\}$, con $i,j \leq 3$.

$$Y \in \mathcal{P}_2(X') \Rightarrow (x,i) \neq (y,j)$$

Case: $i = j,\ x \neq y$

In questo caso ci troviamo nella riga i e per costruzione di R riusciamo a trovare una terna opportuna:

$$x,y \in X \Rightarrow \exists!\, \{a,b,c\} \in \mathcal{E} :\ \ x,y \in \{a,b,c\}\ \Rightarrow (x,i),\ (y,i) \in \{(a,i),\ (b,i),\ (c,i)\} \in R \subseteq \mathcal{E}'$$

Case: $i \neq j,\ x = y$

In questo caso ci troviamo in una colonna, quindi usiamo C:

$$(x,i),\ (x,j) \in \{(x,i),\ (x,j),\ (x,h)\} \in C \subseteq \mathcal{E}'$$

Case: $i \neq j,\ x \neq y$

Adesso sfruttiamo D.

$$x,y \in X \Rightarrow \exists!\, \{a,b,c\} \in \mathcal{E} :\ \ x,y \in \{a,b,c\}$$

Supponiamo ad esempio che $a = x,\ y = b$, allora

$$i \neq j,\ 1 \leq i,j \leq 3 \Rightarrow \exists! \sigma \text{ permutazione di } \{1,2,3\} \text{ t.c. } \sigma(1) = i,\ \sigma(2) = j \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x,i),\ (y,j) \in \{(a,\sigma(1)),\ (b,\sigma(2)),\ (c,\sigma(3))\} \in D$$

In ognuno dei tre casi, notiamo il 3-oggetto contenente Y e' unico. Alternativamente, si puo' verificare che la seguente espressione

$$|\mathcal{E}'| = |R| + |C| + |D| = 3|\mathcal{E}| + |X| + |\mathcal{E}|6 = 9|\mathcal{E}| + v \underbrace{=}_{[2.9,\text{pg}.12]} 9\frac{v(v-1)}{6} + v = \frac{9v^2 - 9v + 6v}{6} = \frac{3v(3v-1)}{6}$$

e' proprio quella data dalla prop [2.9,pg.12] per un STS($3v$), quindi applicando il lemma [2.38,pg.22] la tesi e' acquisita.

□

Example 2.28. Vedi [2.30,pg.20].

2.7 Kirkman

Definition 2.29. Sia $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \in S_\lambda(h,r,v)$, $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$.

$$E_1 \parallel E_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} E_1 \cap E_2 = \emptyset$$

E_1, E_2 si diranno paralleli.

$$C \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{E}) \text{ e' una classe di parallelismo di } \mathbb{H} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} C \text{ e' una partizione di } X$$

Infine,

$$\mathbb{H} \text{ e' di Kirkman (o risolubile)} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \pi \text{ partizione di } \mathcal{E} :\ \ \forall C \in \pi\ \ C \text{ e' una classe di parallelismo di } \mathbb{H}$$

π verra' chiamata *risoluzione* di $\mathbb{H}$.

Example 2.30. Il seguente STS(9) e' risolubile:

123	147	159	168
456	258	267	249
789	369	348	357

Nota: abbiamo costruito questo STS(9) utilizzando la costruzione [2.27,pg.19], partendo dall'STS(3) $X = \{1,2,3\}\,, \mathcal{E} = [\{1,2,3\}]$ e ponendo

$$\begin{gathered}1 \leftrightarrow (1,1),\ 2 \leftrightarrow (2,1),\ 3 \leftrightarrow (3,1)\\ 4 \leftrightarrow (1,2),\ 5 \leftrightarrow (2,2),\ 6 \leftrightarrow (3,2)\\ 7 \leftrightarrow (1,3),\ 8 \leftrightarrow (2,3),\ 9 \leftrightarrow (3,3)\end{gathered}$$

Proposition 2.31. *Sia $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \in S_\lambda(h,r,v)$ risolubile e sia π una qualsiasi partizione di $\mathcal{E}$ che risolve $\mathbb{H}$. Sia $C \in \pi$. Allora*

$$|C| = \frac{v}{r}$$

Proof:

$\mathbb{H}$ risolubile $\Rightarrow \exists \pi$ partizione di $\mathcal{E}$: $\forall C \in \pi$ C e' una partizione di X

$$C \text{ partizione di X} \Rightarrow \bigcup_{c\in C} c = X \Rightarrow v = |X| = \Big|\bigcup_{c\in C} c\Big| \underbrace{=}_{C\text{ partizione}} \sum_{c\in C} |c| =$$

$$\underbrace{=}_{c\in C\in\pi\subseteq\mathcal{P}(\mathcal{E})} \sum_{c\in C} r = |C|r$$

□

Proposition 2.32.

$$\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \in S_\lambda(h,r,v) \textit{ risolubile } \Rightarrow r\big/v$$

Proof: Dalla prop [2.31,pg.21],

$$|C| = \frac{v}{r} \in \mathbb{N} \Rightarrow r\big/v$$

□

Proposition 2.33.

$$\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \in S_\lambda(h,r,v) \textit{ risolubile } \Rightarrow |\pi| = \lambda\frac{\binom{v-1}{h-1}}{\binom{r-1}{h-1}} = \lambda\frac{(v-1)!(r-h)!}{(r-1)!(v-h)!}$$

dove π e' una qualsiasi partizione di $\mathcal{E}$ che risolve $\mathbb{H}$.

Proof:

$$\bigcup_{C\in\pi} C = \mathcal{E} \underbrace{\Rightarrow}_{\pi\text{ partizione di }\mathcal{E}} |\mathcal{E}| = \sum_{C\in\pi} |C| \underbrace{=}_{[2.31,\text{pg}.21]} \sum_{C\in\pi} \frac{v}{r} = \frac{v}{r}|\pi| \Rightarrow |\pi| = |\mathcal{E}|\frac{r}{v} =$$

$$\underbrace{=}_{[2.19,\text{pg}.14]} \lambda\frac{\binom{v}{h}}{\binom{r}{h}}\frac{r}{v} = \lambda\frac{v!(r-h)!}{r!(v-h)!}\frac{r}{v} = \lambda\frac{(v-1)!(r-h)!}{(r-1)!(v-h)!} = \lambda\frac{\binom{v-1}{h-1}}{\binom{r-1}{h-1}}$$

□

Proposition 2.34.

$$\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \in S_\lambda(h,r,v) \textit{ risolubile } \Rightarrow |\pi| = |d(x)| = |\mathcal{E}_x| \quad \forall x \in X$$

dove π e' una qualsiasi partizione di $\mathcal{E}$ che risolve $\mathbb{H}$.

Proof: Basta confrontare la [2.33,pg.21] con la [2.21,pg.15]. □

2.7.1 KTS

Definition 2.35. Poniamo

$$\mathrm{KTS}(v) = \{\mathbb{H} \in \mathrm{STS}(v) \mid \mathbb{H} \text{ e' risolubile } \}$$

Theorem 2.36.

$$\mathrm{KTS}(v) \neq \emptyset \Leftrightarrow v = 3 \ \ \mathbb{Z}_6$$

Proof: Dimostriamo solo la condizione necessaria.
$\langle 1 \rangle$ $(\Rightarrow)$

$$\mathbb{H} \in \mathrm{KTS}(v) \underbrace{\Rightarrow}_{[2.32,\mathrm{pg}.21]} r \big/ v \underbrace{\Leftrightarrow}_{\mathrm{KTS}(v) \subseteq \mathrm{STS}(v)} 3 \big/ v \Leftrightarrow v = 0 \ \ \mathbb{Z}_3 \ \ (1)$$

$$\mathbb{H} \in \mathrm{STS}(v) \underbrace{\Rightarrow}_{[2.18,\mathrm{pg}.14]} v = 1,3 \ \ \mathbb{Z}_6$$

$$\begin{cases} v = 0 \ \ \mathbb{Z}_3 \\ v = 1,3 \ \ \mathbb{Z}_6 \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{[\mathrm{AI},10.9,\mathrm{pg}.50]} v = 3 \ \ \mathbb{Z}_6$$

$$3k = 1 \ \ \mathbb{Z}_6 \Leftrightarrow 3k = 1 + 6j \Leftrightarrow 3(k - 2j) = 1 \Rightarrow 3 \big/ 1 \text{ assurdo}$$

Quindi l'unico caso valido e'

$$v = 3 \ \ \mathbb{Z}_6$$

$\langle 2 \rangle$ $(\Leftarrow)$
DA VERIFICARE!

$\square$

Proposition 2.37. *Una* 1*-fattorizzazione di* $(X, \mathcal{P}_2(X)) \in \mathbb{K}_n$ *e' equivalente ad una risoluzione di* $S(2, 2, |X|)$*, infatti,*

$$S(2, 2, v) = \mathbb{K}_v$$

2.8 Altre costruzioni

Lemma 2.38. *Sia* $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \in S(h, r, v)$*, e sia* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}_r(X)$ *tale che*

$$\forall Y \in \mathcal{P}_h(X) \ \ \exists \ \ \beta \in \mathcal{B} : \ \ Y \subseteq \beta$$

allora

$$|\mathcal{B}| = |\mathcal{E}| \Rightarrow (X, \mathcal{B}) \in S(h, r, v)$$

Proof: Basta dimostrare l'unicita', cioe':

$$\forall Y \in \mathcal{P}_h(X) \ \ \exists! \ \beta \in \mathcal{B} : \ \ Y \subseteq \beta \ \ (1)$$

Supponiamo per assurdo che la (1) sia falsa. Poiche' l'esistenza e' garantita per Hp, si ha

$$\exists Y \in \mathcal{P}_h(X) : \ \ |\{\beta \in \mathcal{B} \mid Y \subseteq \beta\}| > 1 \ \ (2)$$

e inoltre, sempre per l'esistenza, si ha

$$\mathcal{P}_h(X) = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} \mathcal{P}_h(\beta) \ \ (3)$$

Tuttavia, per la (2) si ha che $\{\mathcal{P}_h(\beta) \mid \beta \in \mathcal{B}\}$ non e' una partizione (3.1)

$$|P_h(X)| \underbrace{=}_{(3)} \left| \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} \mathcal{P}_h(\beta) \right| \underbrace{<}_{(3.1)} \sum_{\beta \in \mathcal{B}} |\mathcal{P}_h(\beta)| = |\mathcal{B}|c \text{ dove } c = |\mathcal{P}_h(\beta)| \ \ \forall \beta \in \mathcal{B}$$

$$|P_h(X)| < |\mathcal{B}|c \underbrace{=}_{\text{per Hp}} |\mathcal{E}|c \ \ (3.2)$$

Poiche' $\mathbb{H} \in S(h, r, v)$, come gia' visto altre volte (vedi [2.6,pg.11]), abbiamo che

$\{\mathcal{P}_h(E) \mid E \in \mathcal{E}\}$ e' una partizione di $\mathcal{P}_h(X)$ (4)

$$|\mathcal{P}_h(X)| \underbrace{=}_{(4)} \left| \bigcup_{E \in \mathcal{E}} \mathcal{P}_h(E) \right| \underbrace{=}_{(4)} \sum_{E \in \mathcal{E}} |\mathcal{P}_h(E)| \underbrace{=}_{|E|=|\beta|} \sum_{E \in \mathcal{E}} c = c|\mathcal{E}| \underbrace{>}_{(3.2)} |P_h(X)|$$

$$\Rightarrow |\mathcal{P}_h(X)| > |P_h(X)|$$

assurdo

□

Proposition 2.39. *Costruzione di un $S(2, r, (r-1)v + 1)$ a partire da un $S(2, r, v)$ e da un $S(2, r-1, (r-2)v + 1)$ risolubile.*

Sia $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \in S(2, r, v)$ il sistema di partenza. Sia $\mathbb{H}' = (X', \mathcal{E}')$ il sistema che dobbiamo costruire.
Sia $\pi = \{C_i\}_{i=1}^{|\pi|}$ una risoluzione di un $(Y, \mathcal{E}_Y) \in S(2, r-1, (r-2)v + 1)$, con $Y \cap X = \emptyset$

Numeriamo X: $X = \{x_1, \ldots, x_v\}$.
Poiche' si ha $|\pi| = v$, per ogni $x \in X$, possiamo porre la seguente biezione:

$$\begin{aligned} &C_. : X \longrightarrow \pi \\ &C_x = C_i \quad \textit{dove } x_i = x \end{aligned}$$

Numeriamo C_x: $C_x = \{C_{x1}, C_{x2}, \ldots, C_{xt}\}$.
Costruiamo il seguente r-oggetto:

$$E_{xj} \overset{def}{=} \{x\} \cup C_{xj}$$

Poniamo

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \{E_{xj} \mid x \in X, \ \ j = 1, \ldots, t\} \\ &X' = X \cup Y \end{aligned}$$

Si ha che $\mathbb{H}' = (X', \mathcal{E}') \in S(2, r, (r-1)v + 1)$

Proof: Proof sketch: Questa proposizione e' semplicemente una generalizzazione della prop [2.25,pg.16]. Infatti, stiamo considerando tutte le classi di parallelismo che formano π e stiamo completando ogni suo elemento aggiungendo al suo interno il relativo elemento di X, ovvero otteniamo un E_{ij}.
⟨1⟩ Analizziamo l'idea di fondo di questa costruzione

Supponiamo di avere un $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \in S(2, r, v)$ e un $(Y, \mathcal{E}_Y) \in S(2, r-1, w)$ risolubile. Possiamo costruire a partire da questi un sistema piu' grande?
Poiche' $(Y, \mathcal{E}_Y)$ e' risolubile, possiamo considerare una partizione π che lo risolve.
A questo punto, il trucco consiste nell'associare ogni elemento $x \in X$ ad una classe $C \in \mathcal{E}_Y$: prendiamo tutti gli $(r-1)$-oggetti della classe C e li estendiamo aggiungendoci l'elemento x.
Otteniamo cosi' degli r-oggetti.
Affinche' questa associazione sia possibile, il numero $|X|$ deve essere uguale a $|\pi|$ e quindi:

$$v = |X| = |\pi| \underbrace{=}_{[2.33,\text{pg.}21]} \frac{(w-1)!(r-1-2)!}{(r-1-1)!(w-2)!} = \frac{(w-1)!(r-3)!}{(r-2)!(w-2)!} = \frac{w-1}{r-2} \Rightarrow v(r-2) = w-1 \Leftrightarrow w = v(r-2)+1$$

E' proprio per questo motivo che richiediamo $(Y, \mathcal{E}_Y) \in S(2, r-1, (r-2)v+1)$.

$\langle 1 \rangle$ Passiamo alla dimostrazione
Sia $w = (r-2)v + 1$.
Per quanto detto nel passo precedente, abbiamo:

$$v = |X| = |\pi|$$

quindi la biezione $C.$ e gli oggetti E_x sono tutti ben definiti. Inoltre,

$$t = |C_x| \underbrace{=}_{[2.31,\text{pg.}21]} \frac{w}{r-1} \quad \forall x \in X \quad (1)$$

A questo punto, per verificare che $\forall A = \{a, b\} \in \mathcal{P}_2(X') \;\; d'(A) = 1$, basta procedere come nella dimostrazione di [2.25,pg.16]: poiche' $X' = X \cup Y$ abbiamo i seguenti casi disgiunti tra loro:

Case: $a \in X,\ b \in Y$
Basta prendere un opportuno E_{aj}:
$a \in E_{aj} \;\; \forall j = 1, \ldots, t$
$E_{aj} = \{a\} \cup C_{aj}$
$C_a \in \pi$, π risoluzione di $(Y, \mathcal{E}_Y) \Rightarrow \{C_{a1}, \ldots, C_{at}\}$ e' una partizione di $Y \Rightarrow \exists! j : \;\; b \in C_{aj}$
$a, b \in E_{aj}$
Infine, non puo' esistere una terna in $\mathcal{E}$ che contenga b, perche' $Y \cap X = \emptyset$.
Quindi la terna che contiene a, b esiste ed e' unica.

Case: $a, b \in X$

$$(X, \mathcal{E}) \in S(2, r, v)$$

quindi qui non abbiamo alcun problema: $\exists! E \in \mathcal{E} : \;\; \{a, b\} \subseteq E$. E poiche' X, Y sono disgiunti, E e' unica anche in $\mathcal{E}'$.

Case: $a, b \in Y$

$$(Y, \mathcal{E}_Y) \in S(2, r-1, (r-2)v+1)$$

quindi anche qui non abbiamo problemi: $\exists! E \in \mathcal{E}_Y : \;\; \{a, b\} \subseteq E$.

$$\pi \text{ risoluzione di } (Y, \mathcal{E}_Y) \Rightarrow \exists! C_x \in \pi : \; E \in C_x$$
$$C_x \text{ partizione di } Y \Rightarrow \exists! j : \;\; C_{xj} = E$$
$$a, b \subseteq E \subseteq E_{xj} = \{x\} \cup C_{xj}$$

E poiche' X, Y sono disgiunti, non esistono elementi di $\mathcal{E}$ che contengano a, b.

□

Example 2.40. Usiamo la costruzione [2.39,pg.23].

A partire da $(\{A, B, C, D\}, \{\{A, B, C, D\}\}) \in S(2, 4, 4)$ costruiamo $S(2, 4, 13)$.

Per la costruzione abbiamo bisogno di un $S(2,3,9)$ risolubile. Usiamo quello dell'esempio [2.30,pg.20] e otteniamo:

ABCD			
A123	B147	C159	D168
A456	B258	C267	D249
A789	B369	C348	D357

Notiamo che questo sistema e' un modello del piano proiettivo: $\{A, B, C, D\}$ e' la retta impropria e tutte le altre rette hanno un punto in comune della retta impropria.

Proposition 2.41. *Costruzione di un $S(2, q^n, q^{mn})$ risolubile.*

Sia q un primo, $m, n > 0$, allora

$$\exists \mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \in S(2, q^n, q^{mn}) \textit{ risolubile}$$

Proof:
$\langle 1 \rangle$ Costruiamo un campo con q^n elementi
Dalla teoria dei campi e' noto che

$$q \text{ primo, } n \in \mathbb{N}^* \underbrace{\Rightarrow}_{[\text{AC},3.7,\text{pg}.52]} \exists K \text{ campo: } |K| = q^n$$

In particolare, un tale campo e' dato da

$$K = \left\{ \alpha \mid \alpha \text{ radice di } x^{q^n} - x \in \mathbb{Z}_q[x] \right\}$$

dove le radici si prendono dal campo di spezzamento di $x^{q^n} - x \in \mathbb{Z}_q[x]$
Un altro metodo per costruire K e' considerare la prop [AC,3.9,pg.54] che afferma:

$$\exists f(x) \in \mathbb{Z}_q[x] : \quad \deg f = n, \; f(x) \text{ irriducibile in } \mathbb{Z}_q[x]$$

e quindi possiamo scegliere

$$K = \mathbb{Z}_q(\alpha), \text{ dove } f(\alpha) = 0$$

e avremo

$$|K| = q^n$$

$\langle 2 \rangle$ Costruiamo una geometria affine di q^{mn} elementi
Poniamo $V = K^m$. Poiche' K e' un campo, V e' uno spazio vettoriale di dimensione m. Su V possiamo costruire una geometria affine considerando gli elementi di V come punti e ponendo:

$$\overrightarrow{vw} = w - v$$

Osserviamo che una retta passante per un punto $P \in V$, con giacitura $w \in V \setminus \{0\}$ e':

$$r = \{P + \lambda w \mid \quad \lambda \in K\}$$

Notiamo che:

$$|V| = |K^m| = |K|^m = q^{mn}$$

$\langle 2.1 \rangle$ Se r e' una retta, allora $|r| = |K|$
Poiche' il campo e' finito, una retta r avra' esattamente $|K|$ punti distinti:

$$P + \lambda w = P + \lambda' w \Leftrightarrow (\lambda - \lambda')w = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{w \neq 0} \lambda = \lambda' \quad (*)$$

$$|r| = |\{P + \lambda w \mid \quad \lambda \in K\}| \underbrace{=}_{(*)} |K| \quad (1)$$

$\langle 2.2 \rangle$ La classe C_w di parallelismo, formata dalla rette con giacitura w e' una partizione di V.

Siano $r, s \in C_w$

$$P \in r \cap s, \quad r \parallel s \underbrace{\Rightarrow}_{[\text{GII},1.25,\text{pg}.13]} r = s \quad (2)$$

$$r \neq s, \quad r \parallel s \underbrace{\Rightarrow}_{(2)} r \cap s = \emptyset$$

$$\bigcup C_w = \bigcup_{P \in V} \{P + \lambda w \mid \lambda \in K\} \underbrace{=}_{\text{scegliendo } \lambda = 0} V$$

L'implicazione (2) si puo' anche ottenere utilizzando il postulato delle rette parallele di Euclide.
$\langle 2.3 \rangle$ $|C_w| = \frac{|V|}{|K|}$

$$V \underbrace{=}_{\text{passo 2.2}} \bigcup_{r\in C_w} r \Rightarrow q^{mn} = |V| = \Big|\bigcup_{r\in C_w} r\Big| \underbrace{=}_{\text{passo 2.2}} \sum_{r\in C_w} |r| \underbrace{=}_{(1)} |K||C_w| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |C_w| = \frac{|V|}{|K|} = \frac{q^{mn}}{q^n} = q^{n(m-1)} \quad (3)$$

⟨3⟩ Posto $R = \{r \mid r \text{ retta di } V\}$ si ha $(V,R) \in S(2, q^n, q^{mn})$

Per costruzione, (X,V) e' un ipergrafo uniforme di rango $|r| = |K| = q^n$ con $|V| = q^{mn}$ punti. E poiche' V e' una geometria affine e stiamo includendo tutte le rette, si ha:

$$\forall \{P,Q\} \in \mathcal{P}_2(V) \ \ \exists! r \in R : \ \ \{P,Q\}$$

⟨4⟩ Una risoluzione di (V,R) e' $\{C_w \mid w \in V\}$

Abbiamo gia' visto che ogni C_w e' una partizione di V.

Dimostriamo che $\{C_w \mid w \in V\}$ e' una partizione di R.

$$r \in R \Rightarrow \exists w \in V,\ P \in V : \ \ r = \{P + \lambda w \mid \lambda \in K\} \Rightarrow r \in C_w$$

$$\text{Quindi, } \bigcup_{w\in V} C_w = R$$

$$C_w \neq C_v \Rightarrow \nexists \lambda \in K : \ \ w = \lambda v \Rightarrow C_w \cap C_v = \emptyset$$

⟨5⟩ Sia $d(P)$ il grado di $P \in V$ rispetto al sistema (V,R). E sia $R_P = \{r \in R \mid P \in r\}$. Allora si ha

$$|\{C_w \mid w \in V\}| = d(P) = |R_P| = \frac{q^{mn}-1}{q^n-1}$$

Poiche' (V,R) e' un $S(2, q^n, q^{mn})$ e' sufficiente applicare la proposizione [2.33,pg.21] e la [2.34,pg.21]:

$$|\{C_w \mid w \in V\}| \underbrace{=}_{[2.33,\text{pg}.21]} \frac{(q^{mn}-1)!(q^n-2)!}{(q^n-1)!(q^{mn}-2)!} = \frac{q^{mn}-1}{q^n-1} \underbrace{=}_{[2.34,\text{pg}.21]} d(P) = |R_P|$$

Diamo adesso un metodo per scrivere efficientemente tutti i C_w e tutte le loro rette.

Case: $m = 1$

Se $m = 1$, per il passo 5 abbiamo:

$$|\{C_w \mid w \in V\}| = \frac{q^n-1}{q^n-1} = 1$$

Quindi esiste una sola classe C_1.

$$|C_1| \underbrace{=}_{(3)} q^{n(m-1)} \underbrace{=}_{m=1} 1$$

quindi esiste una sola retta che concide con tutto V.

Case: $m = 2$

Sia r_0 la seguente retta:

$$r_0 = \{\lambda(1,0) \mid \lambda \in K\} = \{(\lambda, 0)\}_{\lambda\in K}$$

Sia C_{w_0} la classe di parallelismo di rette con giacitura $w_0 = (1,0)$ (e quindi $r_0 \in C_{w_0}$).

Sia $P \in V \backslash r_0$ e sia data la seguente retta $r_1 \in C_{w_0}$:

$$r_1 = \{P + \lambda(1,0) \mid \lambda \in K\}$$

$r_1 \neq r_0$ in quanto $P \notin r_0$. Nota: r_1 deve esistere perche' $m > 1 \underbrace{\Rightarrow}_{(3)} |C_{w_0}| > 1$

Poniamo $D = \{w_0\} \cup r_1$.

⟨5.1⟩ Dimostriamo che $\{C_w \mid w \in V\} = \{C_w \mid w \in D\}$

Spiegazione (non formalizzata): sia Kw_0 la retta passante per l'origine e di vettore w_0, cioe' $\{\lambda w_0 \mid \lambda \in K\}$, sia $P \in V \backslash Kw_0$ un punto fuori dalla retta e sia $P + Kw_0$ la retta di vettore w_0 e passante per P. Questa retta e' parallela a Kw_0 e stanno nella stessa classe di parallelismo C_{w_0}. Se C e' una classe di parallelismo, distinta da C_{w_0}, dato che copre il piano,

esistera' una retta $r_C \in C$ passante per l'origine. Questa retta si incontra con $P + Kw_0$ in un qualche punto $P + \lambda_C w_0$, altrimenti sarebbe parallela ad essa. Allora un vettore di questa retta e' $v = (P + \lambda_C w_0) - \overline{0} = P + \lambda_C w_0$. Le rette in C sono parallele a r_C e quindi un loro vettore sara' il vettore v di r_C. Viceversa, un vettore $v = P + \lambda w_0$ definisce una classe di parallelismo C_v, $C_v = \{r \mid r \text{ retta con vettore } v\}$. Quindi,
$\{C \mid C \text{ classe di parallelismo}\} = \{C_{w_0}\} \cup \{C_v \mid v \in P + Kw_0\} = \{C_w \mid w \in \{w_0\} \cup (P + Kw_0)\}$

Dimostrazione:

chiaramente l'inclusione $\supseteq$ e' vera.
Contiamo gli elementi del secondo insieme.
Presi $w, v \in D$ distinti, si ha $C_w \cap C_v = \emptyset$. Per dimostrarlo Supponiamo per assurdo $C_w \cap C_v \neq \emptyset$

$$C_w \cap C_v \neq \emptyset \underbrace{\Rightarrow}_{\{C_w \mid w \in V\} \text{ partizione di } R} C_w = C_v \Rightarrow \exists \mu \in K^* : \; w = \mu v \quad (4)$$

$$\Rightarrow \{\lambda w \mid \lambda \in K\} = \{\lambda v \mid \lambda \in K\} = \{\lambda(v - w) \mid \lambda \in K\} \quad (4.1)$$

Distinguiamo due casi:

Case: $w, v \in D \setminus \{w_0\}$

$$w, v \in D \setminus \{w_0 = (1,0)\} = r_1 \Rightarrow w = P + \lambda' w_0, \;\; v = P + \lambda'' w_0 \Rightarrow v - w = (\lambda'' - \lambda')w_0 \Rightarrow$$
$$\underbrace{\Rightarrow}_{(4.1)} \{\lambda w \mid \lambda \in K\} = \{\lambda(\lambda'' - \lambda')w_0 \mid \lambda \in K\} = \{\lambda w_0 \mid \lambda \in K\} = r_0$$
$$\Rightarrow w \in r_0 \Rightarrow r_0 \cap r_1 \neq \emptyset$$

e questo e' assurdo in quanto $r_0, r_1 \in C_{w_0}$ e $r_0 \neq r_1$.

Case: $w \in D \setminus \{w_0\}$, $v = w_0$

$$w \in D \setminus \{w_0\} = r_1$$
$$(4.1) \Rightarrow \{\lambda w \mid \lambda \in K\} = \{\lambda v \mid \lambda \in K\} \underbrace{=}_{v = w_0} \{\lambda w_0 \mid \lambda \in K\} = r_0$$
$$\Rightarrow w \in r_0 \Rightarrow r_0 \cap r_1 \neq \emptyset$$

ed anche qui si arriva allo stesso assurdo di prima.
Possiamo cosi' affermare che

$$|\{C_w \mid w \in D\}| = |D| = |\{w_0\}| + |r_1| = 1 + |K| \quad (5)$$

Infine,

$$|\{C_w \mid w \in V\}| \underbrace{=}_{\text{passo 5}} = \frac{q^{mn} - 1}{q^n - 1} \underbrace{=}_{m=2} \frac{q^{2n} - 1}{q^n - 1} = \frac{(q^n - 1)(q^n + 1)}{q^n - 1} = q^n + 1 \underbrace{=}_{(5)} |\{C_w \mid w \in D\}|$$

Poiche' vale l'inclusione $\subseteq$, abbiamo cosi' dimostrato che

$$\{C_w \mid w \in V\} = \{C_w \mid w \in D\}$$

$\langle 5.1.1 \rangle$ Sia $w \in D \setminus \{w_0\} = r_1$. Le rette di C_w sono

$$C_w = \{\{A + \lambda w \mid \lambda \in K\} \mid A \in r_0\}$$

Infatti,
Chiaramente vale l'inclusione $\supseteq$.
Confrontiamo la cardinalita' dei due insiemi per stabilire l'uguaglianza.
Se $A, B \in r_0$ sono distinti, allora anche le rette $r = \{A + \lambda w\}$, $s = \{B + \lambda w\}$ sono

distinte, perche' altrimenti si avrebbe:

$A, B \in r_0 \Rightarrow \exists\lambda_A,\ \lambda_B: \ \ A = \lambda_A w_0, \ \ B = \lambda_B w_0$

$w \in D\setminus\{w_0\} = r_1 \Rightarrow w = P + \lambda_w w_0$

$A, B \in r = s \Rightarrow s = r = \left\{A + \lambda\overrightarrow{BA} \mid \lambda \in K\right\} =$

$= \{A + \lambda(A - B) = \lambda_A w_0 + \lambda(\lambda_A w_0 - \lambda_B w_0) = (\lambda_A + (\lambda_A - \lambda_B)\lambda)w_0 \mid \lambda \in K\} = r_0$

$\begin{cases} r = s = r_0 \\ r_0 \in C_{w_0} r \in C_w \end{cases} \Rightarrow C_w \cap C_{w_0} \neq \emptyset \Rightarrow C_w = C_{w_0} \Rightarrow \exists k: \ w = kw_0 \Rightarrow w \in r_0$

ma questo e' assurdo contro $w \in r_1$.

Abbiamo quindi:

$$|\{\{A + \lambda w \mid \lambda \in K\} \mid A \in r_0\}| = |r_0| = |K|$$

$$|C_w| \underbrace{=}_{(3)} q^{n(m-1)} \underbrace{=}_{m=2} q^n = |K|$$

L'uguaglianza e' cosi' provata.

$\langle 5.1.2\rangle$ Le rette di C_{w_0} sono

$C_{w_0} = \{\{A + \lambda w_0 \mid \lambda \in K\} \mid A \in \{(0,\mu) \mid \mu \in K\}\} = \{\{(\lambda,\mu) \mid \lambda \in K\} \mid \mu \in K\}$

Infatti,

Procediamo come prima.

Le rette nel secondo insieme sono distinte per μ, μ' distinti:

$$\{(\lambda,\mu) \mid \lambda \in K\} = \{(\lambda,\mu') \mid \lambda \in K\}\ (0,\mu) = (\lambda,\mu') \Rightarrow \mu = \mu'$$

Quindi nel secondo insieme ci sono $|K|$ rette. E poiche' $|K| = |C_{w_0}|$ abbiamo la tesi.

$\square$

Example 2.42. Costruzione di $S(2,4,16)$ risolubile con l'uso della prop [2.41,pg.26].

In questo caso i parametri sono:

$$q = 2,\ n = 2,\ m = 2$$

Come campo scegliamo $K = \{0, 1, \omega, \overline{\omega}\}$ che sono tutte le radici di $x^4 - x = x(x^3 - 1) \in \mathbb{Z}_2[x]$.
E' facile vedere che le tabelle delle operazioni $+$ e $\cdot$ su K sono:

$+$	0	1	ω	$\overline{\omega}$
0	0	1	ω	$\overline{\omega}$
1	1	0	$\overline{\omega}$	ω
ω	ω	$\overline{\omega}$	0	1
$\overline{\omega}$	$\overline{\omega}$	ω	1	0

$\cdot$	0	1	ω	$\overline{\omega}$
0	0	0	0	0
1	0	1	ω	$\overline{\omega}$
ω	0	ω	$\overline{\omega}$	1
$\overline{\omega}$	0	$\overline{\omega}$	1	ω

La retta $r_0 = \{\lambda(1,0) \mid \lambda \in K\}$ e' data dai punti:

$$r_0: \ \ (0,0),\ (1,0),\ (\omega,0),\ (\overline{\omega},0)$$

Scelto $P = (0,1) \notin r_0$, la retta $r_1 = \{P + \lambda(1,0) \mid \lambda \in K\}$ diventa:

$$r_1 : \ \ (0,1),\ (1,1),\ (\omega,1),\ (\overline{\omega},1)$$

Quindi l'insieme D di vettori non paralleli e' dato da:

$$w_0 = (1,0),\ w_1 = (0,1),\ w_2 = (1,1),\ w_3 = (\omega,1),\ w_4 = (\overline{\omega},1)$$

A questo punto abbiamo trovato tutte le 5 classi di parallelismo che risolvono (V,R). Dobbiamo solamente scrivere i punti delle loro rette usando le loro equazioni e le tabelle delle operazioni di K. In particolare, per quanto visto in [2.41,pg.26], le rette di C_{w_i} sono

$$C_{w_i} = \{\{A + \lambda w_i \mid \lambda \in K\} \mid A \in r_0\}$$

Calcoliamo C_{w_2}:

$$\begin{aligned}
&\{\lambda w_2 \mid \lambda \in K\} :\\
&\qquad 0w_2 = (0,0)\\
&\qquad 1w_2 = (1,1)\\
&\qquad \omega w_2 = (\omega,\omega)\\
&\qquad \overline{\omega} w_2 = (\overline{\omega},\overline{\omega})\\
&\{(1,0) + \lambda w_2 \mid \lambda \in K\} :\\
&\qquad (1,0)\\
&\qquad (1,0) + (1,1) = (0,1)\\
&\qquad (1,0) + (\omega,\omega) = (\overline{\omega},\omega)\\
&\qquad (1,0) + (\overline{\omega},\overline{\omega}) = (\omega,\overline{\omega})\\
&\{(\omega,0) + \lambda w_2 \mid \lambda \in K\} :\\
&\qquad (\omega,0)\\
&\qquad (\omega,0) + (1,1) = (\overline{\omega},1)\\
&\qquad (\omega,0) + (\omega,\omega) = (0,\omega)\\
&\qquad (\omega,0) + (\overline{\omega},\overline{\omega}) = (1,\overline{\omega})\\
&\{(\overline{\omega},0) + \lambda w_2 \mid \lambda \in K\} :\\
&\qquad (\overline{\omega},0)\\
&\qquad (\overline{\omega},0) + (1,1) = (\omega,1)\\
&\qquad (\overline{\omega},0) + (\omega,\omega) = (1,\omega)\\
&\qquad (\overline{\omega},0) + (\overline{\omega},\overline{\omega}) = (0,\overline{\omega})
\end{aligned}$$

Per quanto visto in [2.41,pg.26], le rette di C_{w_0} sono

$$C_{w_0} = \{\{(\lambda,\mu) \mid \lambda \in K\} \mid \mu \in K\}$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
&\{(\lambda,0) \mid \lambda \in K\} = r_0 : \\
&\quad r_0 : \ (0,0),\ (1,0),\ (\omega,0),\ (\overline{\omega},0) \\
&\{(\lambda,1) \mid \lambda \in K\} : \\
&\quad (0,1),\ (1,1),\ (\omega,1),\ (\overline{\omega},1) \\
&\{(\lambda,\omega) \mid \lambda \in K\} : \\
&\quad (0,\omega),\ (1,\omega),\ (\omega,\omega),\ (\overline{\omega},\omega) \\
&\{(\lambda,\overline{\omega}) \mid \lambda \in K\} : \\
&\quad (0,\overline{\omega}),\ (1,\overline{\omega}),\ (\omega,\overline{\omega}),\ (\overline{\omega},\overline{\omega})
\end{aligned}
$$

Procedendo analogamente a prima si ha:

$$
\begin{aligned}
&C_{w_1} : \\
&\qquad (0,0),\ (0,1),\ (0,\omega),\ (0,\overline{\omega}) \\
&\qquad (1,0),\ (1,1),\ (1,\omega),\ (1,\overline{\omega}) \\
&\qquad (\omega,0),\ (\omega,1),\ (\omega,\omega),\ (\omega,\overline{\omega}) \\
&\qquad (\overline{\omega},0),\ (\overline{\omega},1),\ (\overline{\omega},\omega),\ (\overline{\omega},\overline{\omega}) \\
&C_{w_3} : \\
&\qquad (0,0),\ (\omega,1),\ (\overline{\omega},\omega),\ (1,\overline{\omega}) \\
&\qquad (1,0),\ (\overline{\omega},1),\ (\omega,\omega),\ (0,\overline{\omega}) \\
&\qquad (\omega,0),\ (0,1),\ (1,\omega),\ (\overline{\omega},\overline{\omega}) \\
&\qquad (\overline{\omega},0),\ (1,1),\ (0,\omega),\ (\omega,\overline{\omega}) \\
&C_{w_4} : \\
&\qquad (0,0),\ (\overline{\omega},1),\ (1,\ \omega),\ (\omega,\overline{\omega}) \\
&\qquad (1,0),\ (\omega,1),\ (0,\ \omega),\ (\overline{\omega},\overline{\omega}) \\
&\qquad (\omega,0),\ (1,1),\ (\overline{\omega},\ \omega),\ (0,\overline{\omega}) \\
&\qquad (\overline{\omega},0),\ (0,1),\ (\omega,\ \omega),\ (1,\overline{\omega})
\end{aligned}
$$

Infine, adoperando la biezione tra l'insieme $\{1,2,\ldots,16\}$ e V che trasforma la classe C_{w_0} nella seguente:

$$
\begin{aligned}
&\{(\lambda,0) \mid \lambda \in K\} = r_0 : \\
&\quad r_0 : \ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\
&\{(\lambda,1) \mid \lambda \in K\} = r_0 : \\
&\quad 5,\ 6,\ 7,\ 8 \\
&\{(\lambda,\omega) \mid \lambda \in K\} = r_0 : \\
&\quad 9,\ 10,\ 11,\ 12 \\
&\{(\lambda,\overline{\omega}) \mid \lambda \in K\} = r_0 : \\
&\quad 13,\ 14,\ 15,\ 16
\end{aligned}
$$

concludiamo con la seguente risoluzione:

$$
\begin{array}{l}
C_{w_0}: \\
\quad 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\
\quad 5,\ 6,\ 7,\ 8 \\
\quad 9,\ 10,\ 11,\ 12 \\
\quad 13,\ 14,\ 15,\ 16 \\
C_{w_1}: \\
\quad 1,\ 5,\ 9,\ 13 \\
\quad 2,\ 6,\ 10,\ 14 \\
\quad 3,\ 7,\ 11,\ 15 \\
\quad 4,\ 8,\ 12,\ 16 \\
C_{w_2}: \\
\quad 1,\ 6,\ 11,\ 16 \\
\quad 2,\ 5,\ 12,\ 15 \\
\quad 3,\ 8,\ 9,\ 14 \\
\quad 4,\ 7,\ 10,\ 13 \\
C_{w_3}: \\
\quad 1,\ 7,\ 12,\ 14 \\
\quad 2,\ 8,\ 11,\ 13 \\
\quad 3,\ 5,\ 10,\ 16 \\
\quad 4,\ 6,\ 9,\ 15 \\
C_{w_4}: \\
\quad 1,\ 8,\ 10,\ 15 \\
\quad 2,\ 7,\ 9,\ 16 \\
\quad 3,\ 6,\ 12,\ 13 \\
\quad 4,\ 5,\ 11,\ 14
\end{array}
$$

Proposition 2.43. *Costruzione di un* SQS$(2v)$ *a partire da un* SQS(v).
Siano $\mathbb{H}_1 = (X_1, \mathcal{E}_1), \mathbb{H}_2 = (X_2, \mathcal{E}_2) \in \mathrm{SQS}(v)$*, con* $X_1 \cap X_2 = \emptyset$*, poniamo:*

$$
\begin{aligned}
&X := X_1 \cup X_2 \\
&F = \{F_1, \ldots, F_{v-1}\} \ \textit{una 1-fattorizzazione di } (X_1, \mathcal{P}_2(X_1)) \\
&G = \{G_1, \ldots, G_{v-1}\} \ \textit{una 1-fattorizzazione di } (X_2, \mathcal{P}_2(X_2)) \\
&\alpha \ \textit{permutazione di } \{1, \ldots, v-1\} \\
&\Gamma = \big\{\{x, y, z, t\} \in \mathcal{P}_4(X) \mid \{x, y\} \in F_{\alpha(i)}, \ \ \{z, t\} \in G_i, \ \ i = 1, \ldots, v-1\big\} \\
&\mathcal{E} := \Gamma \cup \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_3
\end{aligned}
$$

allora si ha

$$(X, \mathcal{E}) \in \mathrm{SQS}(2v)$$

Proof: Per verficare che $(X, \mathcal{E})$ sia un SQS$(2v) = S(3, 4, 2v)$, consideriamo $\{x, y, z\} \in \mathcal{P}_3(X)$ e dimostriamo che $\exists! \ E \in \mathcal{E}: \ \{x, y, z\} \subseteq \mathcal{E}$.
Distinguiamo 4 casi:

Case: $x, y, z \in X_1$

In Γ non possiamo trovare alcun 4-oggetto perche' negli oggetti di Γ ci sono almeno due elementi di X_2:

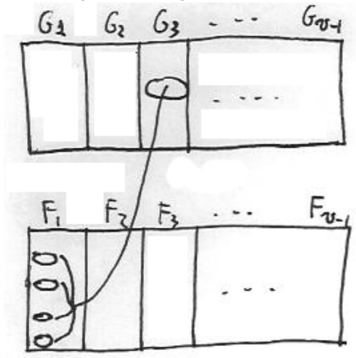
$$E \in \Gamma \Rightarrow |E \cap X_2| = 2 \Rightarrow \{x, y, z\} \nsubseteq E$$

Neanche in $\mathcal{E}_2$ possiamo trovare oggetti buoni, perche' $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

Quindi l'unico oggetto dovra' trovarsi in $\mathcal{E}_1$.

Case: $x, y \in X_1,\ z \in X_2$

Per questo caso basta osservare la seguente figura per capire come funziona α:



Case: $x \in X_1,\ y, z \in X_2$

Analogamente a prima, ma usando α^{-1}.

Case: $x, y, z \in X_2$

Analogamente al primo caso.

□

Example 2.44. Consideriamo il seguente SQS(4):

$$(\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2, 3, 4\}\})$$

e quest'altro SQS(4):

$$(\{5, 6, 7, 8\}, \{\{5, 6, 7, 8\}\})$$

Una $1-$fattorizzazione di X_1 e'

12	13	14
34	24	23

e quella di X_2 e'

56	57	58
78	68	67

Se come α scegliamo l'identita', Γ sara' dato da:

1256
1278
3456
3478
1357
1368
2457
2468
1458
1467
2358
2367

E aggiungendoci $1234, 5678$ otterremo l'$\mathcal{E}$ dell'SQS(8):

1234
5678
1256
1278
3456
3478
1357
1368
2457
2468
1458
1467
2358
2367

2.9 Blocking set

Proposition 2.45. *Sia* $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \in \mathrm{STS}(v)$*, si ha*

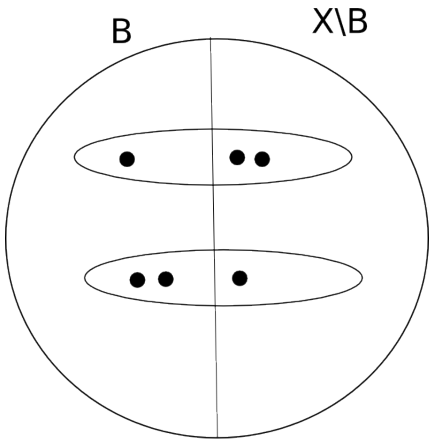
$$v \neq 3 \Rightarrow \textit{Non esistono blocking set per } \mathbb{H}$$

In pratica, gli $\mathrm{STS}(v)$ *non banali non hanno blocking set.*

Proof: Supponiamo che B sia un blocking set di $\mathbb{H}$. Sia $p = |B|$. Possiamo partizionare $\mathcal{E}$ in due tipi di spigoli:

$$\mathcal{E}_1 = \{E \in \mathcal{E} \mid \ |B \cap E| = 1\}$$
$$\mathcal{E}_2 = \{E \in \mathcal{E} \mid \ |B \cap E| = 2\}$$
$$\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}, \ \ \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$$

Graficamente:



Possiamo associare una coppia in B ad uno spigolo $E \in \mathcal{E}_2$:

$$\{x,y\} \in \mathcal{P}_2(B) \underbrace{\Rightarrow}_{B\subseteq X,\ \mathbb{H}\in \mathrm{STS}(v)} \Rightarrow \exists!\ E \in \mathcal{E}: \ \{x,y\} \subseteq E \underbrace{\Rightarrow}_{\{x,y\}\subseteq B} |B\cap E| = 2 \Rightarrow E \in \mathcal{E}_2$$

Quindi $\{x,y\} \in \mathcal{P}_2(B) \Rightarrow \exists! E \in \mathcal{E}_2 : \ \{x,y\} \subseteq E$

Viceversa, $E \in \mathcal{E}_2 \Rightarrow B\cap E \in \mathcal{P}_2(B)$

Otteniamo quindi una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{E}_2$ e $\mathcal{P}_2(B)$:

$$|\mathcal{E}_2| = |\mathcal{P}_2(B)| = \binom{p}{2}$$

Analogamente, associando le coppie in $X\backslash B$ a spigoli in $\mathcal{E}_1$ abbiamo:

$$|\mathcal{E}_1| = \binom{|X\backslash B|}{2} = \binom{v-p}{2}$$

In definitiva:

$$\binom{p}{2} + \binom{v-p}{2} = |\mathcal{E}_1| + |\mathcal{E}_2| = |\mathcal{E}| \underbrace{=}_{[2.9,\text{pg.}12]} \frac{v(v-1)}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{p(p-1)+(v-p)(v-p-1)}{2} = \frac{v(v-1)}{6} \Leftrightarrow p^2 + \frac{1}{2}v^2 - vp - \frac{1}{2}v = \frac{1}{6}v\,(v-1) \quad (1)$$

La (1) ammette soluzioni in p se e solo se il suo discriminante $\Delta \geq 0$:

$$\Delta = -\frac{1}{3}, v^2 + \frac{4}{3}, v \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq v \leq 4 \quad (2)$$

$$\mathbb{H} \in \mathrm{STS}(v) \underbrace{\Rightarrow}_{[2.18,\text{pg.}14]} v = 1,3 \ \mathbb{Z}_6,\ v \geq 3 \underbrace{\Rightarrow}_{(2)} v = 3$$

assurdo contro ipotesi $v \neq 3$. $\square$

Corollary 2.46. *Sia* $\mathbb{H} \in \mathrm{STS}(v)$

$$v > 3 \Rightarrow \chi(\mathbb{H}) > 2$$

Proof: Basta applicare la [2.45,pg.34] e la [1.29,pg.8] $\square$

Proposition 2.47. *Sia* $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \in \mathrm{SQS}(8) = S(3,4,8)$*, allora*

$$B \in \mathcal{P}_4(X)\backslash\mathcal{E} \Rightarrow B \textit{ e' un blocking set di } \mathbb{H}$$

Proof: Poiche' $|X| = 8$, avremo (a meno di rinominare gli elementi di X):

$$B = \{1,2,3,4\}$$
$$X\backslash B = \{5,6,7,8\}$$

Supponiamo per assurdo che B non sia un blocking set. Distinguiamo due casi

CASE: $X\backslash B$ non e' un trasversale.

Quindi $\exists E \in \mathcal{E}$:

$$E\cap(X\backslash B) = \emptyset \Leftrightarrow E\subseteq B \underbrace{\Leftrightarrow}_{|E|=|B|=4} B = E \in \mathcal{E}$$

assurdo contro $B \in \mathcal{P}_4(X)\backslash\mathcal{E}$

CASE: B non e' un trasversale

Quindi $\exists E \in \mathcal{E}$:

$$E\cap B = \emptyset \Leftrightarrow E\subseteq X\backslash B \underbrace{\Leftrightarrow}_{|E|=|B|=4} X\backslash B = E \in \mathcal{E}$$

$$X\backslash B = \{5,6,7,8\} \in \mathcal{E} \quad (0)$$

Poiche' $\mathbb{H} \in \mathrm{SQS}(8)$, scelto $\{1,2,3\}$ esiste un sono elemento m tale che $\{1,2,3,m\} \in \mathcal{E}$. m non puo'essere 4 perche' altrimenti $B \in \mathcal{E}$. Quindi $m \in X\backslash B$.

Supponiamo che sia $m = 6$ (e' indifferente quale elemento di $X\backslash B$ scegliamo, perche' possiamo ancora rinominare gli elementi di $X\backslash B$).

Quindi:

$$\{1,2,3,6\} \in \mathcal{E} \quad (1)$$

Analogamente, scleto $\{2,3,4\}$, possiamo porre $m = 5$:

$$\{2,3,4,5\} \in \mathcal{E} \quad (2)$$

Nota: $m \neq 6$ perche' altrimenti, $\{2,3,6\}$ sarebbe contenuto in due spigoli. Assurdo contro $\mathbb{H} \in \mathrm{SQS}$.

Consideriamo $\{5,6,4,m\}$. m non puo' essere $2,3$ (altrimenti siamo in contrasto con la (2)). m non puo' essere $7,8$ (contrasto con la (0)). m non puo' neanche essere $5,6,4$. Come alternativa rimane solo 1. Quindi,

$$\{5,6,4,1\} \in \mathcal{E} \quad (3)$$

Consideriamo $\{1,4,3,m\}$. Per evitare contrasti, le uniche possibilita' sono $7,8$. Scegliamo $m = 7$ (anche qui la scelta e' indifferente: possiamo rinominare 7 con 8 e la dimostrazione rimarrebbe valida). Quindi,

$$\{1,4,3,7\} \in \mathcal{E} \quad (4)$$

Consideriamo $\{1,4,2,m\}$, si deve avere $m = 8$:

$$\{1,4,2,8\} \in \mathcal{E} \quad (5)$$

Adesso cambiamo metodo. Consideriamo $\{3,4\}$. Gli unici elementi che non abbiamo accoppiato con $3,4$ sono $6,8$, quindi si deve avere:

$$\{3,4,6,8\} \in \mathcal{E} \quad (6)$$

Analogamente considerando $\{2,4\}$ si deve avere:

$$\{2,4,6,7\} \in \mathcal{E} \quad (7)$$

Infine, considerando $\{6,7,3\}$, per non andare in contrasto si deve avere:

$$\{6,7,3,1\} \in \mathcal{E} \quad (8)$$

Ma allora $\{6,3,1\}$ e' contenuta sia nella (8) che nella (1). Assurdo contro $\mathbb{H} \in \mathrm{SQS}$.

□

Example 2.48. Consideriamo l'SQS(8) visto in [2.44,pg.33]:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{E}: & 1234, \ 5678, \ 1256, \ 1278, \ 3456, \ 3478, \ 1357, \ 1368 \\ & 2457, \ 2468, \ 1458, \ 1467, \ 2358, \ 2367 \end{array}$$

$\{1,2,3,5\}$ non e' un elemento di $\mathcal{E}$ (altrimenti $\{1,2,3\}$ sarebbe contenuto sia da $\{1,2,3,5\}$ che da $\{1,2,3,4\}$). Allora, per la prop [2.47,pg.35], $\{1,2,3,5\}$ e' un blocking set.

Proposition 2.49. *Sia* $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \in \mathrm{SQS}(v)$.

$$B \text{ blocking set per } \mathbb{H},\ \ v > 4 \Rightarrow |B| = \frac{v}{2}$$

Proof: PROOF SKETCH: Procedendo analogamente alla prop [2.45,pg.34], conteremo $|\mathcal{E}_2|$ in due modi diversi e confrontando i risultati ottenuti otterremo una nuova equazione.
Sia

$$\mathcal{E}_i = \{E \in \mathcal{E} \mid\ |B \cap E| = i\},\ \ i = 1, 2, 3$$

si ha

$$\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j = \emptyset\ \ \forall i \neq j$$
$$\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}$$

Contiamo $|\mathcal{E}_2|$.
$\langle 1 \rangle$ Sia

$$\mathcal{E}_T = \{E \in \mathcal{E} \mid T \subseteq E\}$$
$$\mathcal{E}_{3T} = \{E \in \mathcal{E}_3 \mid T \subseteq E\}$$

Dim che

$$\{\mathcal{E}_T \backslash \mathcal{E}_{3T} \mid T \in \mathcal{P}_2(B)\} \text{ e' una partizione di } \mathcal{E}_2$$

$\langle 1.1 \rangle$

$$\mathcal{E}_2 = \bigcup_{T \in \mathcal{P}_2(B)} (\mathcal{E}_T \backslash \mathcal{E}_{3T})$$

$\langle 1.1.1 \rangle$ Dim $\supseteq$
Sia $T \in \mathcal{P}_2(B)$, e sia $E \in \mathcal{E}_T \backslash \mathcal{E}_{3T}$, si ha

$$T \subseteq E \Rightarrow |E \cap B| \geq |T| = 2 \Rightarrow E \notin \mathcal{E}_1$$
$$E \notin \mathcal{E}_3$$
$$\Rightarrow E \in \mathcal{E}_2$$

$\langle 1.1.2 \rangle$ Dim $\subseteq$

$$E \in \mathcal{E}_2 \Rightarrow |E \cap B| = 2$$

quindi basta porre $T = E \cap B$.
$\langle 1.2 \rangle$ $(\mathcal{E}_T \backslash \mathcal{E}_{3T}) \cap (\mathcal{E}_S \backslash \mathcal{E}_{3S}) = \emptyset\ \ \forall T \neq S,\ T, S \in \mathcal{P}_2(B)$

$$E \in (\mathcal{E}_T \backslash \mathcal{E}_{3T}) \cap (\mathcal{E}_S \backslash \mathcal{E}_{3S}) \Rightarrow E \in \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_S \Rightarrow T \cup S \subseteq E\ \ (0)$$
$$T \cap S = \emptyset \underbrace{\Rightarrow}_{T,S \in \mathcal{P}_2(B)} |E \cap B| \geq |T| + |S| = 4 \text{ assurdo}\ \ \ (1)$$
$$(1),\ T \neq S \Rightarrow T \cup S = \{x, y, z\} \text{ con } x, y, z \text{ distinti, } y \in T \cap S\ \ \ (2)$$
$$(0), (2) \Rightarrow |E \cap B| = 3 \Rightarrow E \in \mathcal{E}_3$$

assurdo contro $E \notin \mathcal{E}_{3T} \cup \mathcal{E}_{3S}$.
Notiamo che

$$|\mathcal{E}_T| = d(T) \underbrace{=}_{[2.15,\text{pg.}13]} \frac{v-2}{2}\ \ (3)$$

$$T = \{x, y\},\ x \neq y$$

$$\mathcal{E}_{3T} = \{E \in \mathcal{E}_3 \mid\ \{x, y\} \subseteq E\} = \{E \in \mathcal{E} \mid E \cap B = \{x, y, z\},\ z \in B,\ z \notin \{x, y\}\} \Rightarrow$$
$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{corrispondenza biunivoca tra } \mathcal{P}_3(B),\ \mathcal{E}_3} |\mathcal{E}_{3T}| = |\ \{\{x, y, z\}\ \mid z \in B \backslash \{x, y\}\}\ | = |B| - 2\ \ (4)$$

Quindi,

$$|\mathcal{E}_2| \underbrace{=}_{\text{passo 1}} \sum_{T\in\mathcal{P}_2(B)} |\mathcal{E}_T\backslash\mathcal{E}_{3T}| = \sum_{T\in\mathcal{P}_2(B)} |\mathcal{E}_T\backslash\mathcal{E}_{3T}| \underbrace{=}_{(3),(4)} \sum_{T\in\mathcal{P}_2(B)} \left(\frac{v-2}{2} - (|B|-2)\right) = |\mathcal{P}_2(B)| \left(\frac{v-2}{2} - (|B|-2)\right)$$

Analogamente, possiamo considerare la seguente partizione di $\mathcal{E}_2$:

$$\{\mathcal{E}_T\backslash\mathcal{E}_{1T} \mid T \in \mathcal{P}_2(X\backslash B)\}$$

e otteniamo:

$$|\mathcal{E}_2| = |\mathcal{P}_2(X\backslash B)| \left(\frac{v-2}{2} - (|X\backslash B|-2)\right) \quad (5)$$

Quindi confrontando le due espressioni ottenute per $|\mathcal{E}_2|$ abbiamo:

$$0 = |\mathcal{P}_2(B)| \left(\frac{v-2}{2} - (|B|-2)\right) - |\mathcal{P}_2(X\backslash B)| \left(\frac{v-2}{2} - (|X\backslash B|-2)\right) =$$

$$= \binom{p}{2}\left(\frac{v-2}{2} - (p-2)\right) - \binom{v-p}{2}\left(\frac{v-2}{2} - (v-p-2)\right) =$$

$$= p(p-1)(v-2-2p+4) - (v-p)(v-p-1)(v-2-2v+2p+4) =$$

$$= p(p-1)(v-2p+2) - (v-p)(v-p-1)(-v+2p+2) = -4p^3 + 6p^2v + -4pv^2 + 6pv - 4p + v^3 - 3v^2 + 2v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ -4p^3 + 6vp^2 + \left(-4v^2 + 6v - 4\right)p + v^3 - 3v^2 + 2v = 0 \quad (6)$$

La (6) ammette $v/2$ come radice nell'incognita p, quindi dividendo per $(p - v/2)$ abbiamo:

$$2\left(p - \frac{v}{2}\right)\left(-2p^2 + 2vp - v^2 + 3v - 2\right) = 0$$

Vediamo se $-2p^2 + 2vp - v^2 + 3v - 2$ ammette soluzioni:

$$\frac{\Delta}{4} = v^2 + 2(-v^2 + 3v - 2) = -v^2 + 6v - 4$$

$$\frac{\Delta}{4} = -v^2 + 6v - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{5} \leq v \leq 3 + \sqrt{5} \underbrace{\Leftrightarrow}_{v=|X|\in\mathbb{N}} 0 \leq v \leq \lfloor 3 + \sqrt{5} \rfloor = 5 \ (*)$$

$$\mathbb{H} \in \mathrm{SQS}(v) \underbrace{\Rightarrow}_{[2.18,\text{pg}.14]} v = 2, 4 \ \mathbb{Z}_6, \quad v \geq 4 \ (**)$$

$(*), (**) \Rightarrow v = 4$

Ma per ipotesi $v > 4$, quindi l'unica radice e' data da $\left(p - \frac{v}{2}\right)$ □

Proposition 2.50. *Sia* $\mathbb{H} = (X, \mathcal{E}) \in S(2, 4, v)$.

$$B \textit{ blocking set per } \mathbb{H}, \ |B| = p \Rightarrow \frac{v - \sqrt{v}}{2} \leq p \leq \frac{v + \sqrt{v}}{2}, \quad p \in \mathbb{N}^*$$

Proof: Analogamente a quando visto in [2.45,pg.34], [2.49,pg.37], si ha

$$\mathcal{E}_i = \{E \in \mathcal{E} \mid \ |B\cap E| = i\}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j$$

$$\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}$$

Poniamo

$$x = |\mathcal{E}_1|$$

$$y = |\mathcal{E}_2|$$

$$z = |\mathcal{E}_3|$$

Cerchiamo adesso di ricavare delle espressioni per x, y, z.

$$\{\mathcal{E}_i\}_{i=1,2,3} \text{ partizione di } \mathcal{E} \Rightarrow x+y+z = |\mathcal{E}| \underbrace{=}_{[2.19, \text{pg.} 14]} \frac{v!(4-2)!}{4!(v-2)!} = \frac{v(v-1)}{12} \quad (1)$$

Abbiamo:

$T \in \mathcal{P}_2(B) \underbrace{\Rightarrow}_{\mathbb{H} \in S(2,4,v)} \exists! E \in \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3 : \ T \subseteq E$

$|T| = 2, \ T \subseteq B \Rightarrow |E \cap B| \geq 2 \Rightarrow E \in \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3$

$\forall T \in \mathcal{P}_2(B) \ \exists! E \in \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3 : \ T \in \mathcal{P}_2(E \cap B)$

Viceversa , $E \in \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3 \Rightarrow \exists T \in \mathcal{P}_2(E \cap B) \subseteq \mathcal{P}_2(B)$

esiste quindi una biezione tra $\mathcal{P}_2(B)$, $\bigcup_{E \in \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3} \mathcal{P}_2(E \cap B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \binom{|B|}{2} = \Big| \bigcup_{E \in \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3} \mathcal{P}_2(E \cap B) \Big| \underbrace{=}_{\mathbb{H} \in S(2,4,v) \Rightarrow \mathcal{P}_2(E) \cap \mathcal{P}_2(E') = \emptyset \ \ \forall E \neq E', \ \ E, E' \in \mathcal{E}} \sum_{E \in \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3} \binom{|E \cap B|}{2} =$$

$$\underbrace{=}_{\mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_3 = \emptyset} \sum_{E \in \mathcal{E}_2} \binom{|E \cap B|}{2} + \sum_{E \in \mathcal{E}_3} \binom{|E \cap B|}{2} = \sum_{E \in \mathcal{E}_2} \binom{2}{2} + \sum_{E \in \mathcal{E}_3} \binom{3}{2} = |\mathcal{E}_2| + |\mathcal{E}_3| 3 = 3z + y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \binom{|B|}{2} = 3z + y \Leftrightarrow p(p-1) = 6z + 2y \quad (1)$$

Analogamente, considerando la biezione tra

$$\mathcal{P}_2(X \backslash B) \text{ e } \bigcup_{E \in \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_1} \mathcal{P}_2(E \cap (X \backslash B))$$

abbiamo:

$$\binom{|X \backslash B|}{2} = 3x + y \Leftrightarrow (v-p)(v-p-1) = 6x + 2y \quad (3)$$

In definitiva, dalla (1), (2), (3) abbiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = \frac{v(v-1)}{12} \\ 6z + 2y = p(p-1) \\ 6x + 2y = (v-p)(v-p-1) \end{cases}$$

che risolto da':

$$z = \frac{1}{12}v^2 - \frac{1}{3}vp - \frac{1}{12}v - \frac{1}{6}p + \frac{1}{2}p^2$$
$$y = -\frac{1}{4}v^2 + vp + \frac{1}{4}v - p^2 \quad (4)$$
$$x = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{4}v^2 - \frac{2}{3}vp - \frac{1}{4}v + \frac{1}{6}p$$

Poiche' $y = |\mathcal{E}_2| \geq 0$, si deve avere:

$$y \geq 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{(4)} \frac{v - \sqrt{v}}{2} \leq p \leq \frac{v + \sqrt{v}}{2}$$

□

Theorem 2.51. *Sia* $\mathbb{H} \in S(2,4,v)$,

$$v = 1 \ \mathbb{Z}_{12} \Rightarrow p = \frac{v \pm 1}{2}$$
$$v = 4 \ \mathbb{Z}_{12} \Rightarrow p = \frac{v}{2} \vee p \ \textit{e' dispari}$$

Proof: DA VERIFICARE! □

3 Disposizioni vincolate

Definition 3.1. Sia dato un insieme X di n elementi e, fissato $k \leq n$, sia

$$D(X,k,E) = \left\{ \overline{x} \in X^k \mid \{i,j\} \in E \Rightarrow x_i \neq x_j \right\}$$

dove E e' un qualsiasi sottoinsieme $E \subseteq \mathcal{P}_2(\{1,2,\ldots,k\})$. In altre parole, E specifica quali posti dei vettori di D devono essere distinti.
Chiameremo $D(X,k,E)$ l'insieme di tutte le k-disposizioni di X vincolate a E.

Per convenienza, poniamo $\underline{k} = \{1,2,\ldots,k\}$

Example 3.2. Scegliendo $X = \{a,b,c\}$, $k = 2$, $E = \{\{1,2\}\}$, abbiamo che

$$(a,b,c),\ (a,c,b),\ (b,a,c),\ (b,c,a),\ (c,b,a) \in D$$

sono elementi di D, invece,

$$(a,a,c) \notin D$$

Proposition 3.3. *Sia dato X con $|X| = n$,*

1. $D(X,k,\mathcal{P}_2(\underline{k}))$ *e' l'insieme di tutte le k-disposizioni di X*

1.1 $\left| D(X,k,\mathcal{P}_2(\underline{k})) \right| = \binom{n}{k} k!$

2. $D(X,k,\emptyset)$ *e' l'insieme di tutte le k-disposizioni semplici du X*

2.1 $\left| D(X,k,\emptyset) \right| = n^k$

Proposition 3.4. *Indichiamo con $\mathcal{C}_X(G)$ l'insieme di tutte le colorazioni del grafo $G = (V,E)$ utillando i colori X, ovvero*

$$f \in \mathcal{C}_X(G) \Leftrightarrow f : V \to X,\ f \text{ colorazione di } G$$

Sia $E \in \mathcal{P}_2(\underline{k})$, con $k \leq n = |X|$, allora si ha,

$$|\mathcal{C}_X((\underline{k},E))| = |D(X,k,E)|$$

Ovvero, le colorazioni del grafo $(\underline{k},E)$, tramire i colori X, sono in biezione con le k-disposizioni vincolate a E.

Quindi, per contare $|D(X,k,E)|$, basta saper calcolare $|\mathcal{C}_X(G)|$.

Proof: Graficamente e' immediato: basta osservare che il grafo $(\underline{k},E)$ stabilisce i vincoli delle disposizioni, ovvero, preso $\overline{x} \in D$, se i,j sono vertici adiacenti in $(\underline{k},E)$, allora si deve avere $x_i \neq x_j$. Ma questa condizione e' proprio la definizione di colorazione di $(\underline{k},E)$, secondo i colori X. Quindi, $\overline{x}$ e' la colorazione:

$$\begin{aligned} \overline{x} : \underline{k} &\longrightarrow X \\ i &\mapsto x_i \end{aligned}$$

Viceversa, se abbiamo la colorazione $f : \underline{k} \longrightarrow X$, allora possiamo porre

$$\overline{x} = (f(1), f(2), \ldots, f(k)) \in D$$

□

Vediamo adesso come e' possibile calcolare $|\mathcal{C}_X(G)|$.

Proposition 3.5. *Sia $G = (V, E)$ un grafo completo, allora*

$$|\mathcal{C}_X(G)| = \binom{|X|}{|V|}|V|!$$

Ovvero, il numero di colorazioni di un grafo completo con v vertici, tramite t colori, e'

$$\binom{t}{v}v!$$

Proof: Per la prop [3.4,pg.40] si ha

$$|\mathcal{C}_X((V, E))| = |D(X, |V|, E)|$$

Inoltre,

$$G \text{ completo} \Rightarrow E = \mathcal{P}_2(V)$$

$$|D(X, |V|, E)| = |D(X, |V|, \mathcal{P}_2(V))| \underbrace{=}_{[3.3,\text{pg.}40]} \binom{|X|}{|V|}|V|!$$

Poiche' il grafo e' completo, tutti i vertici sono adiacenti tra loro, quindi per qualsiasi $f \in \mathcal{C}_X(G)$ si deve avere:

$$f(x) \neq f(y) \quad \forall x, y \in V : \; x \neq y$$

$\square$

Definition 3.6. Sia dato un grafo $G = (V, E)$ e siano $x, y \in V$. Definiamo il *grafo di connessione*:

$$G_{xy} = (V, E \cup \{\{x, y\}\})$$

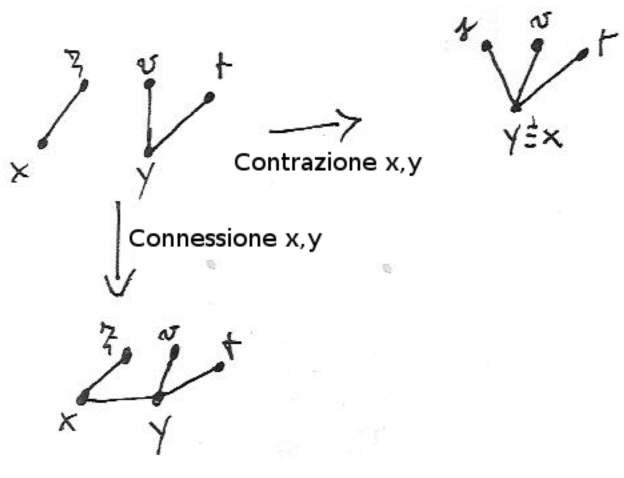
G_{xy} e' il grafo G in cui i vertici x, y sono adiacenti, in G potevano non esserlo.

Definiamo il *grafo di contrazione*:

$G_{x=y} = G/_\sim$

dove $\sim$ e' la seguente relazione d'equivalenza: $\sim = \{(x, y), \; (y, x)\} \cup \{(z, z) \mid z \in V \setminus \{x, y\}\}$

$G_{x=y}$ e' il grafo G in cui i vertici x, y sono stati identificati come un unico vertice.



Proposition 3.7. *Sia $G = (V, E)$ un grafo e siano $x, y \in G$ due vertici non adiacenti, allora*

$$|\mathcal{C}_X(G)| = |\mathcal{C}_X(G_{xy})| + |\mathcal{C}_X(G_{x=y})|$$

Proof: Sia $f \in \mathcal{C}_X(G)$, poiche' x, y non sono adiacenti, si possono avere due casi
CASE: $f(x) = f(y)$

In questo caso, $f \in \mathcal{C}_X(G_{x=y})$

CASE: $f(x) \neq f(y)$

In questo caso, possiamo connettere x, y e f sara' ancora una colorazione valida: $f \in \mathcal{C}_X(G_{xy})$
Quindi,

$$\mathcal{C}_X(G) = \mathcal{C}_X(G_{xy}) \cup \mathcal{C}_X(G_{x=y})$$

(nota[4]) Inoltre,

$$f \in \mathcal{C}_X(G_{xy}) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\{x,y\} \in E} f(x) \neq f(y) \Leftrightarrow f \notin \mathcal{C}_X(G_{x=y})$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}_X(G_{xy}) \cap \mathcal{C}_X(G_{x=y}) = \emptyset$$

In conclusione:

$$|\mathcal{C}_X(G)| = |\mathcal{C}_X(G_{xy})| + |\mathcal{C}_X(G_{x=y})|$$

□

Proposition 3.8. *Consideriamo la seguente procedura:*

1. *Sia $G = (V, E)$ un grafo*
2. *Se G e' un grafo completo, allora fermati*
3. *Siano $x, y \in V$ vertici non adiacenti*
4. *Poni $G := G_{xy}$ oppure $G := G_{x=y}$*
5. *Continua dal punto* 1.

La procedura termina in un numero finito di passi.

Proof: Supponiamo che inizialmente G non sia completo, ovvero, i seguenti spigoli

$$\begin{aligned} &\{x_1, y_1\} \notin E \\ &\{x_2, y_2\} \notin E \\ &\vdots \\ &\{x_h, y_h\} \notin E \end{aligned}$$

non stanno in E.
Nel passo 4. viene scelta una coppia $\{x_m, y_m\}$ e viene aggiunta nel nuovo E ($G := G_{x_m, y_m}$), oppure viene eliminata da $\mathcal{P}_2(V)$ perche' x_m, y_m vengono identificati in $G_{x_m = y_m}$. In ogni caso, $\mathcal{P}_2(V) \backslash E$ diventa strettamente piu' piccolo, quindi prima o poi, dovra' essere

$$\mathcal{P}_2(V) \backslash E = \emptyset$$

ovvero

$$E = \mathcal{P}_2(V)$$

e quindi G sara' un grafo completo. □

Remark 3.1. La procedura precedente puo' essere utilizzata per calcolare tutte le possibili colorazioni, e quindi anche il numero cromatico. Infatti, la scelta $G := G_{x=y}$ corrisponde a dare lo stesso colore sia a x che y, la scelta $G := G_{xy}$ corrisponde a dare colori distinti a x e y. Quando si arriva a un grafo completo, si ha una fissata colorazione. Da questa si devono considerare anche le colorazioni isomorfe.
Compiendo ad ogni iterazione tutte le possibili scelte, ($G_{x=y}$ oppure G_{xy}), si ottengono tutti i possibili grafi completi che corrispondono a tutte le colorazioni non isomorfe tra loro.

[4] stiamo considerando gli elementi di $\mathcal{C}_X(G_{x=y})$ come delle colorazioni di G che assegnano lo stesso colore a x e y.

Proposition 3.9. *Utilizzando le proposizioni [3.7,pg.41], [3.8,pg.42], [3.5,pg.41] e' possibile calcolare $|\mathcal{C}_X(G)|$, per qualunque grafo G:*

1. *Si utilizza ricursivamente la formula [3.7,pg.41]. La procedura di ricorsione dovra' arrestarsi per la [3.8,pg.42].*
2. *La formula cosi' ottenuta sara' del tipo:*

$$|\mathcal{C}_X(G)| = |\mathcal{C}_X(G_1)| + |\mathcal{C}_X(G_2)| + \cdots + |\mathcal{C}_X(G_m)|$$

   dove G_i sono tutti grafi completi.

3. *Per la prop [3.5,pg.41] sara' quindi possibile calcolare esplicitamente ogni $|\mathcal{C}_X(G_i)|$*

Proposition 3.10. *Sia $G = (V, E)$ un albero, ovvero un grafo connesso privo di cicli, con $|V| = v$, $|X| = t$, allora*

$$|\mathcal{C}_X(G)| = t(t-1)^{v-1}$$

Vale anche il vicersa: se $|\mathcal{C}_X(G)| = t(t-1)^{v-1}$ allora G e' un albero.

Proof: Per induzione su v.
CASE: $v = 1$
Il grafo e' formato da un solo vertice, a cui possiamo assegnare t colori differenti.
CASE: $v > 1$, $v \Rightarrow v + 1$
Poiche' G e' un albero, esiste almeno un vertice $x \in V$ di grado 1, ovvero adiacente ad un solo altro vertice y. Allora, il grafo $G_{x=y}$ e' ancora un albero (e' come se avessimo rimosso il vertice x). Per Hp induttiva si ha:

$$|\mathcal{C}_X(G_{x=y})| = t(t-1)^{v-1}$$

Per avere un colorazione di G, basta prendere una colorazione $f \in \mathcal{C}_X(G_{x=y})$ e associare un qualsiasi colore a x, cioe' fissare $f(x)$, con l'unica condizione che $f(x) \neq f(y)$ (perche' x, y sono adiacenti in G).
Viceversa, una colorazione di G si puo' pensare come una colorazione di $G_{x=y}$ estesa, come prima, a x.
Tutti i colori disponibili per x, sotto la condizione $f(x) \neq f(y)$, sono in numero $t - 1$, Quindi

$$|\mathcal{C}_X(G)| = (t-1)|\mathcal{C}_X(G_{x=y})| = t(t-1)^{(v+1)-1}$$

$\langle 1 \rangle$ Dim. Viceversa
DA VERIFICARE!

$\square$

Proposition 3.11. *Sia $G = (V, E)$ un grafo, con $|V| = v$, e sia $|X| = t$, allora*

$$|\mathcal{C}_X(G)|$$

si puo' esprimere come un polinomio $P(t)$ nella variabile t, e valgono le seguenti proprieta':

1. $P(t) = t^v - mt^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \cdots + a_\chi t^\chi$
2. $P(t) = 0 \quad \forall t = 0, 1, \ldots, \chi - 1$
3. $a_i a_{i+1} < 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, \chi - 1$

dove $m = |E|$, e χ e' il numero cromatico di G

Proof:

⟨1⟩ $|\mathcal{C}_X(G)|$ e' un polinomio in t
DA VERIFICARE!
⟨2⟩ Dim. 1.
DA VERIFICARE!
⟨3⟩ Dim 2.
Se $i < \chi$, allora per definizione di χ, non esistono colorazioni di G con i colori, quindi

$$P(i) = |\mathcal{C}_X(G)| = 0$$

⟨4⟩ Dim. 3.
DA VERIFICARE!

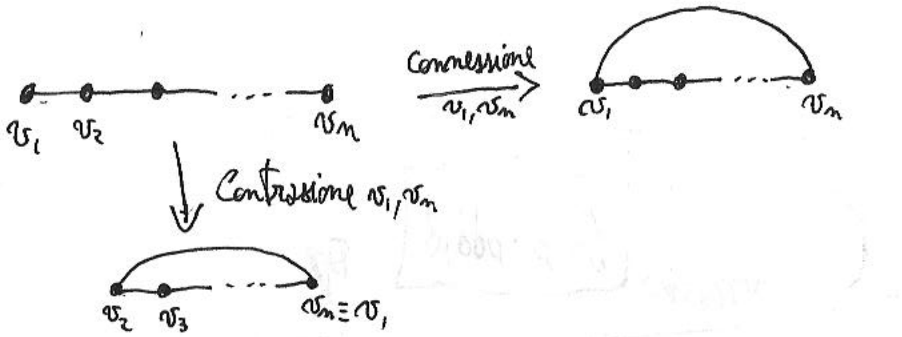
□

Proposition 3.12. *Sia $C_n = (V, E)$ un ciclo, ovvero un grafo connesso regolare di grado 2, con $|V| = n > 1$, e sia $|X| = t$, allora*

$$|\mathcal{C}_X(C_n)| = (t-1)^n + (-1)^n(t-1)$$

Proof: Sia $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e consideriamo l'albero A ottenuto da C_n rimuovendo lo spigolo $\{v_1, v_n\}$, ovvero $A = (V, E \setminus \{v_1, v_n\})$. Da A_n, adoperando la contrazione e connessione abbiamo (vedi anche figura):

$$A_{v_1 v_n} = C_n$$
$$A_{v_1 = v_n} = C_{n-1}$$



dove C_{n-1} e' un ciclo di $n-1$ nodi. Quindi, per la prop [3.7,pg.41], si ha

$$|\mathcal{C}_X(A)| = |\mathcal{C}_X(C_n)| + |\mathcal{C}_X(C_{n-1})| \quad (1)$$

Inoltre, per la [3.10,pg.43], abbiamo

$$|\mathcal{C}_X(A)| = t(t-1)^{n-1} \quad (2)$$

Posto $a_n = |\mathcal{C}_X(C_n)|$, dalla $(1), (2)$, si ha

$a_n = t(t-1)^{n-1} - a_{n-1}$ (3)

$$a_2 = |\mathcal{C}_X(C_2)| \underbrace{=}_{C_2 \text{ e' un albero con due nodi}} t(t-1)$$

$$a_n = t(t-1)^{n-1} - \left(t(t-1)^{n-2} - \left(t(t-1)^{n-3} - \left(\cdots - \left(t(t-1)^2 - \underbrace{a_2}_{=t(t-1)}\right)\right)\right)\right) = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}t(t-1)^{n-i}$$

Per induzione dimostriamo che $a_n = (t-1)^n + (-1)^n(t-1)$:
$n = 2:$

$$a_2 \underbrace{=}_{C_2 \text{ e' un albero}} = t(t-1)$$

$$(t-1)^2 + (-1)^2(t-1) = (t-1)^2 + (t-1) = (t-1)((t-1)+1) = t(t-1)$$

$n \Rightarrow n+1:$

$$a_{n+1} = t(t-1)^n - a_n \underbrace{=}_{\text{Hp induttiva}} t(t-1)^n - ((t-1)^n + (-1)^n(t-1)) = (t-1)^n(t-1) - (-1)^n(t-1) =$$

$$= (t-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(t-1)$$

$\square$

4 *

Index